كلية العلوم و التقنيات فاس
ⵜⴰⵖⵥⵓⵔⵜ ⵏ ⵜⵎⴰⵙⵙⴰⵏⵉⵏ ⴷ ⵜⵙⵏⵉⵖⵉⵏ
Faculté des Sciences et Techniques de Fès

جامعة سيدي محمد بن عبد الله
ⵜⴰⵙⴷⴰⵡⵉⵜ ⵙⵉⴷⵉ ⵎⵓⵃⵎⵎⴰⴷ ⵙⵏ ⵄⴱⴷⵍⵍⴰⵀ
Université Sidi Mohamed Ben Abdellah

Licence Mathématiques et Applications

(MA)

MEMOIRE DE FIN D'ETUDES

Pour l'obtention du Diplôme de Licence Sciences et Techniques (LST)

Introduction aux groupes topologiques

- Réalisé par : Youssef SGHIOURI IDRISSI
- Encadré par : Pr. Lahcen OUKHTITE

Soutenu le 05 juin 2018

Devant le jury composé de :

Pr. Mohamed BEKKALI	Faculté des Sciences et Techniques Fès
Pr. Rachid EL AYADI	Faculté des Sciences et Techniques Fès
Pr. Seddik GMIRA	Faculté des Sciences et Techniques Fès
Pr. Lahcen OUKHTITE	Faculté des Sciences et Techniques Fès

Année Universitaire 2017-2018

FACULTE DES SCIENCES ET TECHNIQUES FES –SAISS

B.P. 2202 – Route d'Imouzzer – FES

INTRODUCTION AU GROUPES TOPOLOGIQUES

Remerciement

Je tiens à remercier mon encadrant le professeur Lahcen OUKHTITE, qui a proposé ce sujet, et qui a bien voulu encadrer ce modeste travail. Je lui exprime aussi ma gratitude pour son devouement et le temps qu'il m'a consacré.

Je remercie également les membres de jury les Professeurs Mohamed BEKKALI, Rachid EL AYADI et Seddik GMIRA, d'avoir accepté d'examiner notre modeste travail, sans oublier l' aide énorme des personnes travaillant à la bibliothèque de la FST.

Mes remercierments vont également à tous mes professeurs du département de mathématiques.

Enfin, je remercie ma famille, et surtout mes parents, qui m'ont soutenu durant mes études.

Table des matières

Introduction

Le concept de groupe topologique est une combinaison de deux concepts mathématiques fondamentals, groupe et espace topologique. Le but de ce mémoire est de présenter les propriétés générales des groupes topologiques.
Ce travail sera divisé en trois chapitres :
Dans le premier chapitre on introduit les résultats générales sur les groupes, dans le deuxième on parle des notions générales de la topologie, telles que les espaces topologiques, les axiomes de séparation, les applications continues, la compacité et la connexité.
Dans le troisième chapitre, on commence par des définitions et propriétés générales concernants la notion de groupe topologique, on introduit quelques propriétés topologiques telles que la séparation, voisinage d'un point dans un groupe topologique, puis on présente les notions des sous-groupes topologiques et groupes topologiques quotients, théorèmes d'isomorpshismes et on fini par étudier la connexité et la compacité dans les groupes topologiques.

Chapitre 1

Préliminaires

1.1 Rappels sur les groupes

Définition 1.1. *Le produit cartésien de deux ensembles E et F est l'ensemble* $E \times F = \{(x, y)\ /x \in E \text{ et } y \in F\}$.

Exemples :

1. Si $E = \{a, b\},\ F = \{c, d\}$ alors $E \times F = \{(a, c), (a, d), (b, c), (b, d)\}$.

2. Si $E = F = \mathbb{R}$ alors $E \times F = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y)\ /x, y \in \mathbb{R}\} := \mathbb{R}^2$.

Définition 1.2. *Une loi de composition interne sur un ensemble E est une application de $E \times E$ dans E.*

Exemple :

L'addition des nombres réels est une loi de composition interne sur $\mathbb{R}$. En effet,

$$\begin{aligned} \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \qquad \text{est une application.} \\ (x, y) &\longmapsto x + y \end{aligned}$$

Définition 1.3. *Soit E un ensemble muni d'une loi de composition interne $*$.*

1) $*$ *est dite associative si* $\forall x, y, z \in E$ *on a* $(x * y) * z = x * (y * z)$.

2) *Un élément $e \in E$ est un élément neutre pour $*$ dans E si $\forall x \in E$ on a* $x * e = e * x = x$.

3) *Un élément $x \in E$ est symétrisable dans E pour $*$ s'il existe un élément $x' \in E$*

tel que $x * x' = x' * x = e$. On dit que x' est un symétrique de x dans E pour $*$.

4) *$*$ est dite commutative si $\forall x, y \in E$ on a $\quad x * y = y * x$.*

Exemples :

1. Si $E = \mathbb{R}$ et $* = +$, alors $+$ est associative, commutative, 0 est un élément neutre, le symétrique de x est $-x$.

2. Si $E = \mathbb{Z}$ et $* = \times$, alors $\times$ est commutative, associative, 1 est un élément neutre. 3 n'est pas symétrisable.

Définition 1.4. *Soit E un ensemble muni d'une loi de composition interne $*$. On dit que $(E, *)$ est un groupe si $*$ vérifie les trois propriétés suivantes :*

1) *$*$ est associative.*

2) *$*$ admet un élément neutre.*

3) *Tout élément de E admet un symétrique dans E pour $*$.*

Si de plus $*$ est commutative alors $(E, *)$ est dit un groupe commutatif ou abélien.

Exemples :

1. $(\mathbb{Z}, +)$ est un groupe abélien.

2. $(\mathbb{Z}, \times)$ n'est pas un groupe (2 n'a pas de symétrique dans $\mathbb{Z}$ pour $\times$).

3. L'ensemble $(\mathbb{GL}_n, .)$ avec $n \geq 2$ des matrices inversibles d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{R}$ muni du produit des matrices est un groupe, appelé **groupe linéraire**.

4. L'ensemble $S(E)$ des bijections d'un ensemble E muni de la composition des applications est un groupe.

Proposition 1.1. *Soit $(G, *)$ un groupe. Alors*

1) *L'élément neutre de G est unique.*

2) *Le symétrique d'un élément est unique.*

3) *Tout élément $a \in G$ est régulier (ou simplifiable) c'est-à-dire $\forall (x, y) \in G^2$ on a $(x * a = y * a \Longrightarrow x = y)$ et $(a * x = a * y \Longrightarrow x = y)$.*

4) *Pour tout $(a, b) \in G^2$, les équations $(x \in G,\ a * x = b)$ et $(x \in G,\ x * a = b)$ admettent chacune une solution unique.*

Preuve

1) Soient e et e' deux éléments neutres de G. On a $e * e' = e$ car e est neutre. Or e' est neutre alors $e * e' = e'$. Par suite $e = e'$.

2) Soient x_1 et x_2 deux symétriques de x. Alors $x_1 * x = e$ et $x * x_2 = e$. Par suite $(x_1 * x) * x_2 = e * x_2 = x_2 = x_1 * (x * x_2) = x_1 * e = x_1$. Par conséquent $x_1 = x_2$.

3) Si $x*a = y*a$ et si on note par a^{-1} le symétrique de a alors $(x*a)*a^{-1} = (y*a)*a^{-1}$. Or $(x * a) * a^{-1} = x * (a * a^{-1}) = x * e = x$ et $(y * a) * a^{-1} = y * (a * a^{-1}) = y * e = y$, on en déduit que $x = y$.

4) est simple et l'unicité provienne de 3). ∎

Notations et vocabulaires

Soit $(G, *)$ un groupe.

✓ Si $*$ est notée additivement, désignée par $+$, alors le neutre est noté 0 et le symétrique de x est noté $-x$ appelé aussi opposé de x.

✓ Si $*$ est notée multiplicativement, désignée par $\times$ ou . ou encore par un blan, alors le neutre est noté 1 et le symétrique de x est noté x^{-1} appelé inverse de x.

Définition 1.5. *On appelle sous-groupe d'un groupe $(G, *)$ toute partie non vide H de G stable pour $*$ et qui est un groupe pour la loi induite sur H par $*$.*

Exemples :

1. $\{e\}$ et G sont des sous-groupes de G, appelés sous-groupes triviaux.

2. L'ensemble des matrices carrées (d'ordre $n \geq 2$) de $det = 1$ est un sous-groupe de $(\mathbb{GL}_n, .)$.

Théorème 1.1. *Soit H une partie* **non vide** *d'un groupe G. Alors H est un sous-groupe de G si et seulement si:*

1) $\forall (x, y) \in H^2,\ \ x * y \in H$.

2) $\forall x \in H,\ \ x^{-1} \in H$.

Théorème 1.2. *Soit H une partie* **non vide** *d'un groupe $(G, *)$. Alors H est un sous-groupe de G si et seulement si $\forall (x, y) \in H^2,\ \ x * y^{-1} \in H$.*

Preuve

$\Longrightarrow$ Soient x et y deux éléments de H. D'après 2) du Théorème 1.1 on a $y^{-1} \in H$. En appliquant 1) du Théorème 1.1 pour $(x, y^{-1}) \in H^2$, il en résulte que $x * y^{-1} \in H$.

$\Longleftarrow$ Montrons que les conditions 1) et 2) du Théorème 1.1 sont satisfaites.

Soit $x \in H$, on a $x^{-1} = e * x^{-1} \in H$. D'où $x^{-1} \in H, \ \ \forall x \in H$.

Soient $x, y \in H$ puisque $y^{-1} \in H$ alors $x * (y^{-1})^{-1} \in H$. Or $(y^{-1})^{-1} = y$, il en résulte que $x * y \in H, \ \ \forall (x, y) \in H^2$; ce qui prouve que H est un sous-groupe de G. ∎

Exemple :

$(\mathbb{Z}, +)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$. En effet, $\forall (m, n) \in \mathbb{Z}^2 : \ m + (-n) = m - n \in \mathbb{Z}$.

1.2 Homomorphisme de groupes

Définition 1.6. *Une application f d'un groupe $(G, *)$ dans un groupe (G', Δ) est un homomorphisme de groupes si :* $\forall (x, y) \in G^2, \ \ f(x * y) = f(x) \Delta f(y)$.

Si de plus f est bijective alors f est dit un isomorphisme de groupes.

Exemples :

1. L'application

$$\begin{aligned} f \ : \ (\mathbb{Z}, +) \ &\longrightarrow (M_2(\mathbb{Z}), +) \\ m \ &\longmapsto \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} \end{aligned}$$

est un homomorphisme de groupes. En effet,

$$f(m+n) = \begin{pmatrix} m+n & 0 \\ 0 & m+n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & n \end{pmatrix} = f(m) + f(n).$$

2. L'application

$$\begin{aligned} f \ : \ (\mathbb{R}^*_+, .) \ &\longrightarrow (\mathbb{R}, +) \\ x \ &\longmapsto \log(x) \end{aligned}$$

est un homomorphisme de groupes bijectif, c'est-à-dire un isomorphisme de groupes.

Cas particuliers :

✓ Un homomorphisme de G dans G est appelé un endomorphisme de G.

✓ Un isomorphisme de G dans G est appelé un automorphisme de G.

Théorème 1.3. *Soient $(G, *)$ et $(G', .)$ deux groupes d'éléments neutres respectifs e et e'. Si f est un homomorphisme de G dans G' alors :*
1) $f(e) = e'$ *et* $\forall x \in G \;\; f(x^{-1}) = [f(x)]^{-1}$.
2) $f(G)$ *est un sous-groupe de G' appelé image de G par f et noté $Im\, f$.*
3) $f^{-1}(\{e'\})$ *est un sous-groupe de G appelé noyau de f et noté* $\ker f$.

