كلية العلوم و التقنيات فاس
Faculté des Sciences et Techniques de Fès

جامعة سيدي محمد بن عبد الله
Université Sidi Mohamed Ben Abdellah

DÉPARTEMENT DES MATHÉMATIQUES
Licence Mathématique et Applications (MA)

MÉMOIRE DE FIN D'ÉTUDES

Pour l'obtention du Diplôme de Licence Sciences et Techniques (LST)

Espace hermitien

• Réalisé par :

HAMDAOUI Ahmed

• Encadré par :

Pr. RAHMOUNI HASSANI Aziza

Soutenu le 09 juin 2018

◇ **Devant le jury composé de :**

- Pr. EZZAKI Fatima
- Pr. MAHDOU Najib
- Pr. RAHMOUNI HASSANI Aziza

Année Universitaire 2017-2018

FACULTÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES FES-SAISS
B.P. 2202 – Route d'Imouzzer – FES

Dédicace

<u>Je dédie ce travail :</u>

- ✓ A mon père, décidé trop tôt, qui m'a toujours poussé et motivé dans mes études. J'espère que, du monde qui est sien maintenant, il apprécie cet humble geste comme preuve de reconnaissance de la part d'un fils qui a toujours prié pour le salut de son âme. Puisse Dieu, le tout puissant, l'avoir en sa sainte miséricorde.
- ✓ Ma mère, qui a œuvré pour ma réussite, de par son amour, son soutien, tous les sacrifices consentis et ses précieux conseils, pour toute son assistance et sa présence dans ma vie, reçois à travers ce travail aussi modeste soit-il, l'expression de mes sentiments et de mon éternelle gratitude.
- ✓ A mes chers frères (Hicham, Mohamed-amine, soufyane), pour leur soutien et encouragement durant mes études.
- ✓ A mes chers amis, avec eux j'ai partagé des moments inoubliables de souffrance et de joie.
- ✓ A tous mes professeurs pour leur soutien au cours de toutes mes années d'études.

Remerciement

Je tiens tout d'abord remercier Dieu le tout puissant, qui m'a donné la force et la patience d'accomplir ce modeste travail.
En second lieu, je tiens à remercier mon encadrant Pr Mme. **Rahmouni Hassani Aziza**, pour sa responsabilité, son précieux conseils, ses encouragements valorisants, et son aide durant toute la période du travail.
Mes vifs remerciements vont également aux Professeurs **Najib Mahdou**, et **EZZAKI Fatima** pour l'intérêt qu'ils ont porté à cette recherche en acceptant d'éxaminer ce travail et de l'enrichir par leurs propositions.
Enfin, je tiens également à remercier toutes les personnes qui ont participé de prés ou de loin à la réalisation de ce travail.

Table des matières

Introduction

En mathématique, plus précisément en algèbre linéaire, l'espace hermitien est l'équivalent de l'espace euclidien muni d'un produit scalaire euclidien, c'est un espace vectoriel complexe muni d'un produit scalaire hemitien. Les propriétés du produit scalaire euclidien restent valable pour la plus part pour le produit scalaire hermitien ,par exemple : Inégalité de Caushy Schwarz, inégalité triangulaire, théorème de Pythagore, algorithme de Gram-Schmidt, projection orthogonale, et l'éxistance d'isomorphisme canonique entre un espace vectoriel hermitien et son dual.
Dans le premier chapitre on va traiter la majorité de ces proprietés comme l'inégalité de Cauchy Schwarz et de Minkowski, just après une étude globale sur les formes sesquilinéaires hermitiennes, formes quadratiques, et le produit scalaire hermitien. Leurs définitions et propriétés ainsi que les liens qui existent entre eux.
Dans le deuxième chapitre on va traiter la notion d'orthogonalisation c'est-à-dire les familles, les bases orthogonale, la projection orthogonale et les deux méthodes fondamentaux dans la notion d'orthogonalisation : Gauss et Gram Schmidt.
Et dans le dernier chapitre je vais introduire l'isomorphisme canonique entre un espace vectoriel hermitien et son dual, et les endomorphismes d'un espace hermitien, en particulier
les endomorphismes adjoints, les endomorphismes unitaires, les endomorphismes normaux,
et les endomorphismes hermitiens.

1 Espace hermitien

1.1 forme sesquilineaire

Dans tout ce chapitre E désigne un espace vecoriel de dimension fini sur $\mathbb{C}$.

***Définition* 1.1.1.**

i) on dit qu'une application u de E dans E est linéaire si pour $x, y \in E$, et $\lambda \in \mathbb{C}$ on a :
$u(x + \lambda y) = u(x) + \lambda u(y)$.

ii) On dit qu'une application u de E dans E est semi-linéaire si pour $x, y \in E$, et $\lambda \in \mathbb{C}$, on a :
$u(x + \lambda y) = u(x) + \overline{\lambda} u(y)$.

***Définition* 1.1.2.**

On appelle une forme sesquilinéaire sur E une application f de $E \times E$ dans $\mathbb{C}$ vérifiant les propriétés suivantes :

* *f est linéaire à droite :*
pour $x, y, y' \in E$ et $\lambda \in \mathbb{C}$ on a : $f(x, y + \lambda y') = f(x, y) + \lambda f(x, y')$.

** *f est semi-linéaire à gauche :*
pour $x, x', y \in E$ et $\lambda \in \mathbb{C}$ on a : $f(x + \lambda x', y) = f(x, y) + \overline{\lambda} f(x', y)$.

Exemples :

1) soient φ , ϕ des formes linéaire sur E :

on a l'application : $\begin{array}{cccc} f & : & E \times E & \to & \mathbb{C} \\ & & (x, y) & \mapsto & \overline{\varphi(x)}\phi(y), \end{array}$

est une forme sesquilinéaire sur E^2.

en effet :

* soit $x \in E$:
  soient $y \in E, y' \in E, \lambda \in \mathbb{C}$:
  $f(x, y+\lambda y') = \overline{\varphi(x)}\phi(y+\lambda y')$
  $= \overline{\varphi(x)}[\phi(y) + \lambda\phi(y')]$ (ϕ est linéaire).
  D'où $f(x, y+\lambda y') = \overline{\varphi(x)}\phi(y) + \lambda\overline{\varphi(x)}\phi(y')$
  $= f(x,y) + \lambda f(x,y')$.
  alors pour $x \in E$ fixé : $f(x,y)$ est linéaire par rapport à y .
* soit $y \in E$
  soient $x, x' \in E, \lambda \in \mathbb{C}$:
  On a : $f(x+\lambda x', y) = \overline{\varphi(x+\lambda x')}\phi(y)$
  $= \overline{\varphi(x)}\phi(y) + \overline{\lambda}\overline{\varphi(x')}\phi(y)$
  $= f(x,y) + \overline{\lambda} f(x', y)$.
  donc :f est semi-linéaire à gauche .

Alors f est une forme sesquilinéaire.

2)

Soit E un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel des applications continue de $[0,1] \to \mathbb{C}$,

On a : l'application :
$$\begin{array}{rccc} \Psi & : & E\times E & \to & \mathbb{C} \\ & & (f,g) & \mapsto & \displaystyle\int_0^1 \overline{f(t)}g(t))\,\mathrm{d}t, \end{array}$$
est une forme sesquilinéeaire sur E.

en effet :

* Pour $g \in E$
  Soient $f, f' \in E, \lambda \in \mathbb{C}$
  on a : $\Psi(f+\lambda f', g) = \displaystyle\int_0^1 \overline{(f+\lambda f')(t)}.g(t)\,\mathrm{d}t$
  $= \displaystyle\int_0^1 \overline{f(t)}g(t)\,\mathrm{d}t + \overline{\lambda}\int_0^1 \overline{f'(t)}g(t)\,\mathrm{d}t$
  $=\Psi(f,g) + \overline{\lambda}\Psi(f', g)$.
  D'où : Ψ est semi-linéaire par rapport à la premier variable.
* Pour $f \in E$
  Soients $g, g' \in E, \lambda \in \mathbb{C}$
  On a :$\Psi(f, g+\lambda g') = \Psi(f,g) + \lambda\Psi(f,g')$.
  Alors : Ψ est une forme linéaire par rapport à la deuxiéme variable.

Donc ψ est une forme sesquilinéaire sur E.

3)

Soit $E = \mathbb{C}^n$, $\Phi(x,y)$=$\sum_{i=1}^n \bar{x}_i y_i$ est une forme sesquilinéaire sur E.

* comme pour y fixé dans E On a : $\forall x, x' \in E$ et $\lambda \in \mathbb{C}$,
  $\Phi(x+\lambda x', y)$=$\sum_{i=1}^n \bar{x}_i y_i + \bar{\lambda}\sum_{i=1}^n \bar{x}'_i y_i$
  =$\Phi(x,y) + \bar{\lambda}\Phi(x', y)$
  alors ϕ est semi-linéaire par rapport à la premier variable .
* de même On a ϕ est linéaire par rapport à la deuxiéme variable.

Alors Φ est sesquilinéaire sur E.

1.2 Représentation matricielle d'une forme sesquilinéaire :

***Définition* 1.2.1.**
Soient $B = (e_1, e_2, .., e_n)$ une base de E, f une forme sesquilinéaire sur E. Alors :
La matrice de f relativement à la bases B est :

$$M(f, B) = \begin{pmatrix} f(e_1, e_1) & ...... & f(e_1, e_n) \\ . & & . \\ . & & . \\ . & & . \\ f(e_n, e_1) & ...... & f(e_n, e_n) \end{pmatrix}$$

Remarque :
On a pour chaque $(x, y) \in E \times E$ avec $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ et $y = \sum_{j=1}^{n} y_j e_j$,
$f(x, y) = f(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \sum_{j=1}^{n} y_j e_j)$

$= \sum_{j=1}^{n} f(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i, y_j e_j)$

$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} f(x_i e_i, y_j e_j)$.
Et comme on a : f est une forme sesquilinéaire sur E, alors :
$f(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \bar{x}_i y_j f(e_i, e_j)$.
Notons :
$f(e_i, e_j) = \alpha_{ij}$ et $A = M(f, B) = (\alpha_{ij}) \quad \forall i, j \in \{1, 2.., n\}$,

et $\quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}, \; Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ . \\ . \\ y_n \end{pmatrix}$.

D'où nous avons la relation :

$$f(x, y) = \overline{X^t} AY.$$

1.3 Forme sesquiliniéaire hermitienne

***Définition* 1.3.1.**
On appelle forme hermitienne sur E, une forme sesquilinéaire $f : E \times E \to \mathbb{C}$ telle que :
$\forall x, y \in E : f(x,y) = \overline{f(y,x)}$.

Remarque :
Pour $x \in E$ on a : $f(x,x) = \overline{f(x,x)}$, et donc $f(x,x) \in \mathbb{R}$

***Proposition* 1.3.1.**
L'ensemble des formes sesquilinéaires hermitiennes sur E est un espace vectoriel réel.

Preuve
L'ensemble des formes sesquilinéaires contient la forme sesquilinéaire nulle ; stable par addition, et aussi par multiplication par les scalaires réels.
Donc c'est un sous-espace vectoriel réel.

***Proposition* 1.3.2.**
si f est une forme sesquilinéaire hermitienne sur E, Alors :

- $\forall (x,y) \in E^2 : f(x+y, x+y) = f(x,x) + f(y,y) + 2Re(f(x,y))$
- $\forall (x,y) \in E^2 : f(x-y, x-y) = f(x,x) + f(y,y) - 2Re(f(x,y))$
- $\forall (x,y) \in E^2 : f(x+iy, x+iy) = f(y,y) + f(x,x) - 2Im(f(x,y))$
- $\forall (x,y) \in E^2 : f(x-iy, x-iy) = f(x,x) + f(y,y) + 2Im(f(x,y))$.

Preuve

soient $x, y \in E$

$$\begin{aligned} * \quad f(x+y,x+y) &= f(x,x)+f(y,y)+f(x,y)+f(y,x) \\ &= f(x,x)+f(y,y)+f(x,y)+\overline{f(x,y)} \quad (f \text{ hermitienne}) \end{aligned}$$

et comme on a : $\forall z \in \mathbb{C} \quad z + \bar{z} = 2Re(z)$.
Donc on aura :
$\forall (x,y) \in E^2 : f(x+y, x+y) = f(x,x) + f(y,y) + 2Re(f(x,y))$

$$\begin{aligned} * \quad f(x-y,x-y) &= f(x,x)+f(y,y)-f(x,y)-f(y,x) \\ &= f(x,x)+f(y,y)-f(x,y)-\overline{f(x,y)} \quad (f \text{ hermitienne}) \\ &= f(x,x)+f(y,y)-2Re(f(x,y)). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} * \quad f(x+iy,x+iy) &= f(x,x)+f(iy,iy)+f(x,iy)+f(iy,x) \\ &= f(x,x)-i^2 f(y,y)+f(x,iy)+\overline{f(x,iy)} \quad (f \text{ sesquilinéaire hermitienne}) \\ &= f(x,x)+f(y,y)+f(x,iy)+\overline{f(x,iy)} \\ &= f(x,x)+f(y,y)+2Re(f(x,iy)) \\ &= f(x,x)+f(y,y)+2Re(if(x,y)) \end{aligned}$$

et comme on a : $\forall z \in \mathbb{C} \quad Re(iz) = -Im(z)$.
Donc on aura :
$\forall (x,y) \in E^2 : f(x+iy, x+iy) = f(x,x) + f(y,y) - 2Im(f(x,y))$.

$$\begin{aligned} * \quad f(x-iy,x-iy) &= f(x,x)+f(iy,iy)-f(x,iy)-f(iy,x) \\ &= f(x,x)-i^2 f(y,y)-f(x,iy)-\overline{f(x,iy)} \quad (f \text{ sesquilinéaire hermitienne}) \\ &= f(x,x)+f(y,y)-f(x,iy)-\overline{f(x,iy)} \end{aligned}$$

$$= f(x,x) + f(y,y) - 2Re(f(x,iy))$$
$$= f(x,x) + f(y,y) - 2Re(if(x,y))$$
$$\forall (x,y) \in E^2 : f(x-iy, x-iy) = f(x,x) + f(y,y) + 2Im(f(x,y)).$$

Exemples :

1)

$$\forall X, Y \in \mathbb{C}^n \qquad \begin{aligned} \phi(X,Y) &= < X, Y > \\ &= \overline{X}^t Y \\ &= \textstyle\sum_{i=1}^n \overline{x_i} y_i, \end{aligned}$$

est une forme hermitienne.

en effet :

on a : $\qquad \begin{aligned} \phi(Y,X) &= \overline{Y}^t X \\ &= \textstyle\sum_{i=1}^n \overline{y_i} x_i \\ &= \textstyle\sum_{i=1}^n \overline{y_i \overline{x_i}} \\ &= \overline{\textstyle\sum_{i=1}^n y_i \overline{x_i}} \\ &= \overline{< X, Y >} \\ &= \overline{\phi(X,Y)}. \end{aligned}$

D'où ϕ est une forme hermitienne.

2)

soient f, g deux fonctions continue sur $E = C([a,b], \mathbb{C})$ l'espace des fonction continue sur [a,b] ;
alors $\phi(f,g) = \displaystyle\int_a^b \overline{f(t)} g(t)\, \mathrm{d}t$ est une forme hermitienne.

en effet :

il est claire que ϕ est une forme sesquiliniéaire, alors on montre qu'elle est hermitienne.
on a pour tous $f, g \in E$,

$$\overline{\phi(g,f)} = \overline{\int_a^b \overline{g(t)} f(t)\, \mathrm{d}t} = \int_a^b \overline{f(t)} g(t)\, \mathrm{d}t = \phi(f,g).$$

D'où : ϕ est hermitienne sur E.

3)

Soit E l'espace des matrices carées $n \times n$. Alors :
$\forall A, B \in E, \qquad h(A,B) = tr(\overline{A^t}.B)$ est une forme hermitienne.

en effet :

$\forall A, B \in E$
$\overline{h(B,A)} = \overline{tr(\overline{B^t}.A)}$
et comme on a : $\forall A \in E \;\; tr(A) = tr(A^t)$,
alors : $\begin{aligned} \overline{tr(\overline{B^t}.A)} &= tr(\overline{A^t.\overline{B}}) \\ &= tr(\overline{A^t}.B) \\ &= h(A,B). \end{aligned}$

Donc h est hermitiennne.

1.4 Representation matricielle d'une forme sesquilinéaire hermitienne

***Définition* 1.4.1.**
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $A \in Mn(\mathbb{C})$
On dit que A *est hermitienne si* $A^t = \overline{A}$.
Notons $A = (\alpha_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ *cela signifie que :* $\alpha_{ji} = \overline{\alpha_{ij}}$ *pour tous* $i, j \in \{1, .., n\}$.

