

UNIVERSITÉ SIDI MOHAMED BEN ABDELLAH FACULTÉ DES SCIENCES ET
TECHNIQUES DE FES

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

MÉMOIRE DE FIN D'ÉTUDES

Pour l'obtention du diplôme de
LICENCE EN MATHÉMATIQUES ET APPLICATIONS

Présenté par

Mehdi Ayoub

sous la direction du Pr. **RACHID EL AYADI**

Thème :

Le problème de la courbe brachistochrone

soutenu le 09 Juin 2018

Devant le Jury :

EL AYADI RACHID	Faculté des Sciences et Techniques Fès	Encadrant
HILALI ABDELMAJID	Faculté des Sciences et Techniques Fès	Examinateur
OUADGHIRI ANISSE	Faculté des Sciences et Techniques Fès	Examinateur
OUKHTITE LAHCEN	Faculté des Sciences et Techniques Fès	Examinateur
SIDKI OMAR	Faculté des Sciences et Techniques Fès	Examinateur

Année Universitaire 2017-2018

Dedicaces

A mes chers parents, pour tous leurs sacrifices, leur amour, leur tendresse, leur soutien et leurs prières tout au long de mes études.

A mon cher frère pour son appui et son encouragement.

A toute ma famille pour leur soutien tout au long de mon parcours universitaire.

Que ce travail soit l'accomplissement de vos vœux tant allégués, et le fruit de votre soutien infailible.

Merci d'être toujours là pour moi.

Remerciements

Je remercie avant tout le BON DIEU qui ma donné la force, le courage et la santé pour pouvoir mener à terme ce travail.

Je tiens à exprimer mes plus vifs remerciements et présenter mon plus profond respect à mon encadrant, Professeur EL AYADI RACHID, qui, grâce à ses orientations précieuses, ses encouragements valorisants, sa direction compétente de ce mémoire, son soutien dans les moments d'incertitude et sa disponibilité inconditionnelle ; j'ai pu réaliser ce travail et s'initier à la recherche.

Je tiens également à exprimer toute ma gratitude et tous mes sentiments de reconnaissance aux professeurs HILALI ABDELMAJID, OUADGHIRI ANISSE, OUKHTITE LAHCEN et SIDKI OMAR pour l'honneur qu'ils me font d'accepter d'être membres de jury de ce mémoire.

J'adresse mes sincères remerciements et ma grande reconnaissance à ma grande famille, à mes amis et à tous mes professeurs pour leurs soutiens moral et Amical et leurs encouragements valorisants durant ces années d'étude.

Table des matières

1	Resolution Historique Du Problème	7
1.1	Histoire Du Problème	7
1.2	Démonstration historique de Jean Bernoulli	8
1.2.1	Loi de Snell-Descartes	8
1.2.2	Étude du problème	9
2	Approche - calcul des variations	15
2.1	introduction	15
2.2	Élément de cours de calcul des variations	15
2.3	Application au problème	19
3	Approche - Contrôle Optimal	21
3.1	Le principe du minimum de Pontrjagin	21
3.2	application Au problème brachistochrone	24
	Bibliographie	25

Résumé

Ce mémoire est consacré à l'étude du problème de la courbe brachistochrone. En premier lieu on présente la preuve de Bernoulli qui utilise un argument optique appliqué a notre problème mécanique. Ensuite on présente une preuve utilisant la théorie de calcul des variations et enfin on utilise une preuve se basant sur la théorie du control optimal.

Introduction Général

Le calcul des variations et le principe du minimum de Pontrjagin (PMP) sont parmi les grandes formulations de la théorie de la commande optimale , dont elle est un sous domaine de la théorie générale de l'optimisation.

Nous nous intéressons dans ce mémoire à l'utilisation du calcul des variations dans la résolution des problèmes de commande optimale. La théorie de calcul des variations a pour origine le fameux principe de Fermat qui postule que la lumière suit le trajet , dont le temps de propagation est minimal . Le problème de la brachistochrone est un problème de temps minimum. Il s'agit d'un problème posé par J.Bernoulli en 1696 qui fût résolu par d'autres mathématiciens illustés , tels que Euler et Newton. Ce problème a posé les premières bases du calcul des variations. Euler à cette occasion a ébauché à partir de considération géométrique la méthode des « petites variations » , à laquelle Lagrange a donné un peu plus tard une forme analytique élégante . Par nature, le calcul des variations conduit à des conditions nécessaires d'optimalité représentées par l'équation d'Euler-Lagrange .

L'avantage du calcul des variations par rapport aux autres formulations est sa grande facilité de mise en œuvre , mais surtout l'usage uniquement d'outils mathématiques classiques simples par opposition au PMP qui fait appel à des outils mathématiques sophistiqués de l'analyse fonctionnelle . Il faut néanmoins souligner que les autre formulations (PMP) est plus générale car nécessitant moins de régularité à la solution et pour lesquelles le domaine peut être ouvert ou fermé .

L'objectif de ce mémoire est de représenter la résolution du problème optimal de la brachistochrone, qui était résolue physiquement en utilisant la loi de conservation d'énergie et la loi de réfraction, puis mathématiquement en utilisant la théorie de calcul des variations puis le principe de minimum de Pontrjagin.

Le manuscrit est composé de trois chapitres. Dans le premier chapitre on va présenter une histoire chronologique du problème, et la preuve physique de Bernoulli. Dans le deuxième chapitre on introduit quelques éléments de la théorie de calcul des variations qui nous sera utile pour résoudre notre problème. Et enfin le dernier est consacré au PMP et son application a notre problème.

Resolution Historique Du Problème

1.1 Histoire Du Problème

Le mot brachistochrone est composé de deux racines grec : Brakhistos ; qui signifie le plus court et du mot chronos qui signifie Temps.

Ainsi le mot brachistochrone désigne une courbe dans un plan vertical sur laquelle un point matériel pesant placé dans un champ de pesanteur uniforme, glissant sans frottement et sans vitesse initiale, présente un temps de parcours minimal parmi toutes les courbes joignant deux points fixes : on parle de problème de la courbe brachistochrone.

