كلية العلوم و التقنيات فاس

Faculté des Sciences et Techniques de Fès

جامعة سيدي محمد بن عبد الله

Université Sidi Mohamed Ben Abdellah


**Licence Mathématiques et Applications (MA)**

**MEMOIRE DE FIN D'ETUDES**

**Pour l'obtention du Diplôme de Licence Sciences et Techniques (LST)**

# Groupes topologiques


- Réalisé par : MIMI Mohammed
- Encadré par : Pr. EL KHAOULANI EL IDRISSI Rachid


**Soutenu le 07 juin 2018**

**Devant le jury composé de :**

- **Pr. EL KHAOULANI EL IDRISSI Rachid**
- **Pr. EZZAKI Fatima**
- **Pr. ETTAOUIL Mohamed**

**Année Universitaire 2017-2018**

## Résumé

La théorie de groupes topologiques concerne à la fois la structure algébrique et la notion de topologie. La combinaison de ces deux derniers permet d'avoir des résultats intéressants. Dans ce rapport on expose les notions de base des groupes topologiques, de sous-groupe, groupes topologiques quotients, d'homomorphisme de groupes ainsi que des propriétés topologiques telles que la connexité et la locale compacité en vue d'appliquer les outils de l'algèbre dans l'étude des espaces topologiques, ainsi que de dégager la différence entre les structures algébriques et topologiques.

## Abstract

The theory of topological groups concerns both the algebraic structure and the notion of topology. The combination of these last two makes it possible to have interesting results. In this report the basic notions of topological groups, subgroups, topological groups quotients, group homomorphism and topological properties such as connectivity and local compactness are presented in order to apply the tools of the algebra in the study of topological spaces, as well as to distinguish the difference between algebraic and topological structures.

## Remerciements

Au terme de ce travail, je voudrais exprimer mes remerciements et ma profonde reconnaissance à tout ce qui ont contribué de prêt ou de loin à sa réalisation.

# Table des matières

# Introduction

La théorie des groupes topologiques, bien que de création récente, constitue aujourd'hui une branche importante des mathématiques, elle englobe des théories comme la mesure de Haar, la théorie du produit de composition, les séries et intégrales de Fourier, les fonctions presque-périodiques et les groupes d'opérateurs unitaires.

On connaît les principales étapes de son développement, d'abord l'extension de la théorie des séries de Fourier aux groupes de Lie compacts par F. Peter et H. Weyl, ensuite la démonstration de l'existence d'une mesure invariante par A. Haar, puis la théorie des fonctions presque périodiques due à J. von Neumann, après la théorie de la dualité pour les groupes abéliens par L. Pontryagin et A. R. van Kampen, enfin l'année 1940 vit apparaître le traité fondamental d'André Weil qui, outre une systématisation à peu près parfaite des résultats antérieurs, apportait une construction complète de l'analyse harmonique sur les groupes abéliens.

A partir de 1933 la théorie des groupes topologiques à celle de l'analyse Faurier abstraite. Cette évolution est rendue possible grâce à l'extension de l'intégrale de Lebesgue aux groupes topologiques localement compacts. La première construction est due à Haar sur les groupes métriques, séparables, localement compacts. Après d'autre travaux, notamment ceux de Von Neumann, elle est donnée pour le cas d'un groupe localement compacts arbitraire dans la monographie de Weil dans *L'intégration dans les groupes topologiques et ses applications.*

Le présent travail aborde la théorie de groupes topologiques. Cette théorie englobe tous ce qu'est algèbre et topologie, et bénéficie de la richesse mathématique des deux, elle permet de donner des propriétés topologiques (homogénéité, connexité, compacité, ...) sur les groupes ainsi que de considérer des espaces topologiques intéressants (tore, cercle,...) comme des quotients d'espace topologiques par un groupe topologiques.

Nous rappelons en première partie des notions préliminaire de topologie générale : les ouverts, voisinages, applications continues, connexité, compacité et les axiomes de séparations, sans oublier un petit rappel concernant les groupes topologiques : les sous-groupes, groupes normales et les groupes quotient.

Dans la deuxième partie nous introduisons au premier chapitre les notions de groupes topologiques en soulignant les propriétés l'homogénéité, voisinage et de séparation. Dans Le deuxième chapitre, on expose la notion des sous-groupes topologiques (ouvert, adhérence, ...) en donnant quelque exemples explicatif. Au troisième chapitre on s'intéresse aux groupes topologiques quotients, en expliquant les notions de séparation et compacité. L'isomorphisme de groupe topologique et les trois théorèmes d'isomorphisme sont donnés quatrième chapitre. Et on a abordé le concept du connexité au cinquième chapitre et son interaction avec les concepts précédents, le dernier chapitre est consacré à l'étude des espaces homogènes d'un Groupe topologique et groupe topologique localement compacts.

# Préliminaire

# Rappels de topologie générale

## 1.1 Espaces topologiques

**Définition 1.** Une structure topologique, ou topologie, est définie sur un ensemble $E$ par la donnée d'une famille $\tau$ de parties de $E$, appelées parties ouvertes ou ouverts de $E$, vérifiant les propriétés suivantes, appelées **axiomes des ouverts**.

O1. L'ensemble $E$ et la partie vide $\emptyset$ appartiennent à la famille $\tau$, i.e., sont des ouverts.

O2. Toute réunion (finie ou infinie) d'ouverts est un ouvert.

O3. L'intersection de deux ouverts (et, par suite, toute intersection finie d'ouverts) est un ouvert. Un ensemble $E$ muni d'une topologie est appelé espace topologique.

**Définition 2.** Soit $E$ un espace topologique. Une partie $F$ de $E$ est dite fermée si son complémentaire $F^c = E \setminus F$ (relativement à $E$) est ouverte.

**Axiomes des fermés.** La famille $\tau$ des parties fermées de $E$ vérifie les propriétés suivantes, appelées axiomes des fermés.

F1. L'ensemble $E$ et la partie vide $\emptyset$ appartiennent à la famille $\mathcal{F}$, i.e., sont fermés.

F2. Toute intersection (finie ou infinie) de fermés est un fermé.

F3. La réunion de deux fermés (et, par suite, toute réunion finie de fermés) est un fermé.

**Définition 3.** Soit $E$ un espace topologique, et $x_0$ un point de $E$. On appelle voisinage de $x_0$ toute partie de $E$ qui contient un ouvert $U$, qui lui-même contient $x_0$. Plus généralement, soit $A$ une partie non vide de $E$. On appelle voisinage de $A$ toute partie de $E$ qui contient un ouvert qui lui-même contient $A$.

**Axiomes des voisinage.** Pour tout point $x \in E$, on note $\mathcal{V}(x)$ la famille de tous les voisinages de $x$. Les familles $\mathcal{V}(x)$ de parties de $E$, indexées par $x \in E$, vérifient les propriétés suivantes, appelées axiomes des voisinages.

V1. Pour tout $x \in E$, $\mathcal{V}(x)$ est non vide et tout élément de $\mathcal{V}(x)$ contient $x$.

V2. Toute partie de $E$ qui contient une partie élément de $\mathcal{V}(x)$ est elle-même élément de $\mathcal{V}(x)$.

V3. L'intersection de deux éléments de $\mathcal{V}(x)$ (donc aussi l'intersection d'une famille finie d'éléments de $\mathcal{V}(x)$ est élément de $\mathcal{V}(x)$.

V4. Tout élément $V$ de $\mathcal{V}(x)$ contient un élément $W$ de $\mathcal{V}(x)$ tel que, pour tout $y \in \mathcal{W}$, $V$ soit élément de $\mathcal{V}(y)$.

**Définition 4.** Soit $E$ un espace topologique. On note $\tau$ l'ensemble des ouverts de $E$. On appelle base d'ouverts de l'espace topologique $E$, toute sous-famille $B$ de $\tau$, telle que tout élément de $\tau$, c'est-à-dire tout ouvert, soit réunion d'éléments de $B$.

**Définition 5.** Soit $E$ un espace topologique. On note $\tau$ l'ensemble des ouverts de $E$. Soit $x$ un point de $E$. On note $\mathcal{V}(x)$ l'ensemble des voisinages de $x$. On appelle système fondamental de voisinages de $x$, ou base de voisinages de $x$, une famille de voisinages de $x$, c'est-à-dire un sous-ensemble $\mathcal{W}(x)$ de $\mathcal{V}(x)$, tel que tout élément $V$ de $\mathcal{V}(x)$ contienne un élément $W$ de $\mathcal{W}(x)$.

**Définition 6.** Soit $(E, \tau)$ un espace topologique et soit $A \subset E$. On appelle topologie induite par $\tau$ sur $A$ la topologie $\tau_A$ dont la famille d'ouverts est

$$\tau_A = \{O \cap A, O \in \tau\}$$

On dit que $(A, \tau_A)$ est un sous-espace topologique de $(X; \tau_a)$.

**Définition 7.** Soit $E$ un espace topologique et $A$ une partie de $E$.

**a)** Intérieur. — Un point $x \in E$ est dit intérieur à $A$ si $A$ est voisinage de $x$. L'ensemble des points intérieurs à $A$ est appelé intérieur de $A$ et noté $\overset{\circ}{A}$.

**b)** Un point $x \in E$ est dit adhérent à $A$ si tout voisinage de $x$ rencontre $A$. L'ensemble des points adhérents à $A$ est appelé adhérence de $A$ et noté $\overline{A}$.

**c)** Un point $x \in E$ est dit point frontière de $A$ s'il est adhérent à la fois à $A$ et à son complémentaire (relativement à $E$). L'ensemble des points frontières de $A$ est appelé frontière de $A$ et noté $Fr(A)$.

**Propriété 1.**

**a)** $\overset{\circ}{A}$ est le plus grand ouvert contenu dans $A$.

**b)** $A$ est ouvert $\Leftrightarrow A = \overset{\circ}{A}$

**c)** $\overline{A}$ est le plus grand fermé contenant $A$.

**d)** $A$ est fermé $\Leftrightarrow A = \overline{A}$

**e)** $A \subseteq \overline{A}$ , $\overline{\overline{A}} = A$ , $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ , $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$,

**f)** $Fr(A) = Fr(A^c) = \overline{A} \cap \overline{A^c}$

**g)** $Fr(A)$ est une partie fermé.

**h)** $\overline{A}$ , $Fr(A)$ et $\overline{A^c}$ forme une partition de $E$.

**i)** $\overline{A} = \overset{\circ}{A} \cup Fr(A)$ , $\overline{A^c} = \overset{\circ}{A^c} \cup Fr(A)$ , $\overline{A^c} = \overset{\circ}{A}{}^c$ , $\overline{A}^c = \overset{\circ}{A^c}$

**Définition 8.** Une partie $A$ d'un espace topologique $E$ est dite dense si son adhérence $\overline{A}$ est $E$. Plus généralement, une partie $A$ d'un espace topologique $E$, contenue dans une autre partie $B$ de $E$, est dite dense dans $B$ si son adhérence contient $B$.