***Définition* 1.4.2.**
Soit f *une forme hermitienne sur* E*, et* $B = (e_1, .., e_n)$*, une base de* E.
On appelle la matrice de f *dans la base* B *la matrice :*
$A = (\alpha_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}, \ \forall i, j \in \{1, 2, .., n\}, \quad$ *avec :* $\alpha_{ij} = f(e_i, e_j), \ \alpha_{ji} = \overline{\alpha_{ij}}$.

***Proposition* 1.4.1.**
Soit f *une forme hermitienne sur* E*, et* A *la matrice de* f *dans la base* $B = (e_1, e_2, .., e_n)$ *de* E*. On a :*
1) *La matrice* A *est hermitienne.*
2) *Soient* $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$*, et* $y = \sum_{j=1}^n y_j e_j$.
On note :

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}, \text{ et } Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ . \\ . \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Alors on a :

$$f(x, y) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} \bar{x}_i y_j = \overline{X^t} AY.$$

Preuve
2) Soient $x, y \in E$ on a : $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, et $y = \sum_{j=1}^n y_j e_j$
Donc $f(x, y) = f(\sum_{i=1}^n x_i e_i, \sum_{j=1}^n y_j e_j)$
$= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \alpha_{ij} \bar{x}_i y_j$ avec : $\alpha_{ij} = f(e_i, e_j) \ \forall i, j \in \{1, 2, .., n\}$
$= \overline{X^t} AY$.

Exemples :
soit la forme hermitienne définit sur $\mathbb{C}^3$ par :
$\forall x, y \in \mathbb{C}^3$ tel que : $x = (x_1, x_2, x_3), \ y = (y_1, y_2, y_3)$
$f(x, y) = x_1 \bar{y_1} + 3x_2 \bar{y_2} + 6x_3 \bar{y_3} + i\bar{x_1} y_2 - i\bar{x_2} y_1 + 2i\bar{x_3} y_2 - 2i\bar{x_2} y_3$.
La matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{C}$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ -i & 3 & -2i \\ 0 & 2i & 6 \end{pmatrix}$$

et cette matrice est hermitienne car :

$$\overline{A^t} = \begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ -i & 3 & -2i \\ 0 & 2i & 6 \end{pmatrix} = A.$$

Exercice :
Est-ce que les matrices hermitiennes forment un sous $\mathbb{C}$-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{C})$?, montrer qu'elles forment un sous-espace vectoriel réel, et calculer la dimension (sur $\mathbb{R}$) de ce sous-espace.

Réponce :
L'ensemble des matrices hermitiennes de $M_n(\mathbb{C})$, contient la matrice nulle, stable par addition, mais n'est pas stable par multiplication par les scalaires complexes par exemple on a :
I_n est une matrice hermitienne mais iI_n n'est pas hermitienne.
Donc ce n'est pas un sous-espace vectoriel complexe de $M_n(\mathbb{C})$.
Par contre comme L'ensemble des matrices hermitiennes de $M_n(\mathbb{C})$ est stable par multiplication par les scalaires réels.
Donc c'est un sous-espace vectoriel réel.
Notons $E_{k,l}$ la matrice élémentaire qui a le coéfficient 1 en k-ème ligne et l-ème colonne, et des coéfficients 0 partout .
Alors les $E_{k,k}$ pour $k = 1, ..., n$, les $E_{k,l} + E_{l,k}$, et les $i(E_{k,l} - E_{l,k})$ pour $1 \leqslant k < l \leqslant n$, forment ensemble une base de L'ensemble des matrices hermitiennes de $M_n(\mathbb{C})$ sur $\mathbb{R}$.
En effet toute matrice hermitienne $H = (h_{k,l})$, (avec $h_{k,k}$ réel et $h_{k,l} = \overline{h_{l,k}}$, pour $k \neq l$) s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire à coéfficients réels de ces matrices :

$$H = \sum_{k=1}^{n} h_{k,k}E_{k,k} + \sum_{1\leqslant k<l\leqslant n} Re(h_{k,l})(E_{k,l} + E_{l,k}) + \sum_{1\leqslant k<l\leqslant n} iIm(h_{k,l})(E_{k,l} - E_{l,k}).$$

Le décompte des éléments de la base montre que la dimension de L'ensemble des matrices hermitiennes de $M_n(\mathbb{C})$ est n^2.

1.5 Changement de base

Rappel :
soit E un $\mathbb{C}$-éspace vectoriel de dimension n,et soient $B = (e_1, e_2, ..., e_n)$
et $S = (f_1, f_2, ..., f_n)$ deux bases de E.

i) La matrice de passage de B à S noté : P est la matrice définit par :

$$P = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} f_1 & f_2 & \cdots & f_n \end{array} \\ \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ . \\ . \\ e_n \end{array} & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ . & & & . \\ . & & & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \end{array}$$

ii) soit $x \in E$, ayant pour cordonnés les matrices colonne X, X' réspectivement dans B, S.
alors : $X = PX'$.

Proposition 1.5.1.
Soient E un $\mathbb{C}$-éspace vectoriel de dimension finie n, f une forme sesquilinéaire sur E,et Soient B et S deux bases de E , A, A' sont respectivement les matrices de f par rapport aux bases B et S, et P la matrice de passage de B à S.

Alors on a :

$$A' = \overline{P^t}.A.P = P^*.A.P$$

Preuve

Soient $B = (e_1, .., e_n)$, $S = (f_1, ..., f_n)$,

alors : $\forall x \in E \qquad x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i = \sum_{i=1}^{n} x'_i f_i$,

on a : $X = PX'$

et comme on a : $\forall (x, y) \in E \times E : f(x, y) = \overline{X'^t}.A'.Y' = \overline{X^t}.A.Y$

$= \overline{(P.X')^t}.A.(P.Y') = \overline{X'^t P^t}.A.P.Y'$.

Alors on aura : $\forall (X', Y') \in E \times E : \qquad \overline{X'^t}.A'.Y' = \overline{X'^t}(\overline{P^t}A.P).Y'$

D'où : $\qquad A' = \overline{P^t}AP$.

1.6 forme quadratique :

***Définition* 1.6.1.**

Soient E un $\mathbb{C}$-éspace véctoriel , f une forme sesquilinéaire hermitienne.

Alors, l'application :

$$\begin{array}{rcccc} q & : & E & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & f(x, x) \end{array}$$

est appelée : la forme quadratique hermitienne associée à f.

Exemples :

* la fonction :

$$\begin{array}{rcccc} q & : & \mathbb{C}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & & (x, y) & \mapsto & |x|^2 + |y|^2, \end{array}$$

est une forme quadratique associée à la forme sesquilinéaire hermitienne :

$$\begin{array}{rcccc} f & : & \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 & \to & \mathbb{C} \\ & & ((x_1, y_1), (x_2, y_2)) & \mapsto & \overline{x_1}y_1 + \overline{x_2}y_2. \end{array}$$

.

* Sur $E = C([a, b], \mathbb{C})$, $\displaystyle\int_a^b |f(t)|^2 \mathrm{d}t$ est une forme quadratique hermitienne dont la forme hermtienne associeé est :
$\phi(f, g) = \displaystyle\int_a^b \overline{f(t)}g(t)\mathrm{d}t \quad \forall f, g \in E$.

***Définition* 1.6.2.**

Soit q une forme quadratique hermitienne sur E .

l'application $f : E \times E \to \mathbb{C}$ donnée par :

$$f(x, y) = \tfrac{1}{4}(q(x + y) - q(x - y) - iq(x + iy) + iq(x - iy)).$$

est une forme sesquilinéaire hermitienne appelée forme polaire hermitienne de q.

***Proposition* 1.6.1.**
Soient f une forme hermitienne sur E, et q la forme quadratique hermitienne associée.
Alors, $\forall x, y \in E$, et $\lambda \in \mathbb{C}$:
1) $q(\lambda x) = |\lambda|^2 q(x)$.
2) $f(x,y) = \frac{1}{4}(q(x+y) - q(x-y) - iq(x+iy) + iq(x-iy))$.

Preuve
soient $x, y \in E$, et $\lambda \in \mathbb{C}$
1) On a : $q(\lambda x) = f(\lambda x, \lambda x)$
$= \overline{\lambda}\lambda f(x,x)$
$= |\lambda|^2 q(x)$.
2) d'aprés **proposition 1.3.2** on a :
- $q(x+y) = f(x+y, x+y) = q(x) + q(y) + 2Re(f(x,y))$
- $q(x-y) = f(x-y, x-y) = q(x) + q(y) - 2Re(f(x,y))$
- $q(x+iy) = f(x+iy, x+iy) = q(x) + q(y) - 2Im(f(x,y))$
- $q(x-iy) = f(x-iy, x-iy) = q(x) + q(y) + 2Im(f(x,y))$.

Donc,on aura :
$q(x+y) - q(x-y) - iq(x+iy) + iq(x-i) = 4(Re(f(x,y)) + iIm(f(x,y))$
$= 4f(x,y)$.
Alors : $\forall x, y \in E \quad f(x,y) = \frac{1}{4}(q(x+y) - q(x-y) - iq(x+iy) + iq(x-iy))$.
Remarque :
La forme polaire hermitienne montre que si deux formes sesquilinéaires hermitiennes sont associeés à une même forme quadratique hermitienne, alors elles sont égales.
Exemples :
Soient u_1,$u_2 \in \mathbb{C}^2$, avec : $u_1 = (x_1, y_1)$, $u_2 = (x_2, y_2)$
$f(u_1, u_2) = \overline{x_1}x_2 - 2\overline{y_1}y_2 + \frac{3}{2}\overline{y_1}x_2 + \frac{3}{2}\overline{x_1}y_2$ est une forme sesquilinéaire hermitienne de forme quadratique :
$q : u = (x,y) \mapsto |x|^2 - 2|y|^2 + \frac{3}{2}\overline{y}x + \frac{3}{2}y\overline{x}$.

1.7 Représentation Matricielle d'une forme quadratique :

Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension fini n, q une forme quadratique sur E et f la forme sesquilinéaire hermitienne associée à q.
Soit $B = (e_1, e_2, .., e_n)$ une base de E .
Alors $\forall x, y \in E$ on a :
$f(x,y) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}\bar{x}_i y_j$ Où : $\alpha_{ij} = f(e_i, e_j)$ $\forall i, j \in \{1, 2, .., n\}$.
D'où :
$q(x) = f(x,x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}\bar{x}_i x_j$ $\forall x \in E$ $\forall i, j \in \{1, 2, .., n\}$.
$= \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ii}\overline{x_i}x_i + \sum_{i,j=1, i\neq j}^{n} \alpha_{ij}\bar{x}_i x_j$
$= \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ii}|x_i|^2 + \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(\alpha_{ij}\bar{x}_i x_j + \alpha_{ji}\bar{x}_j x_i)$
$= \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ii}|x_i|^2 + \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(\alpha_{ij}\bar{x}_i x_j + \overline{\alpha_{ij}}x_i\bar{x}_j)$ (f est hermitienne).

Et comme on a : $\alpha_{ij}\bar{x}_i x_j + \overline{\alpha_{ij}}\bar{x}_j x_i = 2Re(\alpha_{ij}\bar{x}_i x_j)$,

donc : $\forall x \in E \quad q(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ii}|x_i|^2 + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} Re(\alpha_{ij}\bar{x}_i x_j)$.

Remarque :
les coéfficients diagonaux α_{ii} $\forall i \in \{1, .., n\}$, sont reéals.

***Définition* 1.7.1.**
Soit f une forme hermitienne et q la forme quadratique hermitienne associée.
1) *On appelle rang de q le rang de la matrice de f dans n'importe quelle base de E.*
2) *On dit que f ou q est non dégénérée si f est de rang n.*

Exemples :
la matrice de la forme quadrature $q : u = (x, y) \mapsto |x|^2 - 2|y|^2 + \frac{3}{2}\overline{y}x + \frac{3}{2}y\overline{x}$
est :

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & -2 \end{pmatrix}$$

Son rang est 2.

1.8 Produit scalaire hermitien :

***Définition* 1.8.1.**
Soit f une forme hermitienn sur E :
* *On dit que : f est positive si $f(x, x) \geq 0 \qquad \forall x \in E$.*
* *On dit que : f est définie si pour tout x dans E, $f(x, x) = 0$ si et seulement si $x = 0$.*
* *On dit que f est définie positive si $f(x, x) > 0$ pour tout $x \in E - \{0\}$.*

***Définition* 1.8.2.**

- *On appelle produit scalaire hermitien sur E une forme sesquilinéaire f de $E \times E \to \mathbb{C}$ hermitienne et définie positive.*
  On le note géneralement par $< . \mid . >$, $< ., . >$ ou $f(.,.)$.
- *Un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$, muni d'un produit scalaire hermitien est appelé* ***Espace préhilbertien complexe*** .

Exercice :

1)
Soit l'application définie par :

$$\forall X, Y \in \mathbb{C}^n \qquad \phi(X, Y) = < X, Y > = \overline{X}^t Y = \sum_{i=1}^n \overline{x_i} y_i.$$

Montrer que ϕ est un produit scalaire hermitien sur $\mathbb{C}^n$.
Preuve

* On a déja montré que ϕ est une forme sesquilinéaire hermitienne .
  Alors il suffit de montrer qu'elle est définie positive.
* $\forall X \in \mathbb{C}^n$
  $\phi(X, X) = \sum_{i=1}^n x_i \overline{x_i} = \sum_{i=1}^n \mid x_i \mid^2 \geq 0$ donc elle est positive,
  et de plus $< X, X >= 0 \Leftrightarrow x_i = 0 \ \forall i \in \{1, .., n\}$.

Alors est bien défenie positive.

Donc $< .,. >$ est un produit scalaire.

2)

Soit $< .,. >: M(\mathbb{C}) \times M(\mathbb{C}) \to \mathbb{R}$, l'application définie par :

$$\forall A, B \in M(\mathbb{C}) \quad < A, B >= tr(\overline{A^t}.B).$$

Montrer que $< .,. >$ est défini un produit scalaire hermitien.

Preuve

* on a déja montrer que $< .,. >$ est hermitien , alors il suffit de montrer qu'il est défini positif.
* soit $A \in M(\mathbb{C})$ *avec* $A = \underline{(a_{ij})}$ $\forall i, j \in \{1, .., n\}$.

  On a : $< A, A >= tr(\overline{A^t}.A)$
  $= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \overline{a_{ji}}.a_{ji}$
  $= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ji}|^2.$

  Alors $< .,. >$ est posétif.

  Supposons que $A \neq 0$ alors $\exists i_0, j_0 \in \{1, .., n\}$ tel que : $a_{i_0 j_0} \neq 0$,
  et par suite $< A, A >= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \overline{a_{ji}}.a_{ji} \neq 0$, d'où par contraposé on obtient que si $< A, A >= 0 \Leftrightarrow A = 0$.

  Alors $< .,. >$ est défini positif.

Donc $< .,. >$ est un produit scalaire hermitien.

3)

Soit $\omega : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$ strictement positive sur $]a\,, b]$, on pose sur $C([a\,; b], \mathbb{C})$:

$$\forall f, g \in C([a\,; b], \mathbb{C}) \qquad < f, g >= \int_a^b \overline{f(t)} g(t)\omega(t)\, \mathrm{d}t.$$

Montrer que $< .,. >$ est un produit scalaire sur $C([a\,; b], \mathbb{C})$.

Preuve

soient $f, f', g, g' \in C([a\,; b], \mathbb{C})$ et $\lambda \in \mathbb{C}$:

* On a : $$< f + \lambda f', g >= \int_a^b \overline{(f + \lambda f')(t)} g(t)\omega(t)\, \mathrm{d}t = \int_a^b \overline{f(t)} g(t)\omega(t)\, \mathrm{d}t + \overline{\lambda} \int_a^b \overline{f'(t)} g(t)\omega(t)\, \mathrm{d}t =< f, g > +\overline{\lambda} < f', g >.$$

  d'où $< .,. >$ est semi-linéaire par rapport à la premiere variable.

  On a : $$< f, g + \lambda g' >= \int_a^b \overline{f(t)} (g + \lambda g')(t)\omega(t)\, \mathrm{d}t = \int_a^b \overline{f(t)} g(t)\omega(t)\, \mathrm{d}t + \lambda \int_a^b \overline{f(t)} g'(t)\omega(t)\, \mathrm{d}t =< f, g > +\lambda < f, g' >.$$

  d'où $< .,. >$ est linéaire par rapport à la deuxiéme variable.

  Alors $< .,. >$ est une forme sesquilinéaire .

* On a : $$< g, f >= \int_a^b \overline{g(t)} f(t)\omega(t)\, \mathrm{d}t = \int_a^b \overline{\overline{f(t)} g(t) \overline{\omega(t)}}\, \mathrm{d}t$$

$$= \overline{\int_a^b \overline{f(t)} g(t)\omega(t)\,\mathrm{d}t} \qquad (\text{car } \omega(t) \in \mathbb{R} \quad \forall t \in [a,b]).$$
$$= \overline{<f,g>}.$$

Donc : $< .,. >$ est hérmitien.