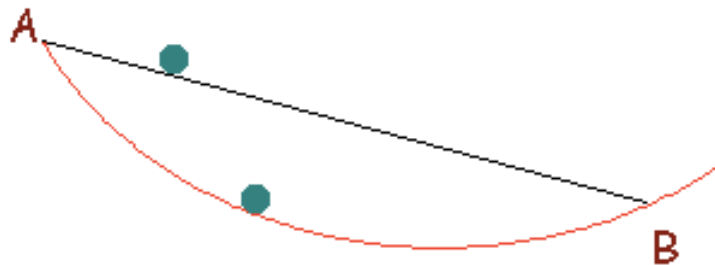


FIGURE 1.1 – Problème de la courbe brachistochrone

ainsi le problème de la brachistochrone s'énonce comme suite :

Étant donnée deux points A et B de hauteur différents , quelle est la courbe tracée par une bille sur lequel agit uniquement la gravité qui part du point A et arrive au point B le plus rapidement possible.

La résolution du problème de la courbe brachistochrone passionna les mathématiciens de la fin du XVIIe siècle¹. Il prend sa source dans une affirmation de Galilée en

1. Émilie du Châtelet écrit à ce sujet, dans Les Institutions de physique (1740) : « §468. Le problème de la ligne de la plus vite descente d'un corps tombant obliquement à l'horizon par l'action de la pesanteur d'un point donné à un autre point donné, est fameux par l'erreur du grand Galilée, qui a cru que cette ligne était un arc de cercle, et par les différentes solutions que les plus grands géomètres de l'Europe en ont donné ».

1633, qui crut que la solution consistait en un arc de cercle². Cependant, Galilée ne disposait pas des méthodes du calcul différentiel qui permettaient d'apporter une solution. Jean Bernoulli pose clairement le problème en juin 1696 dans les *Acta Eruditorum*³. Très rapidement, Leibniz propose une solution à Jean Bernoulli [1], mais sans qu'il reconnaisse la courbe en question. C'est Jean Bernoulli, qui dispose de deux solutions, qui reconnaît un arc de cycloïde commençant avec une tangente verticale [2]. Tous deux décident de différer la publication de leurs solutions pour laisser à d'autres la possibilité d'aborder le problème [3]. Celui-ci fut également résolu par Jacques Bernoulli⁴, frère de Jean, et par Newton, L'Hôpital et Tschirnhaus.

Les méthodes imaginées pour sa résolution amenèrent à développer la branche des mathématiques qu'on appelle le calcul des variations.

1.2 Démonstration historique de Jean Bernoulli

Avant de commencer la preuve de Jean Bernoulli on va rappeler la loi de réfraction de la lumière de Snell-Descartes et le principe de Fermat.

1.2.1 Loi de Snell-Descartes

La loi de Snell-Descartes [par Snell en 1621 puis par Descartes en 1637, [4]] de la réfraction exprime le changement de direction d'un faisceau lumineux lors de la traversée d'une paroi, séparant deux milieux différents. Chaque milieu est caractérisé par sa capacité à « ralentir » la lumière, modélisée par son indice de réfraction n qui s'exprime sous la forme :

$$n = \frac{c}{v}$$

où v est la vitesse de la lumière dans ce milieu et c est la vitesse de la lumière dans le vide. Dans sa forme la plus courante la loi de Snell-Descartes s'écrit

$$\frac{\sin(i_1)}{v_1} = \frac{\sin(i_2)}{v_2} \quad (1.1)$$

Où i_1 est l'angle d'incidence, qui est l'angle entre le rayon incident et la normale, et l'angle de réfraction i_2 est l'angle entre le rayon réfracté et la normale.

2. Galilée, Discours concernant deux sciences nouvelles, (th. XXII, prop. XXXVI), (1633), rééd. PUF, 1995, p. 199 : « Il semble possible de conclure que le mouvement le plus rapide entre deux points n'a pas lieu le long de la ligne la plus courte, c'est-à-dire le long d'une droite, mais le long d'un arc de cercle ».

3. Le problème est posé à la fin de l'article « Supplementum defectus Geometriae Cartesianae circa Inventionem Locorum », Opera Johannis Bernoulli [archive], t. I, p. 161.

4. Le problème de la brachistochrone est à l'origine d'une brouille entre les deux frères Bernoulli, Jacques estimant sa propre solution meilleure que celle de Jean et ayant lancé à son frère le défi de résoudre le problème dans un cadre plus général.

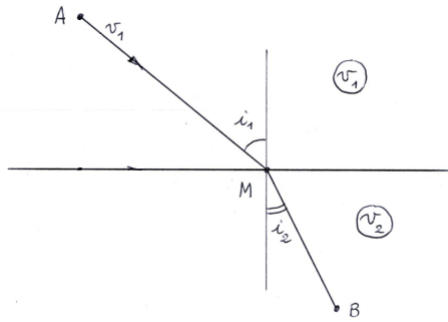


FIGURE 1.2 – La loi de réfraction

Une autre façon d'énoncer la loi de Snell-Descartes est que; la lumière toujours emprunte le chemin le plus rapide, c'est le principe de Fermat [en 1657 , [5]].

1.2.2 Étude du problème

le plan est rapporté à un repère orthonormé d'origine le point A (voir figure, 1.3)

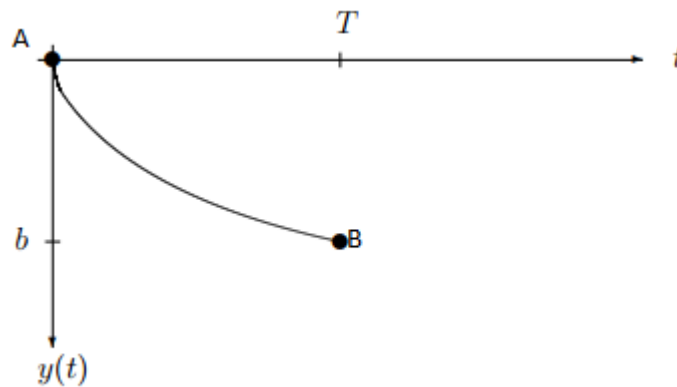


FIGURE 1.3 – trajectoire optimal

Puisque le système est isolé (car il n'échange ni matière, ni chaleur, ni travail avec l'extérieur), donc d'après la loi de conservation de l'énergie, la variation de l'énergie total est nulle; c-à-d

$$\Delta E_c + \Delta E_p = 0$$

avec E_c , E_p sont respectivement ; l'énergie cinétique, respectivement l'énergie potentiel du système.

et comme la vitesse initial est nul donc $\frac{1}{2}mV = mgy$, on s'simplifiant par la masse on obtient

$$V = \sqrt{2gy} \quad (1.2)$$

Puisque l'équation (1.2) est indépendante de la masse du point matériel, ainsi l'idée de Jean Bernoulli est de ramener le problème de la brachistochrone; qui est de nature mécanique a un problème de nature optique. La courbe brachistochrone est ainsi le

trajet suivi par la lumière dans un milieu où la vitesse augmente selon une accélération constante (l'attraction terrestre g).