Preuve

1) Soit $x \in G$, $\;f(x * e) = f(x) = f(x).f(e) = f(x).e'$. Donc $f(x).f(e) = f(x).e'$, or $f(x)$ est simplifiable alors $f(e) = e'$. D'autre part, $e' = f(e) = f(x * x^{-1}) = f(x).f(x^{-1}) = f(x^{-1} * x) = f(x^{-1}).f(x)$ d'où $[f(x)]^{-1} = f(x^{-1})$.
2) Soient x' et y' deux éléments de $f(G)$, montrons que $x'.y'^{-1} \in f(G)$. Il existe $(x, y) \in G^2$ tel que $x' = f(x)$ et $y' = f(y)$. Par suite

$$x'.y'^{-1} = f(x).[f(y)]^{-1} = f(x).f(y^{-1}) = f(x * y^{-1}).$$

Puisque $x * y^{-1} \in G$, alors $x'.y'^{-1} \in f(G)$. D'après le Théorème 3, il en résulte que $f(G)$ est un sous-groupe de G'.
3) Soient $x, y \in f^{-1}(\{e'\})$; montrons que $x * y^{-1} \in f^{-1}(e')$. On a
$f(x * y^{-1}) = f(x).f(y^{-1}) = f(x).[f(y)]^{-1} = e'.e'^{-1} = e'$ ce qui donne $x * y^{-1} \in f^{-1}(\{e'\})$. On déduit du Théorème 1.2 que $f^{-1}(\{e'\})$ est un sous-groupe de G. ∎

Théorème 1.4. *Le composé de deux homomorphismes (resp. isomorphismes) de groupes est un homomorphisme (resp. isomorphisme) de groupes.*

1.3 Groupes quotients

Définition 1.7. *Un sous-groupe H de G est distingué (ou invariant ou encore normal) et on note $H \triangleleft G$ si, pour tout $g \in G$, on a : $gH = Hg$.*

Notations Soit H un sous-groupe normal de G ($H \triangleleft G$).

1) On dit que *x est congru à y modulo H est on note $x \equiv y(H)$* si $xH = yH$.

2) $\bar{x} = xH = Hx$ désigne la classe de x modulo H.

Remarque :

Soit H un sous-groupe de G. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1) $Hg = gH \quad \forall g \in G$.

2) $gHg^{-1} \subset H \quad \forall g \in G$.

3) $gHg^{-1} = H \quad \forall g \in G$.

Proposition 1.2. *Soient $f : G \longrightarrow G'$ un homomorphisme de groupes, H et H' deux sous-groupes de G et G' respectivement.*

1) $Ker(f) \triangleleft G$.

2) Si $H' \triangleleft G'$ alors $f^{-1}(H') \triangleleft G$.

3) Si $H \triangleleft G$ alors $f(H) \triangleleft f(G)$.

Preuve

1) Soit $x \in G$, montrons que $x \ker(f) x^{-1} \subset \ker(f)$. En effet, soit $z \in x \ker(f) x^{-1}$, alors $z = xyx^{-1}$ *avec* $y \in \ker(f)$ et donc $f(z) = f(x)f(y)f(x)^{-1} = f(x)f(x)^{-1} = e'$. Ainsi $x \ker(f) x^{-1} \subset \ker(f)$ et $\ker(f) \triangleleft G$.

2) Soit $x \in G$, montrons que $xf^{-1}(H')x^{-1} \subset f^{-1}(H')$. En effet, soit $z \in xf^{-1}(H')x^{-1}$, alors $z = xyx^{-1}$ avec $y \in G$ tel que $f(y) \in H'$, puisque $H' \triangleleft G'$ alors $f(xyx^{-1}) = f(x)f(y)f(x)^{-1} \in H'$ et donc $f^{-1}(H') \triangleleft G$.

3) Soit $y \in f(G)$, alors il existe $x \in G$ tel que $f(x) = y$, montrons que $yf(H)y^{-1} \subset f(H)$. En effet, soit $z \in yf(H)y^{-1}$ donc $z = yf(t)y^{-1} = f(x)f(t)f(x)^{-1} = f(xtx^{-1}) \in f(H)$ avec $t \in H$. Ainsi $f(H) \triangleleft f(G)$. ∎

Remarquons que dans la troisième partie de la proposition, on ne peut pas conclure que $f(H)$ est distingué dans G', sauf si f est surjectif.

Proposition 1.3. *Soit H un sous-groupe de G. Il existe une structure de groupe sur l'ensemble G/H telle que la surjection canonique $s : G \longrightarrow G/H$ soit un homomorphisme de groupes si et seulement si le sous-groupe H est distingué.*

Preuve

Supposons qu'une telle structure existe sur G/H, c'est-dire que G/H est un groupe. Puisque $s : G \longrightarrow G/H$ est un homomorphisme de groupe, d'après 1) la proposition 1.2 on $\mathrm{Ker}(s) \triangleleft G$. Puisque $\mathrm{Ker}(s) = H$, alors $H \triangleleft G$. Supposons inversement que $H \triangleleft G$, définissons une loi de composition $*$ sur G/H de sorte que $(G/H, *)$ soit un groupe et $s : G \longrightarrow (G/H, *)$ soit un homomorphisme de groupes. On est amené à définir la loi $*$ sur G/H par la formule $\overline{x} * \overline{y} = \overline{xy}$ (pour que s soit un homomorphisme). Vérifions que $*$ est bien définie; i.e. si $\overline{x'} = \overline{x}$ et $\overline{y'} = \overline{y}$ alors $\overline{xy} = \overline{x'y'}$. Or $x' = xh,\ y' = yh'$ et $H \triangleleft G$, alors $\overline{x'y'} = x'y'H = xhyh'H = xhyH = xhHy = xHy = xyH = \overline{xy}$ d'où $*$ est bien définie. L'application $s : G \longrightarrow G/H$ est surjective et satisfait $s(x) * s(y) = s(xy)$; on en tire immédiatement que $(G/H, *)$ est un groupe. ∎

1.4 Théorèmes d'isomorphismes

Théorème 1.5. (Propriété universelle du quotient)
Soit $f : G \longrightarrow G'$ un homomorphisme de groupes. Soient H un sous-groupe et $s : G \longrightarrow G/H$ la surjection canonique. Il existe une application $\hat{f} : G/H \longrightarrow G'$ telle que $f = \hat{f} \circ s$ si et seulement si $H \subset Ker(f)$. Dans ce cas, si de plus H est un sous-groupe distingué (et donc G/H un groupe), alors $\hat{f}$ est un homomorphisme de groupes, $\hat{f}(G/H) = f(G)$ et $Ker(\hat{f}) = Ker(f)/H$.

Preuve

La condition ensembliste garantissant l'existence de $\hat{\mathrm{f}}$ est que $s(x) = s(y)$ entraîne $f(x) = f(y)$. Or $s(x) = s(y)$ équivaut à $xH = yH$ ou encore $x^{-1}y \in H$ alors que $f(x) = f(y)$ équivaut à $f(x^{-1}y) = e'$ ou encore $x^{-1}y \in Ker(f)$.

Supposons que $H \triangleleft G$, montrons que $\hat{\mathrm{f}}$ est un homomorphisme de groupes. Soient $x, y \in G$, puisque $xHyH = xyH$, alors

$$\hat{\mathrm{f}}(xHyH) = \hat{\mathrm{f}}(xyH) = f(xy) = f(x)f(y)$$

car f est un homomorphisme de groupes. Il en résulte alors que $\hat{\mathrm{f}}(xHyH) = f(x)f(y) = \hat{\mathrm{f}}(xH)\hat{\mathrm{f}}(yH)$ ce qui montre que $\hat{\mathrm{f}}$ est bien un homomorphisme de groupes. Soit $xH \in Ker(\hat{\mathrm{f}}\ )$, alors $\hat{\mathrm{f}}(xH) = f(x) = e'$ ce qui entraîne que $x \in Ker(f)$ de sorte que $\mathrm{Ker}(\hat{\mathrm{f}}\ ) = Ker(f)/H$. Finalement, le fait que $\hat{\mathrm{f}}\,(G/H) = f(G)$ est immédiat. ∎

Corollaire 1.1. (Premier théorème d'isomorphisme)
Soit $f : G \longrightarrow G'$ un homomorphisme de groupes, alors $G/Ker(f) \cong Im(f)$. En particulier si f est surjectif, alors $G/Ker(f) \cong G'$.

Preuve

On applique la propriété universelle avec $H = Ker(f)$. Dans ce cas on a $\mathrm{Ker}(\hat{\mathrm{f}}\ ) = Ker(f)/Ker(f)$ qui est trivial donc $\hat{\mathrm{f}}$ est injective. Ce qui assure que $G/Ker(f) \cong Im(f)$. Si de plus f est surjectif, alors $\mathrm{Im}(f) = G'$ et $G/Ker(f) \cong G'$. ∎

Théorème 1.6. *Soient K et N deux sous-groupes d'un groupe G. Si $N \triangleleft G$ alors*
1) $N \cap K \triangleleft K$.
2) Si $K \triangleleft G$ et $N \cap K = \{e\}$ alors $nk = kn$, $\forall n \in N$ et $\forall k \in K$.

Preuve

1) $N \cap K$ est bien un sous-groupe de G. Soit $k \in K$, comme $K \cap N \subset N$ alors $k(N \cap K)k^{-1} \subset kNk^{-1}$. Or $N \triangleleft G$, donc $kNk^{-1} \subset N$ de sorte que $k(N \cap K)k^{-1} \subset N$. Comme $k(N \cap K)k^{-1} \subset kKk^{-1} \subset K$, on en déduit alors que $k(N \cap K)k^{-1} \subset N \cap K$. Par conséquent $N \cap K \triangleleft K$.
2) Soient $n \in N$ et $k \in K$, on a $nkn^{-1} \in K$ puisque $K \triangleleft G$ et $kn^{-1}k^{-1} \in N$ puisque $N \triangleleft G$. Alors $nkn^{-1}k^{-1} = (nkn^{-1})k^{-1} \in K$ et $nkn^{-1}k^{-1} = n(kn^{-1}k^{-1}) \in N$, donc $nkn^{-1}k^{-1} \in N \cap K = \{e\}$. Par suite, $nk = kn$. ∎

Remarque :

1) Si $H \triangleleft G$, alors G/H est l'ensemble des classes à gauche et à droite. G/H est appelé groupe quotient de G par H. En outre,

$$(aH)(bH) = abH,\ eH = H,\ (aH)^{-1} = a^{-1}H.$$

2) Soient $H,\ K$ deux sous-groupes d'un groupe G et HVK le sous-groupe de G engendré par $H \cup K$. Alors

$$HVK = \{h_1k_1h_2k_2...h_nk_n | n \in \mathbb{N} \text{ et } h_i \in H,\ k_i \in K\ \forall 1 \leq i \leq n\}.$$

Théorème 1.7. (Deuxième théorème d'isomorphisme)

Soient N et K deux sous-groupes d'un groupe G tels que $N \triangleleft G$. Alors $K/N \cap K \cong KN/N$.

Preuve

N étant un sous-groupe distingué de G, alors $NK = NVK = KN$ et le Théorème 1.6 entraîne que $N \triangleleft KN$ et $N \cap K \triangleleft K$. Considérons l'application $f : K \longrightarrow KN/N$ définie par $f(k) = kN$. f est surjective, en effet pour tout $c = knN \in KN/N$ on peut écrire $c = knN = k(nN) = kN = f(k)$. Cherchons le noyau de l'application f;

$$Ker(f) = \{k \in K/f(k) = N\} = \{k \in K/kN = N\} = \{k \in K/k \in N\} = N \cap K.$$

D'après le premier théorème d'isomorphisme on a $K/Ker(f) \cong Im(f)$, or $\mathrm{Im}(f) = KN/N$ et $\mathrm{Ker}(f) = N \cap K$, on en déduit alors que $K/N \cap K \cong KN/N$.