* On a :$< f, f >>= \int_a^b \overline{(f(t)}(f(t)\omega(t)\,\mathrm{d}t$

$$= \int_a^b |f(t)|^2\omega(t)\,\mathrm{d}t$$

et comme on a pour tous t dans $[a,b]$: $|f(t)|^2 \geq 0$ et $\omega(t) > 0$

On obtient que : $\int_a^b |f(t)|^2\omega(t)\,\mathrm{d}t \geq 0$, Alors $< f, f >$ est positif.

Et de plus :

$< f, f >= 0 \Leftrightarrow \int_a^b |f(t)|^2\omega(t)\,\mathrm{d}t = 0$

$\Leftrightarrow |f(t)|^2\omega(t) = 0$(car $|f(t)|^2\omega(t)$ continue positive sur $[a,b]$ $\forall t$) et puisque $\forall t \in [a,b]$,$\omega(t) > 0$ on aura : $f(t) = 0$ $\forall t \in [a,b]$.

Donc $f = 0$.

Alors $< .,. >$ est définit positif, et par conséquence : $< .,. >$ est un produit scalaire hermitien.

4)

Soit : $E^2 \to \mathbb{C}$ avec : $(E = C([0\,;1], \mathbb{C}))$

on pose l'application : $\Psi(f,g) = \int_0^1 \frac{\overline{f(t)}g(t)}{\sqrt{1+t^2}}\,\mathrm{d}t \quad \forall f,g \in E.$

Montrer que : Ψ est un produit scalaire hérmitien sur E.

Preuve

Soit $f, g \in E$

* il est claire que Ψ est une forme sesquilinéaire sur E.

* On a : $\Psi(g,f) = \int_0^1 \frac{\overline{g(t)}f(t)}{\sqrt{1+t^2}}\,\mathrm{d}t$

$$= \int_0^1 \frac{\overline{\overline{f(t)}g(t)}}{\sqrt{1+t^2}}\,\mathrm{d}t$$
$$= \overline{\int_0^1 \frac{\overline{f(t)}g(t)}{\sqrt{1+t^2}}\,\mathrm{d}t}$$
$$= \overline{\Psi(f,g)}.$$

Alors Ψ est hermitienne.

* $\Psi(f,f) = \int_0^1 \frac{\overline{f(t)}f(t)}{\sqrt{1+t^2}}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{|f(t)|^2}{\sqrt{1+t^2}}\,\mathrm{d}t \geq 0$

et de plus $\Psi(f,f) = 0 \Leftrightarrow \int_0^1 \frac{\overline{f(t)}f(t)}{\sqrt{1+t^2}}\,\mathrm{d}t = 0 \Leftrightarrow \int_0^1 \frac{|f(t)|^2}{\sqrt{1+t^2}}\,\mathrm{d}t = 0,$

et comme $\frac{|f(t)|^2}{\sqrt{1+t^2}}$ continue positive sur E alors : $\frac{|f(t)|^2}{\sqrt{1+t^2}} = 0$ sur E.

Donc on aura : $f(t) = 0 \;\; \forall t \in [0,1]$ (car : $\frac{1}{\sqrt{1+t^2}} > 0$).

Finalement $f = 0$.

D'où Ψ définie un produit scalaire hermitien sur E.

5)

Soit $\mathbb{C}_n[X]$, $\mathbb{C}$ -éspace vectoriel des polynomes de degré $\leqslant n$.

pour tous :$P, Q \in \mathbb{C}_n[X]$ $\quad < P, Q >= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{P(e^{it})} Q(e^{it}) \mathrm{d}t,$

définie un produit scalaire hermitien.

Preuve

Soient $P, Q, P_1, P_2 \in \mathbb{C}_n[X]$,et $\alpha \in \mathbb{C}$:

* $< P_1 + \alpha\ P_2, Q >= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{(P_1 + \alpha P_2)(e^{it})} Q(e^{it}) \mathrm{d}t$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{P_1(e^{it})} Q(e^{it}) + \frac{\overline{\alpha}}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{P_2(e^{it})} Q(e^{it}) \mathrm{d}t$$

$$=< P_1, Q > + \overline{\alpha} < P_2, Q >$$

D'où : $< P, Q >$ semi-linéaire par rapport à $P \qquad \forall Q \in \mathbb{C}_n[X]$.

et de m me on montre que $< P, Q >$ linéaire par rapport à Q, $\forall P \in \mathbb{C}_n[X]$.

et donc $< ., . >$ est une forme sesquilinéaire sur $\mathbb{C}_n[X]$.

* on a : $< Q, P >= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{Q(e^{it})} P(e^{it}) \mathrm{d}t$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{Q(e^{it})} . \overline{\overline{P(e^{it}}} \mathrm{d}t$$

$$= \overline{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{P(e^{it})} Q(e^{it}) \mathrm{d}t}$$

$$= \overline{< P, Q >}$$

Alors : $<>$ est hermitien.

* Soit $P \in \mathbb{C}_n[X]$:

$< P, P >= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{P(e^{it})} P(e^{it}) \mathrm{d}t$

$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |P(e^{it})|^2 \mathrm{d}t \qquad$ et comme : $|P(e^{it})|^2 \geq 0\ \forall t \in [0, 2\pi]$

Donc :$< P, P > \geq 0$ et de plus :

$< ., . >$est défini .

En effet : $< P, P >= 0$, alors : $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |P(e^{it})|^2 \mathrm{d}t = 0$

et $t \mapsto |P(e^{it})|^2$ est une fonction continue positive.

L'integrale d'une fonction continue positive étant nulle si et seulement si la fonction est identiquemnt nulle, on en déduit que $P(e^{it}) = 0$ pour tout $t \in [0, 1]$.

Ainsi P admet une infinité de racines, c'est donc le polynôme nul.

D'où, pour tous $P, Q \in \mathbb{C}_n[X]$ $\; < P, Q >= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{P(e^{it})} Q(e^{it}) \mathrm{d}t,$

définit un produit scalaire hermitien.

1.9 Espaces Hermitiens

***Définition* 1.9.1.**
Soit E Un espace vectoriel de dimension fini sur $\mathbb{C}$, muni d'un produit scalaire hermitien. Alors E est appelé : ***Espace vectoriel hermitien****.*

Exemples :

1) L'espace vectoriel $\mathbb{C}^n$, muni du produit scalaire canonique défini, pour $x = (x_1, .., x_n)$, et $y = (y_1, .., y_n)$, par :
$$\begin{aligned}\langle x, y\rangle &= \overline{x_1}y_1 + \overline{x_2}y_2 + \ldots + \overline{x_n}y_n\\ &= \textstyle\sum_{i=1}^{n} \overline{x_i}y_i,\end{aligned}$$
est un espace hermitien appelé : Espace hermitien canonique de dimension n.
2) L'espace vectoriel $M_n(\mathbb{C})$ des matrices carrées d'ordre n, muni du produit scalaire canonique :
$\langle A, B\rangle = tr(\overline{A^t}.B) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \overline{a_{ij}}.b_{ij}$,
est un espace hermitien.
3) L'espace vectoriel des polynômes complexes de degré inférieur ou égal à n, muni du produit scalaire :

$\langle P, Q\rangle = \displaystyle\int_0^1 \overline{P(t)}Q(t)\ \mathrm{d}t$, est aussi un espace hermitien.

On note que :
Les bonnes propriétés du produit scalaire euclidien restent valable aussi pour la plut part pour le produit scalaire hermitien comme : Inégalité de Cauchy-Schwarz, Inégalité de Minkowski , Algorithme de Gram Schmidt, théoréme de Pythagore et la projection orthogonale.

1.10 Inégalité de Cauchy-Schwarz

***Théorème* 1.10.1.**
Soient f une forme sesquilinéaire hermitienne sur E, et q sa forme quadratique. Si f est positive, alors :

$$\forall (x,y) \in E^2 \quad |f(x,y)| \leqslant \sqrt{q(x)}\sqrt{q(y)}.$$

Si de plus q est définie, il y a égalité si et seulement si x et y sont liée.

Preuve
Considérons la fonction de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie pour tout compléxe λ par :
$g(\lambda) = q(\lambda x - y) = |\lambda|^2 q(x) - 2Re(\overline{\lambda} f(x,y)) + q(y) \geqslant 0.$
Cette fonction est à valeurs positive puisque la forme quadratique q est positive. En choisissant $\lambda = te^{i\theta}$, où : t est un réel , et θ designe un argument de f, on a :
$g(\lambda) = t^2 q(x) - 2t|f(x,y)| + q(y).$
Deux cas alors se présente :
* si $q(x) = 0$, alors on aura : $-2t|f(x,y)| + q(y) \geqslant 0$, ce qui entraine $f(x,y) = 0$.
On en déduit l'inégalité de Cauchy-Schwarz, qui s'écrit $0 \leqslant 0$.
*Si $q(x) \neq 0$, la fonction g est un polynome du second degré à valeurs positives, d'où : $\Delta = f(x,y)^2 - q(x)q(y) \leqslant 0.$
On en déduit l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$|f(x,y)| \leqslant \sqrt{q(x)}\sqrt{q(y)}.$$

Supposons q et $x \neq 0$ (le cas $x = 0$ est trivial). Alors $q(x) \neq 0$, de sorte que l'inégalité de Cauchy-shwartz est une égalité si et seulement si le discriminant de g est nul ; c'est à dire si et seulement s'il existe λ_0, tel que $g(\lambda_0) = 0$ ce qui équivaut à $\lambda_0 x + y = 0$ (puisque q est definie), c'est à dire la famille (x,y) est liée.
Exemples :

* Soit $E = \mathbb{C}^n$ muni du produit scalaire usuel :
  $\forall (x,y) \in E^2, < x|y >= \sum_{i=1}^{n} \overline{x_i} y_i.$
  L'inégalité de Cauchy-Schwarz s'écrit :
  $\forall (x,y) \in E^2, |\sum_{i=1}^{n} \overline{x_i} y_i|^2 \leq (\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2)(\sum_{i=1}^{n} |y_i|)^2).$
* Soit $E = C([a,b], \mathbb{C})$ muni du produit scalaire :
  $\forall (f,g) \in E^2, < f|g >= \int_a^b \overline{f(t)} g(t) \mathrm{d}t$
  L'inégalité de Cauchy-Schwarz s'écrit :
  $\forall (f,g) \in E^2, |\int_a^b \overline{f(t)} g(t) \mathrm{d}t|^2 \leq (\int_a^b |f(t)|^2 \mathrm{d}t)(\int_a^b |g(t)|^2 \mathrm{d}t).$
* Soit $E = \ell^2(\mathbb{C})$, muni du produit scalaire $\forall (u,v) \in E^2, < u|v >= \sum_{n=0}^{+\infty} \overline{u_n} v_n$
  L'inégalité de Cauchy-Schwarz s'écrit :
  $\forall (u,v) \in E^2, |\sum_{n=0}^{+\infty} \overline{u_n} v_n|^2 \leq (\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|^2)(\sum_{n=0}^{+\infty} |v_n|^2).$

Exercice :
On se donne un entier $n \geq 1$, et des complexes $x_1, x_2, ..., x_n$.
1) Montrer que :

$$|\sum_{k=1}^{n} x_k|^2 \leqslant n \sum_{k=1}^{n} |x_k|^2.$$

Réponce :
1) L'inégalité de Caushy-shwarz nous donne :
$|\sum_{k=1}^{n} x_k|^2 = |\sum_{k=1}^{n} x_k.1|^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n} |1|^2. \sum_{k=1}^{n} |x_k|^2 = n \sum_{k=1}^{n} |x_k|^2.$

Exercice :
Soit $f \in C([a,b], \mathbb{C})$. Montrer que :

$$|\int_a^b f(t)\mathrm{d}t|^2 \leqslant (b-a) \int_a^b |f(t)|^2 \mathrm{d}t.$$

Dans quel cas a-t-on égalité ?.
Réponce :
L'inégalité de Caushy-shwarz nous donne :
$|\int_a^b f(t) \ \ dt|^2 = |\int_a^b f(t).1 \ dt|^2 \leqslant \int_a^b |f(t)|^2 \ dt. \int_a^b 1 \ dt = (b-a) \int_a^b |f(t)|^2 \mathrm{d}t.$
Egalité réalisée si et seulement si,la foncion f et constante.

***Proposition* 1.10.1.**
Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, et $< ., . >$ un produit scalaire hermitien sur E .
On peut définir une norme sur E dite norme hilbertienne ou hermitienne associeé, en posant :

$$||x|| = \sqrt{< x, x >}.$$

Preuve

* $\forall x \in E$, Si $||x|| = 0_E$, alors : $x = 0_E$ (car $< ., . >$ est défini positif).
* $\forall \lambda \in \mathbb{C}, \ \forall x \in E$, $||\lambda x|| = \sqrt{< \lambda x, \lambda x >} = \sqrt{|\lambda|^2 < x, x >} = |\lambda|.||x||$.
* Soient $x, y \in E$:
$||x+y||^2 = \sqrt{< x+y, x+y >}$
$= ||x||^2 + 2Re(< x, y >) + ||y||^2$
et comme : $Re(< x, y >) \leq | < x, y > |$
Alors, $||x+y||^2 \leq ||x||^2 + 2| < x, y > | + ||y||^2$.
Et grâce à l'inégalité de Caushy-Schwarz on aura :
$||x+y||^2 \leq ||x||^2 + 2||x||.||y|| + ||y||^2$
$\leq (||x|| + ||y||)^2$.
D'où : $< ., . >$ est bien une norme.

Exemples :

i) Soit $\mathbb{C}^n$,muni du produit scalaire canonique,
pour $x = (x_1, .., x_n)$ et $y = (y_1, .., y_n)$ par :
$$\begin{aligned}\langle x, y\rangle &= \overline{x_1}y_1 + \overline{x_2}y_2 + \ldots + \overline{x_n}y_n \\ &= \textstyle\sum_{i=1}^n \overline{x_i}y_i.\end{aligned}$$
On défini la norme associé : $||x|| = \langle x, x\rangle = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}.$

ii) Soit $L^2(I, \mathbb{C})$
$||f|| = \sqrt{\int_I |f|^2}.$

1.11 Inégalité de Minkowsky

***Théorème* 1.11.1.**
pour tous $x, y \in E$ l'inégalité :
$$||x + y|| \leq ||x|| + ||y||.$$
*Appelée **inégalité de Minkowski**.*
Il y a l'égalité si et seulement si x, y sont positivement liées ;
c'est à dire $x = 0$ ou $x \neq 0$, et $y = \lambda x$ avec $\lambda \in \mathbb{R}^+$.

Preuve
Soient $x, y \in E$, on a :
$$\begin{aligned}||x + y||^2 &=< x + y, x + y > \\ &=< x, x > + < y, y > +2Re((< x, y >) \\ &\leq ||x||^2 + ||y||^2 + 2| < x, y > | \quad (\text{car} : Re(< x, y >) \leq | < x, y > |. \\ &\leq ||x||^2 + ||y||^2 + 2||x||.||y|| \\ &\leq (||x| + ||y||)^2\end{aligned}$$
D'où :
$$||x + y|| \leq ||x|| + ||y||.$$

* Si $||x + y|| = ||x|| + ||y||$, toutes les inégalités intermédiaires sont des égalité.
Donc :
$| < x, y > | = ||x||.||y||, \Leftrightarrow (x, y)$ est liée, et $Re(< x, y >) = | < x, y > |$.
Si $y = 0$, on a l'égalité. Sinon, $x = \lambda y,\ \lambda \in \mathbb{C}$.
Dans ces conditions :
$$\begin{aligned}| < x, y > | &= |\lambda| < y, y >= |\lambda|||y||^2, \text{ et } Re(< x, y >) = Re(\overline{\lambda} < y, y >) \\ &= |y||^2.Re(\overline{\lambda})\end{aligned}$$
Donc, $Re(\overline{\lambda}) = |\lambda|$, d'où : $\lambda \in \mathbb{R}^+$.
* Réciproquement, si $y = 0$ ou $x = \lambda y$ pour $\lambda \geq 0$, on a bien l'égalité.

Exemples :

* Soit $E = \mathbb{C}^n$ muni du produit scalaire usuel $\forall(x, y) \in E^2$,
$< x|y >= \sum_{i=1}^n \overline{x_i}y_i$.
L'inégalité de Minkowski s'écrit :
$\forall(x, y) \in E^2, \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n |y_i|^2}.$

* Soit $E = C([a,b],\mathbb{C})$ muni du produit scalaire $\forall (f,g) \in E^2$,
$< f|g >= \int_a^b \overline{f(t)}g(t)\mathrm{d}t$.
L'inégalité de Minkowski s'écrit :
$\forall (f,g) \in E^2, \sqrt{\int_a^b |f(t)+g(t)|^2\mathrm{d}t} \leq \sqrt{\int_a^b |f(t)|^2\mathrm{d}t} + \sqrt{\int_a^b |g(t)|^2\mathrm{d}t}$.