Pour résoudre ce problème optique Jean Bernoulli suppose que le faisceau lumineux se déplace à travers plusieurs couches infinitésimales de milieux transparents de différentes densités et d'épaisseur $k\delta$ (voir Fig. 1.4), de sorte que dans chaque couche, la vitesse de la lumière est constante, mais elle change d'une couche à l'autre. En appliquant la loi de Snell-Descartes aux frontières entre les couches, nous obtenons :

$$\frac{\sin \theta_1}{V_1} = \frac{\sin \theta_2}{V_2} = \frac{\sin \theta_3}{V_3} = \dots = c$$

Où V_k est la vitesse de la lumière dans le milieu k et c est une constante.

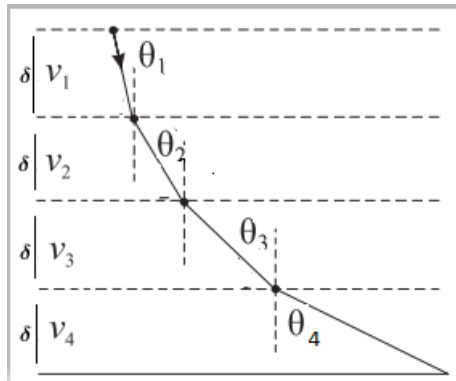


FIGURE 1.4 – Discrétisation du problème

En passant à la limite lorsque $\delta \downarrow 0$, nous concluons :

$$\frac{\sin \theta}{V} = c \tag{1.3}$$

avec θ est l'angle entre la courbe et l'axe vertical (voir Fig. 1.5).

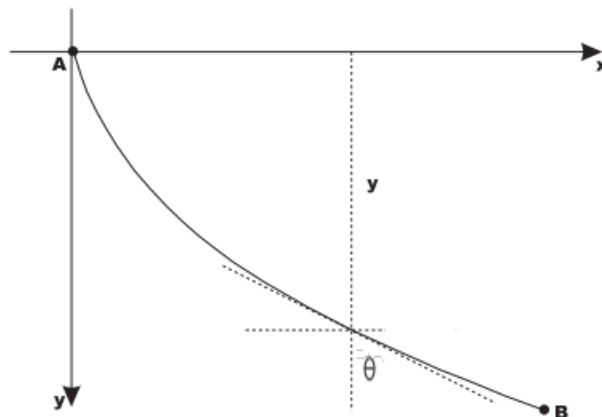


FIGURE 1.5 – Trajectoire optimale

L'équation (1.2) combiné avec l'équation (1.3) donnent :

$$\frac{\sin \theta}{\sqrt{2gy}} = c. \tag{1.4}$$

D'autre part

$$\begin{aligned}\sin \theta &= \frac{dx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} \\ &= \frac{dx}{dx \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}}\end{aligned}$$

ainsi, la relation (1.4) s'écrit :

$$\frac{1}{\sqrt{1 + y'^2}} = c$$

ce qui est équivalent à

$$\frac{1}{\sqrt{1 + y'^2}} = \sqrt{2gy} c$$

ce qui implique donc

$$(1 + y'^2)y = k \text{ avec } k = \frac{1}{2gc^2}. \quad (1.5)$$

Dans la suite on va donner l'équation paramétrique de la courbe (\mathcal{C}_k) :
(1 + y'^2) $y = k$, d'écrite dans (1.5).

Proposition 1.1 L'équation paramétrique de la courbe (\mathcal{C}_k) est

$$\begin{cases} x(u) = R(\alpha - \sin(u)) \\ y(u) = R(1 + \cos(u)) \end{cases} \text{ avec } R = \frac{k}{2} \text{ et } u \text{ varie dans } \mathbb{R}$$

ce qui correspond à l'équation paramétrique d'un cycloïde.

Preuve :

On considère le changement de variable suivant : $y' = \tan(\theta)$

On a

$$(1 + y'^2)y = k$$

d ou :

$$\begin{aligned}y &= \frac{k}{1 + y'^2} \\ &= \frac{k}{1 + \tan^2 \theta} \\ &= k \cos^2 \theta\end{aligned}$$

d'ou

$$y = k \left(\frac{1 + \cos(2\theta)}{2} \right)$$

ce qui donne

$$y = R(1 + \cos(2\theta)), \text{ avec } R = \frac{k}{2}$$

D'autre part

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

d où

$$dx = \frac{1}{y'} dy$$

ainsi

$$\begin{aligned} dx &= \cotan(\theta) dy \\ &= \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)} \frac{dy}{d\theta} d\theta \\ &= -2R \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)} \sin(2\theta) d\theta \end{aligned}$$

et comme ; $\sin(2\theta) = 2 \sin(\theta) \cos(\theta)$ et $\cos(\theta)^2 = \frac{1 + \cos(2\theta)}{2}$, donc

$$dx = -2R(1 + \cos(2\theta)) d\theta$$

ce qui implique que

$$x = -R(2\theta + \sin(2\theta))$$

Finalement, en posant $\pi + 2\theta = u$, on obtient :

$$\begin{cases} x = R(u - \sin(u)) \\ y = R(1 - \cos(u)) \end{cases}$$

On remarque que cette courbe (\mathcal{C}_R) est l'image par l'homothétie de centre O et de rapport R de la courbe (\mathcal{C}) de représentation paramétrique suivante :

$$\begin{cases} x = u - \sin(u) \\ y = 1 - \cos(u) \end{cases}$$

Dans la suite on va représenter la courbe (\mathcal{C}).