## 1.2 Applications continues

**Définition 9.** Une application $f$ d'un espace topologique $E$ dans un autre espace topologique $F$ est dite continue en un point $x \in E$, si pour tout voisinage $V$ de $f(x)$ (dans $F$), il existe un voisinage $U$ de $x$ (dans $E$), tel que $f(U) \subset V$.

Cela équivaut à dire que pour tout voisinage $V$ de $f(x)$ (dans $F$), la partie (de l'espace topologique $E$) $f^{-1}(V) = \{y \in E; f(y) \in V\}$ est un voisinage de $x$ (dans $E$).
Une application $f$ d'un espace topologique $E$ dans un autre espace topologique $F$ est dite continue, si elle est continue en tout point de $E$.

**Définition 10.** $E$ et $F$ deux espaces topologiques, une fonction $f$ de $E$ vers $F$ est continue si l'image réciproque d'un ouvert est un ouvert.

**Théorème 1.** soient $E$, $F$ et $G$ trois espaces topologiques. si $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ sont deux fonction continues, alors $g \circ f : E \longrightarrow G$ est continue.

**Théorème 2.**
Soient $E$ et $F$ deux espaces topologiques, et $f : E \longrightarrow F$ une application. Les propriétés suivantes sont équivalentes.

i) L'application $f$ est continue.
ii) Pour toute partie $A$ de $F$, $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.
iii) Pour tout fermé $S$ de $F$, $f^{-1}(S)$ est un fermé de $F$.
iv) Pour tout ouvert $U$ de $F$, $f^{-1}(U)$ est un ouvert de $E$.

**Définition 11.** Un homéomorphisme est une bijection continue, d'inverse continu.

**Propriété 2.** tout homéomorphisme est une application ouverte et fermée.

## 1.3 Connexité

**Définition 12.** On dira que l'espace topologique $(X; \tau)$ est connexe s'il vérifie l'une des conditions équivalentes suivantes.

1. Si $X$ est réunion de deux ouverts disjoints alors l'un de ces deux ouverts est vide.
2. Si $X$ est réunion de deux fermés disjoints alors l'un de ces deux fermés est vide
3. Si l'on considère $\{0, 1\}$ muni de la topologie discrète et $f : X \longrightarrow \{0, 1\}$ une application continue, alors $f$ est constante sur $X$.
4. Les seuls ensembles à la fois ouverts et fermés de $X$ sont $X$ lui même et l'ensemble vide.

**Propriété élémentaire**

a) On dit qu'une partie $A$ de $X$ est connexe si $(A, \tau_A)$ est connexe ($\tau_A$ topologie induite), Cela équivaut à dire qu'une partie d'un espace connexe est dite connexe si elle est connexe dans sa topologie relative.
b) Toute famille $(A_i)_{i \in I}$ de parties connexes d'un espace topologique $(X; \tau\ )$ ayant deux à deux une intersection non vide a une réunion connexe.
c) Si une partie $A$ d'un espace topologique $(X; \tau)$ est connexe alors son adhérence $\overline{A}$ est connexe.
d) Un produit d'espaces connexes est connexe.
e) L'image d'un connexe par une application continue est connexe.
f) Un espace topologique $(X; \tau)$ est connexe si et seulement si toute fonction continue de $X$ dans $\{0, 1\}$ est constante.

g) Soit $x$ un élément de $X$. On appelle composante connexe de $x$ la réunion des sous ensembles connexes de $X$ contenant $x$.

h) Soit $x$ un élément de $X$.
   1. La composante connexe de $x$ est le plus grand connexe de $X$ contenant $x$.
   2. La composante connexe de $x$ est une partie fermée de $X$.

i) Un espace topologique $X$ est totalement discontinu si la composante connexe de tout point $x$ de $X$ est le singleton $\{x\}$.

## 1.4 Compacité

**Définition 13. (Borel-Lebesgue)**
On dit qu'un espace topologique $(X, \tau)$ est compact s'il est séparé et si de tout recouvrement d'ouverts on peut extraire un sous-recouvrement fini :

$$\left(X = \bigcup_{i \in I} O_i\right) \Rightarrow \left(\exists J \subset I, Jfini, X = \bigcup_{i \in J} O_i\right)$$

**Propriété élémentaire**

a) Une partie $A$ d'un espace topologique séparé $(X, \tau)$ est dite compacte si $(A, \tau_A)$ avec la topologie induite est compact.Cela équivaut à dire qu'une partie d'un espace compacte est dite compacte si elle est compacte dans sa topologie relative.

b) Dans un espace topologique séparé, une partie compacte est fermée.

c) Si $(X, \tau)$ est un espace topologique compact et $F$ est un fermé de $X$ alors $F$ est compact

d) Dans un espace topologique séparé, une union finie de compacts est compacte.

e) Dans un espace topologique, une intersection quelconque de parties compactes est compacte.

f) Un produit d'espaces topologiques compacts est compact.

g) Soit (X ; $\tau$ ) et (X' ; $\tau$' ) deux espaces topologiques séparés. L'image d'un compact par une application continue de X dans X' est compacte.

h) Un espace est dit localement compact s'il est séparé et si tout point de cet espace possède un voisinage ouvert à clôture compacte.

i) Si $X$ est localement compact et si $X_n \subset X_{n-1} \subset ... \subset X_0 = X$ est une suite d'espaces topologiques tels que $X_i$ est soit fermé soit ouvert dans $X_{i-1}$, alors $X_n$ est localement compact.

## 1.5 Espaces topologiques séparés

Les rappels ci-dessous concernent principalement les axiomes de séparations. On en trouve plusieurs définitions, celle qui est choisie ici est connue sous le nom d'axiomes de séparations d'Alexandroff et Hopf

**Définition 14.** Soit $(X, \tau)$ un espace topologique et les axiomes suivants :

$T_0$) $\forall x_1, x_2 \in X$ avec $x_1 \neq x_2$, il existe un ensemble ouvert dans $X$ contenant seulement l'un des deux points.

$T_1$) $\forall x_1, x_2 \in X$ avec $x_1 \neq x_2$, $\exists V_1$ voisinage de $x_1$ et $V_2$ voisinage de $x_2$ t.q. $x_1 \notin V_2$ et $x_2 \notin V_1$.

$T_2$) $\forall$ $x_1, x_2 \in$ X avec $x_1 \neq x_2$, $\exists$ $V_1$ voisinage de $x_1$ et $V_2$ voisinage de $x_2$ t.q. $V_1 \cap V_2 = \emptyset$.

$T_3$) $\forall x \in X$, $\forall F$ fermé de $X$ avec $x \notin F$ , $\exists V$ voisinage de $x$ et $U$ voisinage de $F$ t.q. $V \cap U = \emptyset$.

$T_4$) $\forall x \in X$ , $\forall F$ fermé de $X$ avec $x \notin F$, $\exists f : X \longrightarrow [0, 1]$ continue t.q. $f(x) = 0$ et $f(F) = 1$.

$T_5$) $\forall F_1, F_2$ fermés de $X$ avec $F_1 \cap F_2 = \emptyset$ , $\exists U_1$ voisinage de $F_1$ et $U_2$ voisinage de $U_2$ t.q. $U_1 \cap U_2 = \emptyset$.

Si $(X, \tau)$ respecte l'axiome $T_i$, on dit que $(X, \tau)$ est un espace topologique $T_i$.
Dans le cas de $T_2$ on dit aussi l'espace topologique est de Hausdorff. et pour $T_3$ On dit que l'espace topologique est régulier , et complètement régulier s'il est $T_4$ ou normal s'il est $T_5$.

**Proposition 1.**
Soit $(X, \tau)$ un espace topologique de Hausdorff localement compact, $K$ une composante connexe compacte, alors,
Pour tout ouvert $G$ tel que $K \subseteq G$, il existe $P$ ouvert et compact tel que $K \subseteq P \subseteq G$.

## 1.6 Groupes

**Définition 15.** Une loi de composition interne $(G, *)$ est dite un groupe si les axiomes suivantes sont vérifiées :

i) la loi $*$ est associative .

ii) il existe un élément neutre.

iii) tout élément est symétrisable.

**Définition 16.** un ensemble $H$ d'un groupe $G$ est appelé sous-Groupe de $G$ si $H$ est un groupe, et $H$ est contenu dans $G$, et si la loi de $H$ est la restriction de celle de $G$.

**Théorème 3.** Un sous ensemble $H$ d'un groupe $(G, \cdot)$ est un sous-groupe de $G$ si et seulement si on a :

i) $H \neq \emptyset$

ii) $\forall (x, y) \in H$ , on a $xy^{-1} \in H$ .

**Définition 17. Groupe normal**
un sous-groupe $H$ de $G$ est dit distingué ou normal ou invariant et on note $H \triangleright G$ si pour tout $x \in G$, on a $Hx = xH$.

l'ensemble quotient est noté $G/H = \{xH/x \in G\}$. On a visiblement les équivalences suivantes :

pour tout $x \in G$, on a :

$$\begin{aligned} Hx = xH &\Leftrightarrow \forall x \in G, xHx^{-1} = H \\ &\Leftrightarrow \forall x \in G, x^{-1}Hx = H \\ &\Leftrightarrow \forall x \in G, x^{-1}Hx \subset H \\ &\Leftrightarrow \forall x \in G, x^{-1}hx \in H \end{aligned}$$

**Théorème 4. Groupe quotient** Soit $H$ un sous-groupe distingué de $G$. l'ensemble quotient $G/H$ est un groupe pour la loi $(\overline{a}, \overline{y}) \longmapsto \overline{xy}$, ou $\overline{z}$ désigne la classe d'un élément $z$ de $G$.

**Définition 18.** Soient $(G, *)$ et $(H, T)$ deux groupes. Une application de $G$ dans $H$ est un "morphisme de groupes" lorsque :

$$\forall x, y \in G, f(x * y) = f(x)Tf(y).$$

- Si $G = H$ et $* = T$ , on parle d'endomorphisme.
- Si $f$ est bijective, on parle d'isomorphisme.
- Si $f$ est un endomorphisme bijectif, on parle d'automorphisme.