Théorème 1.8. (Troisième théorème d'isomorphisme)

Soient H et K deux sous-groupes normaux de G tels que $H \subset K$. Alors

$$K/H \triangleleft G/H \text{ et } G/H/K/H \cong G/K.$$

Preuve

Considérons l'application $f : G/H \longrightarrow G/K$ définie par $f(gH) = gK$ pour tout $g \in G$. Il est immédiat que f est un homomorphisme de groupes qui est surjectif par construction, donc $\mathrm{Im}(f) = G/K$. En outre, le noyau de f est

$$Ker(f) = \{xH \in G/H\,|f(xH) = K\} = \{xh \in G/H\,|xK = K\} = \{xh \in G/H/x \in K\} = K/H$$

En utilisant 1) de la Proposition 1.2, on obtient alors $K/H = Ker(f) \lhd G/H$. D'autre part, le premier théorème d'isomorphisme assure que $(G/H)/(K/H) \cong G/K$.

Chapitre 2

Espaces topologiques

2.1 Définitions et propriétés

Définition 2.1. *Soit X un ensemble. On appelle topologie sur X une famille τ de parties de X appelées **ouverts** telles que :*

1) L'ensemble vide et X sont des ouverts.

2) Toute intersection finie d'ouverts est un ouvert.

3) Toute réunion d'ouverts est un ouvert.

Définition 2.2. *Un espace métrique est un ensemble E muni d'une application $d : E \times E \to \mathbb{R}_+$ appelée **métrique** ou **distance** sur E telle que $\forall x, y, z \in E$:*

1) $d(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$.

2) $d(x, y) = d(y, x)$.

3) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Sur un espace métrique, la distance nous permet de définir une topologie qui est engendrée par des parties particulières de l'espace appelées **les boules**.

Définition 2.3. *Soient (E, d) un espace métrique, $a \in E$ et $r \in \mathbb{R}+$.*

1) La boule ouverte de centre a et de rayon r est $B(a, r) = \{x \in E | d(x, a) < r\}$.

2) La boule fermée de centre a et de rayon r est $B_f(a, r) = \{x \in E | d(x, a) \leq r\}$.

Exemples d'espaces métriques :

1. $\mathbb{R}$ muni de la distance $d(x,y) = |x-y|$ est bien un espace métrique.

2. Le plan complexe munie de la distance $d(z,z') = |z-z'|$.

3. Sur l'espace $\mathbb{R}^n$ on peut définir plusieurs distances, notamment :

- $d_1(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$
- $d_2(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$ (distance euclidienne)
- $d_\infty(x,y) = \max_{1\leq i\leq n} |x_i - y_i|$.

et donc $(\mathbb{R}^n, d_1)$, $(\mathbb{R}^n, d_2)$, $(\mathbb{R}^n, d_\infty)$ sont des espaces métriques.

Exemples de topologies :

1. $\tau = \{\emptyset\,,\, X\}$, cette topologie vérifie les axiomes de la définition 1.8 et dite topologie grossière.

2. $\tau = \mathcal{P}(X)$ l'ensemble des sous-ensembles de X appelée topologie discrète. Remarquons que la topologie est discrète si et seulement si tous les singletons de X sont des ouverts.

3. <u>(Topologie usuelle de $\mathbb{R}$)</u> Une topologie de la droite réelle peut être donnée par la famille des réunions des intervalles ouverts, plus précisement soit $I = \{]a,b[\ |a,b \in \mathbb{R}\}$ et $\tau = \{\cup_i I_i\ \ |I_i \in I\}$ alors $(\mathbb{R}, \tau)$ est un espace topologique.

4. Soit (E,d) un espace métrique. La topologie associée à la distance est la topologie engendrée par l'ensemble des boules ouvertes. Dans ce cas les ouverts de (E,d) sont les réunions de boules ouvertes.

Définition 2.4. *Soit X un espace topologique. Une partie F de X est dite fermée si son complémentaire est un ouvert.*

Remarque :

Une partie $A \subset X$ est fermée si et seulement si toute suite d'éléments de A qui converge dans X converge dans A. En d'autres termes, pour montrer que A est fermée, on prend une suite quelconque d'éléments de A qui converge vers $l \in X$; il suffit alors de montrer que nécessairement $l \in A$.

Exemples :

1. Pour la topologie discrète, toutes les parties de X sont des fermés.

2. Dans un espace métrique (E, d) la boule fermée de centre a est de rayon r est un fermé. En particulier dans $\mathbb{R}$ les fermés sont les intervalles fermés de la forme $[a, b]$ avec $a, b \in \mathbb{R}$.

Définition 2.5. ([6], Définition 2.1, page 25)
Soient (X, τ) un espace topologique, $A \subset X$ et $\tau_A = \{\omega \cap A \mid \omega \in \tau\}$. On appelle sous-espace de (X, τ) associé à A le couple (A, τ_A) et on dit que τ_A est la topologie induite par τ sur A (ou topologie trace de τ sur A). On remarque que lorsque A n'est pas un ouvert de X, un ouvert de A n'est pas nécessairement un ouvert de X.

Exemples :

1. La topologie induite par la topologie de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{Z}$ est la topologie disrète, $\tau_{\mathbb{Z}} = \mathcal{P}(\mathbb{Z})$.

2. L'intervalle $[0, 1[$ est un ouvert de $[0, 2]$ muni de la topologie induite par la topologie usuelle de $\mathbb{R}$, car $[0, 1[=] - 1, 1[\cap [0, 2]$ et $] - 1, 1[$ est un ouvert de $\mathbb{R}$.

2.2 Système fondamental de voisinages, base de topologie

Définition 2.6. ([5], Définition 4, page 18)
Soient X un espace topologique et $A \subset X$. Un voisinage de A est un sous-ensemble de X qui contient un ouvert contenant A (un voisinage n'est pas nécessairement ouvert). Le voisinage de $\{x\}$ est dit voisinage de point x.

Si $\mathcal{B}(x)$ désigne l'ensemble de tous les voisinages de x, alors $\mathcal{B}(x)$ vérifie les propriétés suivantes :

V_1) $V \in \mathcal{B}(x)$ et $V \subset V' \Longrightarrow V' \in \mathcal{B}(x)$.

V_2) L'intersection finie des éléments de $\mathcal{B}(x)$ est un éléments de $\mathcal{B}(x)$.

V_3) $V \in \mathcal{B}(x) \Longrightarrow x \in V$.

V_4) Si $U \in \mathcal{B}(x)$, alors il existe $V \in \mathcal{B}(x)$ tel que $V \subset U$ et $U \in \mathcal{B}(y)$ pour tout $y \in V$.

Définition 2.7. ([5], Définition 5, page 21)
Dans un espace topologique, un système fondamental de voisinages d'un point x (resp. un sous-ensemble $A \subset X$) est un ensemble Ω de voisinages de x (resp. A) tel que pour tout voisinage V de x, il existe $W \in \Omega$ tel que $W \subset V$.

Exemple :
Sur $\mathbb{R}$, l'ensemble $\mathcal{I} = \{]a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n}[\ \ avec\ n \in \mathbb{N}^*\}$ est un système fondamental de voisinages de $a \in \mathbb{R}$.

Définition 2.8. ([6], Définition 1.3, page 21)
Une base de topologie (ou base d'ouverts) d'un espace topologique X est un ensemble $\mathcal{B}$ d'ouverts de X tel que chaque ouvert de X est l'union des éléments de $\mathcal{B}$.

Exemple :
Dans un espace métrique (E, d) l'ensemble de toutes les boules ouvertes est une base de topologie.

2.3 Intérieur, adhérence, frontière, densité

Soient X un espace topologique et A un sous-ensemble de X.

Définition 2.9. ([6], Définitions 1.1, page 22)
Un point $x \in X$ est dit point intérieur à A si A est un voisinage de x. L'ensemble des points intérieurs de A est dit intérieur de A et noté $\mathring{A}$.

Définition 2.10. ([6], Définitions 1.1, page 22)
L'adhérence de A, noté $\overline{A}$, est l'ensemble de tous les points $x \in X$ tels que chaque

voisinage de x rencontre A. L'adhérence est caractérisée par:

$$x \in \overline{A} \Longleftrightarrow \forall V \in \mathcal{B}(x)\ V \cap A \neq \emptyset.$$

Définition 2.11. ([6], Définitions 1.1, page 21)

On dit que $x \in X$ est un point isolé de A si et seulement si il existe V un voisinage de x tel que $V \cap A = \{x\}$.

Définition 2.12. ([6], Définitions 1.1, page 23)

La frontière de A, notée $Fr(A)$, est l'ensemble des points x dont tout voisinage coupe à la fois A et son complémentaire, soit encore $Fr(A) = \overline{A} \setminus \mathring{A}$.

Définition 2.13. ([6], Définitions 1.1, page 23)

La partie A est dite dense dans X si $\overline{A} = X$ i.e tout ouvert U non vide de X rencontre A.

Propriétés:

✓ L'intérieur d'un ensemble $A \subset X$ est la réunion de tous les ouverts contenus dans A, c'est-à-dire le plus grand (au sens de l'inclusion) ouvert inclu dans A.

✓ Une partie A de X est ouverte si et seulement si elle est égale à son intérieur.

✓ L'adhérence d'une partie $A \subset X$ est l'intersection de tous les fermés contenant A, c'est le plus petit fermé contenant A.

✓ Une partie est fermée si et seulement si elle est égale à son adhérence.

Exemples :

1. Soit $A = [1, 2[$ alors $\overline{A} = [1, 2]$ et $\mathring{A} =]1, 2[$ et $Fr(A) = \{1, 2\}$.

2. $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ et $\mathring{\mathbb{Q}} = \emptyset$ et donc $\mathbb{Q}$ dense dans $\mathbb{R}$.

3. Dans $\mathbb{R}$ on a $\mathring{\mathbb{Z}} = \emptyset$, $\overline{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}$.

4. Dans $\mathbb{C}$ soit $A = \{z \in \mathbb{C} |\ |z| > 1\}$, alors $\overline{A} = \{z \in \mathbb{C} |\ |z| \geq 1\}$.

2.4 Séparation

Définition 2.14. ([6], Définition 1.1, page 20)

Un espace topologique X est dit séparé s'il vérifie la propriété suivante, appelée

Axiome de Hausdorff *:*

(H) *pour tout couple* (x, y) *de points disjoints* $(x \neq y)$*, il existe un voisinage de* x *et un voisinage de* y *disjoints.*

Exemples :

1. Tout espace métrique (E, d) est séparé. En effet, soient x, y avec $x \neq y$ alors les boules $B(x, \frac{d(x,y)}{2})$ et $B(y, \frac{d(x,y)}{2})$ sont des voisinages respectivement de x et y disjoints.

2. Sur $E = \{0, 1\}$, la topologie $\tau = \{\emptyset, E, \{0\}\}$ est non séparée car le seul ouvert contenant 1 est E et $0 \in E$.

Définition 2.15. ([2] page 7)

Soit X *un espace topologique. Les axiomes suivantes sont connus sous le nom d'**Axiomes de séparation**:*

- T_0 : $\forall x, y \in X$ *tels que* $x \neq y$ *au moins un des deux (par exemple* x*) admet un voisinage qui ne contient pas l'autre.*

- T_1 : $\forall x, y \in X$ *tels que* $x \neq y$ *chacun admet un voisinage ouvert qui ne contient pas l'autre.*

- T_2 : ***(Séparé ou de Hausdorff)*** $\forall x, y \in X$ *tels que* $x \neq y$ *il existe un voisinage* U *de* x *et un voisinage* V *de* y *tels que* $U \cap V = \emptyset$.