2

Orthogonalité

2.1 Base orthogonale et orthonormale

***Définition* 2.1.1.**
Soient E un $\mathbb{C}$-éspace vectoriel, f une forme hermitienne sur E .
On dit que deux vecteurs $x, y \in E$ sont orthogonaux, et l'on note $x \perp y$;
si $f(x, y) = 0$.

***Définition* 2.1.2.**
Soient E un $\mathbb{C}$-éspace vectoriel, f une forme hermitienne sur E, et q sa forme quadratique .
i) un vecteur $x \in E$ est dit isotrope si $f(x, x) = 0$.
ii) On appelle cône isotrope de q l'ensemble $C_q = \{x \in E \ / \ q(x) = 0\}$.

Remarque :
On dit que : q est définie si $C_q = \{0\}$.

***Définition* 2.1.3.**
Soient E un $\mathbb{C}$-éspace vectoriel, f une forme hermitienne sur E .
On appelle famille orthogonale dans E toute famille $(e_i)_{i\in I}$ de vecteurs de E,
telle que $f(e_i, e_j) = 0$, pour tout $i \neq j$ dans I.
Si de plus $f(e_i, e_j) = \delta ij$ pour tout i, j, avec δij le symbole de Kronecker .
On dit alors, que cette famille est orthonormée ou orthonormale.

***Proposition* 2.1.1.**
Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls $(e_i)_{i\in I}$ de E est libre.
En particulier, toute famille orthonormale est libre.

Preuve
Formons une combinaisons linéaire nulle de la famille orthogonale de vecteurs $(e_i)_{i\in I}$ de E :
soit $(\lambda_i)_{i\in I}$ une famille de scalaires telle que :
$\sum_{i\in I} \lambda_i e_i = 0_E$.
En faisant le produit scalaire par un vecteur e_j, *avec* $j \in I$, on a :
$< e_j, \sum_{i\in I} \lambda_i e_i >= \sum_{i\in I} \lambda_i < e_j, e_i >= 0$.
Par orthogonalité de la famille $(e_i)_{i\in I}$, il reste $\lambda_j < e_j, e_j >= 0$.
D'où $\lambda_j = 0$, car $e_j \neq 0_E \ \ \forall j \in I$.

***Définition* 2.1.4.**
Soient E un $\mathbb{C}$-éspace vectoriel de dimension fini n, f une forme hermitienne sur E.
* *On dit qu'une base $(e_1, e_2, .., e_n)$ de E est orthogonale pour f si :*
  $f(e_i, e_j) = 0 \quad \forall i \neq j.$
* *On dit qu'une base $(e_1, e_2, .., e_n)$ de E est orthonormale pour f si :*
  $f(e_i, e_j) = \delta ij \quad \forall i, j.$

Exercice :
Soit $E = \mathbb{C}_n[X]$ espace hermitien muni du produit scalaire :

$$< P, Q >= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{P(e^{i\theta})} Q(e^{i\theta})\, \mathrm{d}\theta.$$

Montrer que $(X^k)_{k\in\{1,..,n\}}$ est une base orthonormée pour ce produit scalaire .
Réponce :
Soient $l, m \in \{1, .., n\}$.
On a : $\quad < X^l, X^m >= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-il\theta} e^{im\theta}\, \mathrm{d}\theta$
$\qquad = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i\theta(m-l)}\, \mathrm{d}\theta.$
i) Si $l = m$ on aura :$< X^l, X^m >= 1$.
ii) Si $l \neq m$ on aura : $< X^l, X^m >= 0$.
Donc $\forall l, m \in \{1, .., n\}$ on a : $< X^l, X^m >= \delta_{lm}$
D'où, $(X^k)_{k\in\{1,..,n\}}$ est une base orthonormée.
Exercice :
Soient E un espace hermitien de dimension n et $B = (e_1, .., e_n)$ une base orthonormale de E. Soient B' une autre base orthonomale de E et P la matrice de passage de la base B à B', démontrer que $|det(P)| = 1$.
Réponce :
Notons p_{ij}les coéfficients de P, et p'_{ij} ceux de $\overline{P^t}$. Le coéfficients d'indice i, j de $\overline{P^t}P$ est :

$$\alpha_{ij} = \sum_{k=1}^{n} p'_{i,k} p_{k,j} = \sum_{k=1}^{n} \overline{p_{k,i}} p_{k,j}.$$

Or $e'_i = \sum_{k=1}^n p_{k,i} e_k$ et $e'_j = \sum_{k=1}^n p_{k,j} e_k$, donc $\alpha_{i,j} =< e'_i, e'_j >$ puisque la base B est orthonormale, d'où $\alpha_{i,j} = \delta_{i,j}$ car B' est une base orthonormale. On a donc $\overline{P^t}P = In$, ce qui entraîne $det(\overline{P^t})det(P) = 1 \Leftrightarrow det(\overline{P})det(P)$. Comme déterminant d'une matrice est une fonction polynomiale de ces coéfficients, $\det \overline{P} = \overline{\det P}$, d'où $|\det P|^2 = 1$, ce qui prouve :

$$|\det P| = 1$$

.

***Définition* 2.1.5.**
soient f une forme hermitienne sur E, et A une partie non vide de E, on définit l'orthogonale de A par rapport à f noté $A^\perp$ par :
$A^\perp = \{y \in E \ / \ \forall x \in A,\ f(x, y) = 0\}.$

***Proposition* 2.1.2.**

* *Soient A, B deux parties de E, telle que $A \subseteq B$, alors : $B^{\perp} \subseteq A^{\perp}$.*
* *Pour toute partie non vide A de E on a : $A^{\perp} =< A >^{\perp}$.*
* *Soit A une partie de E, alors $A^{\perp}$ est un sous espace vectoriel sur E*

Preuve

* Soit $y \in B^{\perp}$, alors :$\forall x \in B,\ f(x,y) = 0$,
et comme on a : $A \subseteq B$, alors :$\forall x \in A,\ f(x,y) = 0$.
Donc : $y \in A^{\perp}$
c'est à dire : $B^{\perp} \subseteq A^{\perp}$.

** On doit montrer double inclusion :
i) Soit $y \in A^{\perp}$
On a : $< A >= \{\sum_{finie} a_i\alpha_i \ / a_i \in A, \alpha_i \in \mathbb{C}\}$
Alors $\forall x \in A,\ x = \sum_{finie} a_i\alpha_i \ /\ a_i \in A, \alpha_i \in \mathbb{C}$
On a : $f(x,y) = f(\sum_{finie} a_i\alpha_i, y)$
$= \sum_{finie} \overline{\alpha_i} f(a_i, y)$,
comme : $a_i \in A$, et $y \in A^{\perp}$
alors ; $f(a_i, y) = 0,\ \ \forall i \in I$ finie.
Donc : $\forall x \in< A > \ \ f(x,y) = 0$
d'où : $y \in< A >^{\perp} \Rightarrow A^{\perp} \subseteq< A >^{\perp}$.
ii) On a par définition : $A \subseteq< A >$ Alors : $< A >^{\perp} \subseteq A^{\perp}$
Et donc : $< A >^{\perp} = A^{\perp}$.

*** Soit A une partie de E
i) $f(x, 0) = 0 \ \ x \in A$
C'est à dire : $0 \in A^{\perp}$, donc : $A^{\perp} \neq 0$.
ii) Soient $x, y \in A^{\perp}\ \alpha, \beta \in \mathbb{C},\ et\ z \in A$
On a : $f(z, \alpha x + \beta y) = f(z, \alpha x) + f(z, \beta y)$
$= \alpha f(z, x) + \beta f(zy) = 0 + 0 = 0.$
D'où : $\alpha x + \beta y \in A^{\perp}$.

Et par consequence : $A^{\perp}$ est un sous espace vectoriel.

Exercice :

soient f une forme hermitienne sur E, et F une partie de E,
telle que $F = vect(e_i)_{i\in\{1,..,n\}}$.
Montrons que : $F^{\perp} = \{x \in E/\ f(e_i, x) = 0\ \forall i \in \{1, .., n\}\}$.

Réponce :

i) Soit $x \in F^{\perp}$;
Alors $\forall i \in \{1, .., n\}\ f(e_i, x) = 0$, car $e_i \in F,\ x \in F^{\perp}$
Alors $x \in \{x \in E/\ f(e_i, x) = 0\ \forall i \in \{1, .., n\}$.

ii) Soit $x \in \{x \in E/\ f(e_i, x) = 0\ \forall i \in \{1, .., n\}$.
Alors $\forall i \in \{1, .., n\}\ \ f(e_i, x) = 0$.
Pour $a \in F$ on a : $a = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$ avec $\lambda_i \in \mathbb{C}\ \ \forall i \in \{1, .., n\}$.
Et comme on a :
$f(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i, x) = \sum_{i=1}^{n} \overline{\lambda_i} f(e_i, x) = 0$, donc : $x \in F^{\perp}$.

D'où, $\quad F^{\perp} = \{x \in E \diagup\ f(e_i, x) = 0\ \forall i \in \{1, .., n\}\}$.

***Théorème* 2.1.1.**
Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension fini, alors E possède au moins une base orthgonale.

Preuve
On procède par récurrence sur la dimension n de E.
Pour $n = 1$, il n'y a rien à montrer, supposons le résultat vrai au rang n-1, et montrons le au n .
Si q est identiquement nulle , alors toute base de E est orthogonale. Sinon il existe $v \in E$, tel que $q(v) \neq 0$ dans ce cas, l'application $f(v, x)$ définie par $\phi(x) = f(x, v)$ est une forme linéaire non nulle sur E, son noyau H est un hyperplan de E, et comme $v \in E$, on a $E = H \bigoplus Vect(v)$.
Puisque $dim(H) = n - 1$, d'aprés l'hypothèse de récurrence, il existe une base $(e_1, .., e_{n-1})$ de H orthogonale pour $q/_H$.
On voit alors facilement que $(e_1, .., e_{n-1}, v)$ est une base orthogonale de E.

***Proposition* 2.1.3.**
soient F un sous espace véctoriel de dimension fini de E, q une forme quadratique définie, et f sa forme polaire . Alors : $E = F \bigoplus F^{\perp}$.

Preuve
D'aprés le **théorème 2.1.1**, il existe une base $(e_1, .., e_p)$ de F orthogonale pour la restriction de q à F.
Soit $x \in E$, on cherche à écrire $x = y + z$ avec $y \in F$ et $z \in F^{\perp}$.
Ecrivons $y = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i$, alors $z = x - y \in F^{\perp}$ si et seulement si $\forall j \in \{1, .., p\},\ f(e_j, z) = 0$.
$i.e$: si pour tout j, $f(e_j, x) - \lambda_j f(e_j, e_j) = 0$, en choisissons $\lambda_i = \frac{f(e_i,x)}{f(e_i,e_)}$, on voit donc que :
$x = y + z$ avec $y \in F\ et\ z \in F^{\perp}$.
D'où $E = F + F^{\perp}$.

2.2 Méthode de GAUSS pour la réduction d'une forme quadratique hermitienne :

Soient E un $\mathbb{C}$-éspace vectoriel de dimension fini n,et q une forme quadratique sur E,alors **théorème 2.1.1** assure l'éxistence d'une base $B = (e_1, .., e_n)$
orthogonale, et On a $\forall x \in E\ q(x) = q(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i |x_i|^2$, avec :$\alpha_i = q(e_i)$.
En d'autre termes, on écrit q comme combinaison linéaire de carées de formes linéaires indépendentes.
Dans la pratique, ces formes linéaire peuvent être calculées grâce à la méthode qui suit .

Méthode de GAUSS :
On sait que q s'écrit sous la forme :

$$\forall x \in E \quad q(x) = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \alpha_{ii} + 2Re(\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \bar{x}_i x_j \alpha_{ij}).$$

Nous allons procédé par récurrence sur n, en distinguant deux cas :

* Il existe $i_0 \in \{1,2,...,n\}$, tel que : $\alpha_{i_0} \neq 0$,alors quitte à réordoner les α_i.
On peut supposer que $\alpha_{11} \neq 0$, en regroupant les termes contenant x_1,
donc on aura : $\forall x \in E$

$$\begin{aligned} q(x) &= \alpha_{11}\ |x_1|^2 + 2Re(\textstyle\sum_{j=2}^n \alpha_{1j}\overline{x_1}xj) + \sum_{i=2}^n \alpha_{ii}|x_i|^2 + 2Re(\sum_{2\leqslant i<j\leqslant n}^n(\alpha_{ij}\overline{x_i}xj)) \\ &= \alpha_{11}[\ |x_1|^2 + 2Re(\overline{x_1}\textstyle\sum_{j=2}^n \frac{\alpha_{1j}}{\alpha_{11}}xj)] + \sum_{i=2}^n \alpha_{ii}|x_i|^2 + 2Re(\sum_{2\leqslant i<j\leqslant n}^n(\alpha_{ij}\overline{x_i}xj)) \end{aligned}$$

Posons : $\beta_j = \frac{\alpha_{1j}}{\alpha_{11}} \quad \forall j \in \{2,3,..,n\}$
Alors :
$q(x) = \alpha_{11}[\ |x_1|^2 + 2Re(\overline{x_1}\sum_{j=2}^n \beta_j xj)] + \sum_{i=2}^n \alpha_{ii}|x_i|^2 + 2Re(\sum_{2\leqslant i<j\leqslant n}^n(\alpha_{ij}\overline{x_i}xj))$.
On sait déja que :
(* $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C} : |z_1+z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2Re(\overline{z_1}a_2)$*).

Donc,$\forall x \in E$:

$$\begin{aligned} q(x) &= \alpha_{11}|x_1 + \textstyle\sum_{j=2}^n \beta_j xj)|^2 - |\sum_{j=2}^n \beta_j xj|^2 + \sum_{i=2}^n \alpha_{ii}|x_i|^2 + 2Re(\sum_{2\leqslant i<j\leqslant n}^n(\alpha_{ij}\overline{x_i}xj). \\ &= \alpha_{11}|x_1 + \textstyle\sum_{j=2}^n \beta_j xj|^2 + Q(x_2,x_3,..,x_n). \end{aligned}$$

Où :
$Q(x_2,x_3,..,x_n) = -|\sum_{j=2}^n \beta_j xj|^2 + \sum_{i=2}^n \alpha_{ii}|x_i|^2 + 2Re(\sum_{2\leqslant i<j\leqslant n}^n(\alpha_{ij}\overline{x_i}xj)$
et comme on a : $Q(x_2,x_3,..,x_n)$ est une forme quadratique sur $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension fini n-1 ; On applique l'hypothèse de récurence à Q.

** $\forall i \in \{1,2,...,n\}, \alpha_{ii} = 0$, alors : q s'écrit sous la forme de :

$$q(x) = 2Re(\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}^n(\alpha_{ij}\overline{x_i}xj).$$

comme $q \neq 0$, donc $\exists \alpha_{i_0j_0}$, telle que : $i_0, j_0 \in \{1,2,...,n\}$.
Alors, on regroupe tous les termes contenant x_{i_0} et x_{j_0}.
Pour simplifier on suppose que : $\alpha_{i_0j_0} = \alpha_{12}$; Alors on aura :

$$\begin{aligned} q(x) &= 2Re(\textstyle\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}^n(\alpha_{ij}\overline{x_i}xj) \\ &= 2Re(\alpha_{12}\overline{x_1}x_2 + \textstyle\sum_{j=3}^n \alpha_{1j}\overline{x_1}xj + \sum_{j=3}^n \alpha_{2j}\overline{x_2}xj) + 2Re(\sum_{3\leqslant i<j\leqslant n}^n(\alpha_{ij}\overline{x_i}xj) \end{aligned}$$

On a : $Re(\sum_{j=3}^n \alpha_{2j}\overline{x_2}xj) = Re(\sum_{j=3}^n x_2\overline{\alpha_{2j}x_j}) \qquad (Re(z) = Re(\overline{z}))$.
Posons : $y_1 = \sum_{j=3}^n \frac{\alpha_{2j}}{\alpha_{12}}x_j$, $y_2 = \sum_{j=3}^n \alpha_{1j}x_j$
Alors on aura :$\forall x \in E$:

$$\begin{aligned} q(x) &= 2Re(\alpha_{12}\overline{x_1}x_2 + \overline{x_1}y_2 + \alpha_{12}\overline{y_1}x_2) + 2Re(\textstyle\sum_{3\leqslant i<j\leqslant n}^n \alpha_{ij}\overline{x_i}xj) \\ &= 2Re(\alpha_{12}x_2\overline{x_1} + \alpha_{12}x_2\overline{y_1} + y_2\overline{x_1} + y_2\overline{y_1} - y_2\overline{y_1}) + 2Re(\textstyle\sum_{3\leqslant i<j\leqslant n}^n \alpha_{ij}\overline{x_i}xj) \\ &= 2Re((\overline{x_1} + \overline{y_1})(\alpha_{12}x_2 + y_2) - y_2\overline{y_1}) + 2Re(\textstyle\sum_{3\leqslant i<j\leqslant n}^n \alpha_{ij}\overline{x_i}xj) \\ &= 2Re((\overline{x_1 + y_1})(\alpha_{12}x_2 + y_2) - y_2\overline{y_1}) + 2Re(\textstyle\sum_{3\leqslant i<j\leqslant n}^n \alpha_{ij}\overline{x_i}xj) \\ &= 2Re((\overline{x_1 + y_1})(\alpha_{12}x_2 + y_2)) - 2Re(y_2\overline{y_1}) + 2Re(\textstyle\sum_{3\leqslant i<j\leqslant n}^n \alpha_{ij}\overline{x_i}xj) \end{aligned}$$

pour tous $z_1, z_2 \in \mathbb{C} \quad 2Re(\overline{z_1}z_2 = 2Re(\overline{z_2}z_1) = \frac{1}{2}|z_1+z_2|^2 - \frac{1}{2}|z_1-z_2|^2$.