Domaine de définition

Les fonctions x et y sont définies sur \mathbb{R} . On a donc le domaine de définition $\mathcal{D} = \mathbb{R}$

Réduction du domaine d'étude

On remarque que :

$$x(2\pi + u) = 2\pi + x(u) \text{ et } y(2\pi + u) = y(u)$$

Il en résulte que la courbe est invariante par la translation de vecteur

$$\vec{V} = 2\pi \vec{i}$$

On étudie la courbe sur un intervalle I_1 de longueur 2π , et on la complète par des translations de vecteur $k\vec{V}$, où k est entier. Choisissons $I_1 = [-\pi, \pi]$, puisque

$$x(-u) = -x(u) \quad \text{et} \quad y(-u) = y(u)$$

donc la courbe est symétrique par rapport à (Oy) , donc l'étude se restreint à l'intervalle I_2 , et on complétera par la symétrie par rapport à (Oy) .

Dérivées

On a

$$x'(u) = 1 - \cos(u) \quad \text{et} \quad y'(u) = \sin(u).$$

Les deux fonctions x' et y' s'annulent en 0. On a donc un point singulier en $u = 0$. La fonction y' s'annule en π . D'autre part ; sur I_2 les fonctions x' et y' sont positives.

Point singulier

Puisque au voisinage de 0 on a

$$\frac{y'(u)}{x'(u)} = \frac{\sin(u)}{1 - \cos(u)} \sim \frac{u}{\frac{u^2}{2}} = \frac{2}{u}$$

cette expression tend vers l'infini en 0. On a donc une tangente verticale en 0, et par symétrie l'origine O est un point de rebroussement de première espèce.

Point remarquable

Pour $t = \frac{\pi}{2}$, on obtient le point de coordonnées $(R(-\pi/2 + 1), R)$ où le coefficient directeur de la tangente à la courbe vaut 1.

Tableau de variation

t	0	π	
x'	0	+	
x	0	π	
y	0	2	
y'	0	+	0
y'/x'	∞	0	

FIGURE 1.6 – Tableau des variations

Traçage de la courbe

On trace l'arc de courbe (\mathcal{C}) obtenu lorsque u varie de 0 à π et l'on complète par la symétrie par rapport à ($0y$), puis par des translations de vecteur $k\vec{V}$ où k est entier.

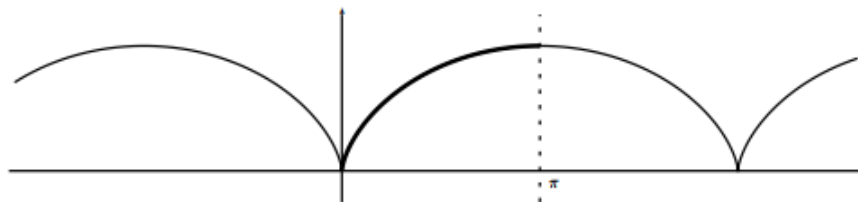


FIGURE 1.7 – la courbe cycloïde

Ainsi la courbe brachistochrone est une partie d'un cycloïde.

Approche - calcul des variations

2.1 introduction

En mathématiques, et plus précisément en analyse fonctionnelle, le calcul des variations (ou calcul variationnel) est un ensemble de méthodes permettant de minimiser une fonctionnelle. Celle-ci, qui est à valeurs réelles, dépend d'une fonction qui est l'inconnue du problème. Il s'agit donc d'un problème de minimisation dans un espace fonctionnel, de dimension infinie en général. Le calcul des variations s'est développé depuis le milieu du XVIIIe siècle jusqu'aujourd'hui ; son dernier avatar est la théorie de la commande optimale, datant de la fin des années 1950.

Parmi les principaux résultats du calcul des variations, on a l'équation d'Euler-Lagrange qui nous sera utilisée pour résoudre le problème brachistochrone.

2.2 Élément de cours de calcul des variations

Le problème de Brachistochrone est un cas particulier des problèmes de calcul des variations. Ce problème est parmi les bases de développement de la théorie de calcul des variations. Dans la suite on va présenter quelques éléments de la théorie de calcul des variations.

Notons : $C([a, b])$ l'espace des fonctions continues sur $[a, b]$, et $C^r([a, b])$ l'espace des fonctions de classe C^r sur $[a, b]$.

Proposition 2.1 : Notons χ l'espace $C([a, b])$, muni de la norme :

$$\|x\|_c = \|x\|_\infty = \max_{t \in [a, b]} |x(t)|.$$

Alors l'espace normé χ est un de Banach.

Proposition 2.2 Notons \mathcal{Y} l'espace $C^1([a, b])$, muni de la norme :

$$\|x\|_D = \|x\|_\infty + \|x'\|_\infty.$$

La convergence d'un $x \in \mathcal{Y}$ est équivalente à la convergence uniforme de x et x' dans l'intervalle $[a, b]$.

La formulation d'un problème en calcul de variations est la suivante :

Soit $L : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $(t, x, y) \longrightarrow L(t, x, y)$, de classe C^r avec $(r \geq 2)$. Pour tout $\forall x \in C^1[a, b]$, et pour tous réels A et B satisfaisants les conditions : $x(a) = A$ et $x(b) = B$, On cherche une fonction x qui minimise la fonctionnelle suivante :

$$I[x] = \int_a^b L(t, x(t), x'(t)) dt$$

Le L est appelé **Lagrangienne** du problème.

Définition 2.1 La fonction $x_* \in C^1([a, b])$ est dite ; minimum local faible s'il minimise la fonctionnelle I dans dans un voisinage de x_* de \mathcal{Y} . Et elle est dite minimum local fort s'elle minimise I dans un voisinage de x_* de \mathcal{X} .