- T_3 : ***(Régulier)*** *Si* C *un fermé de* X *et* $x \in X$ *avec* $x \notin C$*, alors il existe deux ouverts* U *et* V *disjoints tels que* $x \in U$ *et* $C \subset V$.

- T_4 : *Si* C *est un fermé de* X *et* $x \in X$*, il existe une fonction* $f : X \to [0, 1]$ *telle que* $f(x) = 0$ *et* $f(C) = \{1\}$

- T_5 : ***(Normal)*** *Soit* C_1 *et* C_2 *deux fermés disjoints de* X*. Il existe deux ouverts disjoints* U_1 *et* U_2 *tels que* $C_1 \subset U_1$ *et* $C_2 \subset U_2$.

Théorème 2.1. X *est un espace* T_1 *si et seulement si tout point de* X *est un fermé comme sous-ensemble de* X.

Preuve

Supposons que X est T_1, posons $F = \{x\}$ et soit $F' = X \setminus F$, il existe pour chaque $y \in F'$ un ouvert O_y tels que $x \notin O_y \subset F'$ donc $F' = \bigcup_{y \in F'} O_y$ qui est ouvert, ainsi F est fermé.

Inversement, soit $x, y \in X$ tels que $x \neq y$ alors $X \setminus \{x\}$ est un voisinage ouvert de y qui ne contient pas x et $X \setminus \{y\}$ est un voisinage ouvert de x qui ne contient pas y. Ainsi X est T_1. ∎

La proposition suivante est souvent utilisée pour montrer la régularité ou la normalité des espaces topologiques.

Proposition 2.1. *Soit X un espace topologique,*

1) X est régulier $\Longleftrightarrow$ $(x \in V,\ V \in \tau \Longrightarrow \exists U \in \tau\ x \in U \subset \overline{U} \subset V)$.

2) X est normal $\Longleftrightarrow$ $(F \subset V$ avec F fermé et $V \in \tau \Longrightarrow \exists U \in \tau\ \overline{U} \subset V)$.

Preuve

1) Régularité : $\Longrightarrow$) Supposons que X est régulier, soit $V \in \tau$ tel que $x \in V$, alors $C = X \setminus V$ est un fermé et donc il exsite un voisinage O de C tel que $O \cap V = \emptyset$. si $x \in \overline{U}$, supposons que $x \notin V$ donc $x \in C$ et alors $O \cap V \neq \emptyset$ contradiction. Ainsi $x \in V$ et $\overline{U} \subset V$.

$\Longleftarrow$) Soit F un fermé et $x \in X$ tel que $x \notin F$, soit $V = X \setminus F$ qui est un ouvert qui contient x, donc il existe un ouvert U tel que $x \in U \subset \overline{U} \subset V$, on pose $O = X \setminus \overline{U}$ qui est ouvert (car $\overline{U}$ est fermé), on a bien O un voisinage ouvert de F et $O \cap U = \emptyset$, ainsi X est régulier.

2) Normalité : $\Longrightarrow$) Puisque F et $X \setminus V$ sont des fermés disjoints, donc il existe deux ouverts disjoints O_1 et O_2 tels que $F \subset O_1$ et $X \setminus V \subset O_2$ et on a $\overline{O_1} \cap O_2 = \emptyset$ ($O_1 \subset X \setminus O_2$ et $X \setminus O_2$ est fermé, comme $\overline{O_1}$ est le plus petit fermé qui contient $O_1 \subset (X \setminus O_2)$ et donc $\overline{O_1} \cap O_2 = \emptyset$), on prend $U = O_1$ et on a bien $\overline{U} \subset V$.

$\Longleftarrow$) Soient F_1 et F_2 deux fermés disjoints, soit $V = X \setminus F_2$ et $U \in \tau$ tel que $F_1 \subset U \subset \overline{U} \subset V$, on pose $U_1 = U$ et $U_2 = X \setminus \overline{U}$, U_1 *et* U_2 vérifient les conditions d'un espace T_5. ∎

2.5 Applications Continues

Définition 2.16. *Une application f d'un espace topologique X dans un espace topologique Y est dite continue en un point $x \in X$ si pour tout voisinage V de $f(x)$ dans Y, il existe un voisinage U de x dans X tel que $f(U) \subset V$. Autrement dit pour tout voisinage V de $f(x)$ dans Y la partie $f^{-1}(V)$ est un voisinage de x dans X.*

Une application f d'un espace topologique X vers Y est dite continue si elle est continue en tout point de X.

Définition 2.17. *Un **homéomorphisme** d'un espace topologique X vers un espace topologique Y est une application $f : X \longrightarrow Y$ bijective et bicontinue (f et f^{-1} sont continues).*

Définition 2.18. *Une application f d'un espace topologique X dans un espace topologique Y est dite ouverte (resp. fermé) si pour tout ouvert (resp.fermé) U de X, $f(U)$ est un ouvert (resp. fermé) de Y.*

Exemples :

1. L'application constante d'un espace topologique dans un autre est continue.

2. L'application $x \mapsto yx$ avec $y \in \mathbb{R}^*$ fixé, est un homéomorphisme.

Définition 2.19. ([2], Page 14)

Une application f d'un espace topologique X vers un espace Y est dite presque-ouverte en $x \in X$ si pour tout voisinage ouvert U de x, $\overline{f(U)}$ est un voisinage de $f(x)$.

f est dite presque-ouverte sur X, si elle est presque-ouverte en tout point de X.

2.6 Compacité et connexité

Définition 2.20. ([6], Définition 1, page 69)

Un espace topologique X est compact s'il est separé et s'il vérifie la propriété de ***Borel-Lebesgue****:*

De toute famille $(U_i)_{i\in I}$ de parties ouvertes de X, dont la réunion est X, on peut extraire une sous-famille $U_{i_1}, U_{i_2}, ..., U_{i_n}$ avec $i_1, i_2, ..., i_n \in I$ dont la réunion est X.

Une partie A d'un espace topologique X est dite compacte si A munie de la topologie induite par celle de X est un espace topologique compact.

Cela se traduit ainsi : du recouvrement $A = \bigcup_{i\in I}(w_i \cap A)$ on peut extraire un sous-recouvrement fini $A = \bigcup_{i\in J\ fini}(w_i \cap A)$; ou encore par

$$A \subset \bigcup_I w_i \Rightarrow \exists J\ \ fini;\ A \subset \bigcup_J w_i.$$

Exemples :

1. La droite réelle n'est pas compact : en effet la famille $\{]-n, n[\}_{n\in\mathbb{N}}$ est un recouvrement de $\mathbb{R}$, mais on ne peut pas extraire un sous-recouvrement fini.

2. Les parties compactes de $\mathbb{R}$ sont les fermés bornés, de même pour $\mathbb{R}^n$ (théorème de Borel-Lesbegue).

3. $]0,1[$ n'est pas compact. En effet, $]0,1[= \cup_{n\geq 1}]\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}[$ où les $]\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}[$ sont des ouverts qui recouvrent $]0,1[$, mais une réunion finie de tels ouverts ne le recouvre pas.

Théorème 2.2. ([6], Théorème 1.3, page 71)

Soient X un espace topologique de Hausdorff et A une partie fermée de X. Alors A est compacte dans sa topologie relative.

Preuve

Soit $(w_i)_{i\in I}$ des ouverts de X qui recouvrent A. Comme les ouverts $(w_i \cup (X\setminus A))_i$ sont des ouverts de X recouvrant X, il exsite $J \subset I$ tel que $X = \bigcup_J (w_i \cup (X\setminus A))$ et ainsi $A \subset \bigcup_J w_i$. ∎

Théorème 2.3. ([6], Théorème 1.4, page 71)

Soit A une partie d'un espace topologique de Hausdorff X.

Si A est compacte, alors A est fermée.

Définition 2.21. ([2], Définitions 7, page 10)

Un espace topologique est locallement compact s'il est séparé et si chacun de ses points possède un voisinage dont l'adhérence est compact.

Exemple :

La droite réelle $\mathbb{R}$ et plus généralement l'espace $\mathbb{R}^n$ sont localement compacts.

Définition 2.22. ([4], Définition 3.2, page 11)

Un espace topologique est dit $\sigma - compact$ s'il est réunion dénombrable de sous-espaces compacts.

Théorème 2.4. ([6], Théorème 2.1, page 73)

Soient X un espace topologique et $f : X \longrightarrow Y$ une application continue. Alors $f(X)$ est un compact de Y.

Preuve

Soit $(\omega_i)_{i\in I}$ un recouvrement de $f(X)$ par des ouverts de Y; donc $(f^{-1}(\omega_i))_{i\in I}$ est un recouvrement ouvert de X compact (car f est continue). Par suite il exsite J fini tel que $X = \bigcup_J f^{-1}(\omega_i)$, ainsi $f(X) \subset \bigcup_J(\omega_i)$ ∎

Théorème 2.5. *(Théorème de Tychonoff)* ([6], Théorème 3.2, page 79)

Le produit d'espaces compacts est compact.

Définition 2.23. *Un espace topologique X est dit connexe si les seuls ouverts et fermés à la fois sont X et l'ensemble vide.*

Proposition 2.2. *Un espace topologique X est connexe si et seulement si il n'est pas réunion disjointe de deux ouverts non vides.*

Preuve

Soit $X = O_1 \cup O_2$ où O_1 et O_2 sont deux ouverts disjoints, donc $O_1 = X \setminus O_2$ est un fermé de X, comme X est connexe alors $O_1 = X$ ou $O_2 = \emptyset$.

Réciproquement, si X n'est pas une réunion disjointe de deux ouverts non vides, soit O un ensemble ouvert et fermé à la fois, donc son complémentaire est aussi ouvert et fermé et $X = O \cup (X \setminus O)$ donc $O = \emptyset$ ou $X \setminus O = \emptyset$, ainsi $O = X$ ou $O = \emptyset$. ∎

Exemples :

1. $\mathbb{R}$ est connexe et tout intervalle de $\mathbb{R}$ est connexe.

2. L'ensemble $\mathbb{Q}$ des rationnels n'est pas connexe. En effet, soit $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $\mathbb{Q} \cap]-\infty, a[$ et $\mathbb{Q} \cap]a, +\infty[$ sont deux ouverts non vides disjoints de réunion $\mathbb{Q}$.

Théorème 2.6. ([6], Théorème 2.3, page 108)

Soit $f : X \longrightarrow Y$ une application continue d'un espace topologique connexe X dans un espace topologique Y. Alors $f(X)$ est connexe.

Preuve

Supposons que $f(X) = U \cup V$ où U et V sont deux ouverts de Y disjoints. On a $X = f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V)$ et X connexe. Donc $X = f^{-1}(U)$ ou $X = f^{-1}(V)$ (pas les deux), ce qui implique que $f(X) = V$ ou $f(X) = U$.

Par conséquent $f(X)$ est connexe. ∎

Définition 2.24. ([2], page 11)

La composante connexe d'un point $a \in X$ est la plus grande partie connexe de X contenant a.

Définition 2.25. ([6], Définition 4.3, page 11)

Un espace topologique est dit totalement discontinu si toutes ses composantes connexes sont des singletons.

Remarques :

✓ La composante connexe dans un espace topologique est fermée.

✓ Un espace topologique discret (c'est-à-dire sa topologie est discrète) est totallement discontinu. $\mathbb{Q}$ est totallement discontinu mais n'est pas discret.

Chapitre 3

Groupes topologiques

3.1 Définitions et propriétés

Définition 3.1. ([5], Définition 1, page 219)

Un groupe topologique est un ensemble G qui possède une structure de groupe et une topologie, tel que les deux axiomes suivants sont vérifiés :

(GT_1)*: l'application* $(x, y) \longmapsto xy$ *est continue.*

(GT_2)*: l'application* $x \longmapsto x^{-1}$ *est continue.*

Une structure de groupe et une topologie sont compatibles s'ils vérifient les deux axiomes (GT_1) et (GT_2).

