

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

**Master Mathématique et Applications aux Calculs
Scientifiques (MACS)**

MEMOIRE DE FIN D'ETUDES

**Pour l'obtention du Diplôme de Master Sciences et Techniques
(MST)**

**QUELQUES METHODES ET RESULTATS EN THEORIE
DE LA CONTROLABILITE DES SYSTEMES LINEAIRES
EN DIMENSION FINIE.**

Réalisé par: Abdellah Ouakka

Encadré par: Pr. Rachid El Ayadi

Soutenu le 18 juin 2018 devant le jury composé de:

- | | | |
|------------------------------|------------------------------------|-------------|
| - Pr. Rachid El Ayadi | Faculté des Sciences et Techniques | Encadrant |
| - Pr. Ahmed El Hilali Alaoui | Faculté des Sciences et Techniques | Examinateur |
| - Pr. Mohamed El Khomssi | Faculté des Sciences et Techniques | Examinateur |
| - Pr. Abdelmajid Hilali | Faculté des Sciences et Techniques | Examinateur |
| - Pr. Anisse Ouadghiri | Faculté des Sciences et Techniques | Examinateur |

Année Universitaire 2017 / 2018



UNIVERSITÉ SIDI MOHAMED BEN ABDELLAH
FACULTÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE FES
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

MÉMOIRE DE FIN D'ÉTUDES

Pour l'obtention du diplôme de
MASTER MATHÉMATIQUES ET APPLICATIONS AUX CALCULS SCIENTIFIQUES

Présenté par
Abdellah OUAKKA
sous la direction du Pr. **RACHID EL AYADI**

Thème :

**QUELQUES METHODES ET RESULTATS EN THEORIE DE
LA CONTROLABILITE EN DIMENSION FINIE.**

soutenu le .. février 2018

Devant le Jury :

| | | |
|-----------------|--|-----------|
| xxx xxx | Faculté des Sciences et Techniques Fès | Président |
| xxx xxx | Faculté des Sciences et Techniques Fès | Examineur |
| RACHID EL AYADI | Faculté des Sciences et Techniques Fès | Encadrant |
| xxx xxx | Faculté des Sciences et Techniques Fès | Examineur |

Remerciements

Je remercie avant tout le BON DIEU qui ma donné la force, le courage et la santé pour pouvoir mener à terme ce travail.

Je tiens à exprimer mes plus vifs remerciements et présenter mon plus profond respect à mon encadrant, Professeur **Rachid El Ayadi**, qui, grâce à ses orientations précieuses, ses encouragements valorisants, sa direction compétente de ce mémoire, son soutien dans les moments d'incertitude et sa disponibilité inconditionnelle ; j'ai pu réaliser ce travail et s'initier à la recherche.

Je tiens également à exprimer toute ma gratitude et tous mes sentiments de reconnaissance aux professeurs **Ahmed El Hilali Alaoui**, **Mohamed El Khomssi**, **Abdelmajid Hilali** et **Anisse Ouadghiri** pour l'honneur qu'ils me font d'accepter d'être membres de jury de ce mémoire.

J'adresse mes sincères remerciements et ma grande reconnaissance à ma grande famille, à mes amis et à tous mes professeurs pour leurs soutiens moral et Amical et leurs encouragements valorisants durant ces années d'étude.

Table des matières

| | |
|---|-----------|
| Introduction générale | 6 |
| 1 Généralités | 9 |
| 1.1 Rappels d'algèbre linéaire | 9 |
| 1.1.1 Exponentielle de matrice | 9 |
| 1.1.2 Réduction des endomorphismes | 10 |
| 1.2 Rappels d'analyse convexe | 14 |
| 1.2.1 Ensembles convexes | 14 |
| 1.2.2 Hyperplan d'appui | 15 |
| 1.3 Théorème de Cauchy-Lipschitz | 15 |
| 1.3.1 Un énoncé général | 15 |
| 1.3.2 Systèmes différentiels linéaires | 17 |
| 1.4 Rappels d'analyse fonctionnelle | 18 |
| 2 Contrôlabilité | 20 |
| 2.1 Introduction | 20 |
| 2.2 Notions de contrôlabilité | 21 |
| 2.3 Topologie des ensembles accessibles et principe Bang-Bang | 21 |
| 2.4 Contrôlabilité des systèmes stationnaire | 24 |
| 2.4.1 Cas sans contraintes sur le contrôle | 24 |
| 2.4.1.1 Test de Kalman | 25 |
| 2.4.1.2 Test de Hautus | 32 |
| 2.4.1.3 Contrôlabilité et inégalité d'observabilité | 34 |
| 2.4.2 Cas avec contraintes sur le contrôle | 37 |
| 2.4.2.1 Caractérisation de la nulle contrôlabilité local | 38 |
| 2.4.2.2 Caractérisation de la nulle contrôlabilité global | 45 |
| 2.5 Contrôlabilité des systèmes dynamiques | 46 |
| 2.5.1 Test sur la Grammienne de contrôlabilité | 46 |
| 2.5.2 Test CHENG | 48 |
| 2.5.3 L'approche "HUM" | 51 |
| 2.6 Conclusion | 54 |

| | | |
|----------|--|------------|
| 3 | Contrôle optimal | 55 |
| 3.1 | Introduction | 55 |
| 3.2 | Problème linéaire quadratique | 55 |
| 3.3 | Contrôle en temps minimal | 58 |
| 3.3.1 | Existence de contrôle en temps minimal | 58 |
| 3.3.2 | Unicité du contrôle en temps minimal | 60 |
| 3.3.3 | Condition nécessaire d'optimalité : Principe du maximum de Pontryagin | 64 |
| 3.3.4 | Forme du contrôle en temps minimal | 66 |
| 3.3.5 | Exemple d'application : Problème de l'oscillateur harmonique | 68 |
| 3.4 | Conclusion | 73 |
| 4 | Méthodes numériques en contrôle optimal | 74 |
| 4.1 | Introduction | 74 |
| 4.2 | La méthode de la discrétisation totale | 75 |
| 4.3 | La méthode de tir simple | 75 |
| 4.4 | Mise en oeuvre des méthodes numériques | 76 |
| 4.5 | Simulation des Méthodes | 77 |
| 4.6 | Résolution numérique du problème d'oscillateur harmonique | 80 |
| 4.7 | Conclusion | 83 |
| 5 | Stabilité et stabilisation | 84 |
| 5.1 | Introduction | 84 |
| 5.2 | Stabilité des systèmes linéaires | 85 |
| 5.2.1 | Stabilité des systèmes linéaires dynamiques | 85 |
| 5.2.2 | Stabilité des systèmes linéaires stationnaires | 88 |
| 5.3 | Stabilisation des systèmes stationnaire par feedback linéaire | 89 |
| 5.3.1 | Théorème de placement de pôles | 89 |
| 5.3.2 | Grammienne de contrôlabilité et Stabilisation | 91 |
| 5.3.3 | Stabilisation exponentielle par un feedback | 94 |
| 5.4 | Stabilisation des systèmes dynamique par feedback linéaire | 96 |
| 5.4.1 | Fonction valeur de Bellman et équation de Riccati | 97 |
| 5.4.2 | Résolution numérique de l'équation de Riccati par la méthode d'intégration directe | 98 |
| 5.4.3 | Grammienne de contrôlabilité, contrôle optimal et Stabilisation | 100 |
| 5.5 | Conclusion | 104 |
| | Conclusion et perspectives | 104 |
| | Annexe | 105 |
| | Bibliographie | 109 |

Notations

\forall : pour tout.

\exists : il existe.

| ou t.q. : tel que.

$\text{Conv}(\Omega)$: enveloppe convexe de Ω .

$\overline{\Omega}$: adhérence de Ω .

$\overset{\circ}{\Omega}$: intérieur de Ω .

$\partial\Omega$: frontière de Ω .

max : maximum.

min : minimum.

sup : borne supérieure.

inf : borne inférieure.

lim sup : limite supérieure.

lim inf : limite inférieure.

\mathbb{N} : ensemble des entiers naturels.

\mathbb{R} : ensemble des nombres réels.

\mathbb{R}_+ : ensemble des nombres réels positifs ou nuls.

\mathbb{C} : ensemble des nombres complexes.

E^\perp : l'orthogonal de E .

$\Re(z)$: partie réelle du nombre complexe z .

$\Im(z)$: partie imaginaire du nombre complexe z .

$||$: module ou valeur absolue.

$\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: ensemble des matrices à n lignes et n colonnes, à coefficients dans \mathbb{R} .

$\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$: ensemble des matrices à n lignes et p colonnes, à coefficients dans \mathbb{R} .

$\text{Im}(L)$: image de l'application linéaire L .

$\ker(L)$: noyau de l'application linéaire L .

$\det(A)$: déterminant de la matrice A .

$\text{rg}(A)$ ou $\text{rang}(A)$: le rang de la matrice A .

$\chi_A(X)$ polynôme caractéristique de la matrice A .

$\pi_A(X)$: polynôme minimal de la matrice A .

$\exp(A)$ ou e^A : exponentielle de la matrice A .

A^\top : transposée de la matrice A .

$\sigma(A)$: le spectre de la matrice A .

x^\top : transposé du vecteur x .

$C^p(\Omega, \mathbb{R})$: ensemble des applications de Ω dans \mathbb{R} de classe C^p .

$L^1(\Omega)$: ensemble des applications mesurables et intégrables de Ω dans \mathbb{R} .

$L^p(\Omega, \mathbb{R})$: ensemble des applications mesurables de Ω dans \mathbb{R} , de puissance p intégrable. $L^p_{loc}(\Omega, \mathbb{R})$: ensemble des applications mesurables de Ω dans \mathbb{R} , dont la puissance p est intégrable sur tout compact de Ω .

$L^\infty(\Omega, \mathbb{R})$: ensemble des applications mesurables bornées de Ω dans \mathbb{R} .

$H^1(\Omega, \mathbb{R})$: ensemble des applications mesurables f de Ω dans \mathbb{R} , telles que $f, f' \in L^2(\Omega, \mathbb{R})$.

\rightharpoonup : flèche de convergence faible.

$Acc(x_0, T)$: ensemble accessible en temps T depuis le point x_0 .

$Acc_\Omega(x_0, T)$: ensemble accessible en temps T depuis le point x_0 , pour des contrôles à valeurs dans Ω .

$\langle x, y \rangle$: produit scalaire de x et y dans \mathbb{R}^n .

$\|x\|$: la norme euclidien de x .

∇f : le gradient de la fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)^\top$

$L^2(I, \mathbb{R}^n)$: ensemble des applications u tel que $\int_I \|u(s)\|_{\mathbb{R}^n}^2 ds < \infty$.

$L^\infty(I, \mathbb{R}^n)$: ensemble des applications essentiellement bornées sur I dans \mathbb{R}^n .

$L^\infty_{loc}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n)$: ensemble des applications localement essentiellement bornées sur \mathbb{R}_+ dans \mathbb{R}^n .

$L^\infty(I, \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R}))$: ensemble des applications essentiellement bornées sur I dans $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$.

$L^\infty_{loc}(\mathbb{R}_+, \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R}))$: ensemble des applications localement essentiellement bornées sur \mathbb{R}_+ dans $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$.

Introduction générale

La théorie du contrôle étudie les propriétés des **systèmes contrôlés**, c'est à dire, des systèmes dépendant d'une variable t qui représente le plus souvent le temps, sur lesquels on peut agir au moyen d'un **contrôle**. Parmi les notions principales de la théorie du contrôle qui seront étudiées tout au long de ce mémoire, la notion de la **contrôlabilité**, le **contrôle optimal**, le **contrôle en temps optimal** et la **stabilisation**.

La notion de la contrôlabilité est d'une grande importance, c'est une propriété de base dans l'analyse des systèmes dynamiques, il s'agit d'imposer à un système un comportement souhaité, par exemple, dans notre cas amener un système d'un certain état initial à un certain état final (désiré) en respectant éventuellement certains critères, et ceci en un temps fini T . Dans le cas $T = +\infty$, la contrôlabilité des états d'équilibre nous conduit à parler de la notion de stabilisabilité. Dans un problème de contrôle optimal on souhaite atteindre l'objectif ci-dessus en minimisant (ou maximisant) une fonction objective sous des critères donnés. Dans un problème de contrôle en temps minimal, on cherche le temps minimal pour qu'un contrôle admissible amène un système dynamique d'un point initial arbitraire au point final prescrit. Dans le problème de stabilisation on cherche à stabiliser le système, il s'agit de remplacer le contrôle dans le système contrôlé par une fonction de l'état, c'est-à-dire un feedback (ou retour d'état), de manière que le système bouclé par ce feedback soit stable.

Le but dans ce mémoire est d'étudier les notions de la théorie de contrôle citées ci-dessus, ainsi que la relation qui existe entre eux dans le cas des systèmes linéaires en dimension finie, suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) & t \in \mathbb{R}_+ \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (1)$$

où $A(\cdot) : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est un opérateur linéaire qui est la dynamique du système. $B(\cdot) : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ est aussi un opérateur linéaire, qui excite le système pour modifier l'état.

\mathbb{R}^n : Est l'espace d'état du système.

\mathcal{U} : Est l'espace de contrôle du système.

$x(\cdot) \in \mathbb{R}^n$: L'état du système.

$u(\cdot) \in \mathcal{U}$: Est le contrôle du système.

Ce mémoire est constitué de cinq chapitres et d'une conclusion :

Le premier chapitre est consacré à la présentation de quelques rappels d'algèbre linéaire, d'analyse convexe, d'analyse fonctionnelle et quelques rappels sur les systèmes dynamiques. Nous y énonçons le problème de Cauchy-Lipchitz dans sa forme générale, et nous l'appliquons ensuite au système de contrôle linéaire en dimension finie (1).

Dans le deuxième chapitre, nous présentons la notions de contrôlabilité des systèmes de contrôles dynamique, stationnaire ; avec contrainte et sans contraintes sur le contrôle.

Dans le troisième chapitre, nous présentons des résultats concernant le problème de contrôle optimal ainsi que ceux du problème de contrôle en temps minimal.

Le quatrième chapitre est consacré à la présentation de deux méthodes numériques pour la résolution du problème de contrôle en temps minimal, une méthode directe et l'autre indirecte. Nous utilisons le logiciel matlab pour simuler la solution de quelques exemples simples.

Le dernier chapitre est consacré au problème de stabilisation. Dans un premier temps, nous étudions la stabilité des systèmes différentiels linéaires. Puis la stabilisation dans le cas stationnaire en relation avec la contrôlabilité. Puis nous présentons des résultats de stabilisation du système (1), ainsi que la relation joignent la stabilisation avec la contrôlabilité et le problème du contrôle optimal. Finalement, nous terminons notre travail par une conclusion.

Généralités

Sommaire

| | |
|--|-----------|
| 1.1 Rappels d'algèbre linéaire | 9 |
| 1.1.1 Exponentielle de matrice | 9 |
| 1.1.2 Réduction des endomorphismes | 10 |
| 1.2 Rappels d'analyse convexe | 14 |
| 1.2.1 Ensembles convexes | 14 |
| 1.2.2 Hyperplan d'appui | 15 |
| 1.3 Théorème de Cauchy-Lipschitz | 15 |
| 1.3.1 Un énoncé général | 15 |
| 1.3.2 Systèmes différentiels linéaires | 17 |
| 1.4 Rappels d'analyse fonctionnelle | 18 |

Dans ce chapitre, nous allons présenter un rappel d'algèbre linéaire, contient quelques notions essentielles concernant exponentielle de matrice, et la réduction des endomorphismes. Puis un rappel d'analyse convexe, concernant l'existence d'hyperplan d'appui d'un ensemble convexe. Ainsi que un le théorème de Cauchy-Lipschitz et ses applications en théorie de contrôle et quelque résultat d'analyse fonctionnelle.

1.1 Rappels d'algèbre linéaire

1.1.1 Exponentielle de matrice

Soit $\|\cdot\|$ une norme multiplicative sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (i.e. $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$ pour toutes matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$). Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, la série de terme général $\frac{1}{n!}A^n$, $n \in \mathbb{N}$ est normalement convergente et donc convergente dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On a alors l'existence de l'exponentielle de matrice.

Définition 1.1 [29] Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on définit l'exponentielle de la matrice A par :

$$\exp(A) = e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \quad (1.1)$$

Proposition 1.1 [29] • Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a : $e^A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ et $(e^A)^{-1} = e^{-A}$.

- L'application exponentielle est de classe C^∞ sur le corps \mathbb{R} .
- L'application exponentielle en 0 est égale à l'identité sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- Pour toutes matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui commutent, (i.e. $AB = BA$) on a :

$$e^{A+B} = e^A e^B.$$

- Si $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$, alors $P e^A P^{-1} = e^{P A P^{-1}}$.
- Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, l'application $f(t) = e^{tA}$ est dérivable, et

$$f'(t) = A e^{tA} = e^{tA} A. \quad (1.2)$$

Définition 1.2 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- La matrice A est dite symétrique positive (s.p), si A est symétrique et si pour tout vecteur $x \in \mathbb{R}^n$, $x^\top A x \geq 0$.
- La matrice A est dite symétrique définie positive (s.d.p), si A est symétrique et si pour tout vecteur $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $x^\top A x > 0$.

1.1.2 Réduction des endomorphismes

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de dimension n^2 sur \mathbb{R} , donc les éléments I_n, A, \dots, A^{n^2} sont linéairement dépendants. Par conséquent il existe des polynômes P annulateurs de A i.e tels que $P(A) = 0$. L'anneau $(\mathbb{R}[X])$ étant principal, l'idéal des polynômes annulateurs de A admet un unique polynôme de plus petit degré, dont le coefficient dominant est égale à 1, annulant A , on l'appelle polynôme minimal de la matrice A , noté π_A . Par ailleurs, le polynôme caractéristique de A , noté χ_A , est défini par

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n) \quad (1.3)$$

Théorème 1.1 [29] (Théorème de Cayley-Hamilton) $\chi_A(A) = 0$. En particulier le polynôme minimal π_A divise le polynôme caractéristique χ_A . Notons que $\deg \chi_A = n$ et $\deg \pi_A \leq n$.

Le résultat suivant donne la forme canonique de Jordan d'une matrice réelle.

Proposition 1.2 [4] Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, il existe une matrice inversible $Q \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ tel que

$$J := Q A Q^{-1} \quad (1.4)$$

où J est une matrice diagonale par blocs, avec des blocs de la forme

$$\begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & & \\ & \lambda_i & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda_i & 1 \\ & & & & \lambda_i \end{pmatrix} \quad (1.5)$$

et d'autre de la forme

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \gamma_k \\ 1 & \beta_k \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & & & \\ & \begin{pmatrix} 0 & \gamma_k \\ 1 & \beta_k \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ & & & & \begin{pmatrix} 0 & \gamma_k \\ 1 & \beta_k \end{pmatrix} \end{pmatrix} \quad (1.6)$$

Les blocs (1.5) s'écrivent sous la forme,

$$B_i = \lambda_i I_i + F_i \quad (1.7)$$

Où B_i est une matrice carrée d'ordre m_i , m_i est la multiplicité de la valeur propre réelle λ_i , I_i est la matrice identité d'ordre m_i , et F_i est une matrice d'ordre m_i de la forme suivante :

$$F_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix} \quad (1.8)$$

Et les blocs (1.6) s'écrivent sous la forme,

$$C_j = \begin{pmatrix} D_{j_1} & & & \\ & D_{j_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & D_{j_l} \end{pmatrix} \quad (1.9)$$

nilpotente, d'où :

$$\begin{aligned}
 e^{tD}v &= e^{(\lambda I_n + N)v} = e^{\lambda t I_n} e^{tN}v \\
 &= \left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(\lambda t I_n)^i}{i!} \right) \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(tN)^j}{j!} v \right) \\
 &= \left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^i}{i!} I_n \right) \left(\sum_{j=0}^k \frac{t^j}{j!} N^j v \right) \\
 &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^i}{i!} \cdot \sum_{j=0}^k \frac{t^j}{j!} N^j v \\
 &= e^{\lambda t} \left(\sum_{j=0}^k \frac{t^j}{j!} N^j \right) v
 \end{aligned}$$

Posons $z = \frac{N^k v}{k!}$ et définissant, pour $t > 0$, $f(t) = \frac{1}{t^k} \left(\sum_{j=0}^{k-1} \frac{t^j}{j!} N^j \right) v$. Donc

$$e^{tD}v = t^k e^{\lambda t} (z + f(t)).$$

Il est clair que $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = 0$ et

$$Dz = \frac{DN^k v}{k!} = \frac{1}{k!} (\lambda I_n + N) N^k v = \lambda \frac{N^k v}{k!} + \frac{1}{k!} N^{k+1} v = \lambda z.$$

D'où le résultat. □

Passons maintenant à un rappel d'analyse convexe.

1.2 Rappels d'analyse convexe

1.2.1 Ensembles convexes

Nous commençons par la définition de la notion de convexité et convexité stricte.

Définition 1.3 [3] Un ensemble $C \subset \mathbb{R}^n$ est dit convexe si, $\forall x_1, x_2 \in C, \forall \theta \in [0, 1]$. On a : $\theta x_1 + (1 - \theta)x_2 \in C$.

Exemples 1.1 1) Les parties convexes de \mathbb{R} sont les intervalles.

2) Dans un espace vectoriel normé réel, toute boule (ouverte ou fermée) est convexe.

Définition 1.4 [3] On dit qu'un ensemble C est strictement convexe, si

$$\forall x, y \in C, x \neq y \Rightarrow tx + (1 - t)y \in \overset{\circ}{C} \quad \forall t \in]0, 1[.$$

Définition 1.5 [3] L'enveloppe convexe de $C \subset \mathbb{R}^n$, est la plus petite partie convexe contient C . Qu'on note $Conv(C)$.

Proposition 1.4 [3] *L'enveloppe convexe de C , $\text{Conv}(C)$ est l'ensemble des combinaisons convexes des points de C . C'est-à-dire :*

$$\text{Conv}(C) = \left\{ \sum_{i=1}^k \theta_i x_i \mid x_i \in C, \theta_i \geq 0 \forall i = 1, \dots, k, \sum_{i=1}^k \theta_i = 1 \right\} \quad (1.18)$$

Théorème 1.3 (Carathéodory) *Soit C une partie d'un espace vectoriel E de dimension n . Alors tout élément de $\text{conv}(C)$ peut s'écrire comme une combinaison convexe de $n + 1$ éléments de C .*

1.2.2 Hyperplan d'appui

Définition 1.6 [3] *Soit $C \subseteq \mathbb{R}^n$ et $x_0 \in \partial C$ (∂C est la frontière de C). On dit que $\mathcal{H} = \{x \mid a^\top x = a^\top x_0\}$ est un hyperplan d'appui de C en x_0 , si $a \neq 0$ et $a^\top x \leq a^\top x_0, \forall x \in C$.*

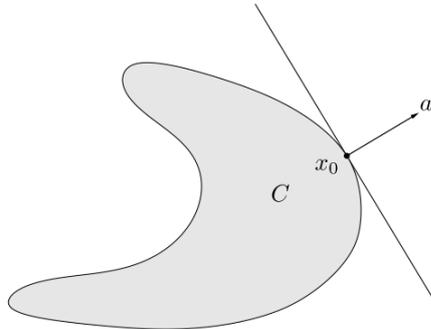


FIGURE 1.1 – $\{x/a^\top x = a^\top x_0\}$ est l'hyperplan d'appui de C en x_0 .