Donc : $q(x) = \frac{1}{2}|x_1 + y_1 + \alpha_{12}x_2 + y_2|^2 - \frac{1}{2}|x_1 + y_1 - \alpha_{12}x_2 - y_2|^2 + Q(x3,..,x_n)$. avec :
$Q(x_3,..,x_n) = -2Re(y_2\overline{y_1}) + 2Re(\sum_{3\leqslant i<j\leqslant n}^n \alpha_{ij}\overline{x_i}xj)$
est une forme quadratique en $x_3,...x_n$, alors : on applique l'hypothèse de récurrence à Q.

***Définition* 2.2.1.**
Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension fini n, muni d'une forme quadratique q de rang r . On note p et m le nombre de coéfficients réspéctivement positifs et négatifs apparaissant dans la réduction de q .
La signature de q est le couple d'entiers (p, m). On la note sign(q) :

$$sign(q) = (p, m).$$

***Proposition* 2.2.1.**
Soit (p, m) la signature de q alors :
i) Le rang de q est $p + m$.
ii) q est non dégénérée si et eulement si $p + m = n$.
iii) q est positive si et seulement si m=0.
iv) q est définie positive si et seulement si $(p, m) = (n, 0)$.

Exercice :
Soit q une forme quadratique sur $\mathbb{C}^3$ définie par :
$\forall x \in \mathbb{C}^3 \quad q(x) = |x_1|^2 + |x_3|^2 - 2Re(i\overline{x_1}x_2) - 2Re(i\sqrt{2}\overline{x_2}x_3)$.
1) Appliquerl'algorithme de Gauss à q.
2) donner la signature, et le rang de q .
3) q est-t-elle dégénérée ?
4) q définie -t-elle un produit scalaire ,si oui construire une base orthogonale de $\mathbb{C}^3$ pour q.
Réponce :
1) Soit $x \in \mathbb{C}^3$
i) On a : $\alpha_{11} = 1 \neq 0$;
Alors, on regroupe tous les termes contenants x_1
D'où : $q(x) = [|x_1|^2 - 2Re(i\overline{x_1}x_2)] + |x_3|^2 - 2Re(i\sqrt{2}\overline{x_2}x_3)$
$= [|x_1 - ix_2|^2 - |ix_2|^2] + |x_3|^2 - 2Re(i\sqrt{2}\overline{x_2}x_3)$
$= [|x_1 - ix_2|^2 - |x_2|^2] + |x_3|^2 - 2Re(i\sqrt{2}\overline{x_2}x_3)$
$= |x_1 - ix_2|^2 - |x_2|^2 + |x_3|^2 - 2Re(i\sqrt{2}\overline{x_2}x_3)$
$= |x_1 - ix_2|^2 + Q(x_2, x_3)$
avec : $Q(x_2, x_3) = -|x_2|^2] + |x_3|^2 - 2Re(i\sqrt{2}\overline{x_2}x_3)$.

ii) On a : $Q(x_2, x_3)$ une forme quadratique en (x_2, x_3), alors on réapplique la méthode à Q.
On a : $\alpha_{12} = -1 \neq 0$;
D'où : $Q(x_2, x_3) = -|x_2|^2] + |x_3|^2 - 2Re(i\sqrt{2}\overline{x_2}x_3)$
$= -[|x_2 + i\sqrt{2}x_3|^2 - |i\sqrt{2}x_3|^2] + |x_3|^2$
$= -|x_2 + i\sqrt{2}x_3|^2 + |i\sqrt{2}x_3|^2 + |x_3|^2$
$= -|x_2 + i\sqrt{2}x_3|^2 + 2|x_3|^2 + |x_3|^2$
$= -|x_2 + i\sqrt{2}x_3|^2 + 3|x_3|^2$.
Donc,on obtient : $\forall x \in \mathbb{C}^3$:
$q(x) = |x_1 - ix_2|^2 - |x_2 + i\sqrt{2}x_3|^2 + 3|x_3|^2$.
2) la signature de q est : $sign(q) = (2, 1)$, et $rg(q) = 2 + 1 = 3$.
3 On a : $2 + 1 = 3 = dim(\mathbb{C}^3)$ alors q est non dégénérée.
4) comme on a : $p = 2 \neq dim(\mathbb{C}^3)$, alors q ne présente pas un produit scalaire.

Exercice :
Soit q une forme quadratique sur $\mathbb{C}^3$ définie par :
$\forall x \in \mathbb{C}^3 \quad q(x) = |x_1|^2 + 3|x_2|^2 + 6|x_3|^2 + i\overline{x_1}x_2 - ix_1\overline{x_2} + 2i\overline{x_3}x_2 - 2i\overline{x_2}x_3.$
1) Appliquer l'algorithme de Gauss à q.
2) donner la signature, et le rang de q .
3) q est-t-elle dégénérée ? ?
4) q définie -t-elle un produit scalaire ,si oui construire une base orthogonale de $\mathbb{C}^3$ pour q.

Réponce :
1) Soit $x \in \mathbb{C}^3$
On a : $q(x) = |x_1|^2 + 3|x_2|^2 + 6|x_3|^2 + i\overline{x_1}x_2 - ix_1\overline{x_2} + 2i\overline{x_3}x_2 - 2i\overline{x_2}x_3$
$= |x_1|^2 + 3|x_2|^2 + 6|x_3|^2 + 2Re(i\overline{x_1}x_2) - 4Re(i\overline{x_2}x_3)$
$= [|x_1|^2 + 2Re(i\overline{x_1}x_2)] + 3|x_2|^2 + 6|x_3|^2 - 4Re(i\overline{x_2}x_3)$
$= |x_1 + ix_2|^2 - |ix_2|^2 + 3|x_2|^2 + 6|x_3|^2 - 4Re(i\overline{x_2}x_3)$
$= |x_1 + ix_2|2 + 2|x_2|^2 + 6|x_3|^2 - 4Re(i\overline{x_2}x_3)$
$= |x_1 + ix_2|^2 + 2|x_2 - ix_3|^2 - 2|ix_3|^2 + 6|x_3|^2$
$= |x_1 + ix_2|^2 + 2|x_2 - ix_3|^2 + 4|x_3|^2$
2) la signature de q est : $sign(q) = (3, 0)$, et $rg(q) = 3$.
3 On a : $rg(q) = dim(\mathbb{C}^3)$ alors q est non dégénérée.
4)

* comme on a : $p = 3 = dim(\mathbb{C}^3)$,et $m = 0$, alors q définie un produit scalaire hermitien.

* Posons $y_1 = x_1 + ix_2$,$y_2 = \sqrt{2}(x_2 - ix_3)$,$y_3 = 2x_3$.
alors $x_3 = \frac{y_3}{2}$,$x_2 = \frac{y_2}{\sqrt{2}}$,$x_1 = y_1 - \frac{iy_2}{\sqrt{2}} + \frac{y_3}{2}$,
et comme on a : $Y = PX$ avec : $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$,$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$, et $P = \begin{pmatrix} 1 & -i\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{i}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$
les colonnes de la matrice P forment entre eux une base orthogonale pour q.
Alors on aura $\{(1, 0, 0), (-i\frac{\sqrt{2}}{2}, 0), (\frac{1}{2}, \frac{i}{2}, \frac{1}{2})\}$ une base orthogonale pour q.

Exercice :
Soit q une forme quadratique sur $\mathbb{C}^3$ définie par :
$\forall x \in \mathbb{C}^3 \quad q(x) = \overline{x_1}x_2 + x_1\overline{x_2} - i\overline{x_1}x_3 + ix_1\overline{x_3} + (i-1)\overline{x_2}x_3 + (i+1)x_2\overline{x_3}.$
1) Appliquer l'algorithme de Gauss à q.
2) donner le signature, et le rang de q .
3) q est-t-elle dégénérée ? ?
4) q définie -t-elle un produit scalaire ,si oui construire une base orthogonale de $\mathbb{C}^3$ pour q..

Réponce :
1) $\quad \forall x \in \mathbb{C}^3 \quad q(x) = \overline{x_1}x_2 + x_1\overline{x_2} - i\overline{x_1}x_3 + ix_1\overline{x_3} + (i-1)\overline{x_2}x_3 + (i+1)x_2\overline{x_3}.$
$= 2Re(\overline{x_1}x_2) - 2Re(i\overline{x_1}x_3) + 2Re((1-i)\overline{x_2}x_3)$
$= 2Re(\overline{x_1}x_2 - i\overline{x_1}x_3 + (1-i)\overline{x_2}x_3)$
On a : $Re((1-i)\overline{x_2}x_3) = Re(\overline{(1-i)x_2\overline{x_3}})$
Donc : $q(x) = 2Re(\overline{x_1}x_2 - i\overline{x_1}x_3 + \overline{(1-i)}x_2\overline{x_3}) \quad \forall x \in \mathbb{C}^3$
$= 2Re((\overline{x_1} + \overline{(1-i)x_3})(x_2 - ix_3) + i\overline{(1-i)}|x_3|^2$
$= 2Re((\overline{x_1 + (1-i)x_3})(x_2 - ix_3) + i\overline{(1-i)}|x_3|^2$

$= 2Re((\overline{x_1 + (1-i)x_3})(x_2 - ix_3)) + 2Re(i(\overline{1-i})|x_3|^2)$
$= \frac{1}{2}|x_1 + (1-i)x_3 + x_2 - ix_3|^2 - \frac{1}{2}|x_1 + (1-i)x_3 - x_2 + ix_3|^2$
$+2Re(i(\overline{1-i})|x_3|^2)$
$= \frac{1}{2}|x_1 + (1-2i)x_3 + x_2|^2 - \frac{1}{2}|x_1 + x_3 - x_2|^2 + 2|x_3|^2.$

2) la signature de q est : $sign(q) = (2, 1)$, et $rg(q) = 3$.
3 On a : $rg(q) = dim(\mathbb{C}^3)$, alors q est non dégénérée.
4) comme on a : $p = 2 \neq dim(\mathbb{C}^3)$, alors q ne présente pas un produit scalaire.

Exercice :
A quelle condition sur a, b, b', c, on definit cette application :

$$\begin{array}{cccc} <.,.> : & \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 & \to & \mathbb{C} \\ & (\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}) & \mapsto & a\overline{x}x' + b\overline{y}x' + b'\overline{x}y' + c\overline{y}y', \end{array}$$

comme un produit scalaire hermitien.
Réponce :
Soient $X, X' \in \mathbb{C}^2$:

* On a : $<.,.>= a\overline{x}x' + b\overline{y}x' + b'\overline{x}y' + c\overline{y}y'$ est sesquilinéaire $\forall a, b, b', c$

* La matrice de $< X, X' >$ dans la base canonique de $\mathbb{C}^2$ est :

$$\begin{pmatrix} a & b' \\ b & c \end{pmatrix}$$

Alors pour que $<.,.>$ soit hermitien , il faut que sa matrice dans la base canonique soit hermitienne.
C'est à dire : $\alpha_{ij} = \overline{\alpha_{ji}}$ $\forall i, j \in \{1, 2\}$; et $\forall i \in \{1, 2\}$: $\alpha_{ii} \in \mathbb{R}$.
Donc,on obtient que : $b' = \overline{b}$ et $a, c \in \mathbb{R}$
pour $b' = \overline{b}$ et $a, c \in \mathbb{R}$ $<.,.>$ est sesquilinéaire hermitien et on aura :
$< X, X' >= a\overline{x}x' + b\overline{y}x' + \overline{b}\overline{x}y' + c\overline{y}y'$
si on a un produit scalaire, Alors $\forall x \in \mathbb{C}^2$:
$< X, X > > 0$ donc :
- Pour : $X = e_1 \Leftrightarrow < e_1, e_1 >= a > 0$
- Pour : $X = e_2 \Leftrightarrow < e_2, e_2 >= c > 0$

* **réciproquement** on utilisant le réduction de Gauss
si $b' = \overline{b}, a > 0, c > 0$ alors $<.,.>$ est hermitien sesquilinéaire et pour tout $X \in \mathbb{C}^2$, on a : la forme quadratique associé à $< X, Y >$ est : $q(X) =< X, X >= a|x|^2 + c|y|^2 + \overline{bxy} + b\overline{y}x$
$= a|x|^2 + c|y|^2 + 2Re(b\overline{x}y)$
$= a[\ |x|^2 + \frac{2}{a}Re(b\overline{x}y)\ ] + c|y|^2$ (car $a > 0$)
$= a[\ |x + \frac{y}{a}b|^2 - |\frac{1}{a}yb|^2\ ] + c|y|^2$
$= a|x + \frac{y}{a}b|^2 - \frac{|b|^2}{a}|y|^2 + c|y|^2$
$= a|x + \frac{y}{a}b|^2 + |y|^2[c - |\frac{|b|^2}{a}]$
comme $a > 0$ il suffit de prendre $c - \frac{|b|^2}{a} > 0$, pour avoir un produit scalaire ; et alors : $ac > |b|^2$.

Finalement, on obtient un produit scalaire si et seulement si a et b sont des réels strictement positifs et $b' = \overline{b}$ et $ac > |b|^2$.

2.3 procèdé d'orthogonalisation de Gram Schmidt :

Théorème 2.3.1. *(procèdé d'orthogonalisation de Gram Schmidt)*
Soit $(f_i)_{i=1,..,d}$ *une famille libre d'un espace préhilbertien complexe* E.
Posons $e_1 = f_1$, *et* $e_{k+1} = f_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \frac{<e_i,f_{k+1}>}{<e_i,e_i>} e_i$, *pour tout* $k \in \{1,..,d-1\}$.
Alors :
La famille $(e_i)_{i=1,..,d}$ *est orthogonale et de plus pour tout entier* $k \in \{1,..,d-1\}$, *on a :*
$vect\{e_1,..,e_k\} = vect\{f_1,..,f_k\}$.

Preuve

Montrons que nous pouvons construire e_k possédant les propriétés voulues par récurrence.
Pour k = 1 c'est évident.
Supposons la construction faite jusqu'au k.
Puisque $\dim Vect\{e_1,..,e_k\} = \dim Vect\{f_1,..,f_k\} = k$; la famille $(e_i)_{i=1,..,k}$ est libre et donc $< e_i, e_i > \neq 0$.
Le vecteur e_{k+1} est bien défini par la formule de l'énoncé.
Pour $j \in \{1,..,k\}$,on a :

$$\begin{aligned} < e_j, e_{k+1} > &=< e_j, f_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \frac{<e_i,f_{k+1}>}{<e_i,e_i>} < e_j, e_i > > \\ &=< e_j, f_{k+1} > - \sum_{i=1}^{k} \frac{<e_i,f_{k+1}>}{<e_i,e_i>} < e_j, e_i > \\ &=< e_j, f_{k+1} > - < e_j, f_{k+1} >= 0. \end{aligned}$$

La famille $(e_i)_{i=1,..,k+1}$ est orthogonale. Par définition f_{k+1} appartient à $Vect\{e_{k+1}, e_1,..,e_k\}$ qui est par hypothése de récurrence, égal à $Vect\{f_{k+1}, f_1,..,f_k\}$.
Donc $Vect\{e_1,..,e_{k+1}\} \subseteq Vect\{f_1,..,f_{k+1}\}$.
Comme on a égalemment $f_{k+1} = \sum_{i=1}^{k} \frac{<e_i,f_{k+1}>}{<e_i,e_i>} e_i + e_{k+1}$,
on deduit de même l'inclusion inverse.

Remarque :
Il suffit de poser $e'_i = \frac{e_i}{||e_i||}$, pour obtenir une base $(e'_i)_{i=1,..,d}$ orthonormale.