Exemples :

1. La topologie discrète sur un groupe G est compatible avec la structure de groupe. Un espace topologique tel que sa topologie est discrète est dit "**Groupe discret**".

2. $\mathbb{R}$ muni de l'addition et de la topologie usuelle est un groupe topologique commutatif locallement compact.

3. $\mathbb{R}^n$ muni de l'addition et de la topologie usuelle définie par la métrique $d_2(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2}$ est un groupe topologique commutatif locallement compact.

4. $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ muni de la topologie induite par celle de $\mathbb{R}$ est un groupe topologique commutatif.

5. On sait que $(M_n(\mathbb{R}), +)$ est un groupe commutatif, on attribue une topologie à $M_n(\mathbb{R})$ en l'identifiant à $\mathbb{R}^{n^2}$. Plus précisement, on arrange les coefficients $a_{i,j}$ dans un ordre fixé de telle manière qu'une matrice peut être vue comme un élément de $\mathbb{R}^{n^2}$ et on définie l'application f qui à $A \in M_n(\mathbb{R})$ associe un vecteur $u \in \mathbb{R}^{n^2}$. f est bien définie et bijective, on munit $M_n(\mathbb{R})$ de la topologie de $\mathbb{R}^{n^2}$, autrement dit un sous-ensemble T de $M_n(\mathbb{R})$ est ouvert si $f(T)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^{n^2}$. Puisque $\mathbb{R}^{n^2}$ est un groupe topologique, il en est de même pour $M_n(\mathbb{R})$.

6. $\mathbb{GL}_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid det(A) \neq 0\}$ muni de la multiplication des matrices et la topologie induite par celle de $M_n(\mathbb{R})$ est un groupe topologique.

Remarque :

En terme de voisinages, l'axiome GT_1 affirme que pour tout voisinage U de xy, ils existent deux voisinages V et W de x et y respectivement tels que $VW \subset U$.

L'axiome GT_2 affirme que pour tout voisinage U de x^{-1}, il existe un voisinage V de x tel que $V^{-1} \subset U$.

Théorème 3.1. ([2], Théorème 1, page 43)

*Soit G un groupe muni d'une topologie τ. Alors G est un groupe topologique si et seulement si l'application $: (x, y) \mapsto xy^{-1}$ de $G \times G$ dans G est continue **(GT')**.*

Preuve

$\Longrightarrow$) Si G est un groupe topologique alors $(x, y) \mapsto xy$ et $x \mapsto x^{-1}$ sont continues. Donc $(x, y^{-1}) \mapsto xy^{-1}$ et $(x, y) \mapsto (x, y^{-1})$ sont continues. D'où $(x, y) \mapsto xy^{-1}$ est continue.

$\Longleftarrow$) Si $(x, y) \mapsto xy^{-1}$ est continue alors $(e, y) \mapsto ey^{-1} = y^{-1}$ est continue. Puisque $y \mapsto (e, y)$ est continue alors $y \mapsto y^{-1}$ est continue. En outre (GT') et (GT_2) implique que $(x, y) \mapsto x(y^{-1})^{-1} = xy$ est continue. ∎

Théorème 3.2. ([2], Théorème 1, page 43)

Soient G un groupe topologiques et $a \in G$. Les applications $x \mapsto x^{-1}$, $x \mapsto ax$, $x \mapsto xa$, $x \mapsto axa$ sont des homémorphismes .

Preuve

Il est clair que $f : x \mapsto ax$ est continue (d'après (GT_1) et la continuité de $x \mapsto$

$(x, a))$. f est visiblement bijective et $f^{-1} : x \mapsto a^{-1}x$ est aussi continue et bijective (même forme que f). Un raisonnement similaire montre que $f : x \mapsto xa$ est un homémorphisme. Il est clair que $x \mapsto x^{-1}$ est bijective, bicontinue. Comme $x \mapsto axa$ est la composition de $x \mapsto ax$ et $x \mapsto xa$, alors $x \mapsto axa$ est un homémorphisme. ∎

Corollaire 3.1. ([2], Corollaire 1, page 44)
Soit O un ouvert d'un groupe topologique G. Alors O^{-1}, xO, Ox, OE sont des ouverts dans G avec $x \in G$ et $E \subset G$.

Preuve

Si O est un ouvert de G alors O^{-1} aussi ouvert car $x \mapsto x^{-1}$ est un homéomorphisme. xO et Ox sont des ouverts puisque $f : a \mapsto ax$ et $f : a \mapsto xa$ sont des homémorphismes. De plus $EO = \bigcup_{x \in E} xO$ et $OE = \bigcup_{x \in E} Ox$. ∎

Corollaire 3.2. *Soit F un fermé dans un groupe topologique G alors F^{-1}, xF, Fx sont des fermés dans G avec $x \in G$.*

Preuve

Même chose que le corollaire précédent. ∎

Exemples de parties ouvertes, fermées d'un groupe topologique:

1. La partie $\mathbb{GL}_n = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \ |det(A) \neq 0\}$ est ouverte dans $M_n(\mathbb{R})$.
En effet, l'application $det : M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue et $\mathbb{GL}_n = det^{-1}(\mathbb{R}^*)$ (car $\mathbb{R}^*$ est ouvert dans $\mathbb{R}$).

2. La partie $\mathbb{SL}_n = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \ |det(A) = 1\}$ est fermée dans $M_n(\mathbb{R})$.
En effet, l'application $det : M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue et $\mathbb{SL}_n = det^{-1}(\{1\})$.

3. L'ensemble des polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ admettant n racines simples est un ouvert.

Théorème 3.3. ([4], Théorème 4.4, page 17)
Soient A et B deux sous-ensembles d'un groupe topologique G. Si A est un ouvert alors AB et BA sont ouverts.

Si A et B sont compacts, alors AB est compact .

Si A est fermé et B compact alors AB et BA sont fermés.

Preuve

Pour la première assertion on a $AB = \cup\{Ab : b \in B\}$ donc si A est ouvert alors Ab est ouvert $\forall b \in B$. Ainsi AB est l'union des ensembles ouverts donc AB est ouvert. On applique un même raisonnement pour BA.

Si A et B sont des compacts alors $A \times B$ est un sous-ensemble compact de $G \times G$ (d'après le théorème de Tychonoff) et AB est l'image par l'application continue $(x, y) \mapsto xy$ de $A \times B$.

Supposons que A est fermé et B compact; on rappelle deux résultats important pour les espaces topologiques :

a) Un espace topologique est compact si et seulement si toute suite dans X possède une sous-suite convergente vers $x \in X$.

b) Soit $f : X \mapsto Y$ avec X et Y deux espaces topologiques :

f est continue $\Longleftrightarrow$ pour toute suite $(x_n)_n$ dans X qui converge vers x on a $(f(x_n))_n$ converge vers $f(x)$.

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans AB qui converge vers $x \in G$, on doit montrer que $x \in AB$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $x_n = y_n z_n$ avec $y_n \in A$ et $z_n \in B$, puisque B est compact alors il existe une sous-suite $(z_m)_{m\in I}$, $I \subset \mathbb{N}$ qui converge vers $z \in B$. Il est clair que $(x_m)_m$ converge vers x et $(x_m, z_m)_m$ est une suite de $G\times G$ qui converge vers (x, z). Alors la suite $y_m = x_m z_m^{-1}$ converge vers xz^{-1} comme composition de la suite (x_m, y_m) et la fonction $(x, y) \mapsto xy^{-1}$ (Résultat b)). Puisque A est fermé, la limite de $(y_m)_m$ appartient à A et donc $xz^{-1} \in A$ prouvant ainsi que $x = (xz^{-1})z \in AB$. On conclut que AB est fermé; de même on montre que BA est fermé. ∎

Proposition 3.1. ([3], D), page 54)

Soient G un groupe topologique et $x_1, x_2 \in G$. Il existe un homémorphisme f de G tel que $f(x_1) = x_2$.

Preuve

Posons $a = {x_1}^{-1}x_2 \in G$ et considèrons l'application $f : x \mapsto xa$. Alors f est un homémorphisme d'après le Théorème 2.2 et $f(x_1) = x_1{x_1}^{-1}x_2 = x_2$. ∎

Un espace pour lequel la proposition précédente est vérifiée est dit **espace homogène**.

Remarque :

D'après l'homogéniété des groupes topologiques, il suffit de vérifier ses propriétés pour un seul point, par exemple pour montrer que l'espace est locallement compact, il suffit de vérifier que l'identité admet un voisinage dont l'adhérence est compact.

3.2 Voisinages d'un point dans un groupe topologique

Définition 3.2. ([2], Définition 1, page 45)
Un sous-ensemble $U \subset G$ est dit symétrique si $U^{-1} = U$.

Théorème 3.4. ([4], Théorème 4.5, page 18)
Soient G un groupe topologique et $\mathcal{O}$ l'ensemble des voisinages ouverts de l'identité. Alors $\mathcal{O}$ vérifie les propriétés suivantes :

1) $\forall U \in \mathcal{O} \quad \exists V \in \mathcal{O}$ *tel que* $VV^{-1} \subset U$.

2) $\forall U \in \mathcal{O} \quad \forall a \in U$ *il existe* $V \in \mathcal{O}$ *tel que* $aV \subset U$.

3) $\forall U \in \mathcal{O} \quad \forall a \in G$ *il existe* $V \in \mathcal{O}$ *tel que* $aVa^{-1} \subset U$.

Preuve

1) Soit e l'élément neutre de G. Puisque G est un groupe alors l'application f : $(x, y) \mapsto xy^{-1}$ est continue en particulier au point (e, e). Donc pour tout voisinage U ouvert de $f(e, e) = e$ dans G, il existe un voisinage V de (e, e) dans $G \times G$ tel que $f(V) \subset U$ ce qui implique que $VV^{-1} \subset U$.

2) Soit $U \in \mathcal{O}$; $V = a^{-1}U$ est un ouvert de G contenant $e = a^{-1}a$ et $aV = U \subset U$.

3) Soit $U \in \mathcal{O}$; $V = a^{-1}Ua$ est un ouvert de G contenant $e = a^{-1}ea$ et $aVa^{-1} = U \subset U$. ∎

Proposition 3.2. ([2], Proposition 1, page 45)

Dans un groupe topologique il existe un système fondamental de voisinages symétriques de l'identité.

Preuve

Soit U un voisinage de e, donc U^{-1} est voisinage de e. D'où $V = U \cap U^{-1}$ est un voisinage de e qui est symétrique $(U \cap U^{-1})^{-1} = U \cap U^{-1}$ et $V \subset U$. ∎

Proposition 3.3. ([4], Corollaire 4.7, page 19)

Soit G un groupe topologique. Pour tout voisinage U de l'élément neutre e, il existe un voisinage V de e tel que $\overline{V} \subset U$

Preuve

Soit V un voisinage symétrique de e tel que $V^2 \subset U$ et soit $x \in \overline{V}$. Comme $xV \cap V \neq \emptyset$ alors $xa = b$ où $a, b \in V$ ce qui implique que $x = ba^{-1} \in VV^{-1} = V^2 \subset U$. Par conséquent $\overline{V} \subset U$. ∎

Soit $\mathcal{B}$ un système de voisinages de e dans un groupe topologique G et soit $a \in G$. Puisque $x \mapsto xa$ et $x \mapsto xa$ sont des homéomorphismes alors un système voisinages de $a \in G$ est la famille $a\mathcal{B}$ des ensembles aV et aussi la famille $\mathcal{B}a$ des ensembles Va avec $V \in \mathcal{B}$. Ainsi, on connait un système de voisinages de n'importe quel point $a \in G$ dès qu'on sait celui de l'identité.