Le résultat suivant affirme l'existence d'un hyperplan d'appui en tout point de la frontière d'un ensemble convexe.

Théorème 1.4 [3, p.51] (*supporting hyperplane theorem*). *Pour tout ensemble convexe C et pour tout $x_0 \in \partial C$, il existe un hyperplan d'appui de C en x_0 .*

1.3 Théorème de Cauchy-Lipschitz

1.3.1 Un énoncé général

Soit I un intervalle de \mathbb{R} et \mathcal{V} un ouvert de \mathbb{R}^n . Considérons le problème de Cauchy

$$\begin{cases} x(t) = f(t, x(t)), & t \in I \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \quad (1.19)$$

où f est une application de $I \times \mathcal{V}$ dans \mathbb{R}^n , et $x_0 \in \mathcal{V}$.

Définition 1.7 [20] Soient $(I, x(\cdot))$ et $(\tilde{I}, \tilde{x}(\cdot))$ deux solutions du problème de Cauchy (1.19). On dira que $(\tilde{I}, \tilde{x}(\cdot))$ est un prolongement de $(I, x(\cdot))$ si $I \subset \tilde{I}$ et $\tilde{x}(\cdot)|_I = x(\cdot)$.

Définition 1.8 [20] Soient I_1 et I_2 , deux intervalles sur \mathbb{R} , tels que $I_1 \subset I_2$. On dit qu'une solution $(I_1, x(\cdot))$ est maximale dans I_2 si et seulement si x n'admet pas de prolongement $(\tilde{I}, \tilde{x}(\cdot))$ solution du problème de Cauchy (1.19) telle que $I_1 \subsetneq \tilde{I} \subsetneq I_2$.

Le théorème de Cauchy-Lipschitz usuel affirme l'existence et l'unicité d'une solution maximale pourvu que f soit continue, et localement lipschitzienne par rapport à x .

Théorème 1.5 [26, p.476, Theorem 54] (Théorème de Cauchy-Lipschitz). On suppose que la fonction

$$f : I \times \mathfrak{V} \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

vérifiée les deux hypothèses suivantes :

1. f est localement lipschitzienne par rapport à x au sens suivant :

$$\forall x \in \mathfrak{V} \exists r > 0, B(x, r) \subset \mathfrak{V}, \exists \alpha_x \in L^1_{loc}(I, \mathbb{R}_+) \\ \forall t \in I, \forall y, z \in B(x, r), \|f(t, y) - f(t, z)\| \leq \alpha_x(t) \|y - z\|$$

2. f est localement intégrable par rapport à t , i.e.

$$\forall x \in \mathfrak{V}, \exists \beta_x \in L^1_{loc}(I, \mathbb{R}_+), \forall t \in I, \|f(t, x)\| \leq \beta_x(t).$$

Alors pour toute donnée initiale $(t_0, x_0) \in I \times \mathfrak{V}$, il existe une unique solution maximale $(J, x(\cdot))$ du problème de Cauchy (1.19).

Théorème 1.6 [26, p.482, Proposition C.3.8] Sous les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz, on suppose de plus que $\mathfrak{V} = \mathbb{R}^n$ et que f est globalement lipschitzienne par rapport à x , i.e.

$$\exists \alpha \in L^1_{loc}(I, \mathbb{R}_+), \forall t \in I, \forall y, z \in \mathbb{R}^n, \|f(t, y) - f(t, z)\| \leq \alpha(t) \|y - z\|$$

Alors il existe une unique solution maximale $(I, x(\cdot))$ du problème de Cauchy (1.19).

Applications en théorie du contrôle

Considérons le système de contrôle linéaire

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), & t \in I \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

Les hypothèses du [théorème 1.5](#) sont vérifiées si les applications $A(\cdot)$, $B(\cdot)u(\cdot)$ sont localement intégrables sur l'intervalle I . Supposons donc $A(\cdot) \in L^1_{loc}(I, \mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ Par ailleurs, les hypothèses assurant l'intégrabilité locale de $B(\cdot)u(\cdot)$, ce qui est le cas par exemple

- Si $u(\cdot) \in L^p_{loc}(I, \mathbb{R}^m)$, et $B(\cdot) \in L^q_{loc}(I, \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R}))$, où $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, où $1 \leq p, q \leq +\infty$.
- Si les contrôles sont des fonctions mesurables à valeurs dans un compact $\Omega \subset \mathbb{R}^m$, et $B(\cdot) \in L^1_{loc}(I, \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R}))$.

1.3.2 Systèmes différentiels linéaires

Considérons le problème de Cauchy dans \mathbb{R}^n

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t), & t \in [T_0, T_1] \\ x(T_0) = x_0 \end{cases} \quad (1.20)$$

où les applications $t \mapsto A(t) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et $t \mapsto B(t) \in \mathbb{R}^n$ sont localement intégrables sur l'intervalle $[T_0, T_1]$ considéré.

Le théorème suivant affirme l'existence et l'unicité de la solution du problème de Cauchy (1.20).

Théorème 1.7 [29] Si $A(\cdot)$ et $B(\cdot)$ sont localement intégrables sur $[T_0, T_1]$, alors pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^n$, il existe une solution unique au problème de Cauchy (1.20).

Définition 1.9 [9] On appelle résolvante du problème (1.20) la solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} \frac{\partial R}{\partial t}(t, T_0) = A(t)R(t, T_0) \\ R(T_0, T_0) = I_n \end{cases}$$

Où $R(t, T_0) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, qu'on note par $R_A(\cdot, T_0)$.

Remarque 1.1 Dans le cas de $A(\cdot) = A$, $R_A(t, t_0) = e^{(t-t_0)A}$

Proposition 1.5 [9] La résolvante possède les propriétés suivantes :

$$R_A(\cdot, \cdot) \in C^0([T_0, T_1]^2, \mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$$

$$R_A(t_1, t_1) = I_n \quad \text{et} \quad R_A(t_3, t_1) = R_A(t_3, t_2)R_A(t_2, t_1) \quad \forall t_1, t_2, t_3 \in [T_0, T_1]^3$$

en particulier

$$R_A(t_2, t_1)R_A(t_1, t_2) = I_n \quad \forall t_1, t_2 \in [T_0, T_1]^2$$

De plus, si $A(\cdot) \in C^0([T_0, T_1], \mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$, alors $R_A(\cdot, \cdot) \in C^1([T_0, T_1]^2, \mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ et on a :

$$\frac{\partial R_A}{\partial t}(t, \tau) = A(t)R_A(t, \tau) \quad \text{et} \quad \frac{\partial R_A}{\partial \tau}(t, \tau) = -R_A(t, \tau)A(\tau) \quad \forall t, \tau \in [T_0, T_1]^2.$$

Le résultat suivant donne l'expression de la solution du problème de Cauchy (1.20).

Théorème 1.8 [22, p.40, theorem 1] (Formule de variation de la constante) La solution du problème de Cauchy (1.20) est donnée par :

$$x(t) = R_A(t, T_0)x_0 + \int_{T_0}^t R_A(t, s)B(s)ds, \quad \forall t \in [T_0, T_1] \quad (1.21)$$

Remarque 1.2 Lorsque $T_0 = 0$, on note plutôt $M_A(t) = R_A(t, 0)$. La formule de variation de la constante (1.21) s'écrit alors

$$x(t) = M_A(t)x_0 + M_A(t) \int_0^t M_A(s)^{-1}B(s)ds. \quad (1.22)$$

Car

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \dot{M}_A(t)x_0 + \dot{M}_A(t) \int_0^t M_A(s)^{-1}B(s)ds + M_A(t) \frac{d}{dt} \int_0^t M_A(s)^{-1}B(s)ds \\ &= A(t)M_A(t)x_0 + A(t)M_A(t) \int_0^t M_A(s)^{-1}B(s)ds + M_A(t)M_A(t)^{-1}B(t) \\ &= A(t)[M_A(t)x_0 + M_A(t) \int_0^t M_A(s)^{-1}B(s)ds] + B(t) \\ &= A(t)x(t) + B(t). \end{aligned}$$

Corollaire 1.1 si $A(\cdot) \equiv A$ Alors, dans ce cas, la résolvante est $M_A(\cdot) : t \mapsto e^{tA}$, et la solution de ce problème est

$$x(t) = e^{tA}x_0 + \int_0^t e^{(t-s)A}B(s)ds \quad (1.23)$$

1.4 Rappels d'analyse fonctionnelle

On suppose maintenant que E est un espace de Banach.

Définition 1.10 [5] Une fonction $\varphi : E \rightarrow]-\infty, +\infty]$ est dite semi-continue inférieurement (s.c.i.) si pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ l'ensemble $[\varphi \leq \lambda] = \{x \in E; \varphi(x) \leq \lambda\}$ est fermé. i.e. $\forall x \in E, \forall \varepsilon > 0$, il existe un voisinage V de x tel que : $\varphi(y) \geq \varphi(x) - \varepsilon \quad \forall y \in V$.

Théorème 1.9 [5] Soit $C \subset E$ convexe. Alors C est faiblement fermé pour $\sigma(E, E')$ si et seulement s'il est fortement fermé.

Corollaire 1.2 [5, p.38] Soit E un espace de Banach, soit $\varphi : E \rightarrow]-\infty, +\infty]$ une fonction convexe, semi-continue inférieurement pour la topologie forte. Alors φ est semi-continue inférieurement pour la topologie faible. En particulier si $x_n \rightharpoonup x$ pour la topologie faible, alors $\varphi(x) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \varphi(x_n)$.

Définition 1.11 Soit H un espace vectoriel. Un produit scalaire $\langle u, v \rangle$ est une forme bilinéaire de $H \times H$ dans \mathbb{R} , symétrique, définie positive. Rappelons aussi que $\|u\| = \langle u, u \rangle^{\frac{1}{2}}$ est une norme associée au produit scalaire.

Exemple 1.1 Le produit scalaire usuel sur \mathbb{R}^n ; si $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ et $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$ sont deux vecteurs de \mathbb{R}^n , On pose $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$. On a bien $\|\mathbf{x}\|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 > 0$ quand $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$.

Définition 1.12 Un espace de Hilbert est un espace vectoriel H muni d'un produit scalaire $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ et qui est complet pour la norme associée $\|\cdot\| = \langle \cdot, \cdot \rangle^{\frac{1}{2}}$.

Proposition 1.6 [5] Soit H un espace de Hilbert, soit $M \subset H$ un sous-espace vectoriel fermé. Pour tout $\mathbf{f} \in H$, il existe $\mathbf{u} \in M$ tel que $\langle \mathbf{f} - \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$; $\forall \mathbf{v} \in M$.

Théorème 1.10 [5] (Théorème de représentation de Riesz-Fréchet) Étant donné $\varphi \in H'$ il existe $\mathbf{f} \in H$ unique tel que

$$\varphi(\mathbf{v}) = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle \quad \forall \mathbf{v} \in H$$

De plus on a

$$\|\varphi\|_{H'} = \|\mathbf{f}\|_H$$

Définition 1.13 [23] Soit l'espace de Banach \mathbb{R}^m , on désigne par $L^p([0, T], \mathbb{R}^m)$ l'espace des fonctions mesurables $\mathbf{u} : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^m$ tel que

$$\|\mathbf{u}\|_{L^p([0, T], \mathbb{R}^m)} = \left(\int_0^T \|\mathbf{u}(t)\|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty$$

et pour $p = \infty$ on a

$$\|\mathbf{u}\|_{L^\infty([0, T], \mathbb{R}^m)} = \sup_{t \in [0, T]} \|\mathbf{u}(t)\| < \infty.$$

Théorème 1.11 [23]

L'espace $L^p([0, T], \mathbb{R}^m)$ est un espace de Banach pour $1 \leq p \leq \infty$.

De plus $L^2([0, T], \mathbb{R}^m)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_{L^2([0, T], \mathbb{R}^m)} = \int_0^T \langle \mathbf{u}(t), \mathbf{v}(t) \rangle dt.$$

Théorème 1.12 [5] Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^n , $L^p(\Omega)$ est réflexif pour $1 < p < \infty$.

Théorème 1.13 [5] L'espace $H^1([0, T], \mathbb{R}^n)$ est réflexif et $H^1([0, T], \mathbb{R}^n) \subset C^0([0, T], \mathbb{R}^n)$ avec injection compacte.

Contrôlabilité

Sommaire

| | |
|--|----|
| 2.1 Introduction | 20 |
| 2.2 Notions de contrôlabilité | 21 |
| 2.3 Topologie des ensembles accessibles et principe Bang-Bang | 21 |
| 2.4 Contrôlabilité des systèmes stationnaire | 24 |
| 2.4.1 Cas sans contraintes sur le contrôle | 24 |
| 2.4.2 Cas avec contraintes sur le contrôle | 37 |
| 2.5 Contrôlabilité des systèmes dynamiques | 46 |
| 2.5.1 Test sur la Grammienne de contrôlabilité | 46 |
| 2.5.2 Test CHENG | 48 |
| 2.5.3 L'approche "HUM" | 51 |
| 2.6 Conclusion | 54 |

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à la contrôlabilité du système linéaire

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), & t \in [0, T] \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (2.1)$$

où n et m sont deux entiers naturels non nuls, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et $A(\cdot) \in L^\infty([0, T], \mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ et $B(\cdot) \in L^\infty([0, T], \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R}))$. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^m$, l'ensemble des contrôles \mathcal{U} considéré est $\mathcal{U} = L^2([0, T], \Omega)$ (Sauf mention du contraire). D'après la formule (1.22), le problème (2.1) admet une unique solution associée au contrôle $u(\cdot) \in \Omega : x(\cdot, x_0, u) : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ est donnée par :

$$x(t, x_0, u) = M_A(t)x_0 + M_A(t) \int_0^t M_A(s)^{-1} B(s)u(s) ds \quad (2.2)$$

Nous allons énoncer quelques notions de contrôlabilité.

2.2 Notions de contrôlabilité

Définitions 2.1 [1, 4] • Soit $T > 0$ fixé, le système (2.1) est **exactement contrôlable** en temps T , si pour tout état initial $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et pour tout état désiré $x_d \in \mathbb{R}^n$, il existe un contrôle $u(\cdot) \in \mathcal{U}$ tel que la solution $x(\cdot, x_0, u)$ du système (2.1) associé à $u(\cdot)$ vérifiée $x(T, x_0, u) = x_d$. i.e. $\forall x_0 \in \mathbb{R}^n, \forall x_d \in \mathbb{R}^n, \exists u(\cdot) \in \mathcal{U}$ tel que $x(T, x_0, u) = x_d$.

• Soit $T > 0$ fixé, le système (2.1) est dit **nul contrôlable** en temps T , s'il est possible de ramener tous les états initiaux à l'origine au temps T via un contrôle $u(\cdot) \in \mathcal{U}$. i.e. $\forall x_0 \in \mathbb{R}^n, \exists u(\cdot) \in \mathcal{U}$, tel que $x(T, x_0, u) = 0$.

• Le système (2.1) est dit **localement nul contrôlable**, s'il existe un ouvert $\vartheta \subset \mathbb{R}^n$ qui contient l'origine, tel que $\forall x_0 \in \vartheta \exists u(\cdot) \in \mathcal{U} / x(T, x_0, u) = 0$ en un temps fini T .

• Le système (2.1) est dit **nul contrôlable**, si $\vartheta = \mathbb{R}^n$. i.e. $\forall x_0 \in \mathbb{R}^n \exists u(\cdot) \in \mathcal{U} / x(T, x_0, u) = 0$ en un temps fini T .

• Le système (2.1) est dit **complètement contrôlable**, si pour tout $x_0, x_d \in \mathbb{R}^n$, il existe un contrôle $u(\cdot) \exists u(\cdot) \in \mathcal{U}$ tel que $x(T, x_0, u) = x_d$ en un temps fini T .

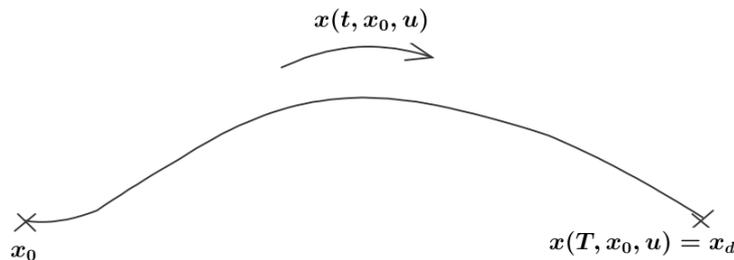


FIGURE 2.1 – Problème de contrôlabilité

Remarques 2.1 1. Si le système (2.1) est exactement contrôlable en temps T , alors il est nul contrôlable en temps T , localement nul contrôlable, nul contrôlable et complètement contrôlable.

2. Si le système (2.1) est nul contrôlable en temps T , alors il est localement nul contrôlable, nul contrôlable.

3. Si le système (2.1) est complètement contrôlable, alors il est localement nul contrôlable, nul contrôlable.

4. Si le système (2.1) est nul contrôlable, alors il est localement nul contrôlable.

La partie suivante concerne l'ensemble accessible et le principe de Bang-Bang.

2.3 Topologie des ensembles accessibles et principe Bang-Bang

Définition 2.1 [29] L'ensemble des points accessibles à partir de x_0 en un temps $T > 0$ est défini par

$$Acc(x_0, T) = \{x(T, x_0, u) / u(\cdot) \in L^2([0, t], \Omega)\}$$

où $x(\cdot, x_0, u)$ est la solution du système (2.1) associée au contrôle $u(\cdot)$. Autrement dit $\text{Acc}(x_0, T)$ est l'ensemble des extrémités des solutions de (2.1) au temps T , lorsqu'on fait varier le contrôle $u(\cdot)$. On note $\text{Acc}(x_0, 0) = \{x_0\}$.

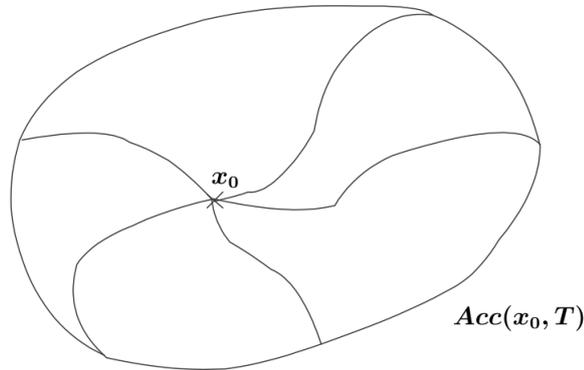


FIGURE 2.2 – Ensemble accessible

Nous présentons ici des résultats concernant la topologie de l'ensemble accessible et le principe de Bang-Bang.

Théorème 2.1 [29, p.23] *Considérons le système de contrôle (2.1), où $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ est compact et convexe. Soient $T > 0$ et $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Alors pour tout $t \in [0, T]$ $\text{Acc}(x_0, t)$ est compact, convexe, et varie continûment avec t sur $[0, T]$.*

Preuve • *La convexité de $\text{Acc}(x_0, t)$:*

La convexité de $\text{Acc}(x_0, t)$ est facile à établir si Ω est convexe. En effet, soient $x_1(t, x_0, u_1)$, $x_2(t, x_0, u_2) \in \text{Acc}(x_0, t)$ et $\lambda \in [0, 1]$. On veut montrer que $\lambda x_1(t, x_0, u_1) + (1 - \lambda)x_2(t, x_0, u_2) \in \text{Acc}(x_0, t)$. D'après la formule de variation de la constante, on a

$$x_i(t, x_0, u_i) = M_A(t)x_0 + M_A(t) \int_0^t M_A(s)^{-1} B(s) u_i(s) ds, \quad i = 1, 2$$

Pour tout $s \in [0, t]$, posons

$$u(s) = \lambda u_1(s) + (1 - \lambda)u_2(s)$$

puisque Ω est convexe et $u_i(\cdot) \in L^2$, $\forall i \in \{1, 2\}$, donc le contrôle $u(\cdot)$ est dans L^2 à valeurs dans Ω , donc $x(t, x_0, u) \in \text{Acc}(x_0, t)$. D'autre part

$$\begin{aligned} \lambda x_1(t, x_0, u_1) + (1 - \lambda)x_2(t, x_0, u_2) &= \lambda M_A(t)x_0 + (1 - \lambda)M_A(t)x_0 + M_A(t) \\ &\quad \int_0^t M_A(s)^{-1} B(s) (\lambda u_1(s) + (1 - \lambda)u_2(s)) ds \\ &= M_A(t)x_0 + M_A(t) \int_0^t M_A(s)^{-1} B(s) u(s) ds \\ &= x(t, x_0, u) \end{aligned}$$

donc $\lambda x_1(t, x_0, u_1) + (1 - \lambda)x_2(t, x_0, u_2) \in \text{Acc}(x_0, t)$ ce qui prouve la convexité de $\text{Acc}(x_0, t)$.

• La compacité de $\text{Acc}(x_0, t)$:

Montrons maintenant la compacité de $\text{Acc}(x_0, t)$. Cela revient à montrer que toute suite $(x_n(t, x_0, u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ de points de $\text{Acc}(x_0, t)$ admet une sous-suite convergente. D'après la formule de variation de la constante

$$x(t, x_0, u_n) = M_A(t)x_0 + M_A(t) \int_0^t M_A(s)^{-1} B(s)u_n(s) ds. \quad (2.3)$$

Par définition, les contrôles $u_n(\cdot)$ sont à valeurs dans le compact Ω , est par conséquent la suite $(u_n(\cdot))_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée dans $L^2([0, t], \mathbb{R}^m)$. Par réflexivité de cet espace, on en déduit qu'il existe une sous-suite de $(u_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ de $(u_n(\cdot))_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge faiblement vers un contrôle $u(\cdot) \in L^2([0, t], \mathbb{R}^m)$. Or Ω est convexe, d'après le [théorème 1.9](#) $u(\cdot) \in L^2([0, t], \Omega)$. D'après (2.3) on déduit que la suite $(x_n(\cdot, x_0, u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée dans $L^2([0, t], \mathbb{R}^n)$. De plus de l'égalité $\dot{x}(s, x_0, u_n) = A(s)x(s, x_0, u_n) + B(s)u_n(s)$, on utilisant le fait que $A(\cdot)$, $B(\cdot)$ sont bornées sur $[0, T]$, on conclut que la suite $(\dot{x}_n(\cdot, x_0, u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est également bornée dans $L^2([0, t], \mathbb{R}^n)$, ainsi il est borné dans $H^1([0, t], \mathbb{R}^n)$. Mais comme cet espace de Sobolev est réflexif et se plonge de manière compacte dans $C^0([0, t], \mathbb{R}^n)$ muni de la topologie uniforme, on conclut que à sous-suite près, la suite $(x_n(\cdot, x_0, u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers une application $x(\cdot)$ sur $[0, t]$. Par passage à la limite dans (2.3) on obtient

$$x(t) = M_A(t)x_0 + M_A(t) \int_0^t M_A(s)^{-1} B(s)u(s) ds \in \text{Acc}(x_0, t)$$

Ce qui prouve la compacité.