Exemple 2.1 La fonction $x \equiv 0$ est un minimum local faible mais ce n'est pas un minimum local fort pour la fonctionnelle I définie sur $C^1([0, \pi])$ par :

$$I[x] = \int_0^\pi x(t)^2(1 - x'(t)) dt \text{ avec } x(0) = 0, x(\pi) = 0$$

On a la fonction $I[x]$ est positive sur la boule unité ouverte $B_1(0) = x \in \mathcal{Y} : \|x\|_D < 1$. et donc $x_* \equiv 0$ est un minimum local faible. Mais si $\|x'(t)\|_\infty$ devient très grand ; la fonctionnelle I peut être devenir négative. Soit $\epsilon > 0$ et $n \in \mathbb{N}$, concéderons l'oscillation à haute fréquence et basse amplitude $x_n \in C^1([0, \pi])$ suivante :

$$x_n(t) = \epsilon \sin(nt)$$

nous avons :

$$\begin{aligned} I[x_n(t)] &= \epsilon^2 \int_0^\pi \sin^2(nt)(1 - \epsilon^2 n^2 \cos^2(nt)) dt \\ &= \frac{\epsilon^2}{n} \int_0^{n\pi} \sin^2(s)(1 - \epsilon^2 n^2 \cos^2(s)) ds \\ &= \epsilon^2 \int_0^\pi \sin^2(s) ds - \epsilon^4 n^2 \int_0^\pi \sin^2(s) \cos^2(s) ds \\ &= \epsilon^2 \int_0^\pi \sin^2(s) ds - \frac{\epsilon^4 n^2}{4} \int_0^\pi \sin^2(2s) ds \\ &= \epsilon^2 \int_0^\pi \sin^2(s) ds - \frac{\epsilon^4 n^2}{4} \int_0^{2\pi} \sin^2(r) \frac{dr}{2} \\ &= \epsilon^2 \left(1 - \frac{\epsilon^4 n^2}{4} \right) \int_0^{2\pi} \sin^2(s) ds \end{aligned}$$

On déduit que pour $n > \frac{2}{\epsilon}$ on a $I[x_n] < 0$, ce qui implique que $\lim_{n \rightarrow +\infty} I[x_n] \rightarrow -\infty$, finalement $x_* \equiv 0$ n'est pas un minimum local fort pour la fonctionnelle I .

Dans la suite nous développons des conditions nécessaires pour qu'une fonction x_* soit un minimum local faible de la fonctionnelle I .

Si x_* est un minimum local de I , il existe $r > 0$ tel que, pour chaque $h \in C^1([a, b])$ vérifiant $h(a) = h(b) = 0$, on a

$$I[x_*] \leq I[x_* + \epsilon h]$$

L'inégalité précédente est équivalente a

$$\varphi(0, h) \leq \varphi(\epsilon, h), \text{ avec } \varphi(\epsilon, h) = I[x_* + \epsilon h]$$

on déduit donc, que

$$\varphi'(0, h) = \frac{d}{d\epsilon|_{\epsilon=0}} I[x_* + \epsilon h] = 0 \quad (2.1)$$

$$\varphi''(0, h) = \frac{d^2}{d^2\epsilon|_{\epsilon=0}} I[x_* + \epsilon h] \geq 0 \quad (2.2)$$

Les équations 2.1 et 2.2 sont appelés premier et deuxième variation de problème et elles sont notés habituellement par $\delta I[x_*](h)$ respectivement $\delta^2 I[x_*](h)$, avec

$$\delta I[x_*](h) = \int_a^b L_x(t, x_*, x'_*) + L_{x'}(t, x_*, x'_*)h' dt \quad (2.3)$$

$$\delta^2 I[x_*](h) = \int_a^b (h, h') \begin{bmatrix} L_{xx}(t, x_*, x'_*) & L_{xx'}(t, x_*, x'_*) \\ L_{x'x}(t, x_*, x'_*) & L_{x'x'}(t, x_*, x'_*) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} h \\ h' \end{Bmatrix} dt \quad (2.4)$$

Lemme 2.1 supposons α, β sont 2 fonctions continues définie sur un compact $[a, b]$ tq $\alpha, \beta \in C([a, b])$ avec

$$\int_a^b (\alpha(t)h(t) + \beta(t)h'(t))dt = 0 \quad \forall h \in C_0^1([a, b]). \quad (2.5)$$

Donc $\beta \in C^1([a, b])$ et donc pour tout $t \in [a, b]$ on a $\beta'(t) = \alpha(t)$.

Preuve du lemme Soit $A(t) = \int_a^t \alpha(s)ds$, par intégration par partie on obtient

$$\int_a^b (\beta(t) - A(t) - c)h'(t)dt = 0$$

prenons $h(t) = \int_a^t (\beta(s) - A(s) - c)ds$ avec $c = \frac{1}{b-a} \int_a^b (\beta(t) - A(t))dt$, on a

$h(a) = h(b) = 0$ et $\int_a^b h'(t)^2 dt = 0$. Puisque h' est continue sur $[a, b]$ donc

depuis h' est continue, h est constant et $h(a) = 0$ ce qui implique $h \equiv 0$.

On déduit donc que $\beta(t) = A(t) + c$ et donc β est différentiable avec $\beta' = \alpha(t)$.

Corollaire 2.1 [6](L'équation d'Euler-Lagrange)

si x_* est un minimum faible pour la fonction I , donc la dérivée partiel $\frac{\partial L}{\partial x'}$ est différentiable le long de la courbe $t \rightarrow (t, x_*(t), x'_*(t))$ avec

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L(t, x_*(t), x'_*(t))}{\partial x'} \right) = \frac{\partial L(t, x_*(t), x'_*(t))}{\partial x} \quad (2.6)$$

Chaque fonction $x_* : t \rightarrow x_*(t)$ vérifiant 2.6 est appelée fonction extrémale.

notons que si L est deux fois différentiable et la fonction extrémal x_* est de classe C^2 alors

$$L_{tx'} + L_{x'x}x'_* + L_{x'x'}x''_* = L_x.$$

Le théorème suivant étudie la régularité de la solution extrémale x_* .

Proposition 2.3 soit $x_* : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction extrémale vérifiant la condition suivante :

$$L_{x'x'}(t, x_*(t), x'_*(t)) \neq 0, \quad \forall t \in [a, b].$$

Alors, si $L \in C^r$ donc $x_* \in C^r$.