On appelle noyau du morphisme $f : G \longrightarrow H$ le sous-groupe de $G$

$$ker(f) = f^{-1}(e_H) = x \in G; f(x) = e_H$$

On appelle image du morphisme $f : G \longrightarrow H$ le sous-groupe de $H$

$$Im(f) = f(G) = f(x); x \in G$$

**Proposition 2.** Un morphisme de groupes $f : G \longrightarrow H$ est
injectif si et seulement si $ker(f) = \{e_G\}$ ;
surjectif si et seulement si $Im(f) = H$.

**Définition 19.** Le centre (ou commutateur) $Z(G)$ d'un groupe $G$ est la partie de $G$ formée des éléments de $G$ qui commutent à tous les autres éléments de $G$, soit :

$$Z(G) = \{h \in G \,/\, \forall g \in G,\ gh = hg\}$$

Un groupe $G$ est commutatif si, et seulement si, $Z(G) = G$.

# Groupes topologiques

# Groupes topologiques

**Définition 20.** Un groupe topologique est un triple $(G, \cdot, \tau)$ tel que :
  i) $(G, \cdot)$ est un groupe.
  ii) $(G, \tau)$ est un espace topologique.
  iii) L'application $\varphi : G \times G \longmapsto G$ qui à $(x, y)$ fait correspondre $xy^{-1}$ est continue.

**Remarque 1.** Si aucune confusion n'est possible on parlera d'un groupe topologique G, c'est à dire on identifie le groupe topologique $(G, ., \tau)$ avec son ensemble sous-jacent $G$. On remarque que au lieu de demander la continuité de $(x, y) \mapsto xy^{-1}$ pourrait demander la continuité de $(x, y) \mapsto xy$ et $x \mapsto x^{-1}$
ces applications seront appelées respectivement composition et inversion.

**Exemple 1.** le groupe additif des réels $\mathbb{R}$ est un groupe topologique, puisque l'application $(x, y) \to x - y$ est continue.

**Exemple 2.** Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On munit $M_n(\mathbb{K}) \cong \mathbb{K}^{n^2}$ de la topologie usuelle. L'application $A \to detA$ est continue, puisque c'est un polynôme en les coefficients $a_{i,j}$ de $A$. Donc le groupe

$$GL_n(\mathbb{K}) = \{A \in M_n(\mathbb{K}) : detA \neq 0\}$$

est un ouvert de $M_n(\mathbb{K})$. L'application $(A, B) \to AB$ est continue, puisque chaque coefficient

$$(AB)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}\ b_{k,j}$$

est une fonction continue (un polynôme quadratique) en les coefficients de $A$ et $B$.
Soit $C(A)$ la matrice des cofacteurs de $A$, c'est-à-dire $C(A)_{i,j}$ est le déterminant de la matrice de taille $n - 1$ obtenue à partir de $A$ en supprimant la i-ème ligne et la j-ème colonne. c'est un polynôme homogène de degré $n - 1$ en les coefficients de $A$. D'après la formule

$$A^{-1} = \frac{1}{detA} C^t(A)$$

où $C^t(A)$ désigne la transposée, on voit que $A \to A^{-1}$ est une application continue. Donc $GL_n(\mathbb{K})$ est un groupe topologique.

Soit G un groupe topologique, pour tout $g \in G$, on définit la *transformation à gauche* $L_g : G \longrightarrow G$ par $L_g(x) = gx$ et la *transformation à droite* $R_g : G \longrightarrow G$ par $R_g(x) = xg$.

**Proposition 3.**
pour tout $g \in G$ , les transformation $L_g$ et $R_g$ sont des homéomorphismes de $G$ sur $G$ .

*Démonstration.*
L'application $L_g$ clairement bijective, et $L_g$ est continue puisque $L_g = \varphi(g, x^{-1})$ qu'est continue d'après $(iii)$, et d'autre part $L_g^{-1}$ est continue car $L_g^{-1} = L_{g^{-1}}$.
de même pour $R_g$. □

**Proposition 4.**
Tout groupe topologique est homogène,
i.e. $\forall x, y \in G$, $\exists f$ un homéomorphisme t.q. $f(x) = y$ .

*Démonstration.*
on peut choisir $f = L_{(b^{-1})a}$ □

**Remarque 2.** L'homogénéité des groupes topologiques est très utile dans la pratique car il suffit de vérifier une propriété locale en un point (l'élément neutre par exemple) afin de la démontrer sur tout le groupe.

Soit $A$ et $B$ des sous-ensemble d'un groupe topologique $G$, on notera :
$A^{-1} = \{a^{-1},\ a \in A\}$
$AB = \{a \times b,\ a \in A,\ b \in B\}$
$aB = \{a \times b,\ b \in B\}$
$Ab = \{a \times b,\ a \in A\}$

**Propriété 3.**
1) Si $A$ ou $B$ est un sous-ensemble ouvert de $G$, alors $AB$ est un sous-ensemble ouvert de $G$.
2) Si $A$ est ouvert de $G$, alors $A^{-1}$ est un ouvert de $G$.

*Démonstration.*
1) $AB = \underset{b \in B}{\cup} R_b(A)$ , et chaque $R_b(A)$ est ouvert puisque $R_b$ est un homéomorphisme de $G$ sur $G$.
(Si c'est $B$ qui est ouvert, le résultat découle de légalité $AB = \underset{a \in A}{\cup} R_a(B)$ ).
2) de même on a $A^{-1} = \underset{a \in A}{\cup} R_{a^{-2}}(A)$.

□

Dans la suit, on appellera voisinage d'un point $x$ d'un espace topologique $X$, un sous ensemble ouvert de $X$ contenant $x$, on note aussi $e$ l'élément neutre du groupe $G$.

**Définition 21.** Soit $G$ un groupe topologique, un voisinage $V$ est dit symétrique si $V = V^{-1}$.

**Proposition 5.**
soit $G$ un groupe topologique, alors, il existe une base d'ouverts symétriques. En particulier, il existe un système fondamental de voisinages symétrique en chaque point de $G$.

*Démonstration.*
Soit $U$ un ouvert de $G$, alors $U^{-1}$ est également ouvert ainsi que $U \cap U^{-1} =: V$ et on a bien $V \subseteq U$ et $V = V^{-1}$ . □

**Proposition 6.**
Soit $G$ un groupe topologique,
$\mathcal{U}$ est l'ensemble de tous les voisinages de $e$ dans $G$, Alors pour tout $g \in G$, l'ensemble $g\mathcal{U} = \{gU; U \in \mathcal{U}\}$ est l'ensemble des voisinages de $g$.
Si $V$ voisinage de $g$, Alors $U = g^{-1}V$ est un voisinage de $e$.

*Démonstration.*
si $U$ est un ouvert qui contenant $e$, $gU = L_g(U)$ est un ouvert et il contient $ge = g$ .
réciproquement $U = g^{-1}V = L_{g^{-1}}(V)$ est un ouvert contenant $g^{-1}g = e$ . □

**Propriété 4.**
l'ensemble $\mathcal{U}$ de tous les voisinages de $e$ vérifie les cinq propriétés suivantes :
1) $\mathcal{U} \neq \varnothing$.
2) $\forall U_1, U_2 \in \mathcal{U}$, $\exists U_3 \in \mathcal{U}$ tel que $U_3 \subset U_1 \cap U_2$.
3) $\forall U \in \mathcal{U}$, $\exists V \in \mathcal{U}$ tel que $VV^{-1} \subset U$ .
4) $\forall U \in \mathcal{U}$, $\exists V \in \mathcal{U}$ tel que $V^2 \subset U$ .
5) $\forall U \in \mathcal{U}$ ,$\forall a \in U, \exists V \in \mathcal{U}$ tel que $aV \subset U$.
6) $\forall U \in \mathcal{U}, \forall g \in G, \exists V \in \mathcal{U}$ tel que $gV^{-1}g \subset U$.

*Démonstration.*
1) $G \in \mathcal{U}$ .
2) on peut choisir $U_3 = U_1 \cap U_2$.
3) En effet L'application $\varphi : G \times G \longrightarrow G$ qui à $(x, y)$ fait correspondre $xy^{-1}$ est continue. donc $\varphi^{-1}(U)$ est un ouvert de $G \times G$ , contenant $(e, e)$ , et donc il existe un voisinage $V$ de $e$ tel que $V \times V$ , soit contenue dans $\varphi^{-1}(U)$ et on a bien $VV^{-1} \subset U$ .
4) En effet L'application $\psi : G \times G \longrightarrow G$ qui à $(x, y)$ fait correspondre $xy = \varphi(x, y^{-1})$ est continue. donc $\psi^{-1}(U)$ est un ouvert de $G \times G$ , contenant $(e, e)$ , et donc il existe un voisinage $V$ de $e$ tel que $V \times V$ , soit contenue dans $\psi^{-1}(U)$ et on a bien $VV = V^2 \subset U$.
5) En effet $V = a^{-1}U$ est un ouvert qui contient $aa^{-1} = e$ , c'est donc un élément de $\mathcal{U}$ et $aV = U$ est contenue dans $U$.
6) En effet $V = g^{-1}Ug$ est un ouvert de $G$ qui contient $gea^{-1} = e$, c'est donc un élément de $\mathcal{U}$ et $gUg^{-1} = U$ est contenue dans $U$.

□

**Remarque 3.** Réciproquement, étant donnés un groupe $G$ et une famille $\mathcal{U}$ de sous-ensembles de $G$ contenant l'élément neutre $e$ et ayant les cinq propriétés ci-dessus, Alors il existe sur $G$ une topologie et une seule telle que $G$ soit un groupe topologique et telle que $\mathcal{U}$ soit un système fondamentale de voisinage de l'élément neutre $e$.

**Proposition 7.**
soit $U$ un voisinage de $x$, alors,

1) $\exists V$ voisinage de $x$ t.q. $V^2 \subseteq U$.
2) $\exists V$ voisinage de $x$ t.q. $V^{-1} \subseteq U$.
3) $\exists V$ voisinage de $x$ t.q. $VV^{-1} \subseteq U$.
4) $\exists V$ voisinage de $x$ t.q. $V^{-1}V \subseteq U$.

*Démonstration.*
On a démontré ses propriété pour l'élément neutre (propriété 4), et grâce a l'homogénéité des groupes topologique on peut généralise se résultat pour x quelconque. $\square$

**Proposition 8.**
Soit $G$ un groupe topologique, $V$ un système fondamental de voisinages ouverts de $e$ et $D$ une partie dense dans $G$, alors,

$$B := \{Ux \mid x \in D\ ,\ \ U \in V\}$$

est une base de la topologie de $G$.