• Variété continûment : Notons $\text{Acc}(x_0, t)$ par $\text{Acc}(t)$ pour la simplification d'écriture. Montrons enfin la continuité par rapport à t de $\text{Acc}(t)$ c'est à dire montrons que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tel que } \forall t_1, t_2 \in [0, T], |t_1 - t_2| \leq \delta \Rightarrow d(\text{Acc}(t_1), \text{Acc}(t_2)) \leq \varepsilon$$

Où :

$$d(\text{Acc}(t_1), \text{Acc}(t_2)) = \sup \left(\sup_{y \in \text{Acc}(t_2)} d[y, \text{Acc}(t_1)], \sup_{y \in \text{Acc}(t_1)} d[y, \text{Acc}(t_2)] \right)$$

Où $d[y, \text{Acc}(t_1)] = \inf_{x \in \text{Acc}(t_1)} d(y, x)$. Par la suite, on suppose que $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq T$. Il suffit de montrer que

$$\triangleright \forall y \in \text{Acc}(t_2) \quad d(y, \text{Acc}(t_1)) \leq \varepsilon$$

$$\triangleright \forall y \in \text{Acc}(t_1) \quad d(y, \text{Acc}(t_2)) \leq \varepsilon$$

Montrons juste le premier point (l'autre étant similaire). Soit $y \in \text{Acc}(t_2)$, il suffit de montrer qu'il existe $z \in \text{Acc}(t_1)$ tel que $d(y, z) \leq \varepsilon$, par définition de $\text{Acc}(t_2)$ il existe un contrôle $u(\cdot) \in L^2([0, T], \Omega)$ tel que $x(t_2, x_0, u) = y$, posons $z = x(t_1, x_0, u) \in$

$\text{Acc}(t_1)$. D'autre part on a

$$\begin{aligned} x(t_2, x_0, u) - x(t_1, x_0, u) &= M_A(t_2)x_0 + M_A(t_2) \int_0^{t_2} M_A(s)^{-1} B(s)u(s)ds \\ &\quad - \left(M_A(t_1)x_0 + M_A(t_1) \int_0^{t_1} M_A(s)^{-1} B(s)u(s)ds \right) \\ &= M_A(t_2) \int_{t_1}^{t_2} M_A(s)^{-1} B(s)u(s)ds + (M_A(t_2) - M_A(t_1)) \\ &\quad \left(x_0 + \int_0^{t_1} M_A(s)^{-1} B(s)u(s)ds \right) \end{aligned}$$

Si $|t_2 - t_1|$ est petit, le premier terme de cette somme est petit par continuité de l'intégrale, le deuxième terme est petit par continuité de $M_A(\cdot)$. D'où le résultat. □

Remarque 2.1 Dans le cas général où Ω est seulement compact (mais pas forcément convexe) l'ensemble $\text{Acc}(x_0, t)$ est compact et convexe, la preuve est plus difficile est fait appel au lemme de Lyapunov en théorie de la mesure. On se réfère au livre de E. B. Lee et L. Markus [17, p.164, THEOREM 1A] pour la preuve.

Le corollaire suivant illustre le principe Bang-Bang qu'on utilisera dans le chapitre 3 pour donner la condition nécessaire et suffisante qu'un contrôle soit extrémal.

Corollaire 2.1 [29, p.24](Principe Bang-Bang) Supposons que Ω soit compact. Si on note $\text{Acc}_\Omega(x_0, t)$ l'ensemble accessible depuis x_0 en temps t pour des contrôles à valeurs dans Ω , alors on a

$$\text{Acc}_\Omega(x_0, t) = \text{Acc}_{\text{Conv}(\Omega)}(x_0, t),$$

où $\text{Conv}(\Omega)$ est l'enveloppe convexe de Ω . De plus si Ω est convexe, alors $\text{Acc}_{\partial\Omega}(x_0, t) = \text{Acc}_\Omega(x_0, t)$, où $\partial\Omega$ est la frontière de Ω .

2.4 Contrôlabilité des systèmes stationnaire

2.4.1 Cas sans contraintes sur le contrôle

On dit que le système de contrôle (2.1) est stationnaire si les matrices A et B ne depends pas du temps t . Donc le système étudié dans cette partie est :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), & t \in [0, T] \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (2.4)$$

Dans ce cas, on suppose que le contrôle $u(\cdot)$ n'est soumis pas à aucune contrainte ($\Omega = \mathbb{R}^m$). c'est à dire que $u(\cdot) \in L^2([0, T], \mathbb{R}^m)$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$.

Passons maintenant à un résultat classique de contrôlabilité.

Lemme 2.1 [11] Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. Le système (2.4) est **exactement contrôlable** en temps T .
2. Le système (2.4) est **nul contrôlable** en temps T .

Remarque 2.2 Ce lemme nous permet de montrer qu'un système contrôlé est nul contrôlable en temps T au lieu de montrer qu'il est exactement contrôlable en temps T .

Preuve 1 \Rightarrow 2] évident, c'est le cas où $x_d = 0$

2 \Rightarrow 1] On considère la solution $\hat{x}(\cdot)$ du système :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t), & t \in [0, T] \\ \hat{x}(T) = x_d \end{cases} \quad (2.5)$$

et $\check{x}(\cdot, u)$ la solution du problème :

$$\begin{cases} \dot{\check{x}}(t) = A\check{x}(t) + Bu(t), & t \in [0, T] \\ \check{x}(0) = x_0 - \hat{x}(0) \end{cases} \quad (2.6)$$

On choisit alors, pour ce dernier système, le contrôle $u(\cdot)$ amenant $\check{x}(t, u)$ à 0 en temps T , posons $x(t, u) = \check{x}(t, u) + \hat{x}(t)$, alors on a :

$$x(0, u) = \check{x}(0, u) + \hat{x}(0) = x_0 - \hat{x}(0) + \hat{x}(0) = x_0,$$

$$\text{et } x(T, u) = \check{x}(T, u) + \hat{x}(T) = \hat{x}(T) = x_d.$$

de plus on a

$$\begin{aligned} \dot{x}(t, u) &= \dot{\check{x}}(t, u) + \dot{\hat{x}}(t) \\ &= A\check{x}(t, u) + Bu(t) + A\hat{x}(t) \\ &= A(\check{x}(t, u) + \hat{x}(t)) + Bu(t) \\ &= Ax(t, u) + Bu(t) \end{aligned}$$

d'où le résultat. □

Le résultat suivant donne un test de contrôlabilité.

2.4.1.1 Test de Kalman

La matrice $[A|B]$ définie par : $[A|B] = \begin{pmatrix} B & AB & A^2B & \dots & A^{n-1}B \end{pmatrix}$ est dite la matrice de Kalman.

Théorème 2.2 [29, p.28, Théorème 2.2.1.] Le système (2.4) est exactement contrôlable en temps T si et seulement si,

$$\text{rg}([A|B]) = n. \quad (2.7)$$

La condition $\text{rg}([A|B]) = n$ est appelée condition de Kalman.

Remarque 2.3 La condition de Kalman ne dépend ni de T ni de x_0 . Autrement dit, si un système linéaire stationnaire est exactement contrôlable en temps T depuis x_0 , alors il est exactement contrôlable en tout temps depuis tout point.

la preuve de ce théorème est basé sur le lemme suivant.

Lemme 2.2 [29] La matrice $[A|B]$ est de rang n , si et seulement si, l'application linéaire

$$\begin{aligned} \Phi : L^2([0, T], \mathbb{R}^m) &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ u &\longmapsto \int_0^T e^{(T-t)A} B u(t) dt \end{aligned}$$

est surjective.

Preuve du lemme \Leftarrow] On sait que $\text{rg}([A|B]) \leq \min(n, nm) = n$, supposons que $\text{rg}([A|B]) < n$, et montrons que Φ n'est pas surjective. Le rang $\text{rg}([A|B]) < n$, alors il existe $\psi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tel que $\psi^\top [A|B] = 0$, (Car les vecteur lignes de la matrice $[A|B]$ sont linéairement dépendantes) d'où

$$\psi^\top B = \psi^\top AB = \dots = \psi^\top A^{n-1}B = 0 \quad (2.8)$$

Or d'après le théorème de Cayley-Hamilton il existe des réels a_0, a_1, \dots, a_{n-1} tels que

$$A^n = a_0 I_n + a_1 A + \dots + a_{n-1} A^{n-1} \quad (2.9)$$

On en déduit par récurrence immédiate que, pour tout entier k que

$$\psi^\top A^k B = 0 \quad (2.10)$$

et donc, pour tout $t \in [0, T]$

$$\psi^\top \frac{(T-t)A^k}{k!} B = 0 \quad (2.11)$$

d'où

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \psi^\top \frac{(T-t)A^k}{k!} B = 0 \quad (2.12)$$

ainsi

$$\psi^\top e^{(T-t)A} B = 0$$

Par conséquent pour tout contrôle $u(\cdot)$, ona :

$$\psi^\top \int_0^T e^{(T-t)A} B u(t) dt = 0 \quad (2.13)$$

i.e $\psi^\top \Phi(u) = 0$ ce qui montre que Φ n'est pas surjective.

\Rightarrow] Réciproquement, supposons que Φ n'est pas surjective, alors il existe un vecteur non nul

$\psi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tel que pour tout contrôle $u(\cdot)$ on ait :

$$\psi^\top \int_0^T e^{tA} B u(t) dt = 0 \Rightarrow \psi^\top e^{tA} B = 0 \forall t \in [0, T]$$

par le changement de variable $s = T - t$, on a $t \in [0, T] \Leftrightarrow s \in [0, T]$, ceci implique que pour tout $t \in [0, T]$

$$\psi^\top e^{sA} B = \psi^\top e^{(T-t)A} B = 0 \quad (2.14)$$

En particulier pour $t = T$ on a $\psi^\top B = 0$

On dérive l'équation (2.14) on obtient :

$$\psi^\top e^{(T-t)A} AB = 0 \quad (2.15)$$

En particulier pour $t = T$ on a $\psi^\top AB = 0$. Ainsi de suite on obtiendra

$$\psi^\top B = \psi^\top AB = \dots = \psi^\top A^{n-1} B = 0 \quad (2.16)$$

D'où $\psi^\top [A|B] = 0$ et donc le rang de la matrice $[A|B]$ vérifie $\text{rg}[A|B] < n$.

□

Revenants maintenant a la preuve du [théorème 2.2](#), grâce au lemme précédent nous pouvons maintenant montrer facilement le théorème.

Preuve du théorème \Rightarrow] Supposons que le système est exactement contrôlable en temps T , alors

$$\forall x_0 \in \mathbb{R}^n, \forall x_d \in \mathbb{R}^n, \exists u(\cdot) \in L^2([0, T], \mathbb{R}^m) \text{ tel que } x(T, x_0, u) = x_d$$

En particulier pour $x_0 = 0$, on a

$$\begin{aligned} \text{Acc}(0, T) &= \{x(T, 0, u)/u(\cdot) \in L^2([0, T], \mathbb{R}^m)\} \\ &= \left\{ \int_0^T e^{(T-t)A} B u(t) dt / u(\cdot) \in L^2([0, T], \mathbb{R}^m) \right\} \\ &= \Phi(L^2([0, T], \mathbb{R}^m)) \\ &= \text{Im}(\Phi) \end{aligned}$$

Or le système est exactement contrôlable depuis 0, d'ou $\text{Acc}(0, T) = \mathbb{R}^n$, donc $\text{Im}(\Phi) = \mathbb{R}^n$. Cela prouve que Φ est surjective, et d'après le lemme précédent nous avons $\text{rg}([A|B]) = n$

\Leftarrow] réciproquement, supposons que la matrice $[A|B]$ est de rang n , alors d'après le lemme précédent, l'application Φ est surjective, i.e. $\Phi(L^2([0, T], \mathbb{R}^m)) = \text{Im}(\Phi) = \mathbb{R}^n$

Soit $x_0 \in \mathbb{R}^n$, l'ensembles des points accessibles à partir de x_0 est :

$$\begin{aligned}
 \text{Acc}(x_0, T) &= \left\{ x(T, x_0, u) / u(\cdot) \in L^2([0, T], \mathbb{R}^m) \right\} \\
 &= \left\{ e^{tA} x_0 + \int_0^T e^{(T-t)A} B u(t) dt / u(\cdot) \in L^2([0, T], \mathbb{R}^m) \right\} \\
 &= \left\{ e^{tA} x_0 + \Phi(u) / u(\cdot) \in L^2([0, T], \mathbb{R}^m) \right\} \\
 &= e^{tA} x_0 + \text{Im}(\Phi) \\
 &= \mathbb{R}^n
 \end{aligned}$$

Donc $\forall x_d \in \mathbb{R}^n, \exists u(\cdot) \in L^2([0, T], \mathbb{R}^m)$ tel que $x(T, x_0, u) = x_d$ Ainsi le système est exactement contrôlable en temps T .

□

Dans la suite on va donner des critères simples pour vérifier la condition de Kalman (2.7).

Définition 2.2 Les systèmes contrôlés $\dot{x}_1(t) = A_1 x_1(t) + B_1 u_1(t)$ et $\dot{x}_2(t) = A_2 x_2(t) + B_2 u_2(t)$ sont dits semblables s'il existe $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ tel que $A_2 = P A_1 P^{-1}$ et $B_2 = P B_1$, dans ce cas $x_2 = P x_1$.

Proposition 2.1 [29] La propriété de Kalman est intrinsèque, i.e.

$$\left(B_2 \quad A_2 B_2 \quad A_2^2 B_2 \quad \dots \quad A_2^{n-1} B_2 \right) = P \left(B_1 \quad A_1 B_1 \quad A_1^2 B_1 \quad \dots \quad A_1^{n-1} B_1 \right)$$

En particulier, le rang de la matrice de Kalman est invariant par similitude.

Considérons une paire (A, B) où $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$.

Proposition 2.2 [29] La paire (A, B) est semblable à une paire (\tilde{A}, \tilde{B}) de la forme

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \tilde{A}_1 & \tilde{A}_3 \\ 0 & \tilde{A}_2 \end{pmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{pmatrix} \tilde{B}_1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Où $\tilde{A}_1 \in \mathcal{M}_r(\mathbb{R}^n)$, $\tilde{B}_1 \in \mathcal{M}_{r,m}(\mathbb{R}^n)$, r étant le rang de la matrice de Kalman $[A|B]$. De plus le rang de la matrice de Kalman $\text{rg}[\tilde{A}_1|\tilde{B}_1] = r$.

Preuve Supposons que le rang r de la matrice de Kalman $[A|B]$ soit strictement plus petit que n . Alors le sous-espace

$$F = \text{Im}[A|B] = \text{Im}B + \text{Im}AB + \text{Im}A^2B + \dots + \text{Im}A^{n-1}B$$

est de dimension r , et d'après le théorème de Cayley-Hamilton il est clairement invariant par A . Soit G un supplémentaire de F dans \mathbb{R}^n , et soient $\{f_1, f_2, \dots, f_r\}$ une base de

F , et $\{f_{r+1}, f_{r+2}, \dots, f_n\}$ une base de G . Notons P la matrice de passage de la base $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ à la base canonique de \mathbb{R}^n . Alors, puisque F est invariant par A , on a

$$\tilde{A} = PAP^{-1} = \begin{pmatrix} \tilde{A}_1 & \tilde{A}_3 \\ 0 & \tilde{A}_2 \end{pmatrix},$$

et d'autre part, puisque $\text{Im}B \subset F$, on a

$$\tilde{B} = PB = \begin{pmatrix} \tilde{B}_1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Donc $\text{rg}[\tilde{A}_1 | \tilde{B}_1] = \text{rg}[A | B] = r$.

□

Le théorème suivant donne la forme de Brunovski dans le cas mono-entrer i.e. ($m = 1$).

Théorème 2.3 [29, p.32, Théorème 2.2.7](Forme de Brunovski). Si le système (2.4) avec $m = 1$ vérifie la condition de Kalman (2.7), alors il est semblable au système $\dot{\tilde{x}}(t) = \tilde{A}\tilde{x}(t) + \tilde{B}\tilde{u}(t)$ où :

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \cdots & -a_1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \tilde{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

où les coefficients a_i sont ceux du polynôme caractéristique de A , i.e.

$$\chi_A(X) = X^n + a_1X^{n-1} + a_2X^{n-2} + \dots + a_{n-1}X + a_n$$

Preuve S'il existe une base (f_1, f_2, \dots, f_n) dans laquelle la paire (A, B) prend la forme (\tilde{A}, \tilde{B}) , alors on a nécessairement $f_n = B$ à scalaire près, et

$$Af_n = f_{n-1} - a_1f_n, \dots, Af_2 = f_1 - a_{n-1}f_n, Af_1 = -a_nf_n$$

Définissons donc les vecteurs f_1, \dots, f_n par les relations

$$f_n = B, f_{n-1} = Af_n + a_1f_n, \dots, f_1 = Af_2 + a_{n-1}f_n.$$

La famille (f_1, \dots, f_n) est bien une base de \mathbb{R}^n puisque

$$\begin{aligned} \text{Vect}\{f_n\} &= \text{vect}\{B\} \\ \text{Vect}\{f_n, f_{n-1}\} &= \text{vect}\{B, AB\} \\ &\vdots \\ \text{Vect}\{f_n, f_{n-1}, \dots, f_1\} &= \text{vect}\{B, AB, \dots, A^{n-1}B\} = \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Il reste à vérifier que l'on a bien $Af_1 = -a_n f_n$. On a

$$\begin{aligned}
 Af_1 &= A^2 f_2 + a_{n-1} Af_n \\
 &= A^2 (Af_3 + a_{n-2} f_n) + a_{n-1} Af_n \\
 &= A^3 f_3 + a_{n-2} A^2 f_n + a_{n-1} Af_n \\
 &\vdots \\
 &= A^n f_n + a_1 A^{n-1} f_n + \dots + a_{n-1} Af_n \\
 &= -a_n f_n.
 \end{aligned}$$

Puisque d'après le théorème de Cayley-Hamilton, on a $A^n = -a_1 A^{n-1} - \dots - a_n I$, donc la paire (A, B) prend la forme (\tilde{A}, \tilde{B}) dans la base (f_1, f_2, \dots, f_n) .

□

Remarques 2.2 1. Dans ces nouvelles coordonnées, le système est alors équivalent à l'équation différentielle scalaire d'ordre n

$$x^n(t) + a_1 x^{(n-1)}(t) + a_2 x^{(n-2)}(t) + \dots + a_n x(t) = u(t).$$

2. Lorsque $m > 1$, le [théorème 2.3](#) admet la généralisation suivante. Si le système (2.4) avec vérifie la condition de Kalman (2.7), alors il est semblable au système $\dot{\tilde{x}}(t) = \tilde{A}\tilde{x}(t) + \tilde{B}\tilde{u}(t)$, tel que

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \tilde{A}_1 & * & \dots & * \\ 0 & \tilde{A}_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \dots & \ddots & * \\ 0 & \dots & 0 & \tilde{A}_s \end{pmatrix}$$

où les matrices \tilde{A}_i sont des matrices compagnons (i.e. ayant la forme de Brunovski du [théorème 2.3](#)) ; par ailleurs, il existe une matrice $G \in \mathbb{M}_{m,s}(\mathbb{R})$ telle que

$$\tilde{B}G = \begin{pmatrix} \tilde{B}_1 \\ \tilde{B}_2 \\ \vdots \\ \tilde{B}_s \end{pmatrix}$$

où tous les coefficients de chaque matrice \tilde{B}_i sont nuls, sauf celui de la dernière ligne, en i -ème colonne, qui est égal à 1.

Exemple 2.1 La contrôlabilité d'un four électrique industriel.
Considérons le four électrique industriel suivant :



FIGURE 2.3 – Four électrique industriel

- où :
- y_0 = La température à l'extérieur du four.
 - y_1 = La température dans la "jacket" du four.
 - y_2 = La température de l'intérieure du four.
 - u = Intensité de la chaleur produite par la bobine.
 - a_i = Les surfaces du four (intérieur et extérieur).
 - c_i = Les capacités thermique massique.
 - r_i = Les coefficients de radiation.

La modélisation de l'équation de la chaleur du four électrique donne :

$$\begin{cases} c_1 \dot{y}_1(t) = -a_1 r_1 (y_1 - y_2)(t) - a_2 r_2 (y_2 - y_0)(t) + u(t), & t \in [0, T] \\ c_2 \dot{y}_2(t) = a_1 r_1 (y_1 - y_2)(t) \end{cases} \quad (2.17)$$

Le problème du four : Peut-on "s'arranger" pour que quelque soit la température du four à l'instant initial $t = 0$, la température intérieure du four soit égale, à l'instant $t = T$ donné, à une valeur désirée y_2^d .

La formulation mathématique du problème : Peut-on trouver, pour toutes les valeurs initiales $y_1(0), y_2(0)$, un contrôle $u(\cdot)$ pour que la solution du système différentiel (2.17) satisfasse $y_2(T) = y_2^d$.

Faisons les changements de variables suivants ; $x_1 = y_1 - y_0$, $x_2 = y_2 - y_0$. Comme

les coefficients c_i sont non nuls, alors on obtient :

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = \frac{-a_1 r_1}{c_1} x_1(t) - \frac{a_2 r_2 - a_1 r_1}{c_1} x_2(t) + \frac{1}{c_1} u(t), & t \in [0, T] \\ \dot{x}_2(t) = \frac{a_1 r_1}{c_2} (x_1(t) - x_2(t)) \end{cases}$$

Qui peut s'écrire sous la forme matricielle suivant :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad t \in [0, T]$$

Où :

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} \frac{-a_1 r_1}{c_1} & \frac{a_2 r_2 - a_1 r_1}{c_1} \\ \frac{a_1 r_1}{c_2} & \frac{a_1 r_1}{c_2} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} \frac{1}{c_1} \\ 0 \end{pmatrix}$$

La matrice de Kalman est donc

$$[A|B] = (B \ AB) = \begin{pmatrix} \frac{1}{c_1} & \frac{-a_1 r_1}{c_1^2} \\ 0 & \frac{a_1 r_1}{c_1 c_2} \end{pmatrix}$$

D'où

$$\begin{aligned} \text{rg}([A|B]) = 2 &\Leftrightarrow \det([A|B]) \neq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{c_1} \frac{a_1 r_1}{c_1 c_2} \neq 0 \\ &\Leftrightarrow a_1 r_1 \neq 0 \end{aligned}$$

Donc le système est contrôlable si $a_1 r_1 \neq 0$.

Le résultat suivant donne un autre test de contrôlabilité.

2.4.1.2 Test de Hautus

Théorème 2.4 [12] Le système (2.4) est exactement contrôlable en temps T , si et seulement si, la matrice $(A - \lambda I_n, B)$ de dimension $n \times (n + m)$, est de rang n pour tout valeur propre λ de A .

Preuve \Rightarrow] Supposons que $\text{rg}(A - \lambda I_n, B) < n$, alors $\exists \psi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tel que $\psi^\top (A - \lambda I_n, B) = 0$, ceci implique

$$\psi^\top (A - \lambda I_n) = 0 \quad \text{et} \quad \psi^\top B = 0 \quad \text{i.e.} \quad \psi^\top A = \lambda \psi^\top \quad \text{et} \quad \psi^\top B = 0.$$

D'où :

$$\begin{aligned}
 \psi^\top B &= 0 \\
 \psi^\top AB &= \lambda \psi^\top B = 0 \\
 \psi^\top A^2 B &= \lambda \psi^\top AB = 0 \\
 &\vdots \\
 \psi^\top A^{n-1} B &= \lambda \psi^\top A^{n-2} B = 0
 \end{aligned}$$

Alors

$$\psi^\top (B, AB, A^2 B, \dots, A^{n-1} B) = \psi^\top [A|B] = 0$$

c'est à dire

$$\text{rg}[A|B] < n$$

donc la condition de Kalman (2.7) n'est pas vérifiée, et par conséquent le système (2.4) n'est pas exactement contrôlable en temps T .