Exercice :
Dans $\mathbb{C}^3$, soit la famille libre $(v_i)_{i=1,2,3}$ formé par les vecteurs $v_1 = (1, i, i)$,
$v_2 = (1, i, -1)$, $v_3 = (i, 1, 0)$.
Trouver la base orthonormée de $\mathbb{C}^3$ obtenue à partir de ces vecteurs par le procédé de Schmidt

Réponce :
Appliquons le procédé de Grame Shmidt : posons :

$$\begin{aligned} e_1 &= v_1 = (1, i, i), \\ e_2 &= v_2 - \frac{<e_1,v_2>}{<e_1,e_1>} e_1 \\ &= (1, i, -1) - \frac{(1+1+i)}{3}(1, i, i) = \frac{1}{3}(1 - i, 1 + i, -2 - 2i). \\ e_3 &= v_3 - \frac{<e_1,v_3>}{<e_1,e_1>} e_1 - \frac{<e_2,v_3>}{<e_2,e_2>} e_2 \\ &= v_3 - 0 - 0 = (i, 1, 0). \end{aligned}$$

Alors (e_1, e_2, e_3) une base orthogonale ,
et $(\frac{e_1}{||e_1||} \frac{e_2}{||e_2||}, \frac{e_3}{||e_3||}) = (\frac{1}{\sqrt{3}}(1, i, i), \frac{1}{2\sqrt{3}}(1 - i, 1 + i, -2 - 2i), \frac{1}{\sqrt{2}}(i, 1, 0))$
une base orthonormale.

Exercice :
Soit $\mathbb{C}_2[X]$,espace vectoriel des polynomes de degré $\leqslant 2$.
soit pour tous $P, Q \in \mathbb{C}_2[X]$ l'application :

$$\phi(P,Q) =< P, Q >= \int_0^1 t\overline{P(t)}Q(t)\,\mathrm{d}t$$

. **1)** Montrer que ϕ defini un produit scalaire.
2)Donner une base orthonormé .
Réponce :
1) comme on a : $t \mapsto t$ strictement positive $\forall t \in]0; 1[$
Alors c'est évident de vérifier que ϕ défini un produit scalaire.
2)Soit $(P_i)_{i\in\{0,1,2\}}$ la base orthogonale qu'on va construire à partir de la famille libre $\{1, X, X^2\}$, en utilisant le procédé de Gram Shmidt. Alors $(P_i)_{i\in\{0,1,2\}}$ défini par :
$P_0 = 1$, et $||P_0|| = 1$.
$P_1 = X - \frac{<1,X>}{||P_0||^2}P_0 = X - \displaystyle\int_0^1 t^2\,\mathrm{d}t = X - \frac{1}{3}$, et $||p_1||^2 = \frac{1}{6}$.
$P_2 = X^2 - < 1, X^2 > - \frac{<X-\frac{1}{3},X^2>}{||p_1||^2}p_1 = X^2 - \frac{7}{10}(X - \frac{1}{3})$.
alors on aura : $(1, X - \frac{1}{3}, X^2 - \frac{7}{10}(X - \frac{1}{3})$ est une base orthogonale ainsi a base othonormale est :

$$(1, \sqrt{6}(X - \frac{1}{3}), \frac{X^2 - \frac{7}{10}(X - \frac{1}{3})}{||P_2||}).$$

.
Exercice :
Soient E un espace hermitien de dimension n, et $B = (e_1, .., e_n)$une base de E.
Montrer que :

$$\forall u_1, .., u_n \in E,\ |\det(u_1, .., u_n)| \leqslant ||u_1||.||u_2||..||u_n||.$$

Réponce :
Lorsque la famille $(u_1, .., u_n)$ est liée, $\det_B(u_1, .., u_n) = 0$, donc le résultat est évident.
Si la famille $(u_1, .., u_n)$ est libre, d'après le procédé d'orthogonalisation de Schmidt, il existe une base orthonormale $B' = (e'_1, .., e'_n)$ de E telle que
pour tout $k \in [1, n]$, $u_k \in Vect(e'_1, .., e'_n)$. On a :
$|\det_B(u_1, .., u_n)| = |\det_B(B')||\det_{B'}(u_1, .., u_n)| = |\det_{B'}(u_1, .., u_n)|$.
Ce dernier déterminant est celui d'une matrice triangulaire supérieure, donc égale au produit des élements de sa diagonale. Or le $k^{ième}$ coéfficients de sa diagonale est la $k^{ième}$ coordonnée de u_k dans la base orthonormale B', c'est-à-dire $< e'_k, u_k >$, donc :

$$|det_{B'}(u_1, .., u_n)| = \prod_{k=1}^{n} | < e'_k, u_k > |.$$

En utilisant l'inégalité de Caushy-Shwarz, $| < e'_k, u_k > | \leqslant ||u_k||$, d'où :

$$|\det(u_1, .., u_n)| \leqslant ||u_1||.||u_2||..||u_n||.$$

2.4 Projection orthogonale

Dans ce paragraphe, E désigne un espace hermitien.

***Définition* 2.4.1.**
Soit F un sous-espace de E non réduit à $\{0\}$ de dimension m, On appelle projection orthogonale sur F la projection sur F parallèlement à $F^{\perp}$.On notera p_F cette projection.

***Théorème* 2.4.1.**
Soit $(e_1, .., e_m)$,une base orthonormale de F,
alors :

$$\forall x \in E \ p_F(x) = \sum_{i=1}^{m} < e_i, x > e_i.$$

En outre $p_F + p_{F^{\perp}} = Id_E$.

Remarque :

1) Si $F = \{0\}$, on peut définir p_F, c'est l'application nulle. On suppose donc, a priori que F non réduit à $\{0\}$.
   Dans le cas où $F = E$, alors p_F est l'application identité.
2) Soient M_{p_F} la matrice du p_F, et $M_{p_{F^{\perp}}}$ la matrice du $p_{F^{\perp}}$.
   Comme on a : $p_F = Id_E - p_{F^{\perp}}$, alors : $M_{p_F} = Id - M_{p_{F^{\perp}}}$.

Exemples :
Soit $a \neq 0_E$.
1) Soit $F = Vect(a)$.
On a : $\{\frac{a}{||a||}\}$ forme une base orthonormée de F.
Donc $\forall x \in E, \ p_F(x) = \frac{<a,x>}{||a||^2} a$.
2) Soit $H = Vect(a)^{\perp}$.
comme on a : $F = H^{\perp}$ alors : $p_H = Id - p_F$
D'où : $\forall x \in E, p_H(x) = x - \frac{<a,x>}{||a||^2} a$.

Exercice :
Montrer que $\forall x, y \in E, < p_F(x), y >=< x, p_F(y) >$.

Réponce :
Soient $x, y \in E$.
On peut ecrire $x = a + b$ et $y = c + d$ avec $a, c \in F$ et $b, d \in F^{\perp}$.
On a :
$< p_F(x), y >=< a, c + d >=< a, c >$,et $< x, p_F(y) >=< a + b, c >=< a, c >$.
Par suite $< p_F(x), y >=< x, p_F(y) >$.

Exercice :
Soit $\mathbb{C}^3$,muni de son produit hermitien usuel,soit le plan de $\mathbb{C}^3$ d'équation :
$x - y + iz = 0$.
1)Déterminer l'orhogonale de F.
2) déterminer $p_F(x)$ la projéction orthogonale sur F.

3) calculer la matrice de p_F dans la base canonique de $\mathbb{C}^3$, et déduire la matrice du $p_{F^\perp}$.

Réponce :
Soit $X = (x, y, z) \in \mathbb{C}^3$.
1) On a : $x - y + iz =< u, X >= 0$ avec $u = (1, -1, -i)$.
Donc l'orthogonale de F est engendré par le vecteur u.
2)$p_F(X) = X - \frac{<u,X>}{||u||^2}u$
$= (x, y, z) - \frac{x-y+iz}{3}(1, -1, -i)$.
3) $p_F(e_1) = e_1 - \frac{1}{3}(1, -1, -i) = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{i}{3})$.
$p_F(e_2) = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{-i}{3})$.
$p_F(e_3) = (\frac{-i}{3}, \frac{i}{3}, \frac{2}{3})$.
Alors :
$M(p_F, \{e_1, e_2, e_3\}) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{-i}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{i}{3} \\ \frac{i}{3} & \frac{-i}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ et $M(p_{F^\perp}, \{e_1, e_2, e_3\}) = Id_3 - \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{-i}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{i}{3} \\ \frac{i}{3} & \frac{-i}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$

Exercice :
Soit f un endomorphisme de E dont la matrice A dans une base orthonormale B vérifie $\overline{A^t} = A$, et $A^2 = A$.
Montrer que f est une projection orthogonale.
Réponce :
Comme $A^2 = A$, on a $f^2 = f$, donc f est une projection.
Soient x un vecteur de $ker(f)$,et $f(z)$ un vecteur de $Im(f)$.
Si l'on note réspectivement X,Y les matrices colonnes des coordonées de x, z dans la base orthonormale B, on a :
$< f(x), x >= \overline{(AZ)}^t X = (\bar{Z}^t)(\bar{A}^t)X = \overline{(Z)}^t AX =< x, f(z) >= 0$.
Donc $ker(f) \subset (Im(f))^\perp$, d'où par égalité des dimensions on obtient $ker(f) = (Im(f))^\perp$.
Donc f est une projection orthogonale.

Exercice :
Soient E un espace hermitien de dimension $n \geq 2$, et a, b deux vecteurs linéairement indépendants de E. On considère l'endomorphisme f de E défini par :

$$\forall x \in E,\ f(x) =< a, x > a+ < b, x > b.$$

Trouver une condition nécessaire et suffisante sur a et b pour que f soit une projection orthogonale de E.

Réponce :

i) Si (a, b) est une famille orthonormée de E, l'application f est la projection orthogonale sur $Vect(a, b)$ d'aprés le **théorème 2.4.1**.

ii) Réciproquement, supposons que f soit une projection orthogonale.
Un vecteur x appartient à $ker(f)$ si, et seulement si, $< a, x >=< b, x >= 0$ puisque la famille (a, b) est libre, d'où $ker(f) = Vect((a, b))^\perp$. On a donc $Im(f) = Vect(a, b)$, puisque f est une projection orthogonale.
On déduit que $f(a) = a$, et $f(b) = b$, ce qui donne $||a||^2 a+ < b, a > b = a$,

et $< a,b > a + ||b||^2 b = b$, d'où $||a||^2 = ||b||^2 = 1$, et $< b,a >= 0$ car la famille (a,b) est libre.

Alors f est une projection orthogonale si et seulement si, la famille (a,b) est libre et de plus $||a||^2 = ||b||^2 = 1$.

Théorème 2.4.2. (Pythagore)
$\forall (x,y) \in E^2, < x,y >= 0 \Rightarrow ||x+y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2$.

Remarque :
La réciproque est fausse contrairement au cas réel, on n'a pas l'équivalence car, d'aprés les formules de polarisation $||x+y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2 \Rightarrow < x,y > \in i\mathbb{R}$, possibilité qui ne se présente pas dans un espace préhilbertien réel.
contre exemple : $||1+i||^2 = ||1||^2 + ||i||^2$, mais $< 1,i > \neq 0$.

Théorème 2.4.3. (Pythagore généralisé)
si $(e_1, e_2, ..., e_n)$ est une famille orthogonale, alors :
$||e_1 + .. + e_n||^2 = ||e_1||^2 + ... + ||e_n||^2$.

Preuve
Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$. Pour $n = 1$,on a : $||e_1||^2 = ||e_1||^2$
Supposons la propriété établie au $n \geq 1$.
Soit $(e_1, ..., e_n, e_{n+1})$ une famille orthogonale.
En exploitant $||a+b||^2 = ||a||^2 + 2Re(f(a,b)) + ||a||^2$ avec :$a = e_1 + ... + e_n$, et $b = e_{n+1}$, on obtient :
$||e_1 + ... + e_n + e_{n+1}||^2 = ||e_1 + ... + e_n||^2 + ||e_{n+1}||^2 \quad$ (car $f(a,b) = 0$).
Par hypothèse de récurrence on aura :
$||e_1 + ... + e_n + e_{n+1}||^2 = ||e_1||^2 + ... + ||e_n||^2 + ||e_{n+1}||^2$.
Récurrence établie.

Exercice :
Soit F un sous-espace vectoriel de E, et Soit $x \in E$.
Montrer que $\forall y \in F, \ ||x - y|| \geq ||x - p_F(x)||$.
Dans quel cas a-t-on égalité ?

Réponce :
Soient $x \in E$, et $y \in F$
On a : $x - y = (x - p_F(x)) + (p_F(x) - y)$, avec $x - p_F(x) \in p_{F^\perp}$, et $p_F(x) - y \in F$.
Par Pythagore $||x-y||^2 = ||x - p_F(x)||^2 + ||p_F(x) - y||^2 \geq ||x - p_F(x)||^2$,
Avec égalité si et seulement si, $y = p_F$.

Exercice :
Soit p un projecteur de E.
Montrer que p est un projecteur orthogonale si,et seulement si
$\forall x \in E, \ ||p(x)|| \leqslant ||x||$.

Réponce :

i) Si p est un projecteur orthogonal sur E_1, pour tout vecteur x de E tel que $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in E_1$ et $x_2 \in E_1^\perp$, on a $||p(x)||^2 = ||x_1||^2$ et $||x||^2 = ||x_1||^2 + ||x_2||^2$, d'aprés le théorème de Pythagore.
Donc $||p(x)||^2 \leqslant ||x||^2$.

ii) Réciproquement, supposons que pour tout $x \in E$, on ait $||p(x)|| \leqslant ||x||$.
Si p n'est pas une projection orthogonale, il existe $x_1 \in Im(p)$ et $x_2 \in Ker(p)$ tels que $< x_1, x_2 >= re^{i\theta}$ avec $r > 0$.
Si $\gamma \in \mathbb{C}$ et $x = x_1 + \gamma x_2$, on a :
$||x||^2 = ||x_1||^2 + 2Re(\gamma < x_1, x_2 >) + |\gamma|^2||x_2||^2$ et $||p(x)||^2 = ||x_1||^2$.
Pour tout réel λ, en utilisant les égalités précédentes avec $\gamma = \lambda e^{-i\theta}$, il vient :
$||x||^2 - ||p(x)||^2 = 2\lambda r + \lambda^2||x_2||^2 = \lambda(2r + \lambda||x_2||^2)$, expréssion qui est strictement négative pour tout $\lambda \in] - \frac{2r}{||x_2||^2}, 0[$, ce qui est contraire à l'hypothèse.
Donc p est un projecteur orthogonal.

***Définition* 2.4.2.**
Soit F un sous espace vectoriel de dimension fini de E, non réduit à $\{0\}$.
Pour tout vecteur $x \in E$ on définit la distance de x à F par :

$$d(x, F) = \inf ||x - y|| \quad \forall y \in F.$$

***Proposition* 2.4.1.**
Soit $x \in E$.

$$d(x, F) = ||x - p_F(x)||.$$

Preuve
Soit $x \in E$.

$$\begin{aligned} d(x, F) &= \inf ||x - y|| \quad \forall y \in F \\ &= min||x - y|| \quad \forall y \in F \\ &= ||x - p_F(x)||. \end{aligned}$$

Exemples :
Soit $a \neq 0_E$.
1) Soit $F = Vect(a)$. $\forall x \in E,\ d(x, F) = ||x - \frac{<a,x>}{||a||^2}a||$.
2) Soit $H = Vect(a)^{\perp}$. $\forall x \in E$, $d(x, H) = \frac{|<a,x>|}{||a||}$.
corollaire :
pour tout $x \in E$, on a : $||x||^2 = ||p_F(x)||^2 + (d(x, F))^2$.

Preuve
Comme $x = p_F(x) + (x - p_F(x))$,et $p_F(x) \perp (x - p_F(x))$. alors d'aprés Pythagore $||x||^2 = ||p_F(x)||^2 + ||(x - p_F(x))||^2$, d'où le résultat.
corollaire :
Si $(e_1, .., e_n)$ est une famille orthonormée de vecteurs de E, alors :

$$\forall x \in E, \sum_{i=1}^{n} | < e_i, x > |^2 \leqslant ||x||^2.$$

appellée : **Inegalité de Bessel**.
Preuve
Soit $x \in E$ on a $p_F(x) = \sum_{i=1}^{n} < e_i, x > e_i$
alors , $||p_F(x)||^2 = \sum_{i=1}^{n} | < e_i, x > |^2 = ||x||^2 - (d(x, F))^2 \leqslant ||x||^2$.

Exemples :
Si $(e_n)_{n\in N}$ est une famille orthonormée de vecteurs de E alors pour tout $x \in E$, la série numérique $\sum |< e_n, x >|^2$, converge et $\sum_{n=0}^{\infty} |< e_n, x >|^2 \leqslant ||x||^2$.
En effet, par ce qui précède, les sommes partielles de la série à termes positifs $|< e_n, x >|^2$ sont majorées par $||x||^2$.