*Démonstration.*
Soit $W$ un ouvert de $G$, $a \in W$ . $Wa^{-1}$ est ouvert et $e \in Wa^{-1}$. Il existe $U \in V$ t.q. $UU^{-1} \subseteq Wa^{-1}$. Comme $D$ est dense, $aD^{-1}$ aussi ($X = f(X) = f(\overline{D}) \subseteq \overline{f(D)}$ ou $f(x) = ax^{-1}$ est un homéomorphisme).
Donc $\exists d \in U \cap aD^{-1}$ et $m \in D$ t.q. $d = am^{-1}$ i.e. $m = d^{-1}a$. Ainsi $Ud^{-1}a \in B$ .
Comme $d \in U$ , on a $Ud^{-1}a \subseteq UU^{-1}a \subseteq Wa^{-1}a = W\ \ \forall a \in W$. Donc $\underset{a\in W}{\cup} Ud^{-1}a \subseteq W$.
De même, $e \in Ud^{-1}$, donc $a \in Ud^{-1}a \forall a \in W$. Ainsi $W \subseteq \underset{a\in W}{\cup} Ud^{-1}a$.
Donc $W = \underset{a\in W}{\cup} Ud^{-1}a$. $\square$

**Proposition 9.**
Soit $G$ un groupe topologique et soit $\mathcal{U}$ l'ensemble des voisinages de l'élément neutre $e$ de $G$. La condition nécessaire et suffisante pour que $G$ soit séparé est que

$$\underset{U\in\mathcal{U}}{\cap} U = \{e\}$$

*Démonstration.*
En effet, si $G$ est séparé, pour tout point $s$ de $G$, il existe un voisinage $U$ de $e$ qui ne contient pas $s$, alors $\underset{U\in\mathcal{U}}{\cap} U$ ne contient pas $s$, et par suit $\underset{U\in\mathcal{U}}{\cap} U = \{e\}$.
Réciproquement, on suppose que $\underset{U\in\mathcal{U}}{\cap} U = \{e\}$ , et soit $s$ et $t$ deux points distincts de $G$, alors $s^{-1}t$ est distinct de $e$ et il existe $U \in \mathcal{U}$ qui ne contient pas $s^{-1}t$.Il existe $V \in \mathcal{U}$ tel que $VV^{-1} \subset U$.
S'il existait un point a qui appartienne à la fois à $sV$ et à $tV$, alors $s$ serait dans $aV^{-1}$, $s^{-1}$ serait dans $Va^{-1}$, t serait dans $aV^{-1}$, $s^{-1}t$ serait dans $VV^{-1}$, donc $sV$ et $tV$ son disjoints, or ce sont des voisinages respectivement de $s$ et $t$.Donc $G$ est séparé. $\square$

**Proposition 10.**
Tout groupe topologique est $T_3$.

*Démonstration.*
En vertu de la remarque 3, il suffit de vérifier cette propriété pour l'élément neutre $e$ :
Soit $U$ un voisinage de $e$, $\exists V$ voisinage de $e$ tel que $VV^{-1} \subseteq U$. Montrons que la fermeture de $V$ est dans $U$.
Soit $p \in \overline{V}$ , alors, $pV \cap V \neq \emptyset$. Soit $a \in pV \cap V$, $b \in V$ t.q. $a = pb \in V$. Ainsi $p = ab^{-1} \in VV^{-1} \subseteq U, i.e. \overline{V} \subseteq U$ . □

**Proposition 11.**
Tout groupe topologique est $T_4$.

**Théorème 5.**
Soit $G$ un groupe topologique, alors,
les affirmations suivantes sont équivalentes :
1) $G$ est $T_0$.
2) $G$ est $T_1$.
3) $G$ est $T_2$.
4) $\cap U = \{e\}$, $\forall U$ système fondamental de voisinages en $e$.
5) $G$ est régulier.
6) $G$ est complètement régulier.

*Démonstration.*
Il est clair que 3) $\Rightarrow$ 2) $\Rightarrow$ 1) et que 6) $\Rightarrow$ 5) et que 5)$\Rightarrow$2)
1) $\Rightarrow$ 4) $\Rightarrow$ 3) évident par la proposition 16.
2) $\Rightarrow$ 6) évident par la proposition 18. □

**Remarque 4.** A partir de maintenant, un groupe topologique remplissant une des conditions du théorème précédent sera appelé un groupe topologique de Hausdorff.

**Remarque 5.** On peut se demander si tout groupe topologique de Hausdorff est également normal (i.e. si tout groupe topologique est $T_5$) mais ce n'est pas le cas.en effet pour tout espace topologique complètement régulier, on peut construire un groupe topologique de Hausdorff qui l'admet comme sous-groupe fermé. Or tout fermé dans un espace normal est lui aussi normal. Ainsi, si tout groupe topologique de Hausdorff est normal, alors l'espace topologique complètement régulier l'est également ce qui n'est pas toujours possible. En effet, on peut montrer qu'il existe des espaces topologiques complètement réguliers mais pas normaux.

**Proposition 12.**
Soit $G$ un groupe topologique, $A, B \subseteq G$, alors,
1) $\overline{A}\overline{B} \subseteq \overline{AB}$
2) $(\overline{A})^{-1} = \overline{(A^{-1})}$
3) $x\overline{A}y = \overline{xAy}$

*Démonstration.*
1)Soit $x \in A, b \in B$ et $U$ un voisinage de $e$, il existe un voisinage $V$ de $e$ tel que : $(xV)(yV) \subseteq xyU$. Donc, $\exists a \in A \cap xV$ et $b \in B \cap yV$ et donc $ab \in AB \cap xyU$ i.e. $xy \in \overline{AB}$.
2) et 3) on peut considérer les homéomorphismes :
$z \longrightarrow z^{-1}$ et $z \longmapsto xzy$. □

# Sous-groupes topologiques

**Définition 22.** Soit $G$ un groupe topologique et $H \subseteq G$. $H$ est un sous-groupe topologique de $G$ si $H$ est un sous-groupe de $G$ que l'on munit de la topologie induite par $G$.

**Proposition 13.**
Soit $G$ un groupe topologique, $H$ un sous-groupe, alors,
$H$ est un groupe topologique.

*Démonstration.*
Un sous-groupe algébrique étant un groupe, il suffit que L'application $\varphi : G \times G \longrightarrow G$ qui à $(x, y)$ fait correspondre $xy^{-1}$ soit continue. ce qui est évident car elles sont les restrictions de celles de $G$ qui sont continues. $\square$

**Proposition 14.**
Soit $G$ un groupe topologique, $H$ un sous-groupe ouvert, alors, $H$ est fermé.

*Démonstration.*
Montrons que $\overline{H} \subseteq H$. Soit $a \in \overline{H}$. Comme $H$ est ouvert, $aH$ est un voisinage de $a$ et donc $aH \cap H \neq \emptyset$. Ainsi, $\exists h_1, h_2 \in H$ t.q. $ah_1 = h_2$ i.e. $a = h_2 h_1^{-1} \in H$. $\square$

**Proposition 15.**
Soit $G$ un groupe topologique, $H$ un sous-groupe, alors, $\overline{H}$ est un sous-groupe de $G$. Si de plus $H$ est normal, alors $\overline{H}$ est normal.

*Démonstration.*
Et effet, soient $s$ et $t$ deux éléments de $\overline{H}$ et soit $U$ un voisinage quelconque de $s^{-1}t$. puisque l'application qui à $(a, t)$ fait correspondre $s^{-1}$t est continue sur $G \times G$ , il existe un voisinage $V$ de $s$ et un voisinage $W$ de $t$ tels que $V^{-1}W$ soit contenu dans $U$. puisque $s$ et $t$ sont adhérents à $H$, il existe $h$ appartenant à $W \cap H$. alors $h^{-1}h'$ appartient à $V^{-1}W$, donc à $U$, et d'autre part $h^{-1}h'$ appartient à $H$ puisque $H$ est un sous-groupe. Donc tout voisinage de $s^{-1}t$ rencontre $H$, donc $s^{-1}t \in \overline{H}$, donc $\overline{H}$ est un sous-groupe. D'autre part, pour tout $s \in G$, l'application

$$f = L_s \circ R_{s^{-1}}$$

est un homéomorphisme de $G$, donc $\overline{f(H)} = f(\overline{H})$ , donc

$$s\overline{H}s^{-1} = f(\overline{H}) = \overline{f(H)} = \overline{sHs^{-1}} = \overline{H},$$

c'est-à-dire que $\overline{H}$ est distingué, ce qui montre la première assertion. $\square$

**Exemple 3.** On considère $G = GL(n, \mathbb{R})$ . Alors l'ensemble $GL^+(n, \mathbb{R})$ des matrices de $G$ de déterminant positif, est un sous-groupe de $G$, ouvert (car image réciproque de l'ouvert $\mathbb{R}^+$ ). Il est donc aussi fermé d'après la proposition ci-dessus.
Soit $SL(n, \mathbb{R})$ l'ensemble des matrices de $G$ de déterminant égal à 1 , on l'appelle le groupe linéaire spécial de degré $n$, c'est un sous-groupe fermé de $GL(n, \mathbb{R})$
Soit $O(n)$ l'ensemble des matrices de $GL(n, \mathbb{R})$ qui sont orthogonales, (c'est-à -dire des matrices a telles que $ta \ . \ a = 1$).
les éléments de $O(n)$ sont donc les matrices $a = (a_{ik})$ qui vérifient :

$$\sum_k a_{ki} a_{kj} = \delta_{ij} \qquad\qquad (symbole\ de\ Kronecker)$$

l'application $f_{ij}$ qui fait correspondre $\sum_k a_{ki} a_{kj}$ est une application continue de $GL(n, \mathbb{R})$ dans $E$ et les applications $f_{ij}$ sont en nombre fini, donc $0(n)$ est l'intersection finie des images réciproques de 0 ou 1, c'est donc un fermé ; d'autre part $O(n)$ est un groupe. donc $O(n)$ , groupe orthogonal, est un sous-groupe fermé de $GL(n, \mathbb{R})$.

# Groupes topologiques quotients

Soit $G$ un groupe et soit $H$ un sous-groupe de $G$. On considère le quotient $G/H$ , ensemble des classes à gauche de $G$ selon $H$ et on désigne par $\pi$ la projection canonique de $G$ sur $G/H$.
Si $G$ a une structure de groupe topologique, on peut définir sur $G/H$ une topologie de la manière suivante : un sous-ensemble $O$ de $G/H$ sera un ouvert si et seulement si $\pi^{-1}(O)$ est un ouvert de $G$. (On vérifie facilement que ceci définit bien une topologie). On a alors les propriétés suivantes :

1) La projection canonique $\pi : G \longrightarrow G/H$ est continue.
   Car par définition même de la topologie, l'image réciproque d'un ouvert est un ouvert.
2) La projection canonique $\pi : G \longrightarrow G/H$ est une application ouverte.
   Car si $U$ est un ouvert de $G$, alors $\pi^{-1}(\pi(U))$ est un ouvert de $G$ puisqu'il est égale à $UH$.