\Leftarrow] Réciproquement, supposons que le système (2.4) n'est pas exactement contrôlable, d'après la proposition 2.2 il existe $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$\tilde{A} = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \tilde{A}_1 & \tilde{A}_3 \\ 0 & \tilde{A}_2 \end{pmatrix} \quad \tilde{B} = P^{-1}B = \begin{pmatrix} \tilde{B}_1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Soit λ une valeur propre de \tilde{A}_2 et $v_2 \neq 0$ le vecteur propre gauche associé à λ , i.e. $v_2^\top \tilde{A}_2 = \lambda v_2^\top$. Posons $v^\top = \begin{pmatrix} 0^\top & v_2^\top \end{pmatrix} P^{-1}$ alors on a

$$\begin{aligned}
 v^\top A &= \begin{pmatrix} 0^\top & v_2^\top \end{pmatrix} P^{-1} P \tilde{A} P^{-1} \\
 &= \begin{pmatrix} 0^\top & v_2^\top \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{A}_1 & \tilde{A}_3 \\ 0 & \tilde{A}_2 \end{pmatrix} P^{-1} \\
 &= \begin{pmatrix} 0^\top & v_2^\top \tilde{A}_2 \end{pmatrix} P^{-1} \\
 &= \begin{pmatrix} 0^\top & \lambda v_2^\top \end{pmatrix} P^{-1} \\
 &= \lambda v^\top
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{et } v^\top B &= \begin{pmatrix} 0^\top & v_2^\top \end{pmatrix} P^{-1} P \tilde{B} \\
 &= \begin{pmatrix} 0^\top & v_2^\top \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{B}_1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 &= 0^\top.
 \end{aligned}$$

Donc $v^\top (A - \lambda I_n) = 0^\top$ et $v^\top B = 0^\top$, ainsi $\text{rg}(A - \lambda I_n, B) < n$, d'où le résultat. \square

Exemple 2.2 Dans cet exemple on cherche à déterminer pour quelle valeur de α , le système

suivant soit contrôlable :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

Où

$$A = \begin{pmatrix} 2 & \alpha - 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \alpha^2 & 0 \end{pmatrix}$$

Le spectre de la matrice A est $\sigma(A) = \{2\}$. D'où

$$(A - 2I_2, B) = \begin{pmatrix} 0 & \alpha - 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \alpha^2 - \alpha & 0 \end{pmatrix}$$

Alors

$$\begin{aligned} \text{rg}(A - 2I_2, B) = 2 &\Leftrightarrow (\alpha - 3)(\alpha^2 - \alpha) \neq 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha \neq 3 \\ \alpha \neq 0 \text{ et } \alpha \neq 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Donc d'après le test de Hautus, le système est exactement contrôlable si et seulement si, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1, 3\}$.

2.4.1.3 Contrôlabilité et inégalité d'observabilité

Nous présentons maintenant un résultat de contrôlabilité issu du livre de E. Zuazua [32]. D'après le lemme 2.1, pour montrer que le système (2.4) est exactement contrôlable, il suffit de montrer qu'il est nul contrôlable en temps T .

Proposition 2.3 *Le contrôle $u(\cdot)$ garantit la contrôlabilité exacte en temps T du système (2.4) si, et seulement si,*

$$\int_0^T \langle B^\top \varphi, u \rangle_{\mathbb{R}^m} dt + \langle \varphi(0), x_0 \rangle_{\mathbb{R}^n} = 0 \quad \forall \varphi_T \in \mathbb{R}^n \quad (2.18)$$

où $\varphi(\cdot)$ est la solution associée à φ_T du système adjoint suivant

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = -A^\top \varphi(t) & t \in [0, T] \\ \varphi(T) = \varphi_T \end{cases} \quad (2.19)$$

Preuve Multiplions le système (2.4) par φ , et intégrons l'équation obtenue sur l'intervalle $[0, T]$, on obtient pour tout état initial $\varphi_T \in \mathbb{R}^n$ la formule suivante :

$$\int_0^T \langle B^\top \varphi, u \rangle_{\mathbb{R}^m} dt + \langle \varphi(0), x_0 \rangle_{\mathbb{R}^n} - \langle \varphi(T), x(T) \rangle_{\mathbb{R}^n} = 0.$$

En effet ; on a $\int_0^T \langle \varphi, \dot{x} \rangle_{\mathbb{R}^n} dt = \int_0^T \langle \varphi, Ax \rangle_{\mathbb{R}^n} + \langle \varphi, Bu \rangle_{\mathbb{R}^n} dt$

et $\int_0^T \langle \varphi, \dot{x} \rangle_{\mathbb{R}^n} dt = \langle \varphi(T), x(T) \rangle_{\mathbb{R}^n} - \langle \varphi(0), x(0) \rangle_{\mathbb{R}^n} - \int_0^T \langle \dot{\varphi}, x \rangle_{\mathbb{R}^n} dt$

alors $\int_0^T \langle \varphi, Ax \rangle_{\mathbb{R}^n} + \langle \varphi, Bu \rangle_{\mathbb{R}^n} dt = \langle \varphi(T), x(T) \rangle_{\mathbb{R}^n} - \langle \varphi(0), x(0) \rangle_{\mathbb{R}^n} - \int_0^T \langle \dot{\varphi}, x \rangle_{\mathbb{R}^n} dt$

ainsi $\int_0^T \langle A^\top \varphi, x \rangle_{\mathbb{R}^n} + \langle B^\top \varphi, u \rangle_{\mathbb{R}^n} dt = \langle \varphi_T, x(T) \rangle_{\mathbb{R}^n} - \langle \varphi(0), x_0 \rangle_{\mathbb{R}^n} + \int_0^T \langle A^\top \varphi, x \rangle_{\mathbb{R}^n} dt$
 donc

$$\langle B^\top \varphi, u \rangle_{\mathbb{R}^n} dt + \langle \varphi(0), x_0 \rangle_{\mathbb{R}^n} - \langle \varphi_T, x(T) \rangle_{\mathbb{R}^n} = 0 \quad (2.20)$$

\Rightarrow] Si le contrôle $u(\cdot)$ garantit la contrôlabilité exacte en temps T , d'où la nul contrôlabilité en temps T i.e. $x(T) = 0$, et d'après l'équation (2.20) on a donc (2.18).

\Leftarrow] Supposons que le contrôle $u(\cdot)$ vérifie (2.18), alors d'après (2.20), $\langle \varphi_T, x(T) \rangle_{\mathbb{R}^n} = 0 \forall \varphi_T \in \mathbb{R}^n$, donc $x(T) = 0$, finalement le contrôle $U(\cdot)$ garantit la contrôlabilité nul en temps T ainsi la contrôlabilité exacte en temps T .

□

Le résultat suivant concerne la contrôlabilité exacte et l'inégalité d'observabilité.

Théorème 2.5 [32] Le système (2.4) est exactement contrôlable en temps T , si et seulement si, il existe une constante $C = C(T) > 0$ telle que, pour toute solution φ de (2.19) avec la donnée initiale $\varphi_T \in \mathbb{R}^n$ on a l'inégalité d'observabilité suivante :

$$\|\varphi(0)\|_{\mathbb{R}^n}^2 \leq C \int_0^T \|B^\top \varphi\|_{\mathbb{R}^m}^2 dt \quad (2.21)$$

Pour prouver le théorème nous aurons besoin du lemme suivant

Lemme 2.3 L'inégalité (2.21) est équivalent à la propriété de continuation unique suivante :

$$[B^\top \varphi(t) = 0 \quad \forall t \in [0, T]] \Rightarrow \varphi \equiv 0 \quad (2.22)$$

où φ est la solution du système adjoint (2.19).

Preuve \Rightarrow] Supposons que l'inégalité d'observabilité (2.21) est vérifiée, si $[B^\top \varphi = 0 \quad \forall t \in [0, T]]$, alors

$$\|\varphi(0)\|_{\mathbb{R}^n}^2 \leq C^2 \int_0^T \|B^\top \varphi\|_{\mathbb{R}^m}^2 dt = 0$$

d'où $\varphi(0) = 0$, or la solution du système adjoint (2.19) peut s'écrire $\varphi(t) = e^{(T-t)A^\top} \varphi_T$, alors

$$\varphi(0) = e^{TA^\top} \varphi_T = 0.$$

Ceci implique $\varphi_T = 0$ et par conséquence $\varphi \equiv 0$.

\Leftarrow] Réciproquement, supposons que la propriété de continuation unique (2.22) soit vérifiée, et considérons l'application suivante :

$$\begin{aligned} N_1 : \quad \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ \varphi_T &\longmapsto N_1(\varphi_T) = \int_0^T \|B^\top \varphi(t)\|_{\mathbb{R}^m}^2 dt \end{aligned}$$

avec $\varphi(t) = e^{(T-t)A^\top} \varphi_T$ est la solution du système (2.19). l'application $N(\cdot)$ est bien une norme, en effet ;

- Soit $\varphi_T \in \mathbb{R}^n$, montrons que $N_1(\varphi_T) = 0 \Leftrightarrow \varphi_T = 0$

$$\begin{aligned}
 N_1(\varphi_T) = 0 &\Leftrightarrow \int_0^T \|B^\top \varphi(t)\|_{\mathbb{R}^m} dt = 0 \\
 &\Leftrightarrow \|B^\top \varphi(t)\|_{\mathbb{R}^m} = 0, \forall t \in [0, T] \\
 &\Leftrightarrow B^\top \varphi(t) = 0, \forall t \in [0, T] \\
 &\Leftrightarrow \varphi \equiv 0, \quad (\text{par hypothèse}) \\
 &\Leftrightarrow \varphi_T = 0 \quad \text{car } \varphi(t) = e^{(T-t)A^\top} \varphi_T
 \end{aligned}$$

- Soit $\varphi_T \in \mathbb{R}^n$, et $\lambda \in \mathbb{R}$, montrons que $N_1(\lambda\varphi_T) = |\lambda|N_1(\varphi_T)$.

On a

$$N_1(\lambda\varphi_T) = \int_0^T \|B^\top e^{(T-t)A^\top} \lambda\varphi_T\|_{\mathbb{R}^m} dt = \lambda \int_0^T \|B^\top \varphi(t)\|_{\mathbb{R}^m} dt = \lambda N_1(\varphi_T).$$

- Soient $\varphi_T, v_T \in \mathbb{R}^n$, montrons que $N_1(\varphi_T + v_T) \leq N_1(\varphi_T) + N_1(v_T)$.

On a

$$\begin{aligned}
 N_1(\varphi_T + v_T) &= \int_0^T \|B^\top e^{(T-t)A^\top} (\varphi_T + v_T)\|_{\mathbb{R}^m} dt \\
 &\leq \int_0^T \|B^\top e^{(T-t)A^\top} \varphi_T\|_{\mathbb{R}^m} dt + \int_0^T \|B^\top e^{(T-t)A^\top} v_T\|_{\mathbb{R}^m} dt \\
 &\leq \int_0^T \|B^\top \varphi(t)\|_{\mathbb{R}^m} dt + \int_0^T \|B^\top v(t)\|_{\mathbb{R}^m} dt \\
 &\leq N_1(\varphi_T) + N_1(v_T).
 \end{aligned}$$

($v(\cdot)$ est la solution du système (2.19) associée à v_T)

Donc $N_1(\cdot)$ est une norme sur \mathbb{R}^n . De même on vérifie facilement que l'application

$$\begin{aligned}
 N_2 : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\
 \varphi_T &\longmapsto N_2(\varphi_T) = \|\varphi(0)\|_{\mathbb{R}^n} = \|e^{TA^\top} \varphi_T\|_{\mathbb{R}^n}
 \end{aligned}$$

est bien une norme sur \mathbb{R}^n . Or dans un espace de dimension finie toutes les normes sont équivalentes on déduit qu'il existe une constante C tel que

$$N_2(\varphi_T) \leq CN_1(\varphi_T)$$

c'est à dire

$$\|\varphi(0)\|_{\mathbb{R}^n} \leq C \int_0^T \|B^\top \varphi(t)\|_{\mathbb{R}^m} dt$$

d'où le résultat. □

Passons maintenant au preuve du [théorème 2.5](#)

Preuve du théorème Montrons L'équivalence entre l'inégalité (2.21) et la condition de Kalman (2.7).

⇐] Supposons que l'inégalité (2.21) est vérifiée. Et prenons $\varphi_T \in \text{Im}([A|B])^\perp$, où $\text{Im}([A|B])^\perp = \text{Ker}([A|B]^\top)$, alors

$$B^\top \varphi_T = 0, (AB)^\top \varphi_T = 0, \dots, (A^{n-1}B)^\top \varphi_T = 0.$$

On a donc

$$B^\top (A^\top)^k \varphi_T = 0 \quad \forall k = 1, 2, \dots, n-1$$

En utilisant Cayley-Hamilton on peut alors en déduire

$$B^\top (A^\top)^k \varphi_T = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

Ce qui implique que

$$B^\top (tA^\top)^k \varphi_T = 0 \quad \forall t \in [0, T] \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

D'où :

$$B^\top \varphi(t) = B^\top e^{(T-t)A^\top} \varphi_T = 0 \quad \forall t \in [0, T]$$

D'après le lemme 2.3 on conclut que $\varphi \equiv 0$, ainsi $\varphi_T = 0$, donc $\text{Im}([A|B])^\perp = \{0\}$, ce qui veut bien dire que $\text{rg}([A|B]) = n$. D'où le système (2.4) est exactement contrôlable.

⇒] Réciproquement, supposons maintenant que le système est exactement contrôlable, alors

$$\text{rg}([A|B]) = n$$

Soit alors $\varphi_T \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$B^\top \varphi(t) = B^\top e^{(T-t)A^\top} \varphi_T = 0 \quad \forall t \in [0, T]$$

En dérivant $n-1$ fois par rapport à t en $t = T$. On obtient alors

$$B^\top \varphi_T = 0, \quad B^\top A^\top \varphi_T = 0, \quad \dots, \quad B^\top (A^\top)^{n-1} \varphi_T = 0$$

Ce qui revient à dire que $\varphi_T \in \text{Im}([A|B])^\perp$, mais d'après notre hypothèse on conclut donc que $\varphi_T = 0$ ainsi $\varphi \equiv 0$, d'où le résultat. □

Dans la suite on va étudier le cas où le contrôle est soumis à des contraintes.

2.4.2 Cas avec contraintes sur le contrôle

Considérons le système contrôlé suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) & t \in \mathbb{R}_+ \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (2.23)$$

Où $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ et l'ensemble des contrôles considérés est l'ensemble des applications mesurables et bornées sur \mathbb{R}_+ , à valeurs dans $\Omega \subset \mathbb{R}^m$.

2.4.2.1 Caractérisation de la nulle contrôlabilité local

Le résultat suivant donne une caractérisation de la nul contrôlabilité locale du système (2.23).

Théorème 2.6 [4, THEOREM 1.1.] *Considérons le système (2.23) où le domaine de contraintes $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ sur le contrôle contient $\mathbf{0}$ dans son intérieur (i.e $\mathbf{0} \in \overset{\circ}{\Omega}$), alors le système est localement nul contrôlable si, et seulement si, la condition de Kalman est vérifiée.*

la preuve de ce théorème est basé sur le résultat suivant :

Lemme 2.4 [17] *Sous la condition de Kalman précédente, si le domaine de contraintes $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ sur le contrôle contient $\mathbf{0}$ dans son intérieur, alors l'ensemble accessible $\text{Acc}(x_0, t)$ en temps t contient un voisinage du point $e^{tA}x_0$.*

Preuve du lemme *Supposons que la condition de Kalman est vérifiée, si le domaine de contraintes $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ sur le contrôle contient $\mathbf{0}$ dans son intérieur, alors il existe $S = \{u(\cdot) \in \mathcal{U} / |u_i(t)| \leq \varepsilon, \forall i = 1, \dots, m\}$ pour un certaine ε , telle que $\mathbf{0} \in S \subset \Omega$. Notons $\text{Acc}_S(x_0, t) = \left\{ x(t, x_0, u) = e^{tA}x_0 + \int_0^t e^{(t-s)A}Bu(s)ds / u(\cdot) \subset S \right\}$, alors $\text{Acc}_S(x_0, t) \subset \text{Acc}(x_0, t)$ de plus $\text{Acc}_S(x_0, t)$ est convexe et symétrique par rapport à $e^{tA}x_0$. Si $\dim(\text{Acc}_S(x_0, t)) < n$, alors il existe $\psi \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ telle que $\psi^\top \int_0^t e^{(t-s)A}Bu(s)ds = \mathbf{0}, \forall u(\cdot) \subset S$. Ceci implique que pour tout $s \in [0, t]$*

$$\psi^\top e^{(t-s)A}B = \mathbf{0}, \quad (2.24)$$

en particulier pour $s = t$ on a $\psi^\top B = \mathbf{0}$

On dérive l'équation (2.24) on obtient :

$$\psi^\top e^{(t-s)A}AB = \mathbf{0}$$

En particulier pour $s = t$ on a $\psi^\top AB = \mathbf{0}$. Ainsi de suite on obtiendra

$$\psi^\top B = \psi^\top AB = \dots = \psi^\top A^{n-1}B = \mathbf{0}$$

D'où $\psi^\top [A|B] = \mathbf{0}$ et donc le rang de la matrice $[A|B]$ vérifie $\text{rg}[A|B] < n$, contradiction. Donc $\dim(\text{Acc}_S(x_0, t)) = n$ et contient un voisinage du point $e^{tA}x_0$, ainsi $\text{Acc}(x_0, t)$ contient un voisinage du point $e^{tA}x_0$.

□

Revenants maintenant a la preuve du [théorème 2.6](#).

Preuve On a $u(\cdot) \subset \Omega$ est un contrôle admissible tel que la solution de (2.23) vérifiée $x(T, x_0, u) = 0$ en un temps fini T , si et seulement si $u(T - \cdot)$ est un contrôle qui dirige la solution du système suivant

$$\dot{x}(t) = -Ax(t) - Bu(t), \quad (2.25)$$

de 0 vers x_0 en temps T . Donc le domaine de nulle contrôlabilité du système (2.23) est précisément $Acc_-(0, \infty) = \cup_{t \geq 0} Acc_-(0, t)$ associée à (2.25).

\Rightarrow] Supposons que $\text{rg}[A|B] < n$, alors il existe $\psi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ telle que $\psi^\top [A|B] = 0$, d'où

$$\psi^\top B = \psi^\top AB = \dots = \psi^\top A^{n-1}B = 0$$

et d'après le théorème de Théorème de Cayley-Hamilton on a $\psi^\top A^n B = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc $\psi^\top e^{tA} B = 0 \forall t \geq 0$ ceci implique $\psi^\top \int_0^t e^{(s-t)A} Bu(s) ds = 0$. Or, les points de $Acc_-(0, \infty)$ sont de la forme $-\int_0^t e^{(s-t)A} Bu(s) ds$ donc $Acc_-(0, \infty)$ est l'hyperplan orthogonale à ψ , ce qui est impossible parce que $Acc_-(0, \infty)$ a un intérieur non vide.

\Leftarrow] Supposons que $\text{rg}[A|B] = n$, alors $\text{rg}[-A| -B] = n$ et d'après le lemme 2.4, $Acc_-(0, \infty)$ contient un voisinage de l'origine et donc le système est localement nul contrôlable.

Le théorème suivant donne une caractérisation de la nulle contrôlabilité local, et ceci dans le cas ou le domaine de contraintes Ω ne contient pas nécessairement l'origine.

Théorème 2.7 [4, THEOREM 1.4.] Considérons le système (2.23) où le domaine de contraintes $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ sur le contrôle satisfaisant les conditions suivantes :

$$\exists u \in \Omega / Bu = 0 \quad (2.26)$$

$$\widehat{\text{Conv}}(\Omega) \neq \emptyset \quad (2.27)$$

Alors le système est localement nul contrôlable si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

$$\text{rg}[A|B] = n \quad (2.28)$$

$$\text{Tout vecteur propre réel } v \text{ de } A^\top \text{ vérifie ; } \langle v, Bu \rangle > 0 \forall u \in \Omega. \quad (2.29)$$

Remarque 2.4 Notons que $\text{rg}[A|B] = \text{rg}[-A| -B]$ alors d'après le théorème 2.6 le système (2.23) est localement nul contrôlable si, et seulement si, le système (2.25) est localement nul contrôlable.

Proposition 2.4 [4] Le système (2.23) est localement nul contrôlable si, et seulement si, $Acc(0, \infty) = \cup_{t \geq 0} Acc(0, t)$ contient un voisinage de l'origine non réduit à $\{0\}$.

Preuve D'après la [remarque 2.4](#), le système (2.23) est localement nul contrôlable si, et seulement si, (2.25) est localement nul contrôlable. Alors $u(\cdot) \subset \Omega$ est un contrôle admissible tel que la solution de (2.25) vérifiée $x(T, x_0, u) = 0$ si et seulement si $u(T - \cdot)$ est un contrôle qui dirige la solution du système (2.23) de 0 vers x_0 . En effet ;

Soit $x(\cdot, x_0, u)$ la solution du système (2.25) tel que $x(T, x_0, u) = 0$

$$\begin{aligned} x(T, x_0, u) = 0 &\Leftrightarrow e^{-TA}x_0 - \int_0^T e^{-TA}e^{sA}Bu(s)ds = 0 \\ &\Leftrightarrow x_0 = \int_0^T e^{sA}Bu(s)ds \end{aligned}$$

Soit $y(t, 0, u)$ la solution du système (2.23) partant de 0. Alors on a :

$$y(t, 0, u) = e^{tA} \int_0^t e^{-sA}Bu(T-s)ds$$

D'où

$$\begin{aligned} y(T, 0, u) &= e^{TA} \int_0^T e^{-sA}Bu(T-s)ds \\ &= e^{TA} \int_0^T e^{(-T+t)A}Bu(t)ds \quad (t = T - s) \\ &= e^{TA}e^{-TA} \int_0^T e^{tA}Bu(t)ds \\ &= x_0 \end{aligned}$$

Donc d'après la définition de la nulle contrôlabilité ([Définitions 2.1](#)), le système (2.23) est localement nul contrôlable si et seulement si $\text{Acc}(0, \infty)$ pour le système (2.23) contient un voisinage de l'origine.

□

La preuve du [théorème 2.7](#) repose sur une évaluation du produit scalaire $\langle v, e^{tA}Bu \rangle$ où v est un n -vecteur et A, B, u sont tels que dans le théorème. L'expression nécessaire sera développée dans une série de lemmes.

Lemme 2.5 [[24](#), Lemma 3.2] Soit $D \in \mathcal{M}_l(\mathbb{R})$ une matrice qui n'a pas de valeurs propres réels et v, w deux l -vecteur, le produit scalaire $\langle v, e^{tD}w \rangle$ à la forme $\langle v, e^{tD}w \rangle = t^j e^{\rho t} (a(t) + g(t))$ Où $a(t)$ est une somme de termes sinusoïdaux $a(t) = \sum_{i=1}^s h_i \sin(\omega_i t + \theta_i)$ et $\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = 0$, où s est le nombre des valeurs propre de D . Si de plus $a(t) \equiv 0$ alors $g(t) \equiv 0$.