Exemple :

$G = \mathbb{R}^n$ est un groupe topologique. L'ensemble des boules ouvertes de la forme $B(e, \frac{1}{n}),\ n > 0$ forme un système fondamental de voisinage de $e = (0, 0, ..., 0) \in \mathbb{R}^n$.

3.3 Axiomes de séparation dans un groupe topologique

Théorème 3.5. ([2], Théorème 4, page 48-49)

Soit G un groupe topologique. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1) *G est T_0.*

2) *G est T_1.*

3) *G est T_2 (ou Hausdorff).*

4) *$\bigcap_{u\in\mathcal{U}} u = \{e\}$ où $\mathcal{U}$ est un système fondamental de voisinages de l'identité.*

Preuve

1) $\Longrightarrow$ 2) : Soit $x, y \in G$ avec $x \neq y$; pour au moins un des deux (soit x), il existe un voisinage ouvert U de x tel que $y \notin U$. Puisque $x^{-1}U = V$ est un voisinage de l'identité e alors $V \cap V^{-1} = Q$ est un voisinage ouvert de e. Donc yQ est un voisinage de y et $x \notin yQ$. En effet, sinon $x^{-1} \in Qy^{-1}$ et donc $x^{-1} \in Qy^{-1} \subset Vy^{-1} \subset x^{-1}Uy^{-1}$, ce qui implique $e = xx^{-1} \in xx^{-1}Uy^{-1} = Uy^{-1}$ c'est-à-dire $y \in U$. Contradiction.
2) $\Longrightarrow$ 3) : Soit $x, y \in G$ *avec* $x \neq y$; $\{x\}$ est un ensemble fermé et donc $U = G \setminus \{x\}$ est un voisinage ouvert de y. Donc $y^{-1}U$ est un voisinage ouvert de e. Soit V un voisinage ouvert de e tel que $VV^{-1} \subset y^{-1}U$. Donc yV est un voisinage ouvert de y. On a $Q = G \setminus \overline{yV}$ est un ouvert $x \in Q$, car sinon $x \in \overline{yV}$ et donc $xV \cap yV \neq \emptyset$ ce qui implique $x \in yVV^{-1} \subset y(y^{-1}U) = U$, contradiction. On a $Q \cap yV = \emptyset$ et $y \in yV$; $x \in Q$ avec yV et Q sont des ouverts d'où 3).
3) $\Longrightarrow$ 4) : Soit $x \in \bigcap_{U\in\mathcal{U}} U$ et supposons que $x \neq e$. Il existe un voisinage V de e tel que $x \notin V$. On a $\mathcal{U}$ est un système fondamental de voisinages alors il existe $U \in \mathcal{U}$ *tel que* $U \subset V$, contradiction $x \in V$. D'où $x = e$.
4) $\Longrightarrow$ 1) : Soit $x \neq y$; puisque $xy^{-1} \neq e$ il existe $U \in \mathcal{U}$ tel que $xy^{-1} \notin U$. Donc Uy est un voisinage de y tel que $x \notin Uy$. ∎

Théorème 3.6. ([3], F), page 54)

L'espace topologique d'un groupe topologique G est régulier.

Preuve

La régularité de l'espace G peut être établit à partir d'un voisinage de l'identité e. En effet, soit U un voisinage de e; alors il existe un voisinage V de e tel que $V^{-1}V \subset U$, et il faut montrer que $\overline{V} \subset U$. Soit $a \in \overline{V}$ donc tout voisinage de a rencontre V et donc aV est un voisinage de a alors $\exists b \in V$ tel que $ab = c \in V$. D'où

$a = cb^{-1} \in VV^{-1} \subset U$ ce qui montre que $\overline{V} \subset U$. ∎

3.4 Sous-groupes topologiques

Soient G un groupe topologique et H un sous-groupe de G. On munit H de la topologie relative induite par celle de G puisque l'application $(x, y) \mapsto xy^{-1}$; de $G \times G$ dans G est continue, il en est de même pour sa restriction sur $H \times H$. Donc H muni de la topologie induite est un groupe topologique.

Exemple :

$\mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}$ avec $\alpha \notin \mathbb{Q}$ est un sous-groupe dense dans $\mathbb{R}$.

Proposition 3.4. ([2], Proposition 6, page 54)

L'adhérence $\overline{H}$ d'un sous-groupe topologique H est un sous-groupe topologique. En outre, si H est invariant alors $\overline{H}$ l'est aussi.

Preuve

1) Montrons que $\overline{H}$ est un sous-groupe topologique de G.

Soient $a, b \in \overline{H}$. Montrons que $ab^{-1} \in \overline{H}$. Soit W un voisinage de ab^{-1}, il existe U, V deux voisinages de a *et* b respectivement tels que $UV^{-1} \subset W$. Puisque $a \in \overline{H}\, b \in \overline{H}$, alors il existe $x, y \in H$ tels que $x \in U$ et $y \in V$. On a $xy^{-1} \in H$ et $xy^{-1} \in W$, donc le voisinage W de ab^{-1} rencontre H et donc $ab^{-1} \in \overline{H}$.

2) Montrons $\overline{H}$ est invariant si H est invariant.

Soit $a \in \overline{H}$ et $b \in G$. Soit V un voisinage de $b^{-1}ab$ donc il existe un voisinage U de a tel que $b^{-1}Ub \subset V$. Puisque $a \in \overline{H}$, il existe $x \in H$ tel que $x \in U$ de plus $b^{-1}xb \in H$ (car H est invariant) et $b^{-1}xb \in V$ i.e le voisinage V de $b^{-1}ab$ rencontre H et donc $b^{-1}ab \in \overline{H}$. Ainsi $\overline{H}$ est un sous-groupe invariant de G. ∎

Théorème 3.7. ([4], Théorème 5.5, page 34)

Un sous-groupe H d'un groupe topologique G est ouvert si et seulement si il a un point intérieur. En particulier, tout sous-groupe ouvert est fermé.

Preuve

Soit H un sous-groupe de G ayant un point intérieur x; il existe un voisinage ouvert U de e tel que $xU \subset H$, pour $y \in H$ on a : $yU = yxx^{-1}U \subset yx^{-1}H = H$. Donc H est ouvert.

Inversement, Si H est un ouvert alors chaque point de H est un point intérieure.

On suppose que H est un ouvert et soit $H' = \bigcup\{xH \ |x \notin H\}$; chaque xH est un ouvert et donc H' est ouvert, ainsi H est fermé. ∎

Proposition 3.5. ([2], Proposition 8, page 54)

Un sous-groupe H d'un groupe topologique G est fermé si et seulement si pour un certain voisinage fermé U de l'identité, $H \cap U$ est fermé dans G.

Preuve

Si H est un fermé alors $H \cap U$ est évidement fermé, pour tout U voisinage fermé de l'identité.

Inversement, supposons que $H \cap U$ est fermé dans G, pour un certain voisinage fermé U de l'identité e. On choisit un voisinage symétrique V de e tel que $V^2 \subset U$. Soit $x \in \overline{H}$ et $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans H qui converge vers x; alors $x^{-1} \in \overline{H}$ et donc il existe $y \in Vx^{-1} \cap H \neq \emptyset$. Soit n_0 tel que $\forall n \geq n_0$ $x_n \in xV$ alors $\forall n \geq n_0$ on a $yx_n \in Vx^{-1}xV = V^2 \subset U$ et donc $yx_n \in U \cap H$ (car $y, x_n \in H$ et H est un sous-groupe de G). Dès que $U \cap H$ est fermé et $yx \in U \cap H$, car yx_n converge vers yx donc $yx \in H$ mais $x = y^{-1}yx \in H^2 = H$ donc H est un fermé. ∎

Théorème 3.8. ([4], Théorème 5.7, page 34)

Soit U un voisinage symétrique de e dans un groupe topologique G. L'ensemble $H = \bigcup_{n=1}^{\infty} U^n$ est un sous-groupe ouvert et fermé de G.

Preuve

H est non vide car il contient e. Soient $x, y \in H$, il existe $n, m > 0$, tels que $x \in U^n$ et $y \in U^m$ donc $xy^{-1} \in U^n(U^m)^{-1} = U^nU^{-m} = U^nU^m = U^{n+m} \subset H$. Ainsi H est un sous-groupe de G.

Pour montrer que H est ouvert, il suffit de remarquer que $\forall y \in H$, $yU \subset yH = H$ donc H est ouvert et fermé. ∎

Théorème 3.9. ([4], Théorème 5.8, page 34)

Un sous-groupe topologique H d'un groupe G est discret si et seulement si H a un point isolé.

Preuve

Soit $x \in H$ et on suppose que x est un point isolé de H dans sa topologie relative, donc il existe un voisinage U de e tel que $xU \cap H = \{x\}$. Soit $y \in H$, on a $yU \cap H = (yU) \cap xx^{-1}H = yx^{-1}(xU \cap H) = \{y\}$. Donc $\forall x \in H$, x est un point isolé et ainsi H est discret.

Réciproquement H est discret donc par définition tous ses points sont isolés. ∎

3.5 Groupes topologiques quotients et théorèmes d'isomorphismes

Soient G un groupe topologique et H un sous-groupe de G. soit $\phi : x \mapsto xH$ l'application définie de G dans G/H. On définie une topologie sur G/H de la façon suivante : un sous-ensemble $\dot{A} = \{xH \mid x \in A\}$ de G/H est un ouvert si et seulement si $\phi^{-1}(\dot{A})$ est un ouvert de G.

Cette topologie est dite *la topologie quotient* et G/H muni de cette topologie est appelé **un espace topologique quotient**

Proposition 3.6. ([2], Théorème 8, page 57)

Soient G un groupe topologique et H un sous-groupe de G. Sssoit G/H l'espace quotient muni de la topologie quotient et soit l'application $\phi : x \mapsto xH$ de G dans G/H. Alors ϕ est surjective et continue.

Preuve

La surjection est évidente, la continuité découle de la définition de la topologie dans G/H. ∎

Théorème 3.10. ([4], Théorème 5.17, page 37)

La surjection canonique ϕ (définie dans la proposition précédente) est ouverte.

Preuve

Soit U un ouvert de G, alors $\phi(U)$ est un ouvert de G/H si et seleument si : $\phi^{-1}(\phi(U))$ est un ouvert de G. Or $\phi^{-1}(\phi(U)) = UH$, d'après Théorème 3.3 UH est un ouvert et alors ϕ est ouverte. ∎

Théorème 3.11. ([2], Proposition 14, page 57)

Soient G un groupe topologique et H un sous-groupe topologique de G. Alors G/H est un espace homogène .

Preuve

Soit $\overline{x}, \overline{y} \in G/H$ avec $\overline{x} = xH, \overline{y} = yH$. Soit $a \in G$ tel que $ax = y$. L'application $f_a : \overline{x} \mapsto (ax)H$ est bien définie et bijective, de même pour $f^{-1} = f_{a^{-1}}$. Pour montrer que f_a est continue et ouverte (c-à-d bicontinue), il suffit de montrer que f_a est ouverte (puisque $f_a^{-1} = f_{a^{-1}}$).

Soit U un ouvert de G/H, alors $U = \phi(V)$ avec V un ouvert de G. Compte tenu du fait que $f_a(U) = \phi(aUH)$ est un ouvert dans G/H (ϕ est ouverte) et aUH est un ouvert dans G, il s'en suit que f_a est un homémorphisme. Or $f_a(\overline{x}) = a\overline{x} = (ax)H = yH = \overline{y}$ alors G/H est homogène. ∎

Proposition 3.7. ([2], Proposition 15, page 58)

Soient G un groupe topologique et H un sous-groupe topologique de G.

$$G/H\, est\, T_1 \Longleftrightarrow H \;\; est\; fermé$$

Preuve

Si G/H est T_1 alors tout singleton de G/H est un sous-ensemble fermé et donc en particulier le point H est fermé.