**Remarque 6.** Tout sous-ensemble ouvert $O$ de $G/H$ est de la forme $\pi(U)$ où $U$ est un ouvert de $G$, car $U = \pi^{-1}(O)$ est un ouvert de $G$, d'après la définition de la topologie et $O = \pi^{-1}(\pi(O))$ puisque $\pi$ est surjective.

**Proposition 16.**
Soit $G$ un groupe topologique, $H$ un sous-groupe normal, alors,
$G/H$ muni de la topologie quotient est un groupe topologique et la projection canonique est un homomorphisme ouvert continu.
Une base de la topologie quotient $\mathfrak{B}$ est donnée par :

$$\mathfrak{B} = \{\{xH \mid x \in U\} \;\; U \in \mathcal{B} \; \textit{où} \, \mathcal{B} \, \textit{est une base de} \; G\,\}$$

*Démonstration.*
Soit $\pi : G \longrightarrow G/N$ la projection canonique, c'est un homomorphisme ouvert et continu par définition de la topologie quotient. Il suffit donc de montrer que les applications de composition et d'inversion de $G/H$ sont continues.
Si $H$ est un sous-groupe distingué de $G$, le quotient $G/H$ est alors muni d'une structure de groupe. Si $\varphi$ de $GxG \to G$ désigne la multiplication dans $G$ et $\psi G \longrightarrow G$ le passage à l'inverse dans $G$, alors la multiplication dans $G/H$, représentée par $\overline{\varphi}$ est définie par le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} G \times G \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\pi"'] & G \arrow[d, "\pi"] \\ G/H \times G/H \arrow[r, "\overline{\varphi}"] & G/H \end{tikzcd}$$

et le passage à l'inverse, représenté par $f$ est définie par le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\pi"'] & G \arrow[d, "\pi"] \\ G/H \arrow[r, "\overline{\psi}"] & G/H \end{tikzcd}$$

On voit, à l'aide de ce dernier diagramme, que l'application $\overline{\psi}$ est continue : en effet, si $O$ est un ouvert de $G/H$, de la forme $O = \pi(U)$ où $U$ est un ouvert de $G$, alors $\overline{\psi}^{-1}(U)$ est ouvert puisque $\psi$ est continue (car $G$ est supposé être un groupe topologique) et

$$\overline{\psi}^{-1}(O) = \pi(\psi^{-1}(U))$$

est ouvert. De façon analogue, en s'appuyant sur le premier diagramme commutatif, on montre que l'application $\overline{\varphi}$ est continue. Donc, si $H$ est distingué, le groupe $G/H$ a une structure de groupe topologique.

Montrons que $\mathfrak{B}$ est une base de la topologie quotient : Soit $U$ et $V$ des ouverts de $G/N, U \cap V$ est également ouvert et par définition de la topologie quotient, $\exists W \in \mathcal{B}$ tel que $W \subseteq \pi^{-1}(U \cap V)$. On a donc : $\pi(W) \subseteq U \cap V$ et $\pi(W) = \{wH | w \in W\} \in \mathfrak{B}$ $\square$

**Proposition 17.**
Soit $G$ un groupe topologique, $N$ un sous-groupe normal compact et $\pi : G \longrightarrow G/N$, alors, $\pi$ est fermée

*Démonstration.*
Soit $F$ un fermé de $G$, posons $H = (G/N) \setminus \pi(F) = \{xN | x \notin FN\}$. Soit $xN \in H$ on a donc $x \notin FN$. Comme $FN$ est fermé, il existe $U$ un voisinage de $x$ tel que $U \cap FN = \emptyset$. Clairement $\pi(U)$ est un voisinage de $xN$ et $\pi(U) = \{uN | u \in U\} = \{uN | u \notin FN\} \subseteq H$, ce qui prouve que $\pi(F)$ est fermé. $\square$

**Proposition 18.**
Soit $G$ un groupe topologique, $H$ un sous-groupe, alors, $G/H$ est homogène.

*Démonstration.*
Soit $Ha$, $Hb \in G/H$ et considérons l'application $f$ de $G/H$ dans $G/H$
telle que $X \longrightarrow Xa^{-1}b$.
On a : $f(Ha) = Haa^{-1}b = Hb$ et f est évidemment un homéomorphisme. $\square$

**Proposition 19.**
Soit $G$ un groupe topologique, $H$ un sous-groupe, alors, $G/H$ est $T_3$.

*Démonstration.*
Soit $\widetilde{U}$ voisinage de $H$ dans $G/H$. On peut prendre $\widetilde{U}$ dans la base de $G/H$ et ainsi on a $\widetilde{U} = \{Hx | x \in U\}$ ou $U$ est un voisinage de $e$ dans $G$.
$\exists V$ voisinage de $e$ t.q. $VV^{-1} \subseteq U$. Montrons que $\overline{HV} \subseteq HU$. Soit $x \in \overline{HV}$ . $xV \cap HV \neq \emptyset$ i.e. $\exists h \in H$, $v, w \in V$ t.q. $xv = hw$. Ainsi, $x = hwv^{-1} \in HVV^{-1} = HU$.
Posons $\widetilde{V} = \{Hv | v \in V\}$. On a $\pi(HV) = \widetilde{V}$ , $\pi(HU) = \widetilde{U}$.
Montrons finalement que $\overline{\widetilde{V}} \subseteq \widetilde{U}$. Soit $Hv \in \widetilde{V}$ , $Hv \subseteq HV \subseteq \overline{HV}$ .
Donc,$\{Hv\} = \pi(Hv) \subseteq \pi(\overline{HV}) \subseteq \pi(HU) = \widetilde{U}$. □

**Proposition 20.**
Soit $G$ un groupe topologique, $H$ un sous-groupe, alors, $G/H$ est $T_4$.

**Proposition 21.**
Soit $G$ un groupe topologique séparé et soit $H$ un sous- groupe de $G$, Pour que l'espace topologique $G/H$ soit séparé, il faut et il suffit que $H$ soit fermé.

*Démonstration.*
Car si $G/H$ est séparé, le point $\{\pi(e)\}$ est un fermé $H = \pi^{-1}(\{\pi(e)\})$ est fermé puisque $\pi$ est continue.
Réciproquement, on suppose $H$ fermé ; soient $\xi = \pi(S)$ et $\eta = \pi(t)$ deux points de $G/H$ , s'ils sont distincts, $s^{-1}t$ n'appartient pas à $H$ et puisque $H$ est fermé, il existe un voisinage $V$ de $s^{-1}t$ qui ne rencontre pas $H$. D'après une propriété des voisinages dans un groupe topologique, il existe un voisinage $V_1$ de $s$ et un voisinage $V_2$ de $t$ tels que le voisinage $V_1^{-1}V_2$ de $s^{-1}t$ soit contenu dans V. Alors $V_\xi = \pi(V_1)$ est un voisinage de $\xi$ et $V_\eta = \pi(V_2))$ est un voisinage de $\eta$ . s'il existait un élément $\alpha$ de $G/H$ appartenant à $V_\xi$ et à $V_\eta$, on aurait

$$\alpha = \pi(V_1)$$

avec $v_1 \in V_1$ et

$$\alpha = \pi(V_2)$$

avec $v_2 \in V_2$ . $v_1$ et $v_2$ seraient dans la même classe selon H, c'est-à -dire que $v_1^{-1}v_2$ serait un élément de $V_1^{-1}V_2$ appartenant à $H$, ce qui est absurde, donc $\xi$ et $\eta$ ont des voisinages respectifs $V_\xi$ et $V_\eta$ qui sont disjoints, donc $G/H$ est séparé. □

**Proposition 22.**
Soit $G$ un groupe topologique, $H$ un sous-groupe, alors,
1) $H$ et $G/H$ sont compacts $\Longrightarrow$ $G$ est compact.
2) $H$ et $G/H$ sont localement compacts $\Longrightarrow$ $G$ est localement compact.
3) $G$ est compact $\Longrightarrow$ $G/H$ est compact.
4) $G$ est localement compact $\Longrightarrow$ $G/H$ est localement compact.

*Démonstration.*
3) Supposons $G$ compact, $G/H = \pi(G)$ qui est continue, donc l'image du compact $G$ est un compact.
4) supposons que $G$ soit localement compact, et que $U$ est un voisinage de $e$ dans $G$, tel que $\overline{U}$ est compact,donc $\varphi(U)$ a une fermeture compacte dans $G/H$. or $G/H$ est homogène donc $G/H$ est compact. □

**Proposition 23.**
Soit $G$ un groupe topologique, $H$ un sous-groupe fermé, alors,

1) $G$ est compact $\Leftrightarrow$ $H$ et $G/H$ sont compacts.
2) $G$ est localement compact $\Leftrightarrow$ $H$ et $G/H$ sont localement compacts.