Lemme 2.6 [[4](#), LEMMA 2.4.] Le produit scalaire $\langle v, e^{tA}Bu \rangle$ peut s'écrire sous la forme

$$\langle v, e^{tA}Bu \rangle = \sum_{i=1}^k t^{j_i} e^{\lambda_i t} (\langle z_i, Bu \rangle + \langle f_i(t), Bu \rangle) + \sum_{i=k+1}^{k+p} e^{\rho_i t} \sum_{j=1}^m t^{r_{ij}} (a_{ij}(t) + g_{ij}(t)) u_j$$

avec

a) Les λ_i sont les k valeurs propres réelles distinctes de la matrice A , et

$$\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_k$$

b) $A^\top z_i = \lambda_i z_i \quad i = 1, \dots, k$

c) Si $z_i = 0$ alors $f_i(t) \equiv 0 \quad i = 1, \dots, k$

d) j_i et r_{ij} sont des entiers non négatifs

e) $\lim_{t \rightarrow \infty} f_i(t) = 0, \quad i = 1, \dots, k$ et $\lim_{t \rightarrow \infty} g_{ij}(t) = 0, \quad i = k + 1, \dots, k + p, \quad j = 1, \dots, m$

f) Les fonctions $a_{ij}(t)$ sont des sommes de termes sinusoidaux comme dans le lemme précédent.

g) Si $a_{ij}(t) \equiv 0$ alors $g_{ij}(t) \equiv 0, \quad i = k + 1, \dots, k + p, \quad j = 1, \dots, m$

h) les p_i sont les p parties réelles des p valeurs propres complexes de A et

$$\rho_1 > \rho_2 > \dots > \rho_k$$

i) les u_j sont les composantes de m -vecteur $u = (u_1 \ u_2 \ \dots \ u_m)^\top$

j) Si $\widehat{\text{Conv}}(\Omega) \neq \emptyset$ et $\text{rg}[A|B] = n$ alors il existe $u \in \Omega$ pour lequel $\langle v, e^{tA} B u \rangle \neq 0$

Preuve Notons que $\langle v, e^{tA} B u \rangle = \langle (e^{tA})^\top v, B u \rangle = \langle e^{tA^\top} v, B u \rangle$. Alors il suffit de prouver le lemme pour le produit interne $\langle e^{tA^\top} v, B u \rangle$ dans lequel la matrice A à la forme de J (préliminaire 1.10) et nous avons les projection P_i induite par A^\top . En utilisant les projections P_i , nous avons

$$\begin{aligned} e^{tA^\top} v &= \sum_{i=1}^{k+p} e^{tA^\top} P_i v \\ &= \sum_{i=1}^k e^{tA^\top P_i} P_i v + \sum_{i=k+1}^{k+p} e^{tA^\top P_i} P_i v \end{aligned}$$

D'après l'équation (1.17), la premier somme peut s'écrire sous la forme

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k e^{tA^\top P_i} P_i v &= \sum_{i=1}^k \exp(t(\lambda_i I_n + N_i) P_i) P_i v \\ &= \sum_{i=1}^k \exp(t(\lambda_i I_n + N_i)) P_i v \\ &= \sum_{i=1}^k t^{j_i} e^{\lambda_i t} (z_i + f_i(t)) \end{aligned}$$

On multiplie l'équation par P_i à gauche on obtient $P_i z_i = z_i$, d'après la preuve du théo-

rème 1.2 on a $N_i z_i = 0$, donc

$$\begin{aligned} A^\top z_i &= A^\top P_i z_i = (\lambda_i I_n + N_i) P_i z_i \\ &= (\lambda_i I_n + N_i) z_i = \lambda_i I_n z_i + N_i z_i \\ &= \lambda_i z_i \end{aligned}$$

Alors $e^{tA^\top} v$ devient

$$e^{tA^\top} v = \sum_{i=1}^k t^{j_i} e^{t\lambda_i} (z_i + f_i(t)) + \sum_{i=k+1}^{k+p} e^{tA^\top P_i} P_i v$$

D'où

$$\langle e^{tA^\top} v, Bu \rangle = \sum_{i=1}^k t^{j_i} e^{t\lambda_i} (\langle z_i, Bu \rangle + \langle f_i(t), Bu \rangle) + \sum_{i=k+1}^{k+p} \langle e^{tA^\top P_i} P_i v, Bu \rangle$$

Ainsi on a prouver a), b), c) et la première partie de d) et e).

Considérons maintenant la deuxième somme de $\langle e^{tA^\top} v, Bu \rangle$ c'est-à-dire $\sum_{i=k+1}^{k+p} \langle e^{tA^\top P_i} P_i v, Bu \rangle$,

puisque $Bu = \sum_{j=1}^m b_j u_j$ où $b_j, \forall j = 1, \dots, m$ sont les vecteurs colonnes de la matrice B , et $u_j, \forall j = 1, \dots, m$ sont les composantes du vecteur u , nous avons la double somme suivante

$$\sum_{i=k+1}^{k+p} \langle e^{tA^\top P_i} P_i v, Bu \rangle = \sum_{i=k+1}^{k+p} \sum_{j=1}^m \langle e^{tA^\top P_i} P_i v, b_j \rangle u_j$$

Considérons le produit interne $\langle e^{tA^\top P_i} P_i v, b_j \rangle$, la matrice $A^\top P_i$ n'est pas en générale une matrice oscillatoire. Si $A^\top P_i$ est considérée comme une transformation restreinte à l'image de P_i sur \mathbb{R}^n , alors $A^\top P_i$ est une matrice oscillatoire et on a $\langle e^{tA^\top P_i} P_i v, b_j \rangle = \langle e^{tA^\top P_i} P_i v, P_i b_j \rangle$ or d'après le lemme précédent on obtient

$$\langle e^{tA^\top P_i} P_i v, b_j \rangle = e^{t\rho_i} t^{r_{ij}} (a_{ij}(t) + g_{ij}(t))$$

d'où

$$\sum_{j=1}^m \langle e^{tA^\top P_i} P_i v, b_j \rangle u_j = e^{t\rho_i} \sum_{j=1}^m t^{r_{ij}} (a_{ij}(t) + g_{ij}(t)) u_j$$

Donc

$$\begin{aligned} \langle v, e^{tA} Bu \rangle &= \langle e^{tA^\top} v, Bu \rangle \\ &= \sum_{i=1}^k t^{j_i} e^{t\lambda_i} (\langle z_i, Bu \rangle + \langle f_i(t), Bu \rangle) + \sum_{i=k+1}^{k+p} e^{t\rho_i} \sum_{j=1}^m t^{r_{ij}} (a_{ij}(t) + g_{ij}(t)) u_j \end{aligned}$$

d'où d), e), f), g), h) et i). Il nous reste à montrer l'assertion j).

Supposons que

$$\widehat{\text{Conv}}(\Omega) \neq \emptyset \text{ et } v \neq 0, \text{ t.q. } \langle v, e^{tA}Bu \rangle \equiv 0 \quad \forall u \in \Omega$$

en particulier pour $t = 0$ on a

$$\langle v, Bu \rangle \quad \forall u \in \Omega.$$

Par dérivation et évaluation en temps $t = 0$ on obtient :

$$\langle v, ABu \rangle \equiv 0, \langle v, A^2Bu \rangle \equiv 0, \dots, \langle v, A^{n-1}Bu \rangle \equiv 0 \quad \forall u \in \Omega$$

d'où

$$\langle B^T v, u \rangle \equiv 0, \langle B^T A^T v, u \rangle \equiv 0, \dots, \langle B^T (A^T)^{n-1} v, u \rangle \equiv 0 \quad \forall u \in \Omega$$

Or $\widehat{\text{Conv}}(\Omega) \neq \emptyset$ alors tous les vecteurs $B^T v, B^T A^T v, \dots, B^T (A^T)^{n-1} v$ sont perpendiculaire à m vecteur indépendants, alors $v^T \text{rg}[A|B] = 0 \Rightarrow \text{rg}[A|B] < n$ absurde, d'où le résultat. □

Passons maintenant à la preuve du [théorème 2.7](#).

Preuve Nous pouvons maintenant utiliser les résultats précédents et montrer le théorème.

On a

$$\begin{aligned} -v \text{ est une v.p. de la matrice } -A^T &\Leftrightarrow v \text{ est une v.p. de la matrice } A^T \\ \text{et } \text{rg}[A|B] = n &\Leftrightarrow \text{rg}[-A| -B] = n \end{aligned}$$

Donc le système (2.25) satisfait (2.28) et (2.29) du théorème si et seulement si (2.23) satisfait les conditions (2.28) et (2.29) du théorème. D'où pour prouver le théorème, il est nécessaire et suffisant de montrer que $\text{Acc}(0, t)$ contient un voisinage ouvert de l'origine pour certain $t > 0$. D'après le lemme précédent et l'hypothèse du théorème ($u \in \Omega$ t.q. $Bu = 0$), si $t_1 < t_2$ alors $\text{Acc}(0, t_1) \subset \text{Acc}(0, t_2)$ et $0 \in \text{Acc}(0, t) \quad \forall t > 0$, donc $\text{Acc}(0, \infty) = \bigcup_{t \geq 0} \text{Acc}(0, t)$ est l'union d'une suite croissante d'ensembles convexes et est donc un ensemble convexe contenant l'origine. Si $0 \in \widehat{\text{Acc}}(0, \infty)$ alors il existe $n + 1$ point dans $\text{Acc}(0, \infty)$ dont l'enveloppe convexe contient l'origine à l'intérieur, ces points doivent être contenus dans $\text{Acc}(0, t)$ pour un certain $t > 0$. Puisque $\text{Acc}(0, t)$ est une suite d'ensemble croissante. Alors $0 \in \widehat{\text{Acc}}(0, \infty)$ si, et seulement si, $0 \in \widehat{\text{Acc}}(0, t)$ pour un certain $t > 0$, ainsi montrer le théorème revient à montrer que (2.28) et (2.29) sont des conditions nécessaire et suffisant pour que $0 \in \widehat{\text{Acc}}(0, \infty)$.

Supposons maintenant que $0 \notin \widehat{\text{Acc}}(0, \infty)$ i.e $0 \in \partial \text{Acc}(0, \infty)$, alors il existe un hyperplan d'appui à $\text{Acc}(0, \infty)$ au point 0 , avec un vecteur normal unitaire

$$v \text{ t.q. } \langle v, x(t, u(\cdot)) \rangle \leq \langle v, 0 \rangle = 0 \quad \forall t > 0, \quad \forall u \in \Omega$$

Or $x(t, u(\cdot)) = \int_0^t e^{(t-s)A} B u(s) ds$ alors le vecteur v satisfait

$$\langle v, e^{tA} B u \rangle \leq 0, \forall t > 0, \forall u \in \Omega. \quad (2.30)$$

Réciproquement, si $0 \in \widehat{\text{Acc}}(0, \infty)$, il est clair qu'il n'existe pas de vecteur non nul satisfaisant (2.30), donc on a prouvé le lemme suivant :

Lemme 2.7 [4] Le système (2.23) est contrôlable si, et seulement si, il n'existe pas de vecteur non nul qui satisfait (2.30)

\Rightarrow] Montrons que les conditions (2.28) et (2.29) sont nécessaires pour que le système (2.23) soit localement nul contrôlable. Supposons que la condition (2.28) n'est pas vérifiée i.e. $\text{rg}[A|B] < n$ alors $\exists v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tel que $v^\top [A|B] = 0$ ceci implique $v^\top e^{tA} B = 0$ d'où $\langle v, e^{tA} B u \rangle = 0, \forall t > 0, \forall u \in \Omega$

Supposons maintenant que la condition (2.29) n'est pas vérifiée, alors on a :

$$\langle v, e^{tA} B u \rangle = \langle e^{tA^\top} v, B u \rangle = e^{t\lambda} \langle v, B u \rangle \leq 0, \forall t > 0, \forall u \in \Omega$$

D'où la condition nécessaire.

\Leftarrow] Montrons que les conditions (2.28) et (2.29) sont suffisantes, pour que le système (2.23) soit localement exactement nul contrôlable. Plus précisément, montrons que si (2.28) et (2.29) sont satisfaites, alors il n'existe pas $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tel que $\langle v, e^{tA} B u \rangle \leq 0, \forall t > 0, \forall u \in \Omega$ d'après le lemme 2.6 on a :

$$\langle v, e^{tA} B u \rangle = \sum_{i=1}^k t^{j_i} e^{\lambda_i t} (\langle z_i, B u \rangle + \langle f_i(t), B u \rangle) + \sum_{i=k+1}^{k+p} e^{\rho_i t} \sum_{j=1}^m t^{r_{ij}} (a_{ij}(t) + g_{ij}(t)) u_j \leq 0 \quad (2.31)$$

La preuve sera déviée en trois cas :

Cas 1

$$\lambda_1 \geq \rho_1 \text{ et } j_1 > \max_j r_{1j} \equiv r_1 \quad (2.32)$$

Pour tout $t > 0$ on divise l'équation (2.31) par $t^{j_1} e^{t\lambda_1}$, on obtient $\langle z_1, B u \rangle + F(t) \leq 0$ où $F(t) = \langle f_1(t), B u \rangle + \frac{1}{t^{j_1} e^{t\lambda_1}} \left[\sum_{i=2}^k t^{j_i} e^{\lambda_i t} (\langle z_i, B u \rangle + \langle f_i(t), B u \rangle) + \sum_{i=k+1}^{k+p} e^{\rho_i t} \sum_{j=1}^m t^{r_{ij}} (a_{ij}(t) + g_{ij}(t)) u_j \leq 0 \right]$. D'après les hypothèses de (2.32) on a $\lim_{t \rightarrow \infty} F(t) = 0, \forall u \in \Omega$, ceci est contredit la condition (2.29).

Cas 2

$$\lambda_1 \leq \rho_1 \text{ et } j_1 < \max_j r_{1j} \equiv r_1 \quad (2.33)$$

Pour tout $t > 0$ on divise l'équation (2.31) par $t^{r_1} e^{t\rho_1}$, on obtient $\sum_{l_j} \left(a_{1l_j}(t) + g_{1l_j}(t) \right) u_{l_j} + G(t) \leq 0$ La sommation apparaît parce qu'il peut arriver que $r_1 = r_{1l_1} = r_{1l_2}$ pour deux distincts indices l_1 et l_2 , la fonction $G(t)$ est analogue à $F(t)$

et $\lim_{t \rightarrow \infty} G(t) = 0$, $\forall u \in \Omega$, rappelons que les fonctions sont des sommes sinusoïdales et donc des fonctions presque périodiques de t , d'où $\sum_{l_j} a_{1l_j}(t)u_{l_j} \leq H(t)$, où $H(t) = G(t) + \sum_{l_j} g_{1l_j}(t)u_{l_j}$, d'où d'après [24, lemma.4.1] on a : $\sum_{l_j} a_{1l_j}(t)u_{l_j} \equiv 0$, il s'ensuit par un choix spécial de u que chaque $a_{1l_j} \equiv 0$, alors les termes r_{1j} sont tous nuls et par conséquent, ne seraient pas considérés.

Cas 3 $\lambda_1 = \rho_1$ et $j_1 = \max_j r_{1j} \equiv r_1$

Pour tout $t > 0$ on divise l'équation (2.31) par $t^{j_1}e^{t\lambda_1} = t^{r_1}e^{t\rho_1}$, on obtient $\langle z_1, Bu \rangle + \sum_{l_j} a_{1l_j}(t)u_{l_j} + J(t) \leq 0$ où $\lim_{t \rightarrow \infty} J(t) = 0$, $\forall u \in \Omega$, et si $\sum_{l_j} a_{1l_j}(t)u_{l_j} \equiv 0$ alors $J(t) \equiv 0 \forall t > 0$, donc $\langle z_1, Bu \rangle \leq 0 \forall u \in \Omega$, ceci contredit la condition 2.29.

D'où la preuve est achevée. □

Dans le cas mono-entrée $m = 1$ et $\Omega = [0, 1]$, on a le résultat suivant.

Corollaire 2.2 le système (2.23) avec $m = 1$, et $\Omega = [0, 1]$, est localement nul contrôlable si, et seulement si, $\text{rg}[A|B] = n$ et $\forall \lambda \in \sigma(A)$ on a $\Im(\lambda) \neq 0$ (où $\Im(\lambda)$ est la partie imaginaire de λ).

Preuve On a $\Omega = [0, 1]$, les hypothèses du théorème précédent sont vérifiées, s'il existe v un vecteur propre de A^\top , on a deux cas : soit $\langle v, B \rangle \leq 0$ soit $\langle -v, B \rangle \leq 0$ d'où $\langle v, Bu \rangle \leq 0$ soit $\langle -v, Bu \rangle \leq 0 \forall u \in \Omega$, si A^\top a une valeur propre réelle, alors la condition (2.29) n'est pas satisfait. D'où le résultat. □

Passons maintenant à la nulle contrôlabilité globale.

2.4.2.2 Caractérisation de la nulle contrôlabilité global

Le théorème suivant donne une caractérisation de la nulle contrôlabilité global, et ceci dans le cas ou le domaine de contraintes sur le contrôle Ω ne contient pas nécessairement l'origine.

Théorème 2.8 [4, theorem 3.5] Considérons le système (2.23) où le domaine de contraintes $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ sur le contrôle est borné et satisfaisant les hypothèses du théorème 2.7, alors le système est nul contrôlable si, et seulement si, les conditions (2.28) et (2.29) sont vérifiées, et $\forall \lambda \in \sigma(A)$ on a $\Re(\lambda) \leq 0$.

Le résultat suivant concerne le cas ou $0 \in \mathring{\Omega}$.

Théorème 2.9 [17, p.85] Considérons le système (2.23) où le domaine de contraintes $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ sur le contrôle contenant 0 dans son intérieur ($0 \in \mathring{\Omega}$), si $\text{rg}[A|B] = n$ et $\forall \lambda \in \sigma(A)$ on a $\Re(\lambda) < 0$. Alors tout point de \mathbb{R}^n peut être conduit à l'origine en temps fini.

Remarque 2.5 Les propriétés de nul contrôlabilité globale sont reliées aux propriétés de stabilité de la matrice A (voir Chapitre 5).

De plus si le système est mono-entrée i.e. $m = 1$, on a le résultat plus précis suivant :

Théorème 2.10 [17] *Considérons le système (2.23) avec contrainte sur le contrôle Ω , contenant 0 dans son intérieur (i.e. $0 \in \overset{\circ}{\Omega}$), alors le système est nul contrôlable si, et seulement si, $\text{rg}[A|B] = n$ et $\forall \lambda \in \sigma(A)$ on a $\Re(\lambda) \leq 0$.*

Exemple 2.3 Soit le système contrôlé suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), & t \in \mathbb{R}_+ \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

avec $u(t) \in \Omega = [-1, 1]$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ d'après un simple calcul nous avons obtenue que $\sigma(A) = \{-i, i\}$ donc $\forall \lambda \in \sigma(A)$, $\Re(\lambda) = 0$. Et $[A|B] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ d'où $\text{rg}[A|B] = 2$ donc le système est nul contrôlable.

2.5 Contrôlabilité des systèmes dynamiques

Dans cette partie on s'intéresse au cas ou les applications $A(\cdot) : [0, T] \rightarrow \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ et $B(\cdot) : [0, T] \rightarrow \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ dépendant de temps t . Considérons le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) & t \in [0, T] \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (2.34)$$

Où $A(\cdot) \in L^\infty([0, T], \mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$, $B(\cdot) \in L^\infty([0, T], \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R}))$ et $\mathcal{U} = L^2([0, T], \mathbb{R}^m)$.

2.5.1 Test sur la Grammienne de contrôlabilité

Définition 2.3 La Grammienne de contrôlabilité du système (2.34) est définie par :

$$G(T) = \int_0^T M_A(t)^{-1} B(t) B(t)^\top M_A(t)^{-1\top} dt$$

Le théorème suivant donne une condition nécessaire et suffisante de contrôlabilité exacte dans le cas dynamique.

Théorème 2.11 [29, p.35, Théorème 2.3.1.] *Le système (2.34) est exactement contrôlable en temps T si et seulement si la Grammienne de contrôlabilité $G(T)$ est inversible.*

Remarque 2.6 On a $G(T) = G(T)^\top$ et $x^\top G(T)x \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$, donc $G(T)$ est une matrice symétrique semi-définie positive (i.e. $x^\top Ax > 0$, pour tout vecteur $x \in \mathbb{R}^n$).

Preuve D'après la formule de variation de la constante, la solution du système (2.34) s'écrit sous la forme $x(t, x_0, u) = M_A(t)x_0 + M_A(t) \int_0^t M_A(s)^{-1}B(s)u(s)ds$
 \Leftarrow] supposons que la Grammienne de contrôlabilité est inversible, posons

$$u(t) = B(t)^\top M_A(t)^{-1\top} \psi, \quad \psi \in \mathbb{R}^n,$$

alors on a :

$$\begin{aligned} x(T, x_0, u) &= M_A(T)x_0 + M_A(T) \int_0^T M_A(s)^{-1}B(s)u(s)ds \\ &= M_A(T)x_0 + M_A(T) \int_0^T M_A(s)^{-1}B(s)B(s)^\top M_A(s)^{-1\top} ds \psi \\ &= M_A(T)x_0 + M_A(T)G(T)\psi \end{aligned}$$

d'où il suffit de prendre $\psi = G(T)^{-1}M_A(T)^{-1}(x_d - M_A(T)x_0)$ pour avoir $x(T, x_0, u) = x^d$, ainsi le système (2.34) est exactement contrôlable en temps T . \Rightarrow] Supposons que $G(T)$ n'est pas inversible, alors $\exists \psi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tel que $\psi^\top G(T)\psi = 0$

$$\begin{aligned} \psi^\top G(T)\psi = 0 &\Rightarrow \psi^\top \int_0^T M_A(t)^{-1}B(t)B(t)^\top M_A(t)^{-1\top} dt \psi = 0 \\ &\Rightarrow \int_0^T \psi^\top M_A(t)^{-1}B(t)B(t)^\top M_A(t)^{-1\top} \psi dt = 0 \\ &\Rightarrow \int_0^T \|B(t)^\top M_A(t)^{-1\top} \psi\|^2 dt = 0 \end{aligned}$$

Ainsi pour tout contrôle $u(\cdot)$, on a : $B(t)^\top M_A(t)^{-1\top} \psi = 0$ sur $[0, T]$, d'où

$$\psi^\top \int_0^T M_A(t)^{-1}B(t)u(t)dt = 0 \quad (2.35)$$

Posons $\psi_1 = M_A(T)^{-1\top} \psi$ alors $\psi = M_A(T)^\top \psi_1$ d'où $\psi^\top = \psi_1^\top M_A(T)$, d'après (2.35)

$$\begin{aligned} \psi_1^\top M_A(T) \int_0^T M_A(t)^{-1}B(t)u(t)dt &= 0 \\ \Rightarrow \psi_1^\top \left(M_A(T)x_0 + M_A(T) \int_0^T M_A(t)^{-1}B(t)u(t)dt - M_A(T)x_0 \right) &= 0 \\ \Rightarrow \psi_1^\top \left(x(T, x_0, u) - M_A(T)x_0 \right) &= 0. \end{aligned}$$

Alors $x(T, x_0, u) - M_A(T)x_0 \in \psi_1^\perp \Rightarrow x(T, x_0, u) \in M_A(T)x_0 + \psi_1^\perp \neq \mathbb{R}^n$ (car $M_A(T)x_0 + \psi_1^\perp$ est un hyperplan de dimension $n - 1$ et $\dim \mathbb{R}^n = n$). D'où le système (2.34) n'est pas exactement contrôlable, d'où le résultat. □

Remarque 2.7 On remarque d'après la preuve du théorème que le contrôle qui garantit la

contrôlabilité exacte s'écrit :

$$u(t) = B(t)^\top M_A(t)^{-1\top} G(T)^{-1} M_A(T)^{-1} (x_d - M_A(t)x_0) \quad (2.36)$$

Exemple 2.4 Considérons le système de contrôle suivant :

$$\dot{x}_1 = u, \quad \dot{x}_2 = x_1 + tu$$

où $u \in \mathbb{R}$ et $(x_1, x_2)^\top \in \mathbb{R}^2$, $T > 0$. Posons $x = (x_1, x_2)^\top$ alors le système peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \quad \forall t \in [0, T]$$

où $A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. On a

$$M_A(t)^{-1} = e^{-tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-t)^k}{k!} A^k = I - tA,$$

par un simple calcul on obtiendra

$$M_A(t)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -t & 1 \end{pmatrix}.$$

D'où la Grammienne de contrôlabilité est :

$$G(T) = \int_0^T M_A(t)^{-1} B(t) B(t)^\top M_A(t)^{-1\top} dt = \begin{pmatrix} T & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det(G(T)) = 0 \Rightarrow G(T) \text{ n'est pas inversible}$$

Donc le système n'est pas exactement contrôlable.