Inversement, si H est un fermé donc $\forall x \in G$ on a xH est un fermé et donc $G \setminus xH$ est un ouvert dans G. Donc $\phi(G \setminus xH)$ est un ouvert dans G/H, or $(G/H) \setminus \{xH\} = \phi(G \setminus H)$ donc $\{xH\}$ est fermé et ainsi G/H est T_1. ∎

Théorème 3.12. ([2], Théorème 9, page 58)

Soient H un sous-groupe d'un groupe topologique G et ϕ la surjection canonique de G sur G/H.

Si $\{U\}$ est un système fondamental de voisinage de l'identité e dans G alors $\{\phi(U)\}$ est un système fondamental de voisinages de $\overline{e} = f(e)$ dans G/H

Preuve

Pour tout voisinage U de e dans G, $\phi(U)$ est un voisinage de $\overline{e}$. Soit V un voisinage de $\overline{e}$ dans G/H. Donc $\phi^{-1}(V)$ est un voisinage de e dans G et donc il existe un voisinage dans $\{U\}$ tel que $U \subset \phi^{-1}(V)$. Ainsi $\phi(U) \subset V$. ∎

Proposition 3.8. ([2], Proposition 16, page 58)

Soient G un groupe topologique et H un sous-groupe (topologique) de G.

$$G/H \text{ est discret } \iff H \text{ est ouvert.}$$

Preuve

Si G/H est discret alors chaque sous-ensemble est ouvert donc en particulier $\{H\}$. Or $H = \phi^{-1}(\{H\})$ donc H est ouvert.

Inversement si H est ouvert, alors xH l'est aussi pour tout $x \in G$ ce qui implique que $\{\dot{x}\}$, est ouvert dans G/H. D'où G/H est discret. ∎

Théorème 3.13. ([2], Théorème 10, page 59)

Soient G un groupe topologique et H un sous-groupe invariant de G. Le quotient G/H est un groupe topologique.

Preuve

On doit montrer que l'application $(\overline{x}, \overline{y}) \mapsto \overline{xy}^{-1}$ de $(G/H)^2$ dans G/H est continue. Soit W un voisinage ouvert de $\overline{xy}^{-1}$,tel que $\overline{x} = xH$ et $\overline{y} = yH$ où $x, y \in G$. On a $\phi^{-1}(W)$ est un ouvert dans G (car ϕ est continue) et $xy^{-1} \in \phi^{-1}(W)$, puisque G est un groupe topologique, il existe deux ouverts U et V tels que $x \in U\, y^{-1} \in V^{-1}$ et $xy^{-1} \in UV^{-1} \subset \phi^{-1}(W)$. Puisque ϕ est ouvert $\overline{xy}^{-1} \in \phi(U)\phi(V)^{-1} \subset \phi(\phi^{-1}(W)) = W$ et $\phi(U)$, $(\phi(V))^{-1} = \phi(V^{-1})$ sont ouverts car $U\, et\, V$ le sont. ∎

Exemple :

$\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ muni de la topologie quotient est un groupe topologique.

Dans la suite de cette section, on présente quelques théorèmes d'isomorphismes pour les groupes topologiques.

Définition 3.3. ([3], Définition 27, page 63)

Une application f d'un groupe topologique G dans un groupe topologique G', est dite homomorphisme (ou morphisme) de groupes topologiques si

1) f est un homomorphisme de groupes.

2) f est continue.

Exemple :

L'application
$$\begin{array}{rrcl} f: & (\mathbb{GL}_n(\mathbb{R}), .) & \longrightarrow & (\mathbb{R}^*, .) \\ & A & \longmapsto & f(A) = det(A) \end{array}$$

est un homomorphisme de groupe topologique. En effet,

$f(AB) = det(AB) = det(A)det(B) = f(A)f(B)$ et f est continue.

Définition 3.4. ([3], Définition 26, page 62)

Une application f d'un groupe topologique G dans un groupe topologique G' est dite isomorphisme de groupes topologiques si

1) f est un isomorphisme de groupes (algèbriquement).

2) f est bicontinue.

Théorème 3.14. ([5], Proposition 23, page 235)

Un homomorphisme de groupe (algèbrique) est continue (c'est-à-dire homomorphisme de groupes topologiques) si et seuleument si il est continue en un point .

Preuve

Supposons que f est continue en $a \in G$, si V' est un voisinage de $f(a)$ alors $V =$

$f^{-1}(V')$ est un voisinage de a. Donc si $x \in G$ on a : $f(xa^{-1}V) = f(x)f(a)^{-1}f(V) \subset f(x)f(a)^{-1}V'$ et donc f est continue en x. ∎

On rappelle que pour les groupes si $f : G \longmapsto G'$ est un homorphisme surjectif, alors $\ker(f)$ est sous-groupe invariant de G et $G/\ker(f) \cong G'$ et d'après ce qui précède $G/\ker(f)$ muni de la topologie quotient est un groupe topologique (Si G est un groupe topologique). La question est : si G et G' sont des groupes topologiques et f est un homomorphisme de groupes topologiques surjectif, a-t-on : $G/\ker(f) \cong G'$? La réponse en général est non, mais si f est ouverte on a bien $G/\ker(f) \cong G'$ comme le montre le théorème suivant.

Théorème 3.15. ([3], Théorème 12, page 64)
Soient G, G' deux groupes topologiques et f un homomorphisme surjectif ***ouvert****, de G dans G'. Alors*

$$G/\ker(f) \cong G'.$$

Preuve

On note $N = \ker(f)$ et définissons l'application suivante :

$$\begin{aligned} \overline{f} \ : \ G/N &\longrightarrow G' \\ xN &\longmapsto \overline{f}(xN) = f(x) \end{aligned}$$

$\overline{f}$ est un homomorphisme bien définie et bijectif, en effet :
Soit $xN, yN \in G/\ker(f), \overline{f}(xyN) = f(xy) = f(x)f(y) = \overline{f}(xN)\overline{f}(yN)$. Si $xN = yN$ alors ils existe $a, b \in \ker(f)$ tels que $xa = yb$, donc $\overline{f}(xN) = \overline{f}(yba^{-1}N) = f(yba^{-1}) = \overline{f}(yN)$ et la bijection est déja établit (premier théorème d'isomorphisme pour les groupes) .
Montrons que $\overline{f}$ est bicontinue :
soit U un ouvert de G' alors $\overline{f}^{-1}(U) = \phi(\overline{f}^{-1}(U))$ est un ouvert dans G/N car ϕ est ouverte et f continue.
De même si V est un ouvert de G/N alors $\phi^{-1}(V)$ est un ouvert de G et $\overline{f}(V) = f(\phi^{-1}(V))$ est un ouvert car f est supposé ouverte. Ainsi $\overline{f}$ est bicontinue et on conclut que $G/ker(f) \cong G'$. ∎

Théorème 3.16. ([4], Théorème 5.32, page 44)

Soient G un groupe topologique, A un sous-groupe de G et H un sous-groupe invariant de G. Si τ désigne l'isomorphisme $\tau(aH) = a(A \cap H)$ $a \in A$ décrit dans le deuxième théorème d'isomorphisme pour les groupes, alors τ est ouverte.

Preuve

Un ouvert de AH/H est un sous-ensemble de la forme $\{xH \mid x \in X\}$ avec $X \subset A$, tel que XH est un ouvert de AH considéré comme un sous-espace topologique de G. L'ensemble $\tau(\{xH \ : x \in X\})$ est l'ensemble $\{x(A \cap H) \ x \in X\}$ et puisque $X(A\cap H) = (XH)\cap A$ alors $X(A\cap H)$ est un ouvert de A pour sa topologie relative comme un sous-espace topologique de G. D'après la définition de la topologie quotient dans $A/(A\cap H)$, l'ensemble $\{x(A\cap H) \ : x \in X\}$ est un ouvert de $A/(A\cap H)$, ainsi τ est ouverte. ∎

On a vu pour les groupes (abstraits) que si G un groupe, A un sous-groupe invariant de G, alors AH/H et $A/(A\cap H)$ sont isomorphes, mais en général l'application τ définie par $\tau(aH) = a(A \cap H)$ n'est pas bicontinue. En fait τ est toujours ouverte comme le montre le théorème précédent et sous certaines conditions τ est un isomorphisme de groupe topologique comme le décrit le théorème suivant.

Théorème 3.17. ([4], Théorème 5.33, pages 44-45)

Soient G un groupe topologique et H un sous-groupe topologique de G. Si H est locallement compact, $\sigma -$ compact, alors

$$A/(H \cap A) \cong (AH/H).$$

Le troisième théorème d'isomorphisme est complétement analogue à celui des groupes (abstraits).

Théorème 3.18. ([2], Proposition 20, page 61)

Soit G un groupe topologique, H et M deux sous-groupes invariants de G tels que $H \subset M$, alors :

$$G/M \cong (G/H)/(M/H)$$

Preuve

Soit $\phi : G \longrightarrow G/H$ et $\psi : G/H \longrightarrow (G/H)(M/H)$ les surjections canoniques. D'après ce sui précède ϕ et ψ sont des homomorphismes ouverts. Il en est de même pour la composition $\phi \circ \psi : G \longrightarrow (G/H)(M/H)$ et on a $\ker(\phi \circ \psi) = M$. En appliquant le théorème 3.15 (1^{er} théorème d'isomorphisme pour les groupes topologiques) on obtient $G/M \cong (G/H)/(M/H)$ ∎

3.6 Connexité et compacité

Dans cette section on s'intéresse à quelques propriétés de groupes topologiques qui dépendent de la connexité du groupe considéré comme espace topologique. On commence par quelques propriétés concernant la composante connexe de l'identité.

Définition 3.5. *La composante connexe de l'identité est la plus grande partie connexe contenant l'identité e.*

Théorème 3.19. ([2], Proposition 11, page 55)

Soit G un groupe topologique. La composante connexe de l'identité est un sous-groupe invariant et fermé de G.

Preuve

La composante connexe C de e est un fermé. Montrons que C est un sous-groupe invariant de G. Soit $a \in C$, on a $a^{-1}C \subset C$ car $a^{-1}C$ est l'image de C par l'homéomorphisme $x \mapsto a^{-1}x$. Donc $a^{-1}C$ est une partie connexe contenant $e = aa^{-1}$ et $\cup_{a \in C} a^{-1}C = C^{-1}C \subset C$. Donc C est un sous-groupe de G, il reste à montrer que C est invariant. Puisque $x \mapsto a^{-1}xa$ $\forall a \in G$ est continue, alors la partie $a^{-1}Ca$ est connexe et $e \in a^{-1}Ca$ donc $a^{-1}Ca \subset C$, ainsi C est un sous-groupe invariant. ∎

Théorème 3.20. ([4], Théorème 7.2, page 60)

Soit G un groupe topologique et C la composante connexe de l'identité dans G. Alors $\forall a \in G \quad aC = Ca$ est la partie connexe de a.

Preuve

Soit T la composante connexe de $a \in G$; puisque $x \mapsto ax$ est continue alors aC est connexe et contient $a$de sorte que $aC \subset T$.

D'autre part, $x \mapsto a^{-1}x$ est continue donc $a^{-1}T$ est connexe et contient e. Ainsi $a^{-1}T \subset C$ ce qui implique $T \subset aC$ et alors $T = aC$. Finalement $aC = Ca$ car C est un sous-groupe invariant de G. ∎

Théorème 3.21. *Soient G un groupe topologique, C la composante connexe de l'identité e et U un voisinage de e. Alors $C \subset \bigcup_{n\geq 1} U^n$. En particulier si G est connexe on a $G = \bigcup_{n\geq 1} U^n$.*

Preuve

Soit V un voisinage symmétrique de e tel que $V \subset U$. Alors $\bigcup_{n\geq 1} V^n$ est un sous-groupe ouvert et fermé d'aprés Théorème 3.8 . Puisque C est connexe on a $C \subset \bigcup_{n\geq 1} V^n \subset \bigcup_{n\geq 1} U^n$.