*Démonstration.*
1)Supposons $G$ compact. $H$ est un fermé dans un compact, donc compact. or $G/H$ est compact (proposition précédente)
Le cas inverse découle de la proposition précédente.
2) Soit $x \in H$, $U$ un voisinage de $x$ dans $G$ tel que $\overline{U}$ est compact. Ainsi, $\widetilde{U} = U \cap H$ est un voisinage de $x$ dans $H$. Soit $\overset{\wedge}{U}$ l'adhérence de $\widetilde{U}$ dans $H$. Comme $\widetilde{U} = U \cap H \subseteq \overline{U} \cap H$ qui est un fermé de $H$, on a $\overset{\wedge}{U} \subseteq \overline{U} \cap H \subseteq \overline{U}$ qui est compact. Ainsi $\overset{\wedge}{U}$ est compact dans $G$ et fermé dans $H$ donc compact dans $H$. Ce qui prouve que $H$ est localement compact.
Soit $A \in G/H$, alors,$\exists a \in G$ t.q. $A = \pi(a)$. Soit $U$ voisinage de $a$ dans $G$ t.q. $\overline{U}$ soit compact. $\pi(U)$ est donc un voisinage de $A$. $\pi$ est continue donc $\pi(\overline{U})$ est compact et donc fermé car $G/H$ est régulier (donc $T_2$). Comme $U \subseteq \overline{U}$, on a $\pi(U) \subseteq \pi(\overline{U})$ et donc $\overline{\pi(U)} \subseteq \pi(\overline{U})$. Et on sait que $\pi(\overline{U}) \subseteq \overline{\pi(U)}$ donc $\pi(\overline{U}) = \overline{\pi(U)}$. Ce qui prouve que $G/H$ est localement compact.
Le cas inverse découle de la proposition 21. $\square$

**Propriété 5.**
L'application $\varphi' : G \times G/H \longrightarrow G/H$ est continue.

*Démonstration.*
Car si $O$ est un ouvert contenant $\pi(sx)$, d'après la remarque 6

$$O = \pi(U)$$

où $U$ est un ouvert de $G$ et puisque $\varphi$ est continue il existe un voisinage $U_1$ de s et un voisinage $U_2$ de t tels que

$$\varphi(U_1, U_2) \subset U$$

d'autre part

$$\varphi'(U_1, \pi(U_2)) = \pi(\varphi(U_1, U_2))$$

donc

$$\varphi'(U_1, \pi(U_2))$$

est contenu dans $\pi(U)$, c'est-à-dire dans $O$, ce qui signifie que $\varphi'$ est continue car $U_1 \times \pi(U_2)$ est un voisinage de $(s, \pi(x))$.
On a le diagramme commutât if suivant :

$$\begin{array}{ccccc} G & \times & G & \xrightarrow{\quad\varphi\quad} & G \\ {\scriptstyle id}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi} & & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\ G & \times & G/H & \xrightarrow{\quad\varphi'\quad} & G/H \end{array}$$

où $\varphi$ représente la multiplication. $\square$

**Propriété 6.**
L'application $T_s$ est un homéomorphisme de $G/H$ sur $G/H$.

*Démonstration.*
D'abord, elle est continue, car si $O$ est un ouvert de $G/H$, il est de la forme $O = \pi(U)$ où U est un ouvert de $G$ et $T_s^{-1}(O)$ est l'ensemble des éléments de la forme $\pi(X)$ tels que

$$sx \in U$$

donc

$$\pi^{-1}(T_s^{-1}(O)) = L_s^{-1}(U)$$

qui est ouvert et donc $T_s^{-1}(O)$ est ouvert.
D'autre part, l'application $T_s$ est inversible, son inverse faisant correspondre à $m = \pi(a)$ l'élément

$$T_s^{-1}(m) = \pi(s^{-1}a)$$

qui est bien indépendant du choix du représentant a.
et cette application inverse est continue, car si $O = \pi(U)$ est un ouvert de $G/H$, $U$ étant ouvert de $G$, alors $T_s(0)$ est l'ensemble des éléments de la forme $\pi(sx)$ où $x\pi U$, il est donc ouvert car son image réciproque par $\pi$ est l'ouvert $L_s(U)$. □

# Homomorphismes de groupes topologiques

**Définition 23.** Soient $G$ et $G'$ deux groupes topologiques et soit $\varphi$ une application de $G$ dans $G'$. On dit que $\varphi$ est un homomorphisme du groupe topologique $G$ dans le groupe topologique $G'$ si c'est un homomorphisme de groupes qui est une application continue. L'application $\varphi$ est un isomorphisme (de groupes topologiques) de $G$ sur $G$ si c'est un isomorphisme de groupes ainsi qu'un homéomorphisme.

**Proposition 24.**
Soit $f : G \longrightarrow G'$ un homomorphisme de groupes, alors,

1) $f$ est continue $\Longleftrightarrow f$ est continue en $e$.
2) $f$ est ouverte $\Longleftrightarrow f$ est ouverte en $e$.
3) Si $f$ est bijective, $f^{-1}$ est continue $\Longleftrightarrow f$ est ouverte.
4) Si $f$ est bijective, $f$ est un isomorphisme $\Longleftrightarrow f$ est ouverte et continue.

*Démonstration.*
1) et 2) sont évidentes par homogénéité des groupes topologiques.
3)soit $f^{-1}$ une fonction continue de $F$ vers $E$, soit $O$ un ouvert de $E$,
alors $(f^{-1})^{-1}(O)$ est un ouvert de $F$, i.e $f(O)$ est un ouvert de $F$,
donc $f$ est un ouvert.
réciproquement, soit $f$ une fonction de $E$ vers $F$ ouverte, soit $O$ un ouvert de $E$,
alors $f(O)$ est un ouvert de $F$, or $f^{-1}(f(O)) = O$ est un ouvert de $E$,
donc $f$ est continue. □

**Proposition 25.**
Soit $G$ un groupe topologique, $N$ un sous-groupe normal, alors, $\pi : G \to G/N$ est une homomorphisme ouvert.

*Démonstration.*
$N$ étant normal, $\pi$ est un homomorphisme de groupes et on a déjà démontré que c'est une application ouverte et continue. □

**Théorème 6.**
Soient $G$ et $G'$ deux groupes topologiques et $f : G \longrightarrow G'$ un homomorphisme ouvert, surjectif. Soit $N$ le noyau de $f$. Alors

$$G/N \cong G'$$

*Démonstration.*

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"] & G' \\ G/N \arrow[ur, "\overline{f}"] & \end{tikzcd}$$

En effet, d'abord le noyau $N$ est un sous-groupe distingué de $G$, et $G/N$ est donc bien muni d'une structure de groupe topologique. On peut définir l'application $\overline{f} : G/N \longrightarrow G'$ par $\overline{f}(\pi(x)) = f(x)$ pour $x \in G$ , cette application est un isomorphisme de groupes. Cette application $\overline{f}$ est continue car si $O$ est un ouvert de $G\prime$ alors $\overline{f}^{-1}(O)$ est un ouvert de $G/N$, car c'est $\pi(f^{-1}(O))$ et $\pi$ est ouverte et $f$ continue. (Remarque : cette démonstration de la continuité de $\overline{f}$ n'utilise pas le fait que $f$ est ouverte ; ce fait n'est utile que pour montrer la continuité de $\overline{f}^{-1}$ ) . L'application $\overline{f}^{-1}$ est continue car si $O$ est un ouvert de $G/N$, alors $U = \pi^{-1}(O)$ est un ouvert de $G$ et $\overline{f}(O) = f(U)$ est ouvert puisque $f$ est supposée ouverte. □

**Proposition 26.**
Soit $G$ un groupe topologique, $N$ un sous-groupe normal, $H$ un sous-groupe, alors,

$$HN/N \cong H/H \cap N$$

**Proposition 27.**
Soit $G$ un groupe topologique, $N$ un sous-groupe normal, $H$ un sous-groupe, alors,

$$(G/N)/(H/N) \cong G/H$$

# groupes topologiques connexes

**Définition 24.** Un groupe topologique est dit connexe s'il est connexe en tant qu'espace topologique .

**Remarque 7.** Pour tout voisinage $W$ de $e$, il existe un voisinage $U$ de $e$, contenu dans $W$ et tel que

$$U^{-1} = U.$$

(en effet, $U = W \cap W^{-1}$ )

**Théorème 7.**
Soit $G$ un groupe topologique connexe et $U$ un voisinage de l'élément neutre $e$, Alors $G$ est engendré par $U$.

*Démonstration.*
Pour tout entier positif k, soit $U^k$ l'ensemble des éléments de $G$ de la forme $s_1 s_2 \cdots s_k$ où les $s_i$ appartiennent à $U$.
Pour $k = 1$, $U^k = U$ est un ouvert,
Pour $k > 1$, $U^k = UU^{k-1}$ ce qui montre par récurrence que $U^k$ est un ouvert pour tout k,
Soit $G'$ la réunion des $U^k$ pour tous les entiers k,
$G'$ est un sous-groupe de $G$
en effet, si s,t∈ G', si s = $s_1 s_2 \cdots s_k$ alors

$$s^{-1} = s_k^{-1} s_{k-1}^{-1} \cdots s_1^{-1}$$

et les $s_i^{-1}$ appartiennent à U puisque

$$U^{-1} = U$$

donc $s^{-1} \in U^k$ donc $s^{-1} \in G'$
et si $t = t_1 t_2 \cdots t_k$ alors $st \in U^{k+2}$ donc $st \in G'$.
Puisque chaque $U_k$ est ouvert, $G'$ est ouvert, or tout sous-groupe ouvert d'un groupe topologique est fermé. le sous-ensemble $G'$ est donc ouvert et fermé dans $G$, c'est donc $G$ lui-même puisque $G$ est supposé connexe,
donc pour tout élément $s$ de $G$, il existe un entier k et k éléments $s_1 s_2 \cdots s_k$ de $U$ tels que $s$ soit égal au produit $s_1 s_2 \cdots s_k$. □

**Proposition 28.**
Soit $G$ un groupe topologique et soit $H$ un sous-groupe de $G$.
Si $H$ et $G/H$ sont connexes, alors $G$ est connexe.

*Démonstration.*
En effet, si G est réunion de deux ouverts disjoints $O_1$ et $O_2$ , alors $G/H$ est réunion des deux ouverts $\pi(O_1)$ et $\pi(O2)$.
S'il existait un élément $\xi$ commun à $\pi(O_1)$ et $\pi(O2)$, on aurait

$$\xi = \pi(O_1) = \pi(O2)$$

où $s_1 \in O_1$ et $s_2 \in O_2$ et la classe $s_1H = s_2H$ serait réunion des deux ouverts $s_1H \cap O_1$ et $s_1H \cap O_2$ qui sont disjoints puisque $O_1$ et $O_2$ le sont.
or $s_1H = L_{s_1}(H)$ est connexe puisque $H$ est connexe, donc un des ouverts $s_1H \cap O_1$ et $s_2H \cap O_2$ est vide, ce qui est absurde car $s_1 \in O_1$ et $s_2 \in O_2$, donc un tel $\xi$ n'existe pas.
Alors l'espace connexe G/H est réunion des deux ouverts disjoints $\pi(O_1)$ et $\pi(O_2)$, donc l'un de ces deux ouverts est vide et donc l'un des deux ouverts $O_1$ et $O_2$ est vide, c'est-à-dire que G est connexe.
Cette proposition est très souvent utilisée pour montrer qu'un groupe topologique est connexe. □

**Théorème 8.**
Soit $G$ un groupe topologique et soit $G_0$ la composante connexe de $G$ contenant l'élément neutre $e$. Alors $G_0$ est un sous-groupe, fermé et distingué de $G$, et la composante connexe de $G$ contenant un élément $s$ est la classe

$$sG_0 = G_0s$$

*Démonstration.*
D'abord, $G_0$ est fermé :
car c'est une composante connexe.
$G_0$ est un sous-groupe :
car si $s \in G_0$ , alors $s^{-1}G_0$ contient $e$ et est connexe puisque $L_{s^{-1}}$ est continue, donc $s^{-1}G_0$ est contenu dans la composante connexe $G_0$ , donc pour tout $t \in G_0$, $s^{-1}t \in G_O$.
$G_0$ est un sous-groupe est distingué :
car pour tout $s \in G$, $sG_0s^{-1}$ est contenu dans $G_0$ puisque est un connexe contenant $e$.
Soit $G_s$ la composante connexe de $G$ contenant l'élément $s$. La classe $sG_0$ est connexe et contient $s$, donc

$$sG_0 \subset G_0$$

d'autre part $s^{-1}G_s$ est connexe et contient $e$, donc

$$s^{-1}G_s \subset G_0$$

donc $G_s \subset sG_0$, donc

$$G_s = sG_0$$

et d'autre part

$$G_0s = sG_0$$

puisque $G_0$ est un sous-groupe distingué. □

**Proposition 29.**
Soit $G$ un groupe topologique, alors,

1) Si $G$ est connexe, la composante connexe de $e$ est $G$ tout entier
2) Si la composante connexe de $e$ est $\{e\}$, $G$ est totalement discontinu.