2.5.2 Test CHENG

Dans cette partie on considère le système

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) & t \in \mathbb{R}_+ \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (2.37)$$

Où $A(\cdot)$ et $B(\cdot)$ sont des applications telles que $A(\cdot) \in C^{n-2}(\mathbb{R}_+, \mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ et $B(\cdot) \in C^{n-1}(\mathbb{R}_+, \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R}))$. Définissons par récurrence la suite suivante :

$$\begin{cases} B_0(t) = B(t) \\ B_i(t) = A(t)B_{i-1}(t) - \frac{d}{dt}B_{i-1}(t), \quad 1 \leq i \leq n-1. \end{cases}$$

Comme dans le cas stationnaire, nous introduisons la matrice de Kalman désignée par :

$$[A|B](t) = \left(B_0(t) \quad B_1(t) \quad \cdots \quad B_{n-1}(t) \right)$$

Théorème 2.12 [7] *Sous les hypothèses précédentes, on a alors*

1. *Si il existe $t > 0$ tel que $\text{rg}[A|B](t) = n$, alors le système (2.37) est nul contrôlable.*
2. *Si de plus les applications $A(\cdot), B(\cdot)$ sont analytiques sur \mathbb{R}_+ , alors le système (2.37) est nul contrôlable, et seulement si, il existe $t > 0$ tel que $\text{rg}[A|B](t) = n$.*

Remarque 2.8 *Dans le cas autonome, on retrouve la condition de Kalman.*

La preuve du théorème précédent est basée sur les résultats suivants.

Lemme 2.8 [7, lemma.1] *Le système (2.37) est nul contrôlable si et seulement si $\forall \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $\mathbf{y}^\top M_A(t)^{-1} B(t) \neq 0$ pour un certain $t > 0$.*

Lemme 2.9 [7, lemma2] *Supposons que $A(\cdot), B(\cdot)$ sont analytiques, posons*

$$[A|B]_j(t) = \left(B_0(t) \quad B_1(t) \quad \cdots \quad B_{j-1}(t) \right), \quad j \in \mathbb{N}$$

alors il existe $k \leq n - 1$ et un ouvert non vide $\Theta \subset (0, M)$ tel que pour chaque $t \in \Theta$ $\text{rg}[A|B]_k(t) = \text{rg}[A|B]_{k+j}(t)$, $j \in \mathbb{N}$.

Remarque 2.9 *Notons que $z(t) = M_A(t)^{-1\top} \mathbf{y}$ est la solution du système*

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = -A(t)^\top z(t) \\ z(0) = \mathbf{y} \end{cases}$$

Passons maintenant au preuve du [théorème 2.12](#)

Preuve 1.) *Supposons qu'il existe $t > 0$ tel que $\text{rg}[A|B](t) = n$ mais le système (2.34) n'est pas nul contrôlable. D'après le [lemme 2.8](#) $\exists \mathbf{y}_0 \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tel que $\mathbf{y}_0^\top M_A(s)^{-1} B(s) = 0 \forall t > 0$, posons $z(s, \mathbf{y}_0) = M_A(s)^{-1\top} \mathbf{y}_0$ alors $z(s, \mathbf{y}_0)^\top B(s) = 0 \forall s > 0$, d'où :*

$$\frac{d}{ds} \left(z(s, \mathbf{y}_0)^\top B(s) \right) = \dot{z}(s, \mathbf{y}_0)^\top B(s) + z(s, \mathbf{y}_0)^\top \dot{B}(s) = 0$$

donc, pour tout $s > 0$, on a

$$\begin{aligned} -\dot{z}(s, \mathbf{y}_0)^\top B(s) - z(s, \mathbf{y}_0)^\top \dot{B}(s) &= 0, \\ z(s, \mathbf{y}_0)^\top A(s)B(s) - z(s, \mathbf{y}_0)^\top \dot{B}(s) &= 0, \\ z(s, \mathbf{y}_0)^\top [A(s)B(s) - \dot{B}(s)] &= 0, \end{aligned}$$

$$z(s, y_0)^\top B_1(s) = 0,$$

ainsi de suite par différentiation, on obtient :

$$z(s, y_0)^\top B_i(s) = 0 \quad \forall s > 0, \quad \forall i = 1, \dots, n-1$$

Or $z(s, y_0) \neq 0 \quad \forall s > 0$ donc $z(s, y_0)^\top [A|B](s) = 0, \quad \forall s > 0$, ainsi

$$\text{rg}[A|B](s) < n, \quad \forall s > 0$$

absurde d'où (1).

2.) Supposons que $\text{rg}[A|B]_n(t) < n, \quad \forall t > 0$ et montrons que le système (2.37) n'est pas nul contrôlable. Soit $\tau \in \Theta$ où Θ l'ouvert définie dans le lemme 2.9, et soient b_0, b_1, \dots, b_k la famille maximale des colonnes linéairement indépendants de $[A|B](\tau) = [A|B]_{n-1}(\tau)$, car $\text{rg}[A|B]_k(\tau) = \text{rg}[A|B](\tau)$. Alors on choisi $y_0 \neq 0$ tel que $z(\tau, y_0) = M_A(\tau)^{-1\top} y_0$ est orthogonal à b_0, b_1, \dots, b_k (ceci est possible car $M_A(\tau)$ est inversible et b_1, \dots, b_k sont linéairement indépendants), alors

$$0 = \frac{d^j}{dt^j} \left(z(t, y_0)^\top B(t) \right)_{t=\tau} = (z(\tau, y_0)^\top B_j(t)) \quad \forall j \in \mathbb{N}$$

puisque $A(\cdot), B(\cdot)$ et $z(\cdot, y_0)$ sont analytiques donc $z(\cdot, y_0)^\top B(\cdot)$ est aussi analytique et on a $z(\cdot, y_0)^\top B(\cdot) \equiv 0 \quad \forall t > 0$, donc d'après le lemme 2.8 le système (2.37) n'est pas nul contrôlable, d'ou le résultat.

□

Remarque 2.10 La condition suffisons décrit dans le théorème président n'est pas nécessaire en général. En effet, considérons le système suivant :

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \quad t \in \mathbb{R}_+$$

tel que $x \in \mathbb{R}^2$, $A(t) = \begin{pmatrix} -a & 0 \\ 0 & -b \end{pmatrix}$, $B(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix}$ où

$$\begin{aligned} f_1(t) &= \begin{cases} \sin(t) & \text{si } 2k\pi \leq t < (2k+1)\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \\ 0 & \text{si } (2k+1)\pi \leq t < 2(k+1)\pi, \end{cases} \\ f_2(t) &= f_1(t + \pi) \end{aligned}$$

Il est claire que $f_1(t) = 0 \Leftrightarrow f_2(t) \neq 0$, on a $[A|B](t) = \begin{pmatrix} B_0(t) & B_1(t) \end{pmatrix}$, par un simple calcul on obtient : $B_0(t) = B(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix}$, ainsi

$$B_1(t) = A(t)B_0(t) - \frac{d}{dt}B_0(t) = \begin{pmatrix} -af_1(t) - f_1'(t) \\ -bf_2(t) - f_2'(t) \end{pmatrix}$$

Donc

$$[A|B](t) = \begin{pmatrix} f_1(t) & -af_1(t) - f_1'(t) \\ f_2(t) & -bf_2(t) - f_2'(t) \end{pmatrix}$$

D'où $\forall t > 0 \operatorname{rg}[A|B](t) = 1$ (car l'un des deux lignes sera nulle et le rang de $[A|B](t)$ est la dimension du sous-espace engendré par les lignes de $[A|B](t)$), pourtant le système est nul contrôlable en effet : la Grammienne de contrôlabilité du système en 3π est

$$G(3\pi) = \int_0^{3\pi} M_A(t)^{-1} B(t) B(t)^\top M_A(t)^{-1\top} dt,$$

par un simple calcul on obtient

$$G(3\pi) = \begin{pmatrix} \int_0^{3\pi} (f_1(t) \exp(ta))^2 dt & 0 \\ 0 & \int_0^{3\pi} (f_2(t) \exp(tb))^2 dt \end{pmatrix}$$

le déterminons de la Grammienne :

$$\det(G(3\pi)) = \int_0^{3\pi} (f_1(t) \exp(ta))^2 dt \int_0^{3\pi} (f_2(t) \exp(tb))^2 dt \neq 0$$

donc la Grammienne est inversible, ceci implique que le système est nul contrôlable en 3π et par suite le système est nul contrôlable.

Exemple 2.5 Considérons le système suivant :

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \quad t \in \mathbb{R}_+$$

tel que, $B(t) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & e^{-t} \end{pmatrix}$ et $A(t) = \begin{pmatrix} -(1 + e^{-t}) & -1 & 0 \\ 1 + 3e^{-t} & 0 & -1 \\ -3e^{-t} & 0 & 0 \end{pmatrix}$, d'après des

calculs on obtient :

$$B_1(t) = \begin{pmatrix} 1 & -e^{-t} & e^{-t} \end{pmatrix}^\top, \quad B_2(t) = \begin{pmatrix} -1 & 1 + e^{-t} & -2e^{-t} \end{pmatrix}$$

d'où

$$[A|B](t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & -e^{-t} & 1 + e^{-t} \\ e^{-t} & e^{-t} & -2e^{-t} \end{pmatrix}.$$

On remarque que $C_3 = -C_2 - C_1$, ceci implique $\operatorname{rg}([A|B](t)) < 2 \forall t > 0$, donc le système n'est pas nul contrôlable.

2.5.3 L'approche "HUM"

Dans cette section, nous allons décrire une méthode appelée méthode d'unicité hilbertienne (HUM), présenté par J.L. Lions [18] pour étudier les problèmes de contrôla-

bilité. Nous considérons à nouveau le système suivant

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) & t \in [0, T] \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (2.38)$$

où $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ et $U = L^2([0, T], \mathbb{R}^m)$.

Le système adjoint associe est le suivant

$$\begin{cases} \dot{\varphi}(t) = -A^\top \varphi & t \in [0, T] \\ \varphi(T) = \varphi_T \end{cases} \quad (2.39)$$

la solution de (2.39) peut s'écrire $\varphi(t) = e^{(T-t)A^\top} \varphi_T$.

Définition 2.4 On dit que le système (2.39) est observable en temps $T > 0$ s'il existe une constante $C(T) > 0$ tel que pour tout $\varphi_T \in \mathbb{R}^n$ la solution de (2.39) satisfasse

$$\|e^{TA^\top} \varphi_T\|_{\mathbb{R}^n}^2 = \|\varphi(0)\|_{\mathbb{R}^n}^2 \leq C_o \int_0^T \|B^\top \varphi(t)\|_{\mathbb{R}^n}^2 dt \quad (2.40)$$

On multiplions le système (2.38) par la solution φ du système (2.39), on obtient en intégrant par parties

$$\int_0^T \langle u(t), B(t)^\top \varphi(t) \rangle_{\mathbb{R}^m} dt = \langle x_0, \varphi(0) \rangle_{\mathbb{R}^n} - \langle x(T), \varphi(T) \rangle_{\mathbb{R}^n}$$

En effet ; $\int_0^T \langle \dot{x}, \varphi \rangle_{\mathbb{R}^n} dt = \int_0^T \langle Ax, \varphi \rangle_{\mathbb{R}^n} + \langle Bu, \varphi \rangle_{\mathbb{R}^n} dt$

or $\int_0^T \langle \dot{x}, \varphi \rangle_{\mathbb{R}^n} dt = \langle x(T), \varphi(T) \rangle_{\mathbb{R}^n} - \langle x(0), \varphi(0) \rangle_{\mathbb{R}^n} - \int_0^T \langle x, \dot{\varphi} \rangle_{\mathbb{R}^n} dt$.

Alors $\langle x(T), \varphi(T) \rangle_{\mathbb{R}^n} - \langle x(0), \varphi(0) \rangle_{\mathbb{R}^n} - \int_0^T \langle x, \dot{\varphi} \rangle_{\mathbb{R}^n} dt = \int_0^T \langle Ax, \varphi \rangle_{\mathbb{R}^n} + \langle Bu, \varphi \rangle_{\mathbb{R}^n} dt$

d'où $\int_0^T \langle x, A^\top \varphi \rangle_{\mathbb{R}^n} dt - \int_0^T \langle Ax, \varphi \rangle_{\mathbb{R}^n} + \langle Bu, \varphi \rangle_{\mathbb{R}^n} dt = \langle x(0), \varphi(0) \rangle_{\mathbb{R}^n} - \langle x(T), \varphi(T) \rangle_{\mathbb{R}^n}$

donc $-\int_0^T \langle Bu, \varphi \rangle_{\mathbb{R}^n} dt = \langle x(0), \varphi(0) \rangle_{\mathbb{R}^n} - \langle x(T), \varphi(T) \rangle_{\mathbb{R}^n}$

finalement

$$\int_0^T \langle u(t), B^\top \varphi \rangle_{\mathbb{R}^n} dt = \langle x(T), \varphi(T) \rangle_{\mathbb{R}^n} - \langle x(0), \varphi(0) \rangle_{\mathbb{R}^n}$$

On considère la forme bilinéaire suivant

$$a(\varphi_T, w_T) = \int_0^T \langle B^\top e^{(T-t)A^\top} \varphi_T, B^\top e^{(T-t)A^\top} w_T \rangle dt$$

grâce à l'inégalité d'observabilité $a(\cdot, \cdot)$ définie un produit scalaire sur \mathbb{R}^n . On considère alors la forme linéaire suivante

$$L_{x_0}(\varphi_T) = \langle x_0, e^{TA^\top} \varphi_T \rangle_{\mathbb{R}^n} = \langle x_0, \varphi(0) \rangle_{\mathbb{R}^n}$$

$L_{x_0}(\cdot)$ est continue sur \mathbb{R}^n , en effet ;

$$\begin{aligned} |L_{x_0}(\varphi_T)| &\leq \|x_0\|_{\mathbb{R}^n} \|\varphi(0)\|_{\mathbb{R}^n} \\ &\leq C_0 \|x_0\|_{\mathbb{R}^n} [a(\varphi_T, \varphi_T)]^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

comme $a(\cdot, \cdot)$ est un produit scalaire sur \mathbb{R}^n , alors $a(\cdot, \cdot)^{\frac{1}{2}}$ est une norme sur \mathbb{R}^n , donc la forme linéaire $L_{x_0}(\cdot)$ est continue.

Le théorème de représentation de Riesz donne alors l'existence et l'unicité de $\varphi_T^* \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$a(\varphi_T^*, \varphi_T) = L_{x_0}(\varphi_T) \quad \forall \varphi_T \in \mathbb{R}^n \quad (2.41)$$

On appelle alors ϕ l'unique application continue de \mathbb{R}^n dans $L^2([0, T], \mathbb{R}^m)$ qui coïncide avec $B^\top e^{(T-t)A^\top}$ sur \mathbb{R}^n . On pose $u = \phi(\varphi_T^*)$, qui d'après le théorème de Riesz, satisfait

$$\|u\|_{L^2([0, T], \mathbb{R}^m)} = \left[\int_0^T \|B^\top e^{(T-t)A^\top} \varphi_T^*\|_{\mathbb{R}^m}^2 dt \right]^{\frac{1}{2}} = [a(\varphi_T, \varphi_T)]^{\frac{1}{2}} \leq C_o \|x_0\|_{\mathbb{R}^n}.$$

On a alors obtenu : pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^n$ il existe $u(\cdot) \in L^2([0, T], \mathbb{R}^m)$ tel que pour tout $\varphi_T \in \mathbb{R}^n$ on a

$$\int_0^T \langle u(t), B^\top \varphi(t) \rangle_{\mathbb{R}^m} = \langle x_0, \varphi(0) \rangle_{\mathbb{R}^n} \quad \text{et} \quad \|u\|_{L^2([0, T], \mathbb{R}^m)} \leq C_o \|x_0\|_{\mathbb{R}^n}$$

D'après la définition de $a(\cdot, \cdot)$, et la définition de $L_{x_0}(\cdot)$, on a

$$\begin{aligned} a(\varphi_T^*, \varphi_T^*) &= \varphi_T^{*\top} \int_0^T e^{(T-t)A} B B^\top e^{(T-t)A^\top} dt \varphi_T^* \\ &= \varphi_T^{*\top} e^{TA} G(T) e^{TA^\top} \varphi_T^* \end{aligned}$$

et

$$L_{x_0}(\varphi_T^*) = \varphi_T^{*\top} e^{TA} x_0$$

et d'après (2.41) on conclut que

$$G(T) \varphi_T^{*\top} = e^{TA} x_0$$

où $G(T)$ est la grammienne de contrôlabilité du système (2.38).

L'approche HUM associe donc à une donnée initiale x_0 , la bonne donnée φ_T^* du problème adjoint dont la solution associée nous fournit un contrôle, l'invisibilité de la grammienne de contrôlabilité nous donne l'expression de cette application HUM $\varphi_T^* = e^{-TA^\top} G(T)^{-1} x_0$. Finalement le contrôle s'exprime en fonction de la donnée initiale

$$u(t) = B^\top e^{(T-t)A^\top} e^{-TA^\top} G(T)^{-1} x_0.$$

Exemple 2.6 Considérons le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) & t \in [0, T] \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} e^T & 0 \\ 0 & e^T \end{pmatrix}$$

La solution du système adjoint associée à ce système est $\varphi(t) = e^{(T-t)A^\top} \varphi_T$, d'où

$$\varphi(0) = e^{TA^\top} \varphi_T = \begin{pmatrix} e^T & 0 \\ 0 & e^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_{1T} \\ \varphi_{2T} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^T \varphi_{1T} \\ e^T \varphi_{2T} \end{pmatrix}$$

donc $\|e^{TA^\top} \varphi_T\|^2 = \left\langle \begin{pmatrix} e^T \varphi_{1T} \\ e^T \varphi_{2T} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^T \varphi_{1T} \\ e^T \varphi_{2T} \end{pmatrix} \right\rangle = e^{2T}(\varphi_{1T}^2 + \varphi_{2T}^2)$ d'autre part on a :

$$B^\top \varphi(t) = B^\top e^{(T-t)A^\top} \varphi_T = \begin{pmatrix} e^T & 0 \\ 0 & e^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{T-t} & 0 \\ 0 & e^{T-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_{1T} \\ \varphi_{2T} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2T-t} \varphi_{1T} \\ e^{2T-t} \varphi_{2T} \end{pmatrix},$$

alors $\|B^\top \varphi(t)\|^2 = e^{4T-2t} \varphi_{1T}^2 + e^{4T-2t} \varphi_{2T}^2$. Donc on a

$$\begin{aligned} \int_0^T \|B^\top \varphi(t)\|^2 dt &= \int_0^T e^{4T-2t} \varphi_{1T}^2 + e^{4T-2t} \varphi_{2T}^2 dt \\ &= e^{4T} \int_0^T e^{-2t} \varphi_{1T}^2 + e^{-2t} \varphi_{2T}^2 dt \\ &\geq e^{4T} \int_0^T e^{-2T} \varphi_{1T}^2 + e^{-2T} \varphi_{2T}^2 dt \\ &\geq e^{4T} e^{-2T} \int_0^T \varphi_{1T}^2 + \varphi_{2T}^2 dt \\ &\geq T e^{2T} (\varphi_{1T}^2 + \varphi_{2T}^2) \\ &\geq T \|\varphi(0)\|^2 \end{aligned}$$

donc

$$\|\varphi(0)\|^2 \leq \frac{1}{T} \int_0^T \|B^\top \varphi(t)\|^2 dt$$

l'inégalité d'observabilité est vérifiée, par conséquent le système considéré est exactement contrôlable en temps T .

2.6 Conclusion

Dans ce chapitre on a étudié le problème de contrôlabilité et les tests qui garantissent la contrôlabilité dans le cas stationnaire sans contraintes et avec contraintes et dans le cas dynamique. L'objectif du chapitre suivant est d'étudier le problème de contrôle optimal minimisant un coût quadratique ainsi que celui du contrôle en temps minimal.

Contrôle optimal

Sommaire

| | |
|---|-----------|
| 3.1 Introduction | 55 |
| 3.2 Problème linéaire quadratique | 55 |
| 3.3 Contrôle en temps minimal | 58 |
| 3.3.1 Existence de contrôle en temps minimal | 58 |
| 3.3.2 Unicité du contrôle en temps minimal | 60 |
| 3.3.3 Condition nécessaire d'optimalité : Principe du maximum de Pontryagin | 64 |
| 3.3.4 Forme du contrôle en temps minimal | 66 |
| 3.3.5 Exemple d'application : Problème de l'oscillateur harmonique | 68 |
| 3.4 Conclusion | 73 |

3.1 Introduction

La première partie de ce chapitre aborde le problème de contrôle optimal minimisant un coût quadratique, après de courte formulation du problème nous étudions sous quelle condition on a l'existence de trajectoire optimale. Nous abordons dans la deuxième partie le problème de contrôle temps-minimal en relation avec la contrôlabilité, nous étudions l'existence des trajectoires en temps minimal et la condition sous lequel le contrôle en temps minimal est unique. Après on donnera la forme du contrôle en temps minimal en utilisant le principe de maximum de Pontryagin.

3.2 Problème linéaire quadratique

Considérons le système linéaire contrôlé suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), & t \in [0, T] \\ x(0) = x_0, \end{cases} \quad (3.1)$$

avec : $T > 0$, $A(\cdot) \in L^\infty([0, T], \mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$, et $B(\cdot) \in L^\infty([0, T], \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R}))$, et $u(\cdot) \in L^2([0, T], \mathbb{R}^m)$.