Preuve de la proposition En intégrant l'équation d'Euler-Lagrange 2.6 entre a et t , on obtient $\frac{d}{dx'} L(t, x_*(t), x'_*(t)) - \int_a^t \frac{d}{dx} L(s, x_*(s), x'_*(s)) ds - c = 0$, avec c une constante. Notons

$$G(t, u) = \frac{d}{dx'} L(t, x_*(t), u) - \int_a^t \frac{d}{dx} L(s, x_*(s), x'_*(s)) - c$$

donc $u = x'(t)$ est une solution de l'équation $G(t, u) = 0$. par la théorème de fonction implicite, la solution est localement unique et de classe C^k si la fonction $G(t, \cdot)$ est de classe C^k et que

$$\frac{\partial G}{\partial u}(t, x'_*(t)) = \frac{\partial^2 L}{\partial x'^2}(t, x_*(t), x'_*(t))$$

est non nulle. Donc si $L \in C^r$ donc $x_* \in C^r$.

Corollaire 2.2 [6](équation du premier intégral ou de Beltrami)

si x_* est un minimum faible pour la fonction I et de classe C^2 et que la fonction L est invariante en temps, alors la fonction :

$$t \rightarrow L(t, x_*(t), x'_*(t)) - x'_*(t) \frac{d}{dx'} L(t, x_*(t), x'_*(t))$$

est constante sur $[a, b]$, c-à-d que l'équation d'Euler Lagrange a un intégral premier donné par :

$$L - x' L_{x'} = cste \quad (2.7)$$

Preuve du corollaire Puisque L est indépendante de t , donc

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(L - x'L_{x'}) &= L_x x' + L_{x'} x'' - x'' L_{x'} + x' \frac{d}{dt}(L_{x'}) \\ &= x' [L_x - \frac{d}{dt}(L_{x'})] \equiv 0\end{aligned}$$

ce qui achève la preuve.

2.3 Application au problème

On considère un point matériel qui se déplace d'un point A à un point B et suivant une courbe (voir figure 2.1)

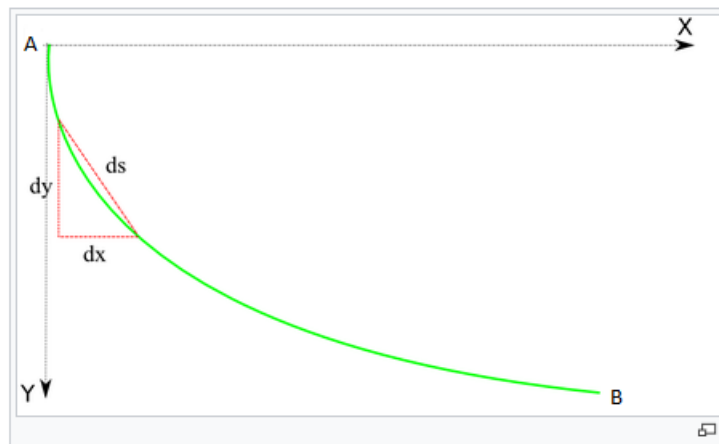


FIGURE 2.1 – Courbe de la brachistochrone

La vitesse à l'instant t du point matériel qui se déplace sur la courbe la courbe s'écrit sous la forme

$$V = \frac{ds}{dt}$$

avec s est l'abscisse curviligne, ce qui est équivalent à

$$dt = \frac{ds}{V}$$

ainsi, le temps de parcours de la courbe de A à B est

$$T = \int_{x_A}^{x_B} \frac{ds}{V}$$

et comme $ds^2 = dx^2 + dy^2$, donc

$$ds = \sqrt{1 + y'^2} dx \text{ et } V = \sqrt{2gy}$$

Donc le temps de parcours de A à B s'écrit :

$$T = \int_{x_A}^{x_B} \sqrt{\frac{1 + y'^2}{2gy}} dx \quad (2.8)$$

Le problème de brachistochrone est équivalent à minimiser la temps T dans l'équation (2.8), ce qui nous invite à considérer la fonction $L(y, y') = \sqrt{\frac{1 + y'^2}{y}}$ et utiliser le corollaire (2.2), ainsi il existe une constante K tel que :

$$L - y' \frac{dL}{dy'} = K$$

ce qui est équivalent à

$$\sqrt{\frac{1 + y'^2}{y}} - \frac{y'^2}{\sqrt{y(1 + y'^2)}} = K$$

d'où

$$y(1 + y'^2) = \frac{1}{K^2}$$

qui est, d'après la section précédente, l'équation d'une cycloïde.

Approche - Contrôle Optimal

3.1 Le principe du minimum de Pontrjagin

On considère le problème de minimisation suivant :

$$\text{minimiser } J(\mathbf{y}, \mathbf{u}) = h(\mathbf{y}(T)) + \int_0^T g(\mathbf{y}(t), \mathbf{u}(t)) dt \quad (3.1)$$

sous les contraintes :

$$\begin{aligned} \mathbf{y}'(t) &= \mathbf{f}(\mathbf{y}(t), \mathbf{u}(t)), \quad \forall t \in [0, T] \\ \mathbf{y}(0) &= \mathbf{y}_0 \\ \mathbf{u}(t) &\in U, \quad \forall t \in [0, T] \end{aligned}$$

avec $\mathbf{u}(t)$ est la fonction contrôle. Et soit H la fonction hamiltonienne définie par :

$$\begin{aligned} H : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ H(\mathbf{y}, \mathbf{u}, \mathbf{p}) &= g(\mathbf{y}, \mathbf{u}) + \mathbf{p}\mathbf{f}(\mathbf{y}, \mathbf{u}) \end{aligned}$$

Considérons les deux hypothèses suivantes :

Hypothèses de convexité (A_1) : Pour chaque état \mathbf{y} l'ensemble :

$$D = \{\mathbf{f}(\mathbf{y}, \mathbf{u}) \mid \mathbf{u} \in U\} \text{ est convexe.}$$