*Démonstration.*

1) La composante connexe de $e$ est le plus grand connexe de $G$ contenant $e$, or $G$ est connexe, donc la composante connexe de $e$ est $G$ tout entier.
2) évident.

□

**Proposition 30.**
Soit $G$ un groupe topologique de Hausdorff, $Z$ le centre de $G$, alors,
$Z$ est un sous-groupe normal et fermé de $G$.

*Démonstration.*
Le centre est un sous-groupe normal, il suffit donc de montrer qu'il est également fermé.
Soit $a \in Z$. Par l'absurde, supposons $a \notin Z$ i.e. $\exists x \in G$ t.q.$a \neq x^{-1}ax$.
Comme $G$ est de Hausdorff, $\exists U$ voisinage de $a$, $U'$ voisinage de $a'$ t.q. $U \cap U' = \emptyset$.
Soit $V = Z \cap U$, on a $a \in \overline{V}$ , et

$$a' = x^{-1}ax \in x^{-1}\overline{V}x = \overline{x^{-1}Vx} = \overline{V}$$

Ainsi $U' \cap$ V $\neq \emptyset$ , i.e.

$$\emptyset \neq U' \cap V = U' \cap Z \cap U \subseteq U' \cap U = \emptyset$$

ce qui est contradictoire.
Donc $a \in Z$ i.e. $Z$ est fermé. □

**Proposition 31.**
Soit $G$ un groupe topologique connexe, $N$ un sous-groupe normal et discret, alors,
$N$ est un sous-groupe du centre de $G$.

*Démonstration.*
Soit $a \in N$, $\exists V$ voisinage de $a$ dans $G$ t.q. $V \cap N = \{a\}$.
Comme $e^{-1}ae = a$, $\exists U$ voisinage de $e$ t.q. $U^{-1}aU \subseteq V$.
Soit $u \in U$,
alors, $u^{-1}au \in V$ et $u^{-1}au \in N$ car $a \in N$,
donc $u^{-1}au \in V \cap N$ i.e. $u^{-1}au = a$ i.e. $a \in Z_G(U)$.
Soit $x \in G$, par la théorème 13 $x = u_1 \cdots u_k$ où $u_i \in U$ $\forall i \in N_k$. Ainsi,

$$x^{-1}ax = u_k^{-1} \cdots u_1^{-1}au \cdots u_k = a$$

car $a \in Z_G(U)$ et donc $a \in Z(G)$. □

**Proposition 32.**
Soit $G$ un groupe topologique localement compact et totalement discontinu, alors,
$\forall U$ voisinage de $e \exists H$ un sous-groupe compact et ouvert t.q. $H \subseteq U$.

*Démonstration.*
$\{e\}$ est une composante connexe compact, ainsi, par le proposition 8, $\exists P$ ouvert et compact t.q. $e \in P \subseteq U$.
Soit $Q = \{q \in G | Pq \subseteq P\}$ , $Q \neq \emptyset$ car $e \in Q$. Soit $H = Q \cap Q^{-1}$.
i)$Q$ est ouvert : Soit $q \in Q$, $x \in P$, on a $xp \in P$. Comme p est ouvert, $\exists U_x$ voisinage de x et $V_x$ voisinage de $q$ t.q. $U_x V_x \subseteq P$ et $P \subseteq \underset{x \in p}{U} U_x$ donc $\exists k \in \mathbb{N}$ t.q. $P \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{k} U_{x_i} V_{x_i}$.
Soit $V = \bigcap\limits_{i=1}^{k} V_{x_i}$. ($V \neq \emptyset$ car $q \in V$ ), alors, $PV \subseteq P$ et donc $V \subseteq Q$ i.e. $Q$ est ouvert.
ii) $Q$ est compact et $Q \subseteq P$ :
Soit $q \in Q$, $eq = q \in P$ donc $Q \subseteq P$. Comme $P$ est compact et $Q$ fermé dans $P$, alors, $Q$ est compact.
iii) $H$ est un sous-groupe de $G$ :
Soit $h_1, h_2 \in H$, $h1 \in Q$ et $h_2^{-1} \in Q$ donc $P(h_1 h_2^{-1}) = (Ph_1)h_2^{-1} \subseteq P$. Ainsi $h_1 h_2^{-1} \in Q$. □

**Proposition 33.**
Soit $G$ un groupe topologique compact et totalement discontinu, alors,
$\forall U$ voisinage de $e$, $\exists N$ un sous-groupe ouvert de $G$ tel que $N \subseteq U$.

*Démonstration.*
Par la proposition précédente, $\exists H$ un sous-groupe de $G$ ouvert et compact, tel que $e \in H \subseteq U$.
Soit $N = \bigcap\limits_{x \in G} x^{-1} H_x$.
i) $N$ est un sous-groupe normal de $G$ :
Soit $y \in G$, $y^{-1}Ny = \bigcap\limits_{x \in G} y^{-1}x^{-1}Hxy$ or $z :\to zy^{-1}$ est un homéomorphisme,
donc $y^{-1}Ny = \bigcap\limits_{x \in G} x^{-1}Hx = N$ i.e. $N$ est un sous-groupe normal.
ii)$N$ est ouvert :
On a $x^{-1}ex = e \in H$, $\forall x \in G$. Ainsi $\exists V_x$ voisinage de $e$ et $W_x$ voisinage de $x$ t.q. $W_x^{-1} V_x W_x \subseteq H$. $\bigcup\limits_{x \in G} W_x \supseteq G$,
donc $k \in \mathbb{N}$ t.q. $\bigcup\limits_{x \in G}^{n} W_{x_i} \supseteq G$.
soit $V = \bigcap\limits_{x \in G}^{n} V_{x_i}$, c'est un voisinage de $e$ et $x^{-1}Vx \subseteq W_{x_j}^{-1} V W_{x_j} \subseteq W_{x_j}^{-1} V_{x_j} W_{x_j} \subseteq H$, $\forall x \in G$. donc $V \subseteq N$ et ainsi $V_n \subseteq N \forall n \subseteq N \forall n \in N$ i.e. $N$ est ouvert. □

**Proposition 34.**
Soit $G$ un groupe topologique de Hausdorff tel que pour tout voisinage $U$ de $e$, il existe un sous-groupe ouvert $H$ de $G$ avec $H \subseteq U$, alors,
$G$ est totalement discontinu.

*Démonstration.*
Comme $e \in H$, on a $H \neq \emptyset$ et la séparation $G = H \cup (G \setminus H)$ car $H$ est ouvert et fermé. Ainsi la composante connexe de $e$ est dans $H$ (car e y est) et donc dans $U$ car $H \subseteq U$ et ce pour tout voisinage de $e$. Donc la composante connexe de $e$ est dans l'intersection de tous les voisinages de $e$ qui est $\{e\}$ car $G$ est de Hausdorff. □

**Exemple 4.** Le groupe $GL^+(n, \mathbb{R})$ est connexe : pour n = 1 ,

$$GL^+(n, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^+$$

est connexe. Si $n > 1$, soit $H$ le sous-groupe de $G = GL^+(n, \mathbb{R})$ des matrices de la forme :

$$\begin{pmatrix} 1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & A & \\ \cdot & & & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

où $A \in GL^+(n, \mathbb{R})$. Par l'application

$$B \to (A, a_{12}, \cdots, a_{1n})$$

l'espace topologique H est homéomorphe à $GL^+(n-1, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{n-1}$ donc si l'on suppose, par récurrence, que $GL^+(n-1, \mathbb{R})$ est connexe, alors H est connexe.
On considère le quotient $GL^+(n, \mathbb{R})/H$.
deux matrices $B$ et $C$ sont dans la même classe selon $H$ si $B^{-1}C \in H$, c'est-à-dire si et seulement si la première ligne de $B$ est identique à la première ligne de C. l'application de $GL^+(n, \mathbb{R})/H$ dans $\mathbb{R}^n - \{0\}$ qui à $\pi(B)$ fait correspondre la première ligne de $B$, est un homéomorphisme, on peut donc identifier le quotient $G/H$ à $\mathbb{R}^n - \{0\}$ qui est connexe puisque $n > 1$.
Alors, d'après la proposition 28, $G$ est connexe puisque $H$ et $G/H$ le sont.

# Groupes topologiques localement compacts

**Définition 25.** Soient $X$ un espace topologique et $G$ un groupe topologique. On dit que $G$ est un groupe de transformations de $X$ si il existe une application continue $\varphi$ de $G \times X$ dans $X$ vérifiant les deux conditions suivantes :

i) $\varphi(st, x) = \varphi(s, \varphi(t, x))$ pour tous $s$ et $t$ dans $G$ et tout $x$ dans $X$.

ii) $\varphi(e, x) = x$ pour tout $x$ dans $X$.

On dit aussi que $G$ opère dans $X$.

**Remarque 8.**

1) Pour $s \in G$ et $x \in X$, on note en général $\varphi(s, x) = sx$
2) Soit $T_s : X \to X$ l'application définie par

$$T_s(x) = sx$$

Pour tout $s \in G$ , $T_s$ est un homéomorphisme et

$$(t_s)^{-1} = t_{s^{-1}}$$

3) On dit que $G$ opère effectivement dans $X$ si $T_s$ n' est l'identité que pour $s = e$ , c'est-à-dire si la condition $sx = x$ pour tout $x \in X$ entraîne $s = e$.