Formulation du problème

Le problème de contrôle optimal que nous appellerons problème LQ (linéaire quadratique) est le suivant : étant donné $x_0 \in \mathbb{R}^n$, qu'elle est la trajectoire partant de x_0 et minimisant le coût quadratique

$$C(u) = \|x(T, x_0, u)\|_S^2 + \int_0^T \|u(t)\|_{R(t)}^2 + \|x(t, x_0, u)\|_{Q(t)}^2 dt \quad (3.2)$$

où :

$$\|x(T, x_0, u)\|_S^2 = x(T, x_0, u)^\top S x(T, x_0, u) \quad (3.3)$$

$$\|u(t)\|_{R(t)}^2 = u(t)^\top R(t) u(t) \quad (3.4)$$

$$\|x(t, x_0, u)\|_{Q(t)}^2 = x(t, x_0, u)^\top Q(t) x(t, x_0, u) \quad (3.5)$$

avec : $R(\cdot)$, $Q(\cdot)$, $S(\cdot)$ sont des matrices de fonctions telles que :

- $R(\cdot) \in L^\infty([0, T], \mathcal{M}_m(\mathbb{R}))$, et $\forall t \in [0, T]$ $R(t)$ est une matrice s.d.p.
- $Q(\cdot) \in L^\infty([0, T], \mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$, et $\forall t \in [0, T]$ $Q(t)$ est une matrice s.p.
- $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, est une matrice s.p.

Existence de trajectoire optimale

Le théorème qui suit donne une condition sous laquelle la trajectoire minimisant existe et unique.

Théorème 3.1 [29] *Sous l'hypothèse*

$$\exists \alpha > 0, \forall u(\cdot) \in L^2([0, T], \mathbb{R}^m), \int_0^T u(t)^\top R(t) u(t) dt \geq \alpha \int_0^T u(t)^\top u(t) dt \quad (3.6)$$

Il existe une unique trajectoire minimisante pour le problème LQ.

Pour montrer ce théorème on aura besoin du lemme suivant :

Lemme 3.1 [29] *La fonction $C(\cdot)$ est strictement convexe.*

Preuve *Remarquons que pour tout $t \in [0, T]$, la fonction $f(u) = u^\top R(t) u$ définie sur \mathbb{R}^m est strictement convexe car $R(\cdot)$ est s.d.p. D'autre part*

$$x(t, x_0, u) = M_A(t) x_0 + M_A(t) \int_0^t M_A(s)^{-1} B(s) u(s) ds, \quad \forall t \in [0, T] \quad (3.7)$$

Par conséquent, comme dans la preuve du [théorème 2.1](#), l'application qui à un contrôle $u(\cdot)$ associé $x(\cdot, x_0, u)$ est convexe, sur $[0, T]$. La matrice $Q(t)$ étant symétrique positive,

ceci implique la convexité de l'application $u(\cdot) \mapsto x(\cdot, x_0, u)^\top Q(t)x(\cdot, x_0, u)$, On raisonne de même pour le terme $x(T, x_0, u)^\top Sx(T, x_0, u)$. Enfin, l'intégration respectant la convexité, on en déduit que le coût est strictement convexe en u .

Passons maintenant à la preuve du [théorème 3.1](#)

Preuve Montrons tout d'abord l'existence d'une telle trajectoire. Considérons une suite minimisante $(u_n(\cdot))_{n \in \mathbb{N}}$ de contrôles sur $[0, T]$, i.e. La suite $C(u_n)$ converge vers la borne inférieure des coûts. En particulier cette suite est bornée. Par hypothèse, il existe une constante $\alpha > 0$ telle que pour tout $u(\cdot) \in L^2([0, T], \mathbb{R}^m)$ on ait :

$$C(u) \geq \int_0^T u(t)^\top R(t)u(t)dt \geq \alpha \|u\|_{L^2([0, T], \mathbb{R}^m)}$$

or $C(u_n)$ converge vers la borne inférieure, alors en la suite $(u_n(\cdot))_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée dans $L^2([0, T], \mathbb{R}^m)$ et Par réflexivité de cet espace, $(u_n(\cdot))_{n \in \mathbb{N}}$ converge faiblement vers un contrôle $u(\cdot) \in L^2([0, T], \mathbb{R}^m)$ à sous-suite près. Notons $x(\cdot, x_0, u_n)$ (resp. $x(\cdot, x_0, u)$) la trajectoire associée au contrôle $u_n(\cdot)$ (resp. $u(\cdot)$) sur $[0, T]$. D'après la formule de variation de la constante, on a,

$$x(t, x_0, u_n) = M_A(t)x_0 + M_A(t) \int_0^t M_A(s)^{-1}B(s)u_n(s)ds \quad \forall t \in [0, T] \quad (3.8)$$

(et la formule analogue pour $x(t, x_0, u)$). D'après (3.8) on déduit que la suite $(x_n(\cdot, x_0, u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée dans $L^2([0, t], \mathbb{R}^n)$. De plus de l'égalité $\dot{x}(s, x_0, u_n) = A(s)x(s, x_0, u_n) + B(s)u_n(s)$, on utilisant le fait que $A(\cdot), B(\cdot)$ sont bornées sur $[0, T]$, on conclut que la suite $(\dot{x}_n(\cdot, x_0, u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est également bornée dans $L^2([0, t], \mathbb{R}^n)$, ainsi il est borné dans $H^1([0, t], \mathbb{R}^n)$. Mais comme cet espace de Sobolev est réflexif et se plonge de manière compacte dans $C^0([0, t], \mathbb{R}^n)$, on conclut que à sous-suite près, la suite $(x_n(\cdot, x_0, u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers l'application $x(\cdot, x_0, u)$ sur $[0, T]$. Par passage à la limite dans (3.8) on obtient,

$$x(t, x_0, u) = M_A(t)x_0 + M_A(t) \int_0^t M_A(s)^{-1}B(s)u(s)ds \quad \forall t \in [0, T] \quad (3.9)$$

et donc $x(\cdot, x_0, u)$ est une solution du système associée au contrôle $u(\cdot)$. Montrons qu'elle est minimisante. Pour cela on utilise le fait que puisque $u_n(\cdot) \rightharpoonup u(\cdot)$ dans $L^2([0, T], \mathbb{R}^m)$, on a l'inégalité

$$\int_0^T u(t)^\top R(t)u(t)dt \leq \liminf \int_0^T u_n(t)^\top R(t)u_n(t)dt \quad (3.10)$$

et donc $C(u) \leq \liminf C(u_n)$. Mais comme $(u_n(\cdot))$ est une suite minimisante, $C(u)$ est égal à la borne inférieure des coûts, i.e. le contrôle $u(\cdot)$ est minimisant, ce qui montre l'existence d'une trajectoire optimale. Or d'après le [lemme 3.1](#) on a l'unicité de la trajectoire optimale.

□

3.3 Contrôle en temps minimal

Dans cette partie on considère le système :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), & t \in \mathbb{R}_+ \\ x(0) = x_0, \end{cases} \quad (3.11)$$

avec $A(\cdot) \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+, \mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$, $B \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+, \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R}))$ et l'ensemble des contrôles considérés \mathcal{U} est l'ensemble des applications mesurables et bornées sur \mathbb{R}_+ , à valeurs dans un compact d'intérieur non vide $\Omega \subset \mathbb{R}^m$.

Formulation du problème

Soient x_0 et x_d deux points de \mathbb{R}^n . Supposons que x_d soit accessible depuis x_0 , c'est-à-dire qu'il existe au moins un contrôle $u(\cdot)$ tel que $x(t, x_0, u) = x_d$ dans un temps t . Parmi tous les contrôles, on aimerait caractériser ceux qui le font en temps minimal t^* .



FIGURE 3.1 – Problème de contrôle en temps minimal

3.3.1 Existence de contrôle en temps minimal

Dans cette partie, nous présentons un résultat concernant l'existence d'une trajectoire en temps minimal reliant deux états x_0 et x_d .

Théorème 3.2 [29, p.40, Théorème 3.1.1.] *Si le point x_d est accessible depuis x_0 , alors il existe un contrôle en temps minimal $u^*(\cdot)$ tel que la trajectoire associée relie x_0 à x_d (i.e. $x(t^*, x_0, u^*) = x_d$).*

Preuve *si t^* est le temps minimal, alors pour tout $t < t^*$, $x_d \notin \text{Acc}(x_0, t)$, en effet si non, c'est à dire $x_d \in \text{Acc}(x_0, t)$, $t < t^*$ alors x_d sera accessible à partir de x_0 en un temps inférieur à t^* , contradiction. Posons*

$$t^* = \inf \{t \geq 0 / x_d \in \text{Acc}(x_0, t)\} \quad (3.12)$$

On a d'après le théorème 2.1 $\text{Acc}(x_0, t)$ varie continûment avec le temps t , donc l'ensemble $\{t \geq 0 / x_d \in \text{Acc}(x_0, t)\}$ est fermé, en effet ; Soit $(t_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \{t \geq 0 / x_d \in \text{Acc}(x_0, t)\}$

tel que $t_n \rightarrow \rho$, montrons que $\rho \in \{t \geq 0 / x_d \in \text{Acc}(x_0, t)\}$, montrons d'abord que $\rho \geq 0$. On a

$$\begin{aligned} (t_n) \subset \{t \geq 0 / x_d \in \text{Acc}(x_0, t)\} &\Rightarrow \forall n \geq 0, t_n \geq 0 \\ &\Rightarrow \rho \geq 0 \text{ (par passage à la limite)} \end{aligned}$$

d'autre part $\text{Acc}(x_0, t)$ varie continûment i.e.

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ t.q. } |t_1 - t_2| < \delta \Rightarrow d(\text{Acc}(x_0, t_1), \text{Acc}(x_0, t_2)) \leq \varepsilon$$

$$\begin{aligned} \text{Or } t_n \rightarrow \rho &\Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0 |t_n - \rho| \leq \delta \\ &\Rightarrow \forall n \geq n_0, d(\text{Acc}(x_0, t_n), \text{Acc}(x_0, \rho)) \leq \varepsilon \end{aligned}$$

On fait tendre ε vers 0, d'où

$$\sup_{y \in \text{Acc}(x_0, t_n)} d(y, \text{Acc}(x_0, \rho)) = 0 \Rightarrow d(x_d, \text{Acc}(x_0, \rho)) = 0$$

donc $x_d \in \text{Acc}(x_0, \rho)$ car $\text{Acc}(x_0, \rho)$ est fermé (compacte). Donc $\{t \geq 0 / x_d \in \text{Acc}(x_0, t)\}$ est fermé, d'où la borne inférieure est atteinte, en effet ;

$\{t \geq 0 / x_d \in \text{Acc}(x_0, t)\}$ est minorée par 0 alors elle existe une suite $(t_n) \subset \{t \geq 0 / x_d \in \text{Acc}(x_0, t)\}$ telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = \inf\{t \geq 0 / x_d \in \text{Acc}(x_0, t)\} = t^*$, or $\{t \geq 0 / x_d \in \text{Acc}(x_0, t)\}$ est fermé donc $t^* \in \{t \geq 0 / x_d \in \text{Acc}(x_0, t)\}$. Le temps minimal t^* est le premier temps pour lequel $\text{Acc}(x_0, t)$ contient x_d , soit donc $u^*(\cdot) \subset \Omega$, sur $[0, t^*]$ le contrôle qui dirige la solution du système contrôlé (3.11) de x_0 vers x_d en temps minimal t^* .

□

Le corollaire suivant donne un résultat d'existence du contrôle en temps minimal dirigeant tout état initial à l'origine, et ceci dans le cas des systèmes linéaires stationnaires.

Corollaire 3.1 *Considérons le système stationnaire suivant :*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) & t \in \mathbb{R}_+ \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

où le domaine de contraintes $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ sur le contrôle est compact, $m = 1$. Supposons que

1. $u = 0 \in \mathring{\Omega}$
2. $\text{rg}[A|B] = n$
3. $\forall \lambda \in \sigma(A), \Re(\lambda) \leq 0$

Alors il existe un contrôle en temps minimal $u^*(\cdot) \subset \Omega$ sur $[0, t^*]$ tel que $x(t^*, x_0, u^*) = 0$.

Preuve Le [théorème 2.10](#) affirme l'existence d'un contrôle qui garanti la nul contrôlabilité en un temps fini, c'est à dire l'origine $x_d = 0$ est accessible a partir de tous points $x_0 \in \mathbb{R}^n$. D'après le [théorème 3.2](#), on a l'existence de contrôle en temps minimal.

□

Le résultat précédent garante l'existence du contrôle en temps minimal, la question d'unicité se pose naturellement, c'est l'objectif de la section suivante.

3.3.2 Unicité du contrôle en temps minimal

Dans cette section on va caractériser géométriquement le contrôle en temps minimale, puis on va étudier l'unicité du contrôle en temps minimal.

Définition 3.1 [[29](#), p.40] Le contrôle $u(\cdot)$ est dit extrémal sur $[0, t]$ si la trajectoire (ou la solution) du système contrôlé ([3.11](#)) associée à $u(\cdot)$ vérifie $x(t, x_0, u) \in \partial \text{Acc}(x_0, t)$.

Dans la proposition suivante, on va énoncer une caractérisation du contrôle en temps minimal.

Proposition 3.1 [[29](#)] Tout contrôle en temps minimal est extrémal.

Preuve On sait que

$$\begin{aligned} \partial \text{Acc}(x_0, t^*) &= \overline{\text{Acc}(x_0, t^*)} \setminus \widehat{\text{Acc}(x_0, t^*)} \\ &= \text{Acc}(x_0, t^*) \setminus \widehat{\text{Acc}(x_0, t^*)} \end{aligned}$$

d'où

$$x_d \in \partial \text{Acc}(x_0, t^*) \Leftrightarrow x_d \in \text{Acc}(x_0, t^*) \text{ et } x_d \notin \widehat{\text{Acc}(x_0, t^*)}.$$

Si on suppose que $x_d \notin \text{Acc}(x_0, t^*)$ alors on a rien à montrer car x_d ne sera pas accessible a partir de x_0 .

Si $x_d \in \widehat{\text{Acc}(x_0, t^*)}$, alors $\exists \delta > 0 / |t - t^*| < \delta$, on a $x_d \in \text{Acc}(x_0, t)$. En effet ; Soit $\varepsilon > 0$, puisque $\text{Acc}(x_0, t)$ varie continûment avec le temps t , alors $\exists \delta > 0$ tel que si, $|t - t^*| < \delta$ alors

$$0 \leq \sup \left(\text{Acc}(x_0, t), \text{Acc}(x_0, t^*) \right) \leq \varepsilon$$

d'où

$$0 \leq d \left(\sup_{y \in \text{Acc}(x_0, t)} d(y, \text{Acct}(x_0, t^*)), \sup_{y \in \text{Acc}(x_0, t^*)} d(y, \text{Acct}(x_0, t)) \right) \leq \varepsilon$$

on fait tendre ε vers 0, donc $d(x_d, \text{Acct}(x_0, t)) = 0$, ainsi $x_d \in \text{Acct}(x_0, t)$ car $\text{Acct}(x_0, t)$ est fermé. Ceci contredit le fait que t^* est un temps minimal.

□

Le résultat suivant concerne l'unicité du contrôle en temps minimal.

Théorème 3.3 [13, p.61] Si $Acc(x_0, t^*)$ est strictement convexe, alors le contrôle en temps minimal est unique.

Preuve Supposons qu'il existe deux contrôles $u_1(\cdot), u_2(\cdot) \in \mathcal{U}$ reliant x_0 à x_d en temps minimal t^* , comme tout contrôle en temps minimal est extrémal, alors

$$x(t^*, x_0, u_1), x(t^*, x_0, u_2) \in \partial Acc(x_0, t^*).$$

On sait que

$$\begin{aligned} Acc(x_0, t^*) &= \{x(t^*, x_0, u) \mid u(\cdot) \in \mathcal{U}\} \\ &= \{M_A(t^*)x_0 + M_A(t^*) \int_0^{t^*} M_A^{-1}(s)B(s)u(s)ds \mid u(\cdot) \in \mathcal{U}\} \\ &= M_A(t^*)x_0 + M_A(t^*) \left\{ \int_0^{t^*} M_A^{-1}(s)B(s)u(s)ds \mid u(\cdot) \in \mathcal{U} \right\} \end{aligned}$$

posons

$$x_d^* = \int_0^{t^*} M_A^{-1}(s)B(s)u_1(s)ds = \int_0^{t^*} M_A^{-1}(s)B(s)u_2(s)ds$$

et

$$\mathcal{A}(t) = \left\{ \int_0^t M_A^{-1}(s)B(s)u(s)ds \mid u(\cdot) \in \mathcal{U} \right\},$$

donc

$$x(t^*, x_0, u_1), x(t^*, x_0, u_2) \in \partial Acc(x_0, t^*) \Leftrightarrow x_d^* \in \mathcal{A}(t^*)$$

soit $t \in (0, t^*)$ tel que $x(t, x_0, u_1) \neq x(t, x_0, u_2)$ i.e.

$$\int_0^t M_A^{-1}(s)B(s)u_1(s)ds \neq \int_0^t M_A^{-1}(s)B(s)u_2(s)ds.$$

Posons

$$\begin{cases} p_1 = \int_0^t M_A^{-1}(s)B(s)u_1(s)ds \\ p_2 = \int_0^t M_A^{-1}(s)B(s)u_2(s)ds \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} q_1 = p_1 + (x_d^* - p_2) \\ q_2 = p_2 + (x_d^* - p_1) \end{cases} \quad (3.13)$$

Alors on a

$$q_1 = p_1 + (x_d^* - p_2) = \int_0^t M_A^{-1}(s)B(s)u_1(s)ds + \int_t^{t^*} M_A^{-1}(s)B(s)u_2(s)ds$$

considérons le contrôle suivant :

$$\tilde{u}(s) = \begin{cases} u_1(t) & t \in [0, t] \\ u_2(t) & t \in (t, t^*] \end{cases}$$

donc $q_1 = \int_0^t M_A^{-1}(s)B(s)\tilde{u}(s)ds \in \mathcal{A}(t^*)$ de même on obtient $q_2 \in \mathcal{A}(t^*)$. Or d'après (3.13) on a

$$\begin{aligned} x_d^* = \frac{1}{2}q_1 + \frac{1}{2}q_2 &\Rightarrow x_d^* \in \widehat{\mathcal{A}(t^*)} \\ &\Rightarrow x_d \in \widehat{\text{Acc}(x_0, t^*)} \end{aligned}$$

absurde, d'où le résultat. □

On présente ici la notion de système normal.

Définition 3.2 [17, p.76] Le système (3.11) est dit normal sur $[0, T]$, si deux contrôles $u_1(\cdot), u_2(\cdot) \in \mathcal{U}$ dirigent la solution associée de x_0 vers un point $p_1 \in \partial \text{Acc}(x_0, T)$ sont égales p.p. sur $[0, T]$.

Le résultat suivant assure la convexité stricte de l'ensemble accessible d'un système normale.

Théorème 3.4 [17, p.76, theorem.3] Considérons le système (3.11) où le domaine de contrainte, $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ sur le contrôle est compact, alors le système est normale sur $[0, T]$ si, et seulement si, l'implication suivant est vérifiée : pour tout solution non trivial $p(\cdot)$ de l'équation $\dot{p}(t) = -A(t)^\top p(t)$ et pour tout $u_1(\cdot), u_2(\cdot) \subset \Omega$ tels que

$$p(t)^\top B(t)u_1(t) = p(t)^\top B(t)u_2(t) = \max_{v \in \Omega} p(t)^\top B(t)v \quad (3.14)$$

Alors $u_1(t) = u_2(t)$ p.p. sur $[0, T]$.

De plus, si le système est normal, alors $\text{Acc}(x_0, T)$ est strictement convexe.

Preuve Montrons d'abord que si le système est normale, alors $\text{Acc}(x_0, T)$ est strictement convexe. Si Ω contient un seul élément alors $\text{Acc}(x_0, T)$ contient aussi un seul élément, d'où le théorème est vérifié. Supposons maintenant que Ω contient plus qu'un seul élément, montrons que si le système est normale alors $\text{Acc}(x_0, T)$ est strictement convexe, supposons le contraire, c'est à dire $\text{Acc}(x_0, T)$ est convexe, alors il existe un hyperplan d'appui \mathcal{H} tel que $\mathcal{H} \cap \text{Acc}(x_0, T)$ contient plus qu'un point, ainsi un segment \mathcal{L} . Soit $u_a(\cdot)$ et $u_b(\cdot)$ a valeur dans Ω deux contrôles qui dirigent le point x_0 vers deux extrémités p_a, p_b de \mathcal{L} . Alors pour tout sous intervalle mesurable θ de $[0, T]$, considérons le $2n$ -vecteur réel

$$\mathcal{W}(\theta) = \begin{pmatrix} \int_\theta M_A^{-1}(s)B(s)u_a(s)ds \\ \int_\theta M_A^{-1}(s)B(s)u_b(s)ds \end{pmatrix}$$

tel que

$$\mathcal{W}([0, T]) = \begin{pmatrix} r_a \\ r_b \end{pmatrix} \quad \mathcal{W}(\emptyset) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Passons maintenant à un lemme qu'on admet (voir le livre de E. B. Lee et L. Markus pour la preuve).

Lemme 3.2 [17, p.163, LEMMA 4A] Soit $\mathbf{y}(t)$ un m -vecteur intégrable sur le compact I , pour tout sous intervalle $E \subset I$, considérons le m -vecteur $\mathbf{x}_E = \int_E \mathbf{y}(t)dt$, soit K l'ensemble des points \mathbf{x}_E lorsque E recouvre I , alors K est convexe dans \mathbb{R}^m . De plus si, $\mathbf{y}(t)$ est borné alors K est compact.

Revenons au preuve du [théorème 3.4](#). d'après le lemme précédent, il existe un sous intervalle $\mathcal{B} \subset [0, T]$ tel que

$$\mathcal{W}(\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} \frac{r_a}{2} \\ \frac{r_b}{2} \end{pmatrix} \quad \mathcal{W}([0, T] \setminus \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} \frac{r_a}{2} \\ \frac{r_b}{2} \end{pmatrix}$$

Or $p_a \neq p_b$ alors $r_a \neq r_b$, on définit les deux contrôles

$$\mathbf{u}_1(t) = \begin{cases} \mathbf{u}_a(t) & t \in \mathcal{B} \\ \mathbf{u}_b(t) & t \in [0, T] \setminus \mathcal{B} \end{cases} \quad \text{et} \quad \mathbf{u}_2(t) = \begin{cases} \mathbf{u}_b(t) & t \in \mathcal{B} \\ \mathbf{u}_a(t) & t \in [0, T] \setminus \mathcal{B} \end{cases}$$

La solution du système (3.11) pour le contrôle $\mathbf{u}_1(\cdot)$ vérifie

$$\mathbf{x}(T, \mathbf{x}_0, \mathbf{u}_1) = M_A(T) \left(\mathbf{x}_0 + \int_{\mathcal{B}} M_A^{-1}(s) B(s) \mathbf{u}_1(s) ds + \int_{[0, T] \setminus \mathcal{B}} M_A^{-1}(s) B(s) \mathbf{u}_1(s) ds \right)$$

avec un simple calcul on obtient : $\mathbf{x}(T, \mathbf{x}_0, \mathbf{u}_1) = \frac{1}{2} \mathbf{p}_a + \frac{1}{2} \mathbf{p}_b$ de même pour le contrôle $\mathbf{u}_2(\cdot)$, on obtient : $\mathbf{x}(T, \mathbf{x}_0, \mathbf{u}_2) = \frac{1}{2} \mathbf{p}_a + \frac{1}{2} \mathbf{p}_b$. D'où $\mathbf{x}(T, \mathbf{x}_0, \mathbf{u}_1) = \mathbf{x}(T, \mathbf{x}_0, \mathbf{u}_2)$ et d'après la normalité du système on a : $\mathbf{u}_1(\cdot) = \mathbf{u}_2(\cdot)$ p.p. sur $[0, T]$, ainsi $\mathbf{u}_a(\cdot) = \mathbf{u}_b(\cdot)$ p.p. sur $[0, T]$ ceci est contredit le fait que les extrémités de \mathcal{L} , $\mathbf{p}_a \neq \mathbf{p}_b$. Donc $\text{Acc}(\mathbf{x}_0, T)$ est strictement convexe.