Exercice :
Soit E un espace hermitien et F un sous espace vectoriel de E.
Pour tout $x \in E$, on note :

$$F_x = \{y \in F,\ ||x - y|| = d(x, F) = \inf ||x - z|| \forall x \in F\}.$$

a) Montrer que si $x - y \in F^{\perp}$ alors $y \in F$.
b)Montrer que F_x à au plus un élément.
c) Montrer que $F \bigoplus F^{\perp}$ et que $x \mapsto p_F(x) = x_F$ s'identifie à la projection orthogonale sur F.
d) Montrer que $F = F^{\perp\perp}$.

Réponce :
a)
Soit $y \in F$ tel que $x - y \in F^{\perp}$. On a :
$\forall z \in F \quad ||x - z||^2 = ||(x - y) + (y - z)||^2 = ||x - y||^2 + ||z - y||^2$. (*)
(car $x - y \in F^{\perp}$ et $z - y \in F$).
La relation (*) entraine $||x - y|| = \inf ||x - z||\ \forall z \in F$ alors $y \in F_x$.
b)
Supposons que F_x ait deux éléments y et z. Alors $x - y$ et $x - z \in F^{\perp}$ d'aprés **a)**, et donc $y - z = (x - z) - (x - y) \in F^{\perp}$. Or $y - x \in F$. Comme $F \bigcap F^{\perp} = \{0\}$, on en déduit $y - z = 0$, d'où le résultat.
c)
On sait que $F \bigcap F^{\perp} = \{0\}$. Il reste à montrer $E = F + F^{\perp}$, ce qui découle du fait que pour tout $x \in E,\ x = x_F + (x - x_F)$ avec $x_F \in F_x \subset F$, et $x - x_F \in F^{\perp}$ d'aprés **a**.
Soit $x \in E$, la decomposition de x selon $F \bigoplus F^{\perp}$ est $x = x_F + (x - x_F)$, ce qui prouve que $x \mapsto x_F$ est la projection orthogonale sur F.
d)
Soit $x \in F^{\perp\perp}$, comme $F \bigcap F^{\perp} = E$, alors il existe $(y, z) \in F \times F^{\perp}$ tels que $x = y + z$.
Or $z \in F^{\perp}$,donc $0 =< x, z >= ||z||^2+ < y, z >= ||z||^2$ alors $z = 0$, ainsi $x = y \in F$.
Et comme $F \subset F^{\perp\perp}$ on aura : $F = F^{\perp\perp}$.

3

Endomorphisme d'un espace hermitien

3.1 Géneralité (Espace dual)

***Définition* 3.1.1.**
Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel. On appelle forme linéaire sur E toute application linéaire de E dans $\mathbb{C}$.

***Définition* 3.1.2.**
On appelle espace vectoriel dual de E, qu'on note E^*, l'espace vectoriel de toutes les formes linéaire sur E. pour $x \in E$ et $\phi \in E^*$,
on pose : $\phi(x) =< x, \phi >$

Remarque :
Si E est de dimension finie, alors $dim(E) = dim(E^*)$,
et pour cela : E est isomorphe à son espace dual E^*.

***Proposition* 3.1.1.**
Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension fini n,
$(e_1, .., e_n)$ une base quelconque de E.
Pour chaque $i \in \{1, 2, .., n\}$, on définit $e^* \in E^*$, par :

$$\forall j \in \{1, 2, .., n\}, \; < e_j, e_i^* >= \delta_{ij}$$

. Alors $(e_1^*, .., e_n^*)$ est une base de E^*, appelée base duale de E.

Preuve
Puisque dim E^* $=n$, alors il suffit de montrer que $(e_1^*, .., e_n^*)$ est libre
Pour cela, soit $(\alpha_1, \alpha_2, ...n\alpha_1) \in \mathbb{C}^n$, tel que $\alpha_1 e_1^* + \alpha_2 e_2^* + ... + \alpha_n e_n^* = 0$.
On a : $\sum_{i=1}^n \alpha_i e_i^* = 0 \Leftrightarrow \forall j \in \{1, 2, .., n\}, \; < e_j, \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i^* >= 0$
$\Leftrightarrow \forall j \in \{1, 2, .., n\}, \; \sum_{i=1}^n \alpha_i < e_j, e_i^* >= 0$
$\Leftrightarrow \forall j \in \{1, 2, .., n\}, \; \alpha_j = 0 \quad$ car $< e_j, e_i^* >= \delta_{ij}$.

***Proposition* 3.1.2.**
Soient E un $\mathbb{C}$ espace vectoriel de dimension finie n ,
$(e_1, e_2, .., e_n)$ une base de E et $(e_1^*, e_2^*, .., e_n^*)$ sa base duale, alors
i) $\forall x \in E, \; x = \sum_{i=1}^n < x, e_i^* > e_i$.
ii) $\forall \phi \in E^*, \; \phi = \sum_{i=1}^n < e_i, \phi > e_i^*$.

Preuve
i) Soit $x \in E$, avec $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, alors pour tout $j \in \{1, 2, .., n\}$, on a :
$< x, e_j^* >= x_j$.
ii) Soit $\phi \in E^*$ avec $\phi = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i^*$, alors pour tout $j \in \{1, 2, .., n\}$, on a :
$< e_j, \phi >= y_j$.

***Proposition* 3.1.3.**
Soient E un $\mathbb{C}$ espace vectoriel de dimension finie n ,
$(e_1, e_2, .., e_n)$ une base de E et $(e_1^*, e_2^*, .., e_n^*)$ sa base duale. Soit u un endomorphisme de E et $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ la matrice de u par rapport à la base $(e_1, e_2, .., e_n)$.
Alors

$$\forall i, j \in \{1, 2, .., n\}, \ a_{ij} =< u(e_j), e_i^* > .$$

Preuve
D'apres la proposition précédente, on a :
$\forall j \in \{1, 2, .., n\}, u(e_j) = \sum_{i=1}^{n} < u(e_j), e_i^* > e_i$. Donc , si $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ la matrice de u par rapport à la base $(e_1, .., e_n)$, alors

$$\forall i, j \in \{1, 2, .., n\}, \ a_{ij} =< u(e_j), e_i^* > .$$

Théorème* 3.1.1. *(Isomorphisme sesquilinéaire entre* E *et son dual* E^**)
Soit E un espace hermitien de produit scalaire hermitien noté $< ., . >$.
1) L'application :

$$\begin{array}{cccc} i: & E & \to & E^* \\ & x & \mapsto & < ., x > \end{array}$$ *est un isomorphisme sesquilinéaire entre E et son dual E^*.*

Preuve
Soit $x \in E$
Si $i(x) = 0 \ \ (x \in \ker i)$
on a : $< ., x >= 0 \Rightarrow \forall y \in E, \ < y, x >= 0$
$\Rightarrow < x, x >= 0$
$\Rightarrow x = 0.$
Donc i est injective, et Comme E et E^* ont même dimension.
Alors i est un isomorphisme sesquilinéaire.

3.2 Endomorphisme adjoint

***Proposition* 3.2.1.**
Soit E un espace hermitien. Alors pour tout endomorphisme u de E,
il existe un unique endomorphisme v de E, tel que :

$$\forall x, y \in E, \ < u(x), y >=< x, v(y) >$$

Dans ce cas, v s'appelle l'adjoint de u noté u^*.

Preuve
Pour chaque $y \in E$, on considère la forme linéaire ϕ sur E définie par :
$\forall x \in E, \phi_y(x) =< y, u(x) >$.

Puisque tout produit hermitien est non dégénéré et puisque E est de dimension finie, alors l'application :$\psi : E \to E^*$

$$z \mapsto \psi(z) \text{ , Où } \forall x \in E, \psi(z)(x) =< z, x >.$$

est un isomorphisme d'espace vectoriels.
On a : $\phi_y \in E^*$,donc il existe un unique $z_y \in E$,tel que : $\psi(z_y) = \phi_y$, donc si pour chaque $y \in E$, $u^*(y) = z_y$, considèrons l'application $u^* : E \to E$. Alors u^* est linéaire.
en effet, soient $y_1, y_2 \in E$, et $\lambda \in \mathbb{C}$, alors on a :

$$\begin{aligned} \forall x \in E, < x, u^*(y_1 + \lambda y_2) > &=< u(x), y_1 + \lambda y_2 > \\ &=< x, u^*(y_1) > +\lambda < x, u^*(y_2) > \\ &=< x, u^*(y_1) > + < x, \lambda u^*(y_2) > \end{aligned}$$

Donc $\forall x \in E, < x, u^*(y_1 + \lambda y_2) - \lambda u^*(y_2) - u^*(y_2) >= 0$,
par suite $u^*(y_1 + \lambda y_2) - u^*(y_1) - \lambda u^*(y_2) = 0$.
Donc u^* est linéaire.
Et on a :

$$\begin{aligned} \forall x, y \in E, \ \phi_y(x) = \psi(z_y)(x) &\Leftrightarrow \forall x, y \in E, < y, u(x) >=< z_y, x > \\ &\Leftrightarrow \forall x, y \in E, < y, u(x) >=< u^*(y), x > \\ &\Leftrightarrow \forall x, y \in E, \overline{< u(x), y >} = \overline{< x, u^*(y) >} \\ &\Leftrightarrow \forall x, y \in E, < u(x), y >=< x, u^*(y) >. \end{aligned}$$

montrons L'unicité de u^* :
Soit w un autre endomorphisme de E, tel que : $\forall x, y \in E, \ < u(x), y >=< x, w(y) >$
alors, on aura :
$\forall x, y \in E, \ < x, u^*(y) >=< x, w(y) >$
Ainsi on déduit que $\forall y \in E, \ w(y) = u^*(y)$.

Proposition 3.2.2.
Soit E un espace hermitien. Alors on a ;
i)$\forall u \in L(E)$, $u^{**} = u$.
ii)$\forall u, v \in L(E)$, $(u + v)^* = u^* + v^*$.
iii) $\forall u \in L(E), \forall \lambda \in \mathbb{C}$, $(\lambda u)^* = \overline{\lambda} u^*$.
iv)$\forall u, v \in L(E)$, $(v \circ u)^* = u^* \circ v^*$.
v) Si β est une base orthonormale de E et si $A = Mat(u, \beta)$, alors on a :

$$M(u^*, \beta) = A^*.$$

Preuve
i) Soit $w = u^{**} = (u^*)^*$, alors w est l'unique endomorphisme de E vérifiant
$\forall x, y \in E, < u^*(x), y >=< x, w(y) >$, or par définition de l'adjoint, on a :
$\forall x, y \in E, < u^*(x), y >=< x, u(y) >$.
Donc $u^{**} = u$.
ii) $\forall x, y \in E, , < (u + v)^*(x), y >=< x, (u + v)(y) >=< x, u(y) > + < x, v(y) >$
$=< u^*(x), y > + < v^*(x), y >=< (u^* + v^*)(x), y >$.
Donc $(u + v)^* = u^* + v^*$.
iii) Se démontre de la même manière que ii).
iv)$\forall x, y \in E$, on a $< (v \circ u)^*(x), y >=< x, (v \circ u)(y) >=< x, v(u(x)) >=< v^*(x), u(y) >$
$=< u^*(v^*(x)), y >=< (u^* \circ v^*)(x), y >$.
Donc $(v \circ u)^* = u^* \circ v^*$.
v) Posons $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i, j \leqslant n}$,et $B = M(u^*, \beta) = (b_{ij})_{1 \leqslant i, j \leqslant n}$, alors on sait que
$\forall i, j \in \{1, .., n\}$, $a_{ij} =< e_i, u(e_j) >$, et $b_{ij} =< e_i, u^*(e_j) >$

on aura $b_{ij} =< e_i, u^*(e_j) >=< u(e_i), e_j >= \overline{< e_j, u(e_i) >} = \overline{a_{ij}}$.
Donc, $B = \overline{A}^t = A^*$.

***Proposition* 3.2.3.**
Soient E un espace hermitien et u un endomorphisme de E, alors
i) $ker(u^*) = Im(u)^\perp$.
ii) $Im(u^*) = ker(u)^\perp$.
iii) Si F est un sous-espace de E stable par u, alors $F^\perp$ est stable par u^*.

Preuve
i) Soit $y \in E$, alors on a

$$\begin{aligned} y \in ker(u^*) &\Leftrightarrow u^*(y) = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall x \in E, < u^*(y), x >= 0 \\ &\Leftrightarrow \forall x \in E, < y, u(x) >= 0 \\ &\Leftrightarrow y \in Im(u)^\perp. \end{aligned}$$

Donc $ker(u^*) = Im(u)^\perp$.
ii) D'après i), on a $ker(u) = ker(u^*) = Im(u^*)^\perp$
Donc, on aura
$ker(u)^\perp = Im(u^*)$.
iii) Soit F un sous-espace vectoriel de$E$ stable par u. Vérifions que $F^\perp$ est stable par u^*, pour cela soient $y \in F^\perp$, et $x \in F$,
alors on a $< u^*(y), x >=< y, u(x) >= 0$ (car $u(x) \in F et\ y \in F^\perp$).
Donc $F^\perp$ est stable par u^*.

Exercice :
Soient E un espace hermitien et f un endomorphisme de E vérifiant :

$$\forall x \in E,\ < f(x), x >= 0.$$

a) Montrer que $\forall (x, y) \in E^2,\ < f(x), y >= - < f(y), x >$.
b) En calculant $< f(x + iy), x + iy >$ pour $(x, y) \in E^2$, démontrer que $f = 0$.

Réponce :

a) $\forall (x, y) \in E^2$, on a : $< f(x + y), x + y >= 0 \Leftrightarrow < f(x), x > + < f(x), y > + < f(y), x > + < f(y), y >= 0 \Leftrightarrow < f(x), y >= - < f(y), x >$.
b) Pour tout $(x, y) \in E^2$,on a :
$< f(x+iy), x+iy >= 0 \Leftrightarrow < f(x), x > +i < f(x), y > -i < f(y), x > + < f(iy), iy >= 0 \Leftrightarrow < f(x), y >=< f(y), x >$.
Ce qui prouve que pour tout $x \in E$,$f(x) \in E^\perp$, donc $f(x) = 0$ et par suite $f = 0$.

3.3 Endomorphisme unitaire

Dans ce paragraphe, n est un entier strictement positive. On suppose que $\mathbb{C}^n$ est muni de son produit scalaire canonique .

***Définition* 3.3.1.**
Soient E un espace hermitien et u un endomorphisme de E.
On dit que u est unitaire, si $u^*u = Id_E$.

Remarque :

1) Une matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$ est dite unitaire, si $A^*A = Id_n$.
2) Soit B une base orthormale de E et soit $A = Mat(u, B)$,
alors u est unitaire $\Leftrightarrow$ A est unitaire.
3)Tout endomorphisme unitaire est inversible et on a : $u^{-1} = u^*$.

***Proposition* 3.3.1.**
Soient E un espace hermitien et u un endomorphisme de E. Alors les propositions suivantes sont équivalentes :
i) u est unitaire,
ii) $\forall x \in E$, $||u(x)|| = ||x||$,
iii) $\forall x \in E$, $< u(x), u(y) >=< x, y >$.

Preuve

i) $\Rightarrow$ ii)
Supposons que u est unitaire, donc pour tout $x \in E$, $u^*(u(x)) = x$.
Soit $x \in E$, alors on a : $||u(x)||^2 =< u(x), u(x) >=< u^*(u(x)), x >=< x, x >= ||x||^2$.
ii) $\Rightarrow$ iii) Supposons que $\forall x \in E$, $||u(x)|| = ||x||$.
Soient $x, y \in E$, alors, d'après l'identité de polarisation, on a :

$$\begin{aligned}
< u(x), u(y) > &= \tfrac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} i^k ||u(x) + i^k u(y)||^2 \\
&= \tfrac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} i^k ||u(x) + u(i^k y)||^2 \\
&= \tfrac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} i^k ||u(x + i^k y)||^2 \\
&= \tfrac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} i^k ||x + i^k y||^2 =< x, y >.
\end{aligned}$$

iii)$\Rightarrow$ i) Supposons que :
$\forall x, y \in E$, $< u(x), u(y) >=< x, y >$.
Soient $x, y \in E$, alors on a :

$$\begin{aligned}
\forall x, y \in E, < u(x), u(y) >=< x, y > &\Rightarrow \forall x, y \in E, < u^*(u(x)), y >=< x, y > \\
&\Rightarrow \forall x, y \in E, < (u^*u)(x), y >=< x, y > \\
&\Rightarrow \forall x, y \in E < (u^*u)(x) - x, y >= 0.
\end{aligned}$$

Fixons $x \in E$, alors on aura
$\forall y \in E, < (u^*u)(x) - x, y >= 0$
Le produit hermitien est non dégénérée, donc on aura $x \in E$, $(u^*u)(x) - x = 0$.
Donc pour tout $x \in E$, on a $(u^*u)(x) = x$. D'où le résultat.