Hypothèse de régularité (A_2) : Soient $\mathbf{u}_k(t) \in U, 1 \leq k \leq 2$ être deux contrôles admissibles et soit $\mathbf{y}_1(t) \forall t \in [0, T]$ l'état associés à \mathbf{u}_1 . Nous supposons que pour tout $\epsilon \in [0, T]$ la solution $\mathbf{y}_\epsilon(t) t \in [0, T]$ du système :

$$\begin{aligned} \mathbf{y}'_\epsilon(t) &= (1 - \epsilon)\mathbf{f}(\mathbf{y}_\epsilon(t), \mathbf{u}_1(t)) + \epsilon\mathbf{f}(\mathbf{y}_\epsilon(t), \mathbf{u}_2(t)) \quad t \in [0, T] \\ \mathbf{y}_\epsilon(0) &= \mathbf{y}_1(0) \end{aligned}$$

satisfais :

$$\mathbf{y}_\epsilon(t) = \mathbf{y}_1(t) + \epsilon\zeta(t) + o(\epsilon)$$

pour $\zeta(t)$, $t \in [0, T]$ est la solution du problème de Cauchy suivant

$$(SL) \begin{cases} \dot{\zeta}(t) = \nabla_y f(y_1(t), u_1(t))\zeta(t) + f(y_1(t), u_2(t)) - f(y_1(t), u_1(t)) \\ \zeta(0) = 0 \end{cases}$$

Dans la suite on va énoncer le principe du minimum de Pontrjagin.

Théorème 3.1 [12] Supposons que l'hypothèse de convexité (A_1) et l'hypothèse de régularité (A_2) sont satisfaites, et supposons que y^* , u^* sont; l'état optimal et la commande optimale du problème (3.1). Donc, il existe un état adjoint optimale p^* solution du problème adjointe suivante :

$$\begin{cases} p^{*'}(t) = -\nabla_y H(y^*(t), u^*(t), p^*(t)) \\ p^*(T) = \nabla h(y^*(T)) \end{cases}$$

de plus, on à

$$u^*(t) = \arg \min_{u \in U} (H(y^*, u, p^*)) \quad (3.2)$$

Et il existe une constante C tel que :

$$H(y^*(t), u^*(t), p^*(t)) = C, \quad \forall t \in [0, T]$$

Preuve du théorème premièrement nous donnons la preuve dans le cas de $J(y, u) = h(y(T))$. L'hypothèses de convexité (A_1) assure que pour tout admissible contrôle $u(t) \in U$, $t \in [0, T]$, et pour chaque $\epsilon \in [0, 1]$, alors il existe $\bar{u}(t)$, $t \in [0, T]$ tel que :

$$f(y_\epsilon(t), \bar{u}(t)) = (1 - \epsilon)f(y_\epsilon(t), u^*(t)) + \epsilon f(y_\epsilon(t), u(t)).$$

Par conséquent, L'état y_ϵ Correspond à la commande \bar{u} .

D'autre part, l'optimalité de $y^*(t)$ et l'hypothèse de régularité (A_2) impliquent que :

$$h(y^*(T)) \leq h(y_\epsilon(T)) = h(y^*(T) + \epsilon\zeta(T) + O(\epsilon)) = h(y^*(T)) + \epsilon\delta h(y^*(T))^T \zeta(T) + O(\epsilon)$$

D'où

$$\nabla h(y^*(T))^T \zeta(T) \geq 0 \quad (3.3)$$

soit $W(t, \tau)$ la matrice wronskien associe au système linière (SL) ie :

$$\frac{dW(t, \tau)}{d\tau} = -W(t, \tau) \nabla_y f(y^*(\tau), u^*(\tau))^T, \quad W(t, t) = I \quad (3.4)$$

Comme la solution de (SL) peut être écrit sous la forme :

$$\zeta(t) = W(t, \tau)\zeta(\tau) + \int_\tau^t W(t, s)(f(y^*(s), u(s)) - f(y^*(s), u^*(s)))ds$$

et que $\zeta(0) = 0$, donc

$$\zeta(t) = \int_0^T W(T, t)(f(y^*(s), u(s)) - f(y^*(s), u^*(s)))dt \quad (3.5)$$

Considérons la fonction \mathbf{p}^* définie par :

$$\mathbf{p}^*(t) = \mathbf{W}(T, t)^T \mathbf{p}^*(T), \quad t \in [0, T], \quad \mathbf{p}^*(T) = \nabla h(\mathbf{y}^*(T)) \quad (3.6)$$

On dérivant l'expression précédente par rapport à t on obtient :

$$\mathbf{p}'^*(t) = \frac{d\mathbf{W}(T, t)^T}{dt} \mathbf{p}^*(T)$$

Ceci combiné avec (3.6) et (3.4), donne

$$\mathbf{p}'^*(t) = -\nabla_{\mathbf{y}} f(\mathbf{y}^*(t), \mathbf{u}^*(t)^T) \mathbf{p}^*(t), \quad t \in [0, T] \quad \text{et} \quad \mathbf{p}^*(T) = \nabla h(\mathbf{y}^*(T)) \quad (3.7)$$

Qui est l'équation d'état adjoint pour $H(\mathbf{y}, \mathbf{u}, \mathbf{p}) = \mathbf{p}^T f(\mathbf{y}, \mathbf{u})$.

Il reste à prouver le principe minimum (3.2). Les relations (3.3), (3.5) et (3.6) impliquent

$$\begin{aligned} (E) \quad 0 \leq \mathbf{p}^*(T)^T \zeta(T) &= \mathbf{p}^*(T)^T \int_0^T \mathbf{W}(T, t) [f(\mathbf{y}^*(t), \mathbf{u}(t)) - f(\mathbf{y}^*(t), \mathbf{u}^*(t))] dt \\ &= \int_0^T \mathbf{p}^*(t)^T [f(\mathbf{y}^*(t), \mathbf{u}(t)) - f(\mathbf{y}^*(t), \mathbf{u}^*(t))] dt \end{aligned}$$

en utilisant l'équation précédente et un raisonnement par absurde on montre que, pour $\mathbf{u}^*(\cdot)$ continue sur $[0, T]$ on a

$$\mathbf{p}^*(t)^T f(\mathbf{y}^*(t), \mathbf{u}^*(t)) \leq \mathbf{p}^*(t)^T f(\mathbf{y}^*(t), \mathbf{u}(t)), \quad \forall \mathbf{u} \in U. \quad (3.8)$$