Si G est connexe il est clair que $G = \bigcup_{n\geq 1} U^n$. ∎

Remarque :

Dans le cas où l'espace topologique G est connexe, la composante connexe de l'identité coincïde avec le groupe G et on dit que le groupe est connexe. D'autre part, si la composante connexe de l'identité est réduite au singleton $\{e\}$, on dit alors que le groupe G est **totallement dicontinu**.

Théorème 3.22. ([4], Théorème 7.3, page 60)

Soient G un groupe topologique et C la composante connexe de l'identité dans G. Alors G/C est un groupe topologique de Hausdorff totallement discontinu.

Preuve

G/C est bien un groupe puisque C est un sous-groupe invariant de G. Désignos par D la composante connexe de C.

Pour montrer que G/C est totallemant discontinu il suffit de montrer que la composante connexe de l'élément neutre C de G/C est $\{C\}$ i.e $D = \{C\}$ (cf Théorème

2.20). Puisque la projection canonique $\phi : G \longrightarrow G/C$ est ouverte, il en résulte que $\phi^{-1}(D)$ est connexe. Comme $C \in D$ alors $e \in \phi^{-1}(D)$ et donc la composante connexe C de $e \in G$ contient $\phi^{-1}(D)$. D'où $\phi(\phi^{-1}(D)) \subset \{C\}$ (car $\phi(C) = \{C\}$) de sorte que $D \subset \{C\}$.

Puisque $C \in D$ on a $D = \{C\}$ et G/C est totallement discontinu. ∎

Théorème 3.23. ([4], Théorème 7.14, page 63)

Soient G un groupe topologique et H un sous-groupe de G. Si H et G/H sont connexes, alors G est connexe.

Preuve

Supposons que G est non connexe c'est-à-dire $G = U \cup V$ avec $U \cap V = \emptyset$, puisque H est connexe, chaque classe modulo H est inclu dans U ou dans V. Donc $G/H = \{xH\ : xH \subset U\} \cup \{xH\ : xH \subset V\} = \{xH\ : x \in U\} \cup \{xH\ : x \in V\}$ ce qui implique que G/H est l'union disjointe de deux ouverts, ce qui contredit le fait que G/H est connexe. Ainsi G est connexe . ∎

Exemple d'une partie non connexe de $M_n(\mathbb{R})$:

$\mathbb{GL}_n(\mathbb{R})$ est une partie non connexe de $M_n(\mathbb{R})$. En effet, supposons que $\mathbb{GL}_n(\mathbb{R})$ est connexe. Posons $G = \{det(A) \,|\, A \in \mathbb{GL}_n(\mathbb{R})\}$ et soient $A, B \in G$ tels que $det(A) > 0$ et $det(B) < 0$; puisque l'application det est continue alors G est connexe comme image de $\mathbb{GL}_n(\mathbb{R})$ par l'application det. Alors nécessairement $[det(B), det(A)] \subset G$ et donc $0 \in G$, contradiction. Par conséquent, $\mathbb{GL}_n(\mathbb{R})$ est non connexe.

On rappelle qu'un espace topologique est locallement compact, s'il est séparé et tout point admet un voisinage dont l'adhérence est compact.

Proposition 3.9. ([2], Proposition 1, page 67)

Un groupe topologique est locallement compact si et seulement si il existe un voisinage compact de l'identité.

Preuve

Soit G un groupe topologique locallement compact, alors il existe un voisinage U

compact de l'identité tel que $\overline{U}$ est compact.

Inversement, s'il existe un voisinage compact U de l'identité, alors il existe un voisinage V de e tel que : $V^2 \subset U$, On a $\overline{V} \subset V^2 \subset U$ (si $x \in \overline{V}$ alors xV^{-1} est voisinage de x qui rencontre H c'est-à-dire $xV^{-1} \cap V \neq \emptyset$ i.e $x \in VV = V^2$) donc $\overline{V}$ est compact car c'est un sous-ensemble fermé d'un compact $\overline{U}$ et aussi un voisinage de l'identité. Pour tout $x \in G$, xV est un voisinage de x et $\overline{xV} = \overline{Vx}$ est compact car les translations sont des homéomorphismes. ∎

Théorème 3.24. ([2], Théorème 11, page 60)

Soient G un groupe topologique de Hausdorff et H un sous-groupe topologique de G. Alors :

1) H est compact si G est compact et H est fermé.

2) H est locallement compact si G est locallement compact et H fermé.

Preuve

La propriété 1) est connue pour tout espace topologique.

2) Soit U un voisinage de l'identité tel que $\overline{U}$ est compact, alors $U \cap H$ est un voisinage de e dans H et la fermeture de $U \cap H$ dans H est égale à sa fermeture dans G puisque H est fermé. Or $\overline{U \cap V}$ est un sous-ensemble fermé de $\overline{U}$ qui est compact, alors $\overline{U \cap V}$ est compact. D'où H est locallement compact. ∎

Le théorème suivant montre que la compacité est présérvée par passage au quotient.

Théorème 3.25. ([2], Théorème 11, page 60)

Soient G un groupe topologique et H un sous-groupe fermé invariant de G. Alors :

1) G/H est compact si G est compact.

2) G/H est locallement compact si G est locallement compact.

Preuve

1) G/H est compact puisque c'est l'image d'un espace compact par l'application continue $\phi : G \mapsto G/H$ qui est surjective.

2) Soit U un voisinage compact de e tel que $\overline{U}$ est compact. $\phi(U)$ est un voisinage

de $\dot{e}$ l'identité de G/H et $\phi(\overline{U})$ est un compact et donc fermé dans G/H (H est fermée et donc G/H est de Hausdorff car il est T_1), puisque $\overline{\phi(U)} \subset \overline{\phi(\overline{U})} = \phi(\overline{U})$ donc $\overline{\phi(U)}$ est un sous-ensemble fermé d'un compact alors il est compact. Ainsi on a trouvé un voisinage de $\dot{e}$ dont l'adhérence est compact ce qui montre que G/H est locallemnet compact. ∎

Le théorème suivant et son corollaire décrivent les conditions de la présérvation de la compacité locale pour les groupes topologiques.

Théorème 3.26. ([2], Théorème 4, page 69)
Soient E un groupe topologique locallement compact et F un groupe topologique de Hausdorff. Si f est un homomorphisme continue et presque ouvert, de E dans F, alors F est locallement compact.

Preuve

Il suffit de montrer que l'identité de F admet un voisinage compact.
Soit U un voisinage compact de l'identité de E, alors $f(U)$ est un sous-ensemble de F fermé compact car f est continue U et F est de Hausdorff. Comme f est un homomorphisme presque ouvert alors $\overline{f(U)} = f(U)$ est un voisinage de l'identité dans F ce qui achève la preuve . ∎

Corollaire 3.3. ([2], Corollaire 4, 69)
Soient E un groupe topologique locallement compact et F un groupe topologique. Si f est un homomorphisme continue et ouverte de E dans F, alors F est locallement compact.

Exemples :

1. Le groupe topologique $\mathbb{R}^n$ est locallement compact.

2. $\mathbb{O}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{GL}_n(\mathbb{R}) \mid AA^T = I_n\}$ est un sous-groupe compact de $\mathbb{GL}_n(\mathbb{R})$ avec A^T désigne le transposé de la matrice A et I_n la matrice identité. En effet, $\mathbb{O}_n(\mathbb{R}) \subset \mathbb{GL}_n(\mathbb{R})$, car $\forall A \in \mathbb{O}_n(\mathbb{R})$ $det(A) = \mp 1$ et $\mathbb{O}_n(\mathbb{R}) \neq \emptyset$ puisque $I_n \in \mathbb{O}_n(\mathbb{R})$. Soit $A, B \in \mathbb{O}_n(\mathbb{R})$ montrons que $AB^{-1} \in \mathbb{O}_n(\mathbb{R})$?, $(AB^{-1})^T = (B^{-1})^T A^T = (B^T)^{-1} A^{-1} = (B^{-1})^{-1} A^{-1} = (AB^{-1})^{-1}$ ainsi $AB^{-1} \in \mathbb{O}_n(\mathbb{R})$ et donc $\mathbb{O}_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de $\mathbb{GL}_n(\mathbb{R})$.

Pour montrer la compacité il suffit de montrer que $\mathbb{O}_n(\mathbb{R})$ est fermé borné.

En effet, une matrice de $A \in \mathbb{O}_n(\mathbb{R})$ est identifiée à un vecteur $v \in \mathbb{R}^{n^2}$ tel que $v = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ où les a_i, $i = 1, ...n$ désignent les lignes de A. Puisque $\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}^2 = 1$ $\forall i \in \{1, 2, ..., n\}$, alors $||v||_2 = n$ est donc $\mathbb{O}_n(\mathbb{R})$ est borné. Il reste à montrer qu'il est fermé, On a $\mathbb{O}_n(\mathbb{R}) = f^{-1}\{I_n\}$ avec $f : A \mapsto AA^T$ continue ainsi le théorème de Borel-Lebesgue montre que $\mathbb{O}_n(\mathbb{R})$ est compact.

Théorème 3.27. ([2], Théorème 5, page 70)

Tout voisinage U compact, ouvert de l'identité d'un groupe topologique G contient un sous-groupe compact, ouvert et fermé.

Proposition 3.10. ([2], Proposition 5, page 71)

La composante connexe de l'identité e d'un groupe topologique locallement compact est l'intersection de tous les sous-groupes ouverts de G.

Preuve

Si H est un sous-groupe ouvert de G, alors H est fermé. Puisque $e \in H$ alors H contient la composante connexe de l'identité. Donc C est contenu dans tout sous-groupe ouvert de G ce qui montre que $C \subset \bigcap_{H\, sous\, groupe\, de\, G} H$.

Inversement, soit $x \notin C$; le groupe quotient G/C étant totallement discontinu et locallement compact, d'après le théorème précédent il existe un sous-groupe $K = \{uC \mid u \in U\}$ ne contenant pas l'élément xC de G/C. On prend U le voisinage de e dans G et on conclut que UC est un sous-groupe ouvert de G ne contenant pas x, Ainsi C est l'intersection de tous les sous-groupe ouverts de G. ∎

Théorème 3.28. ([2], Théorème 8, page 72)

Soit G un groupe topologique locallement compact, Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1) G est connexe.

2) G n'a pas de sous-groupe ouvert propre.

3) Pour tout voisinage U de l'identité e, $\bigcup_{n\geq 1} U^n = G$.

Preuve

1)$\Rightarrow$2) Découle de la définition de la connexité et du fait que tout sous-groupe ouvert est fermé.

2)$\Rightarrow$3) D'aprés Théorème 3.21 .

3)$\Rightarrow$1) Conséquence de la proposition précdédente. ∎

Bibliographie

[1] Lahcen Oukhtite, cours d'algèbre linéaire (MIP), FST-Fès 2016-2017.

[2] Taqdir Hussain, *introduction to topological groups*, W.B Saubders company 1966.

[3] L.Pontrjagin, *Topological groups*, Gordon and Breach Science Publishers, 1986.

[4] Edwin Hewitt et Kenneth A. Ross *Abstract harmonic analysis* Volume 1 : structure of topological groups, integration theory, Group representation, Springer-Verlag 1979.

[5] Nicolas Bourbaki, *elements of mathematics, General topology* Chapters 1-4. Hermann 1966.

[6] Hervé Queffelec, *Topologie, cours et exercices corrigés.* $3^{ème}$ édition Dunod. Paris 2002.