Remarque :
soit u un endomorphisme unitaire de E et $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de u, alors $|\lambda| = 1$.
En effet : $||u(x_0)|| = |\lambda|||x_0|| = |||x_0||$.
D'où $|\lambda| = 1$.

Exercice :
Soit u un endomorphisme unitaire de E, On désine par e l'endomorphisme identique.

1) Montrer que les valeurs propres de u sont des nombres de module 1 et que u est nversible.
2) Montrer que des veteurs propres de u assocée à des valeurs propres distinctes sont orthogononaux.

Réponce :

1) Sot x, y des vecteurs propres associés aux valeur propres λ,et γ.
   On a : $< x, y >=< ux, uy >=< \lambda x, \gamma y >= \overline{\lambda}\gamma < x, y >$.

Alors $(\overline{\lambda}\gamma - 1) < x, y >= 0$ **(1)**

En partculier,si $x = y$ et $\lambda = \gamma$:

$< x, x >= ||x||^2 \neq 0 \Rightarrow \overline{\lambda}\lambda - 1 = 0$.

Donc pour chaque λ valeur propre de u. λ est de module 1.

2) L'inverse d'un complexe λ de module 1 est le nombre conjugué $\overline{\lambda}$; si donc x et y sont des vecteurs associés à des valeurs propres λ et γ différentes, on reconnapît dans l'équation **(1)** que : $\overline{\lambda}\gamma = \frac{\gamma}{\lambda} \neq 1 \Rightarrow < x, y >= 0$.

Donc des vecteurs propres associés à des valeurs propres distictes sont orthogonaux.

3.4 Endomorphisme normal

***Définition* 3.4.1.**
Soit E un espace hermitien.
On dit qu'un endomorphisme u de E est normal, si $u^* \circ u = u \circ u^*$.

Remarque :

1) Une matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$ est dite normale, si $A^*A = AA^*$.
2) Soient E un espace hermitien,$B = (e_1, e_2, ..., e_n)$ une base orthonormale de E, u un endomorphisme de E et $A = Mat(u, B)$, alors
u est normal $\Leftrightarrow A$ est normale.
3) Si u est un endomorphisme normal, alors pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda Id_E - u$ est normal.

Exercice :

Soit $M \in M_n(\mathbb{C})$.

1) Montrer qu'il existe un unique couple de matrices hermitiennes (H, L) tel que $M = H + iL$.
2) Montrer que M est normale si et seulement si $HL = LH$.

Réponce :

1) Soit $M \in M_n(\mathbb{C})$.
   i) Montrons qu 'il existe $(H, L) \in (M_n(\mathbb{C}))^2 / M = H + iL$,
   donc : $M^* = H * -iL^*$ et $M = H + iL$ alors $M^* = H - iL^*$ et $M = H + iL$
   D'où $H = \frac{M+M^*}{2}$ et $L = i\frac{M^*-M}{2}$.
   ii)Montrons que (H, L) est unique :
   Supposons qu'il existe $H_1, L_1 \in M_n(\mathbb{C})$ tels que :
   $M = H_1 + iL_1$ et $M^* = H_1 - iL$.
   On aura : $H_1 = H = \frac{M+M^*}{2}$, et $M_1 = M = i\frac{M^*-M}{2}$.

2) On suppose que M est normal
   Montons que $HL = LH$.
   On a : $MM^2 = M^*M \Leftrightarrow (H + iL)(H - iL) = (H - iL^*)$
   $\Leftrightarrow (H + iL)(H^* - iL^*) = (H^* - iL^*)(H + iL)$
   $\Leftrightarrow (H + iL)(H - iL) = (H - iL)(H + iL)$
   $\Leftrightarrow H^2 - iHL + iLH + L^2 = H^2 + iHL - LH + l^2$
   $\Leftrightarrow LH = HL$.

***Proposition* 3.4.1.**
Soit u un endomorphisme normal de E, alors
i)$\forall x \in E$, $||u(x)|| = ||u^*(x)||$.
ii) $ker(u) = ker(u^*)$.
iii) $\forall \lambda \in \mathbb{C}$, $ker(\lambda Id_E - u) = ker(\lambda Id_E - u^*)$.
iv) Si F *un sous-espace stable par* u*, alors* $F^{\perp}$ *est aussi stable par* u*.*

Preuve
i) Soit $x \in E$, alors on a
$||u(x)|| =< u(x), u(x) >=< u^*(u(x)), x >=< u(u^*(x)), x >=< u^*(x), u^*(x) >$
$= ||u^*(x)||^2$.
ii) Soit $x \in E$, alors on a
$x \in ker(u) \Leftrightarrow u(x) = 0 \Leftrightarrow ||u(x)|| = 0 \Leftrightarrow ||u^*(x)|| = 0 \Leftrightarrow u^*(x) = 0$
$\Leftrightarrow x \in ker(u^*)$.
iii) Soit $\lambda \in \mathbb{C}$, puisque $u^*(u) = u(u^*)$, alors on voit facilement, par un simple calcul, qu'on a aussi $(\lambda Id_E - u)^*(\lambda Id_E - u) = (\lambda Id_E - u)(\lambda Id_E - u)^*$, donc pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, l'endomorphisme $(\lambda Id_E - u)$est normal.
Donc d'après ii), on a le résultat.

***Théorème* 3.4.1.**
Soit Eun espace hermitien. Alors pour tout endomorphisme normal de E, il existe une base orthonormale de E formée de vecteurs propres de u.

Exercice :
Soient $n \geq 3$, $G = \{1, w^2, .., w^{n-1}\}$,$w = e^{\frac{2i\pi}{n}}$, et $E = \mathcal{F}((\mathbb{G}, \mathbb{C}))$un $\mathbb{C}$ e.v de dimension fini n .
Pour $(f, g) \in E \times E$,on pose :

$$< f, g >= \sum_{k=0}^{n-1} \overline{f(w^k)} g(w^k).$$

1) Montrer que $< ., . >$ est un produit hermitien su E.
2) Pour $k \in \{0, .., n-1\}$, soit $f_k \in E$ définie par : $\forall z \in G$,$f_k(z) = \frac{z^k}{\sqrt{n}}$.
On considère l'application U de E dans E, définie par :
$\forall f \in E,\ \forall z \in G, U(f)(x) = f(wx)$.
a) Montrer que U est un endomorphisme unitaire de E.
b) Montrer que, pour tout $k \in \{0, .., n-1\}$, f_k est un vecteur propre de U.
c) En deduire que $(f_0, .., f_{n-1})$ est une base orthonormale de E.
3) Pour $\lambda \in [0, 1]$, $A_k = Id_E - \lambda U - (1-\lambda)U^*$.
Montrer que, pour tout $\lambda \in [0, 1]$, A_k est un endomorphisme normale de E .
Réponce :
1)
i) Soient $g, f_1, f_2 \in E$ et $\alpha \in \mathbb{C}$.
on a : $< \alpha f_1 + f_2, g >= \sum_{k=0}^{n-1} \overline{(\alpha f_1 + f_2)(w^k)} g(w^k)$
$= \overline{\alpha} < f_1, g > + < f_2, g >$.
Alors $< ., >$ est semi linéaire à droite.
$< f, \alpha g_1 + g_2 >= \sum_{k=0}^{n-1} \overline{f(w^k)}((\alpha g_1 + g_2)(w^k))$
$= \alpha < f, g_1 > + < f, g_2 >$.
alors $< ., . >$ est linéaire à gauche.

Donc $< .,. >$ est sesquilineaire sur E.

ii) $Soient f, g \in E.$

$\overline{< g, f >} = \overline{\sum_{k=0}^{n-1} \overline{g(w^k)} f(w^k)} = \sum_{k=0}^{n-1} \overline{f(w^k)}(w^k) =< f, g >$.

D'où $< .,. >$ est hermitien.

3) Soit $f \in E$.

$< f, f >= \sum_{k=0}^{n-1} |f(w^k)|^2 \geq 0$.

Et de plus on a :

$< f, f >= 0 \Leftrightarrow |f(w^k)|^2 = 0 \ \forall k = 0, .., n-1$.

$\Leftrightarrow f(w^k) = 0 \ \forall k = 0, .., n-1$.

$\Leftrightarrow f(x) = 0 \ \forall x \in G$.

$\Leftrightarrow f = 0$. Alors $< .,. >$ est défini positif.

Finalement $< .,. >$ défini un produit scalaire sur E.

2)

a) Soient $f, g \in E$.

$$\begin{aligned}< u(f), u(g) > &= \sum_{k=0}^{n-1} \overline{u(f)(w^k)} u(g)(w^k) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \overline{f(w^{k+1})} g(w^{k+1}) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \overline{f(w^k)} g(w^k) \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \overline{f(w^k)} g(w^k) + \overline{f(w^n)} g(w^n) \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \overline{f(w^k)} g(w^k) =< f, g >.\end{aligned}$$

alors u est un endomorphisme unitaire

b) Soient $k \in \{0, .., n\}$.

On a : $u(f_k)(z) = f_k(zw) = \frac{z^k w^k}{\sqrt{n}} = w^k f_k(z), \ \forall z \in G$.

Donc $u(f_k) = w^k f_k$.

Alors f_k est un vecteur propre de u ($f_k \neq 0$) et w^k est la valeur propre associée.

c) Les valeurs propres sont en nombre n et elle sont deux à deux distinctes, donc $(f_0, .., f_{n-1})$ est une base de E.

Soient $k \neq l$ deux éléments de $\{0, .., n-1\}$.

On a ; $< u(f_k), u(f_l) >=< f_k, f_l >$

donc $< w^k f_k, w^l f_l >=< f_k, f_l >$

c'est-à-dire $\frac{w^l}{w^k} =< f_k, f_l >$ (car $\overline{w^k} = w^{-k}$).

Alors $(\frac{w^l}{w^k} - 1) < f_k, f_l >= 0$.

Or $k \neq l$,donc $w^k \neq w^l \Rightarrow< f_k, f_l >= 0$.

Si $k = l$: $< f_k, f_k >= \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} w{-}jkw^{jk} = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} |w|^{2jk} = 1$ car $|w| = 1$.

D'où $(f_1, .., f_{n-1})$ est une base othogonale de E.

3) on a Pour $\lambda \in [0, 1]$,

$A_k = Id_E - \lambda U - (1-\lambda)U^*$. alors, $A_\lambda^* = Id_E - \lambda u^* - (1-\lambda)u$, $car \lambda \in \mathbb{R}$.

On développe $A_\lambda A_\lambda^*$ et on aura :

$$A_\lambda A_\lambda^* = (1 + \lambda^2 + (1-\lambda)^2) Id_E - u * -u + \lambda(1-\lambda)(u^2 + (u^*)^2.$$

On trouve de la meme facon que :

$$A_\lambda^* A_\lambda = (1 + \lambda^2 + (1-\lambda)^2) Id_E - u * -u + \lambda(1-\lambda)(u^2 + (u^*)^2.$$

Donc A_λ est normale.

3.5 Endomorphisme hermitien

***Définition* 3.5.1.**
Soient E un espace hermitien et u un endomorphisme de E.
On dit que u est hermitien (ou auto-adjoint), s'il vérifié les conditions équivalents :
i) $u^* = u$.
ii) $\forall x, y \in E$, $< u(x), y >=< x, u(y) >$.

Remarque :
Soit β une base orthonormale de E, et soit $A = Mat(u, \beta)$,alors
u est hermitien $\Leftrightarrow$ A est hermitienne $(A^* = A)$.
Tout endomorphisme hermitien est normal.

***Proposition* 3.5.1.**
Soient E un espace hermitien et u un endomorphisme hermitien de E. Alors toutes les valeurs propres de u sont réelles.

Preuve
Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de u,
alors il existe $x_0 \in E$, tel que $u(x_0) = \lambda x_0$. Donc, on aura

$$\begin{aligned} < u(x_0), x_0 >=< x_0, u^*(x_0) > &\Rightarrow < u(x_0), x_0 >=< x_0, u(x_0) > \qquad \text{(car } u^* = u) \\ &\Rightarrow < \lambda x_0, x_0 >=< x_0, \lambda x_0 > \\ &\Rightarrow \overline{\lambda}||x_0||^2 = \lambda||x_0||^2 \\ &\Rightarrow \overline{\lambda}| = \lambda \text{ (car } ||x_0||^2 \neq 0) \\ &\Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Exercice :
Soit u un endomophisme hermitien de E.
1)Montrer que si e est l'endomorphisme identique et α et β des nombres réels, on a :

$$||(u - (\alpha + i\beta)e)x||^2 = ||(u - \alpha e)x||^2 + \beta^2||x||^2.$$

2)Déduire que les valeures propres de u sont réelles.

Réponce :
1)
Soient u un endomorphisme hermitien,e l'endomorphisme identique et α,$\beta \in \mathbb{R}$.
On a :
$(u - (\alpha + i\beta)e)x = (u - \alpha e)x - i\beta x = u_1 x - i\beta x$. avec $u_1 = u - \alpha e$.
L'ndomorphisme u_1 est hermitien .
En effet : Soit $y \in E$

$$\begin{aligned} < ux - \alpha x, y > &=< ux, y > - < \alpha x, y > \\ &=< x, uy > - < x, \alpha y > \\ &=< x, uy > - < x, \alpha y > \\ &=< x, uy - \alpha y > . \end{aligned}$$

Par suite :

$$\begin{aligned} ||u_1 x - \alpha x, y||^2 &=< u_1 x - i\beta x, u_1 x - i\beta x > \\ &=< u_1 x, u_1 x > -i\beta < u_1 x, x > +i\beta < x, u_1 x > +\beta^2 < x, x > \\ &= ||u_1 x||^2 + \beta^2||x||^2 \\ &= ||(u - \alpha e)x||^2 + \beta^2||x||^2. \end{aligned}$$

2)
Si $\alpha + i\beta$ est une valeure propre de u,et $x \neq 0$ un vecteur propre associé on aura :
$||(u - (\alpha + i\beta)e)x||^2 = ||ux - (\alpha + i\beta)x||^2 = ||ux - ux||^2 = 0$
donc $||(u - \alpha e)x||^2 + \beta^2||x||^2 = 0$.
Le produit $\beta^2||x||^2$ est nul et donc β^2 est nul car $x \neq 0$ alors $\beta = 0$, et comme $\alpha \in \mathbb{R}$, D'où une valeur propre de u est nombre réel.

Exercice :
On désigne par u et v deux endomorphismes de E.
Montrer que :

1) Si l'endomorphisme uv est hermitien $\Rightarrow$ Les endomorphisme composés uv et vu sont identique.
2) S'il existe une base orthonormale de E dont les éléments sont vecteurs propres de u et vecteur propre de v $\Rightarrow$ les endomorphismes composés uv et vu sont identique.

Réponce :

1) Nous noterons $< x, y >$ le produit hermitien dans E.
   On a : $< uvx, y > = < vx, u^*y > = < x, v^*u^*y >$
   alors $(uv)^* = v^*u^*$, et si u,v sont hermitiens :
   $(uv)^* = vu$. Par suite uv est hermitien si et seulement si :
   $(uv)^* = uv \Leftrightarrow vu = uv$.
2) Si les vecteurs de base $(e_1, .., e_n)$ sont vecteurs propres de u et v :
   $ue_i = \lambda_i e_i$ et $ve_i = \gamma_i e_i$ alors :
   $uve_i = \lambda_i \gamma_i e_i = vue_i$.
   Les endomorphisme uv et vu transforment de la même manière les vecteurs d'une base e_i ; ils sont donc identiques.

Conclusion

Dans ce travail on a défini les notions les plus importantes dans l'espace hermitien comme :
- Les formes hermitiennes et les formes quadratiques
- La notion de produit scalaire hermitien
- la notion des bases orthogonales et des bases orthonormales
- Projection orthogonale.
Enfin j'ai terminé mon travail par introduire la notion d'isomorphisme entre un espace hermitien et son dual, puis les endomorphismes d'un espace hermitien.

Bibliographie

[1] Anne Moreau : ►*Espaces euclidiens et hermitiens*,Université de Poittiers, L2PR, 2012-2013.

[2] Cloude des champs,André warusfel : ►*Mathématique tout-en-un* 2^e *année PC-PSI.*

[3] G.Lefort : ►*exercice d'algèbre,analyse et probabilités,Tom 2.*

[4] Georges Skandalis : ►*Topologie et analyse* 3^e *année.*

[5] Mohamed Houimdi : ►*Algèbre bilinéaire* , Univéersité Cadi Ayyad Faculté es sciences-Semlalia, Département de Mathématique.

[6] Xavier Gourdon : ►*Les maths en tête mathématique pour M' Algébre* , Ellipses-Marketing, (1994).

[7] https://fr.wikipedia.org/wiki/.

[8] https:mp.cpgedupuydelome.fr/cours.php?id=11284&idPartie=0#id53223.