**Définition 26.** Soit $x_0$ un point de $X$. Soit $H$ l'ensemble des éléments $s$ de $G$ tels que $sx_0 = x_0$,
c'est un sous-groupe de $G$. Ce sous-groupe $H$ est appelé le groupe d'isotropie (ou de stabilité) de $G$ au point $x_0$

**Propriété 7.**
Si $X$ est séparé, le groupe de stabilité $H$ d'un point $x_0$ est fermé.

*Démonstration.* application $\beta : G \to X$ qui à $s \in G$ fait correspondre $sx_0$, est continue et $H = \beta^{-1}(\{x_0\})$
est donc image réciproque de $\{x_0\}$ qui est fermé. □

**Définition 27.** On dit que $G$ opère transitivement dans $X$ si pour tous points $x, y$ de $X$, il existe $s \in G$ tel que

$$sx = y$$

Dans ce cas on dit que $X$ est un espace homogène de $G$.

**Exemple 5.** Si $G$ est un groupe topologique et $H$ un sous-groupe de $G$,
le quotient $G/H$ est un espace homogène de $G$. La loi d'opération est définie par

$$\varphi(s, tH) = stH$$

**Proposition 35.**
Soit $G$ un groupe topologique et $X$ un espace homogène de $G$.
Soit $x_0$ un point de $X$ et soit $H$ le groupe d'isotropie de $G$ en $x_0$.
On considère le quotient $G/H$ et on note toujours $\pi$ la projection canonique de $G$ vers $G/H$.
Si $s$ et $t$ sont deux éléments de $G$ tels que

$$\pi(s) = \pi(t)$$

alors

$$sx_0 = tx_0$$

*Démonstration.*
on a $s^{-1}t = h$, élément de $H$ et donc

$$tx_0 = shx_0 = sx_0$$

Réciproquement si $sx_0 = tx_0$, alors $s^{-1}tx_0 = x_0$.
c'est-à-dire que $s \in H$.
c'est-à-dire que $s$ et $t$ sont dans la même classe selon $H$, Ceci permet de définir une application

$$\alpha : G/H \longrightarrow X$$

par $\alpha(\pi(s)) = sx_0$. □

**Proposition 36.**
Soit $X$ un espace homogène d'un groupe topologique $G$.
Soit $H$ le groupe d'isotropie en un point $x_0$. Alors
l'application canonique $\alpha : G/H \longrightarrow X$ est bijective et continue.

*Démonstration.*
En effet, $\alpha$ est surjective puisque $G$ opère transitivement dans $Z$. elle est invective par sa définition même.

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\pi"] & X \\ G/H \arrow[ur, "\alpha"] & \end{tikzcd}$$

Le diagramme est commutatif,
$\beta$ étant l'application définie par $\beta(s) = sx_0$
l'application $\beta$ est continue. Si $O$ est un ouvert de $X$ alors

$$\pi^{-1}(\alpha^{-1}(O)) = \beta^{-1}(O)$$

et $\beta^{-1}(O)$ est ouvert, donc $\alpha^{-1}(O)$ est un ouvert de $G/H$ ,
donc $\alpha$ est continue. □

On rappelle qu'un espace topologique est dit localement compact s'il est séparé et si tout point possède un voisinage dont l'adhérence est compacte.

**Lemme 1.** Soit $X$ un espace topologique localement compact tel que

$$X = \bigcup_{n\geq 1} X_n$$

où les $X_n$ sont des fermés de $X$. Alors un des sous-ensembles contient un ouvert de $X$.

*Démonstration.* En effet, si chaque $X_n$ ne contenait pas d'ouvert de $X$,
si $U_0$ est un ouvert de $X$ tel que $U_0$ soit compact ($U_0$ existe puisque $X$ est localement compact),
alors $U_0 \cap X_1^c$ serait un ouvert non vide, et on pourrait trouver un ouvert $U_1$ contenu dans $U_0 \cap X_1^c$ tel que $\overline{U_1}$ serait compact et

$$\overline{U_1} \cap X_1 = \emptyset$$

Alors $U_1 \cap X_2^c$ serait un ouvert non vide et on pourrait trouver un ouvert $U_2$ contenu dans $U_1 \cap X_2^c$ tel que $\overline{U_2}$ serait compact et

$$\overline{U_2} \cap X_2 = \emptyset$$

$\cdots$ et ainsi de suite, on construirait une suite d'ouverts U de X tels que

$$U_{n-1} \supset \overline{U_n}$$

et

$$\overline{U_n} \cap X_n = \emptyset$$

Dans le compact $\overline{U_0}$, la suite $\overline{U_1}, \overline{U_1}, \cdots \overline{U_n}, \cdots$ serait une suite décroissante (car $\overline{U_{n-1}} \supset \overline{U_n}$ fermés, dont l'intersection serait donc non vide.
or cette intersection ne rencontrerait aucun $X_n$ puisque $\overline{U_n} \cap X_n = \emptyset$.
ceci est impossible puisque X est réunion des $X_n$. Donc un au moins des sous-ensembles $X_n$ contient un ouvert de X. □

**Théorème 9.**
Soit $X$ un espace homogène d'un groupe topologique $G$,
On suppose que $X$ et $G$ sont localement compacts et à base dénombrable.
Soit $H$ le groupe d'isotropie de G en un point $x_0$, Alors
application canonique

$$\alpha : G/H \longrightarrow X$$

est un homéomorphisme.

*Démonstration.*
On va montrer que l'application

$$\beta : G \longrightarrow X$$

qui à s fait correspondre $sx_0$, est ouverte.
Soit $V$ un ouvert de G,
soit $x$ un point de $\beta(V)$ , il est l'image par $\beta$ d'un certain $s \in V$ :

$$x = \beta(s)$$

L'application

$$t \longrightarrow st^{-1}t$$

est continue et

$$se^{-1}e = s$$

appartient à $V$, donc il existe un voisinage $U$ de $e$ tel que

$$s\overline{U}^{-1}U \subset V.$$

La famille $\{tU\}_{t\in G}$ forme un recouvrement ouvert de $G$ et puisque $G$ est à base dénombrable, on peut trouver un sous-ensemble dénombrable $\{t_1, \cdots, t_n, \cdots\}$
tel que $\{t_nU\}_{n\geq 1}$ soit un recouvrement ouvert de G. On a

$$G = \underset{n=1}{\cup} t_nU = \underset{n=1}{\cup} t_n\overline{U}$$

et si on pose

$$X_n = \beta(t_n\overline{U}$$

alors

$$X = \beta(G) = \underset{n=1}{\cup} X_n$$

Pour chaque n, $t_n\overline{U}$ est compact et l'image continue par $\beta$ d'un compact dans l'espace séparé $X$ est compacte,
donc $X_n$ est compact et puisque $X$ est séparé, $X_n$ est fermé.
Donc X est réunion dénombrable des fermés $X_n$ et le lemme précédent dit qu'il existe n tel que

$$X_n = \beta(t_n\overline{U})$$

contienne un ouvert Z de X. or $\beta(t_n\overline{U} = t_n\overline{U}x_0$, donc

$$\beta(\overline{U}) = \overline{U}x_0 = t_n^{-1}\beta(t_n\overline{U})$$

et puisque l'application $x \longrightarrow t_n^{-1}x$ est un homéomorphisme et que $\beta(t_nU)$ contient un ouvert Z, $\beta(\overline{U})$ contient l'ouvert $W = t_n^{-1}Z$. soit y un point de $W$, y est dans $\beta(\overline{U})$ donc il existe $h \in U$ tel que

$$y = \beta(h) = hx_0$$

alors

$$\beta(s) = sh^{-1}hx_0$$

appartient à $sh^{-1}W$. d'autre part, $sh^{-1}W$ est contenu dans $sh^{-1}\beta(\overline{U}) = sh^{-1}\overline{U}x_0$. et puisque

$$sh^{-1}\overline{U} \subset s\overline{U^{-1}} \subset V$$

$sh^{-1}W$ est contenu dans $Vx_0 = \beta(V)$.
on a donc trouvé un ouvert $sh^{-1}W$ qui contient $x = \beta(s)$ et qui est contenu dans $\beta(V)$, donc $\beta(V)$ est voisinage de chacun de ses points, donc il est ouvert.
L'application $\beta$ est donc ouverte.
On en déduit facilement que l'application $\alpha$ est ouverte :
en effet, si O est un ouvert de G/H , alors

$$\alpha(O) = \beta(\pi^{-1}(O))$$

qui est ouvert- L'application a qui est bijective, continue est ouverte est donc bien un homéomorphisme de G/H sur X. $\square$

# Conclusion

La théorie de groupes topologiques concerne à la fois la structure algébrique et la notion de topologie. La combinaison de ces deux dernières permet d'avoir des résultats intéressants.

Nous nous sommes intéressés à plusieurs notions essentielles de topologie dans le cas particulier de groupes topologiques telles que la connexité, la compacité et la séparation, etc. La notion de groupe topologique quotient, qui s'appuie sur les notions de groupe quotient et de topologie quotient, a été donné ainsi que les démonstrations des trois théorèmes d'isomorphie.

L'homogénéité des groupes topologiques permet de rendre des résultats démontrés localement, par exemple sur l'élément neutre, valables sur tout le groupe.

# Bibliographie


[1] TAQDIR HUSAIN . *Introduction to topological groups* . Sauders Mathematics Books, 1966

[2] L. PONTRYAGIN. *Topologica groups* . Princeton univercity press 1946 .

[3] JEAN-PAUL PIER. *L'apparition de la théorie des groupes topologiques* . Cahiers du séminaire d'histoire des mathématiques, tome 9 (1988), p. 1 -21 .

[4] DAVID KOHLER . *groupes topologiques* . 2003-2004.

[5] YOZO MATSUSHIMA . *cours de l'institut Faurier, tome 1* . (1966),p.1-31

[6] GILLES CHRISTOL, ANNE COT, CHARLES-MICHEL MARLE . *Topologie* ellipses / édition marketing S.A., 1997

[7] FRANCIS NIER, DRAGO¸S IFTIMIE. *Introduction à la Topologie* Licence de Mathématiques Université de Rennes 1

[8] SEDDIK GMIRA. polycopie de *Topologie* . 2017-2018 .

[9] NAJIB MAHDOU. polycopie de *structure algébrique* . 2017-2018 .

[10] Structure de groupe. Groupes finis. `http://www-fourier.ujf-grenoble.fr`

[11] PIERRE LISSY . *204 :connexité.Exemples et applications.* . `https://www.ceremade.dauphine.fr`