En effet, si l'équation (3.8) n'est pas vérifiée, donc pour un $\hat{\mathbf{u}} \in U$ et $t_0 \in [0, T]$ on a :

$$\mathbf{p}^*(t_0)^T f(\mathbf{y}^*(t_0), \mathbf{u}^*(t_0)) > \mathbf{p}^*(t_0)^T f(\mathbf{y}^*(t_0), \hat{\mathbf{u}}), \quad t \in I(t_0)$$

. la continuité de \mathbf{u}^* implique l'existence d'un intervalle $I(t_0) \subset [0, T]$ tel que :

$$\mathbf{p}^*(t)^T f(\mathbf{y}^*(t), \mathbf{u}^*(t)) > \mathbf{p}^*(t)^T f(\mathbf{y}^*(t), \hat{\mathbf{u}}), \quad \forall t \in I(t_0)$$

On choisissant le contrôle

$$\mathbf{u}(t) = \begin{cases} \hat{\mathbf{u}}(t) & \text{si } t \in I(t_0) \\ \mathbf{u}^*(t) & \text{si } t \notin I(t_0) \end{cases}$$

on obtient une contradiction avec l'équation (E).

D'autre part, le cas général

$$J(\mathbf{y}, \mathbf{u}) = h(\mathbf{y}(T)) + \int_0^T g(\mathbf{y}(t), \mathbf{u}(t)) dt$$

peut être formulé sous la forme suivante :

$$\bar{J}(\mathbf{y}, \mathbf{u}) = h(\mathbf{y}(T)) + \mathbf{y}(T)$$

En introduisant l'équation différentiel supplémentaires :

$$\mathbf{y}'(t) = g(\mathbf{y}(t), \mathbf{u}(t)), t \in [0, T]$$

L'utilisation d'arguments analogues à la preuve précédente, permet de conclure.

3.2 application Au problème brachistochrone

D'après la section précédente, le problème brachistochrone peut être formulé comme étant le problème de minimisation suivant :

$$J(\mathbf{y}^*, \mathbf{u}^*) = \min \left[J(\mathbf{y}, \mathbf{u}) = \int_0^T \frac{\sqrt{1 + \mathbf{u}(t)^2}}{\sqrt{2\gamma\mathbf{y}(t)}} dt \right] \quad (3.9)$$

avec :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(t) &= \mathbf{y}'(t), t \in [0, T] \\ \mathbf{y}(0) &= \mathbf{0}, \mathbf{y}(T) = \mathbf{b} \end{aligned}$$

Comme l'hamiltonien associé à (3.9) s'écrit sous la forme :

$$H(\mathbf{y}, \mathbf{u}, \mathbf{p}) = g(\mathbf{y}, \mathbf{u}) + \mathbf{p}\mathbf{u} \text{ où } g(\mathbf{y}, \mathbf{u}) = \frac{\sqrt{1 + \mathbf{u}(t)^2}}{\sqrt{2\gamma\mathbf{y}(t)}}$$

Il est simple de vérifier les conditions (A_1) et (A_2) . En appliquant le principe du minimum de Pontrjagin (3.1), il existe une constante c tel que :

$$H(\mathbf{y}^*, \mathbf{u}^*, \mathbf{p}^*) = c, \forall t \in [0, T]$$

ce qui est équivalent à dire que

$$g(\mathbf{y}^*(t), \mathbf{u}^*(t)) + \mathbf{p}^*(t)\mathbf{u}^*(t) = c, \forall t \in [0, T]$$

et comme $\mathbf{p}^*(t) = -\nabla_{\mathbf{u}}g(\mathbf{y}^*(t), \mathbf{u}^*(t))$, donc

$$g(\mathbf{y}^*(t), \mathbf{u}^*(t)) - \nabla_{\mathbf{u}}g(\mathbf{y}^*(t), \mathbf{u}^*(t))\mathbf{u}^*(t) = c, \forall t \in [0, T]$$

ce qui est équivalent à

$$\frac{\sqrt{1 + \mathbf{u}(t)^2}}{\sqrt{2\gamma\mathbf{y}(t)}} - \frac{\mathbf{u}^2(t)}{\sqrt{1 + \mathbf{u}(t)^2}\sqrt{2\gamma\mathbf{y}(t)}} = c \forall t \in [0, T]$$

ainsi

$$y^*(t)(1 + (y^*(t))^2) = c, \quad t \in [0, T].$$

Donc la courbe brachistochrone est une partie d'un cycloïde.

Remarque 3.1 Les paramètres inconnus c et T de la courbe brachistochrone peuvent être déterminé par les conditions aux limites $y^*(0) = 0$ et $y^*(T) = b$.

Bibliographie

- [1] *Leibniz matematische Schriften [archive]*, t. III, p. 290-295.
- [2] *Opera Johannis Bernoulli [archive]*, t. I, p. 187.
- [3] Marc Parmentier, *Leibniz, naissance du calcul différentiel*, Vrin (1989), p. 345-358.
- [4] LANGET, Raphael. *Optique géométrique*.
- [5] Giorello G, *L'économie de la nature, Les génies de la science, août-septembre 2007*, p56-65
- [6] SCHÄTTLER, Heinz et LEDZEWICZ, Urszula. *Geometric optimal control : theory, methods and examples*. Springer Science et Business Media, 2012.
- [7] Sussmann, H. J., et Willems, J. C. (1997). *300 years of optimal control : from the brachistochrone to the maximum principle*. *IEEE Control Systems*, 17(3), 32-44.
- [8] TIKHOMIROV, V.M., *Stories about maxima and minima, American Mathematical Society 1990* .
- [9] VIAL, Alexandre. *Le problème brachistochrone et le calcul des variations*. 2008.
- [10] Simmons, G. F. (2016). *Differential equations with applications and historical notes*. CRC Press.
- [11] Erlichson, H. (1998). *Galileo's work on swiftest descent from a circle and how he almost proved the circle itself was the minimum time path*. *The American mathematical monthly*, 105(4), 338-347.
- [12] Ronald H.W. Hoppe , *Optimization Theory II, Spring 2007; Chapter3 :Continuous-Time Optimal Control*