Passons maintenant à prouver l'équivalence entre la normalité et l'implication.

\Rightarrow] Supposons que le système (3.11) est normal, soit $\mathbf{p}(t)$ un vecteur adjoint et \mathcal{H} un hyperplan d'appui de $\text{Acc}(\mathbf{x}_0, T)$ tel que $\mathbf{p}(T)$ soit un vecteur normal extérieur de \mathcal{H} . Si $\tilde{\mathbf{u}}_1(\cdot)$ et $\tilde{\mathbf{u}}_2(\cdot)$ deux contrôle vérifiant l'équation (3.14), alors $\tilde{\mathbf{u}}_1(\cdot)$ et $\tilde{\mathbf{u}}_2(\cdot)$ dirigent le point \mathbf{x}_0 vers l'unique point $\mathbf{p}_1 \in \mathcal{H} \cap \text{Acc}(\mathbf{x}_0, T)$, par normalité $\tilde{\mathbf{u}}_1 \equiv \tilde{\mathbf{u}}_2$ p.p. sur $[0, T]$.
 \Leftarrow Inversement, supposons que l'implication décrit dans le théorème est vérifiée. Soit $\mathbf{p} \in \partial \text{Acc}(\mathbf{x}_0, T)$ et $\mathbf{p}(t)$ le vecteur adjoint tel que $\mathbf{p}(T)$ est le vecteur normal extérieur de l'hyperplan d'appui de $\text{Acc}(\mathbf{x}_0, T)$ en point \mathbf{p} . Soient $\mathbf{u}_1(\cdot)$, $\mathbf{u}_2(\cdot)$ deux contrôle dirigent \mathbf{x}_0 vers \mathbf{p} alors d'après la preuve du [théorème 3.6](#) l'équation (3.14) est vérifiée, alors $\tilde{\mathbf{u}}_1 \equiv \tilde{\mathbf{u}}_2$ p.p. sur $[0, T]$. Donc le système (3.11) est normal.

□

Le résultat suivant donne une condition de normalité dans le cas stationnaire.

Théorème 3.5 [17, p.133] *Considérons le système stationnaire suivant :*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) & t \in \mathbb{R}_+ \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

$u(\cdot) \subset \Omega$ où Ω est un polyèdre convexe et $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Si la condition suivant : $Bv, ABv, A^2Bv, \dots, A^{n-1}Bv$ sont linéairement indépendant $\forall v \in \partial\Omega$ et $v \neq 0$ (ou $\forall v \in \Omega$, si Ω est un segment), est vérifiée alors le système est normale pour tout $t > 0$. La condition décrit ci-dessus et appelée condition de normalité.

Remarque 3.1 *Dans le cas mono-entrer (i.e. $m = 1$), la condition de normalité est celle de Kalman. En effet ; $Bv, ABv, A^2Bv, \dots, A^{n-1}Bv$ sont linéairement indépendant, alors $B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B$ sont linéairement indépendant, d'où $\text{rg}[A|B] = n$. Donc si le système est contrôlable, alors le contrôle en temps minimale existe et est unique.*

Dans le paragraphe suivant on donne une condition nécessaire pour qu'un contrôle soit extrémal.

3.3.3 Condition nécessaire d'optimalité : Principe du maximum de Pontryagin

Le théorème suivant donne une condition nécessaire et suffisante pour qu'un contrôle soit extrémal.

Théorème 3.6 [29, p.41, Théorème 3.2.1.] *Considérons le système de contrôle (3.11), où le domaine de contraintes $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ sur le contrôle est compact. Soit $T > 0$. Le contrôle $u(\cdot)$ est extrémal sur $[0, T]$ si, et seulement si, il existe une solution non triviale $p(t)$ du système adjoint $\dot{p}(t) = -A(t)^\top p(t)$ telle que*

$$p(t)^\top B(t)u(t) = \max_{v \in \Omega} p(t)^\top B(t)v \quad (3.15)$$

Pour presque tout $t \in [0, T]$. Le vecteur $p(t) \in \mathbb{R}^n$ est appelé vecteur adjoint.

Preuve \Rightarrow] D'après le corollaire 2.1, on a $\text{Acc}_\Omega(x_0, T) = \text{Acc}_{\text{Conv}(\Omega)}(x_0, T)$, et par conséquent on peut supposer que Ω est convexe. Si $u(\cdot)$ est extrémal sur $[0, T]$, alors $x(T, x_0, u) \in \partial \text{Acc}(x_0, T)$. Par convexité de $\text{Acc}(x_0, T)$ il existe, d'après le théorème 1.4, un hyperplan d'appui de $\text{Acc}(x_0, T)$ en $x(T, x_0, u)$ et si p_T est le vecteur normale à cet hyperplan en $x(T, x_0, u)$, alors

$$\forall y_1 \in \text{Acc}(x_0, T) \quad p_T^\top y_1 \leq p_T^\top x(T, x_0, u). \quad (3.16)$$

Par définition de $\text{Acc}(x_0, T)$ il existe un contrôle $u_1(\cdot)$ tel que $x(T, x_0, u_1) = y_1$. L'inégalité (3.16) se réécrit

$$p_T^\top x(T, x_0, u_1) \leq p_T^\top x(T, x_0, u).$$

D'où

$$p_T^\top \int_0^T M_A(T)M_A(s)^{-1}B(s)u_1(s)ds \leq p_T^\top \int_0^T M_A(T)M_A(s)^{-1}B(s)u(s)ds.$$

Appelons $p(t)$ la solution sur $[0, T]$ de $\dot{p}(t) = -A(t)^\top p(t)$, telle que $p(T) = p_T$. Alors il est clair que $p(t) = M_A(t)^{-1\top} p(0)$ et $p_T = p(T) = M_A(T)^{-1\top} p(0)$. Il s'ensuit que

$$\forall s \in [0, T] \quad p_T^\top M_A(T)M_A(s)^{-1} = p(0)^\top M_A(s)^{-1} = p(s)^\top$$

et donc

$$\int_0^T p(s)^\top B(s)u_1(s)ds \leq \int_0^T p(s)^\top B(s)u(s)ds \quad (3.17)$$

Supposons que (3.15) n'est pas vraie alors

$$p(t)^\top B(t)u(t) < \max_{v \in \Omega} p(t)^\top B(t)v$$

sur un sous-ensemble $\theta \subset [0, T]$ de mesure positive $\text{mes}(\theta) > 0$. Soit alors $u_1(\cdot)$ sur $[0, T]$ à valeurs dans Ω tel que

$$p(t)^\top B(t)u(t) = \max_{v \in \Omega} p(t)^\top B(t)v$$

l'application $u_1(\cdot)$ peut être choisie mesurable sur $[0, T]$ (voir [17, p. 161, Lem. 2A, 3A]). Comme $u_1(\cdot)$ est à valeurs dans Ω , alors l'inégalité (3.17) est vraie, mais par définition de $u_1(\cdot)$

$$\int_\theta p(s)^\top B(s)u_1(s)ds > \int_\theta p(s)^\top B(s)u(s)ds$$

ceci conduit immédiatement à l'inégalité stricte inverse,

$$\int_0^T p(s)^\top B(s)u_1(s)ds > \int_0^T p(s)^\top B(s)u(s)ds$$

d'où la contradiction. Par conséquent (3.15) est vraie.

⇐] Réciproquement, supposons qu'il existe un vecteur adjoint tel que le contrôle $u(\cdot)$ vérifie

$$p(t)^\top B(t)u(t) = \max_{v \in \Omega} p(t)^\top B(t)v \quad \text{p.p. sur } [0, T].$$

Notons $x(\cdot, x_0, u)$ la trajectoire associée à $u(\cdot)$. Alors on a, en remontant le raisonnement précédent,

$$p(t)^\top B(t)u(t) \geq p(t)^\top B(t)v(t) \quad \text{p.p. sur } [0, T].$$

$$\Rightarrow \int_0^T p(t)^\top B(t)u(t)dt \geq \int_0^T p(t)^\top B(t)v(t)dt$$

$$\Rightarrow p_T^\top \int_0^T M_A(T)M_A(t)^{-1}B(t)u(t)dt \geq p_T^\top \int_0^T M_A(T)M_A(t)^{-1}B(t)v(t)dt$$

$$\Rightarrow p(t)^\top x(T, x_0, u) \geq p(t)^\top y_1 \text{ où } y_1 = x(T, x_0, v)$$

d'où

$$p(t)^\top (x(T, x_0, u) - y_1) \geq 0 \quad \forall y_1 \in \text{Acc}(x_0, T).$$

Si on suppose que $x(T, x_0, u) \in \widehat{\text{Acc}}(x_0, T)$, alors

$$\exists y_1 \in \text{Acc}(x_0, T) \text{ tel que } p(t)^\top (x(T, x_0, u) - y_1) < 0$$

absurde d'où le résultat. □

Remarque 3.2 Puisque tout contrôle en temps minimal est extrémal, le théorème précédent, qui est le principe du maximum dans le cas linéaire, donne une condition nécessaire d'optimalité.

3.3.4 Forme du contrôle en temps minimal

Dans cette section, nous cherchons à déterminer la forme du contrôle en temps minimal par utilisation du principe de maximum de Pontryagin. Nous nous limitons au cas où l'ensemble de contraintes sur le contrôle est le cube unité de \mathbb{R}^m

$$\Omega = C^m = \{|u_j| \leq 1 \quad j = 1, \dots, m\}$$

On commence par un résultat obtenu du livre H. Hermes, J. P.Lasalle [13].

Lemme 3.3 [13, p.51, Lemma 13.1] Le point $x_1 = x(t^*, x_0, u^*) \in \partial \text{Acc}(x_0, t^*)$ si, et seulement si, $u^*(\cdot)$ est de la forme

$$u^*(t) = \text{signe}[B(t)^\top M_A(t)^{-1\top} M_A(t^*)^\top p_T] \quad \forall t \in [0, t^*]. \quad (3.18)$$

où p_T est le vecteur normale extérieur à l'hyperplan d'appui \mathcal{H} , de $\text{Acc}(x_0, t^*)$ en x_1 .

Preuve \Rightarrow] Supposons que $x(t^*, x_0, u^*) \in \partial \text{Acc}(x_0, t^*)$, alors le contrôle $u^*(\cdot)$ est extrémal sur $[0, t^*]$, et d'après la preuve du théorème 3.6 on a :

$$p_T^\top M_A(t^*) M_A(t)^{-1} B(t) u^*(t) = \max_{v \in \Omega} p_T^\top M_A(t^*) M_A(t)^{-1} B(t) v \quad \text{p.p. sur } [0, t^*] \quad (3.19)$$

où p_T est le vecteur normal extérieur au hyperplan d'appui de $\text{Acc}(x_0, t^*)$ en x_1 . Comme $\Omega = [-1, 1]^m$, alors la condition de maximisation implique immédiatement que

$$u^*(t) = \text{signe}[B(t)^\top M_A(t)^{-1\top} M_A(t^*)^\top p_T] \quad \forall t \in [0, t^*]$$

\Leftarrow] Réciproquement, supposons que $u^*(\cdot)$ est de la forme (3.18), alors on a

$$\begin{aligned} p_T^\top M_A(t^*) M_A(t)^{-1} B(t) u^*(t) &= p_T^\top M_A(t^*) M_A(t)^{-1} B(t) \text{signe}[B(t)^\top M_A(t)^{-1\top} \\ &\quad M_A(t^*)^\top p_T] \\ &= \sum_{i=1}^m |[p_T^\top M_A(t^*) M_A(t)^{-1} B(t)]_i| \end{aligned}$$

donc $\forall v \in \Omega = [-1, 1]^m$ on a

$$p_T^\top M_A(t^*) M_A(t)^{-1} B(t) v \leq p_T^\top M_A(t^*) M_A(t)^{-1} B(t) u^*(t)$$

$$\Rightarrow \max_{v \in \Omega} p_T^\top M_A(t^*) M_A(t)^{-1} B(t) v = p_T^\top M_A(t^*) M_A(t)^{-1} B(t) u^*(t) \text{ sur } [0, t^*]$$

donc le contrôle $u^*(\cdot)$ vérifie le principe de maximum de Pontryagin, ainsi

$$x(t^*, x_0, u^*) \in \text{Acc}(x_0, t^*).$$

□

Le résultat suivant garante la forme du contrôle en temps minimal.

Théorème 3.7 [13] Si $u^*(\cdot)$ est un contrôle en temps minimal et t^* est le temps minimal alors $u^*(\cdot)$ est de la forme :

$$u^*(t) = \text{signe}[B(t)^\top p(t)], \quad \forall t \in [0, t^*] \quad (3.20)$$

où $p(t)$ est le vecteur adjoint.

Preuve On sait que $u^*(\cdot)$ est extrémal, alors $x(t^*, x_0, u^*) \in \text{Acc}(x_0, t^*)$. Or d'après le lemme précédent on a :

$$\begin{aligned} u^*(t) &= \text{signe}[B(t)^\top M_A(t)^{-1\top} M_A(t^*)^\top p_T] \\ &= \text{signe}[B(t)^\top p(t)] \end{aligned}$$

où $p(t) = M_A(t)^{-1\top} M_A(t^*)^\top p_T$ d'où le résultat.

□

Définitions 3.1 [29]

- Dans le cas mono-entrée (contrôle scalaire), on appelle fonction de commutation du système (3.11), la fonction définie par $\varphi(t) = B(t)^\top p(t)$.
- Le temps t_c auquel le contrôle temps-minimal $u^*(\cdot)$ change de signe est appelé un temps de commutation. C'est en particulier un zéro de la fonction $\varphi(\cdot)$.

Nous présentons ici un résultat dans le cas mono-entrée ($m = 1$).

Proposition 3.2 [29] Considérons dans \mathbb{R}^n le système contrôlé $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$, avec $B \in \mathbb{R}^n$ et $|u(t)| \leq 1$ tels que la condition de Kalman est vérifiée.

1. Si toute valeur propre de A est réelle, alors tout contrôle extrémal a au plus $n - 1$ commutations sur \mathbb{R}_+ .
2. Si toute valeur propre de A a une partie imaginaire non nulle, alors tout contrôle extrémal a un nombre infini de commutations sur \mathbb{R}_+ .

Preuve On a par hypothèse $[A|B]$ vérifiée la condition de Kalman, alors d'après le [théorème 2.3](#) le système peut s'écrire sous forme de Brunovski, et il est alors équivalent à une équation différentielle scalaire d'ordre n de la forme :

$$x^n(t) + a_1 x^{(n-1)}(t) + a_2 x^{(n-2)}(t) + \dots + a_n x(t) = u(t), \quad |u| \leq 1$$

de plus tout contrôle extrémal est de la forme $u(t) = \text{signe}(\lambda(t))$ où $\lambda(t)$ est la dernière coordonnée du vecteur adjoint, qui vérifie l'équation différentielle

$$\lambda^n(t) + a_1 \lambda^{(n-1)}(t) + a_2 \lambda^{(n-2)}(t) + \dots + a_n \lambda(t) = 0$$

En effet le vecteur adjoint vérifie $\dot{p}(t) = -A(t)^\top p(t)$.

1) Si toute valeur propre de A est réelle, alors $\lambda(t)$ s'écrit sous la forme

$$\lambda(t) = \sum_{j=1}^r P_j(t) e^{\lambda_j t}$$

où P_j est un polynôme de degré inférieur ou égal à $n_j - 1$, et où $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ sont les r valeurs propres distinctes de $-A$, de multiplicités respectives n_1, n_2, \dots, n_r . Notons que $n = n_1 + n_2 + \dots + n_r$. On montre alors facilement, par récurrence, que $\lambda(t)$ admet au plus $n - 1$ zéros.

2) Si toute valeur propre de A a une partie imaginaire non nulle, alors, comme précédemment, on peut écrire

$$\lambda(t) = \sum_{j=1}^r (P_j(t) \cos(\beta_j t) + Q_j(t) \sin(\beta_j t)) e^{\alpha_j t}$$

où $\lambda_j = \alpha_j + i\beta_j$ et P_j, Q_j sont des polynômes réels non nuls. En mettant en facteur un terme $t^k e^{\alpha_j t}$ de plus haut degré (i.e. dominant), on voit facilement que $\lambda(t)$ a un nombre infini de zéros.

□

3.3.5 Exemple d'application : Problème de l'oscillateur harmonique

Présentation du problème :

Considérons une masse ponctuelle m , astreinte à se déplacer le long d'un axe (Ox) , attachée à un ressort (voir [FIGURE 3.2](#)). La masse ponctuelle est alors attirée vers l'origine par une force que l'on suppose égale à $-k(x - l)\vec{i}$ où l est la longueur du ressort au repos, et k est le coefficient de raideur. On applique à cette masse ponctuelle une

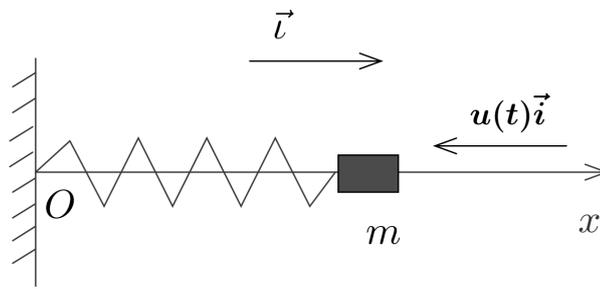


FIGURE 3.2 – Le ressort

force extérieure horizontale $u(t)\vec{i}$. Les lois de la physique nous donnent l'équation du mouvement,

$$m\ddot{x}(t) + k(x(t) - l) = u(t). \quad (3.21)$$

De plus on impose une contrainte à la force extérieure, $|u(t)| \leq 1$. Cela signifie qu'on ne peut pas appliquer n'importe quelle force extérieure horizontale à la masse ponctuelle : le module de cette force est borné, ce qui traduit le fait que notre puissance d'action est limitée et rend ainsi compte des limitations techniques de l'expérience. Supposons que la position et la vitesse initiales de l'objet soient $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = y_0$. Le problème est d'amener la masse ponctuelle à la position d'équilibre $x = l$ en un temps minimal en contrôlant la force externe $u(t)$ appliquée à cet objet, et en tenant compte de la contrainte $|u(t)| \leq 1$. La fonction $u(\cdot)$ est le contrôle. Des conditions initiales étant données, le but est donc de trouver une fonction $u(t)$ qui permet d'amener la masse ponctuelle à sa position d'équilibre en un temps minimal.

Modélisation mathématique :

Pour la simplicité, nous supposerons que $m = 1$ Kg, $k = 1$ N.m⁻¹, $l = 0$ m (on se ramène à $l = 0$ par translation).

Dans l'espace des phases (x, \dot{x}) , le système différentiel correspondant à l'équation du mouvement est

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = y(t) \\ \dot{y}(t) = -x(t) + u(t) \\ x(0) = x_0, \dot{x}(0) = y_0 \end{cases} \quad (3.22)$$

Posons, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$. On obtient

$$\dot{X}(t) = AX(t) + Bu(t), \quad X(0) = X_0. \quad (3.23)$$

Il s'agit d'un système linéaire contrôlé.

Résolution théorique du problème :

Appliquons la théorie précédente à l'exemple de l'oscillateur. Nous avons vu qu'il existe des contrôles permettant de relier X_0 à 0 (Exemple 2.3). On cherche maintenant à le faire en temps minimal. D'après le théorème 3.7 on a $u(t) = \text{signe}[B(t)^\top p(t)]$ où $p(t) \in \mathbb{R}^2$ est solution du système adjoint $\dot{p}(t) = -A^\top(t)p(t)$. Posons

$$p(t) = \begin{pmatrix} p_1(t) \\ p_2(t) \end{pmatrix}, \quad \text{on a } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Alors $u(t) = \text{signe}(p_2(t))$, et $\dot{p}_1(t) = p_2(t)$, $\dot{p}_2(t) = -p_1(t)$, d'où $\ddot{p}_2(t) + p_2(t) = 0$. Donc $p_2(t) = \lambda \cos t + \mu \sin t$. En particulier, la durée entre deux zéros consécutifs de $p_2(t)$ est exactement π . Par conséquent le contrôle optimal est constant par morceaux sur des intervalles de longueur π , et prend alternativement les valeurs ± 1 .

Si $u = -1$, on obtient le système différentiel

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x - 1 \end{cases} \quad (3.24)$$

Si $u = +1$, on obtient le système différentiel

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x + 1 \end{cases} \quad (3.25)$$

La trajectoire optimale finale, reliant X_0 à 0 , sera constituée d'arcs successifs, solutions de (3.24) et (3.25).

Solutions de (3.24).

On obtient facilement $x(t) = -1 + R \cos(t)$ et $y(t) = -R \sin(t)$. Les solutions sont des cercles centrés en $(-1, 0)$, de période 2π .

Solutions de (3.25).

On obtient facilement $x(t) = 1 - R \cos(t)$ et $y(t) = R \sin(t)$. Les solutions sont des cercles centrés en $(1, 0)$, de période 2π .

La trajectoire optimale de X_0 à 0 doit donc suivre alternativement un arc de cercle centré en $(-1, 0)$, et un arc de cercle centré en $(1, 0)$. Quitte à changer t en $-t$, nous allons raisonner en temps inverse, et construire la trajectoire optimale menant de 0 à X_0 . Pour cela, nous allons considérer toutes les trajectoires optimales partant de 0 , et nous sélectionnerons celle qui passe par X_0 .

En faisant varier $p(0)$, on fait varier la trajectoire optimale. En effet, d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, $p(0)$ détermine $p(t)$ pour tout t , ce qui définit un contrôle

optimal $u(t)$, et donc une trajectoire optimale. Prenons des exemples pour commencer à représenter l'allure des trajectoires optimales possibles.

- Si $p_1(0) = 1$, $p_2(0) = 0$, alors $p_2(t) = -\sin t$, donc sur $(0, \pi)$ on a $u(t) = \text{signe}(p_2(t)) = -1$. La trajectoire optimale correspondante, partant de 0, suit donc pendant un temps π l'arc de Γ^- cercle solution de (3.24), passant par 0 (voir FIGURE 3.3).
- Si $p_1(0) = -1$, $p_2(0) = 0$, alors $p_2(t) = \sin t$, donc sur $(0, \pi)$ on a $u(t) = \text{signe}(p_2(t)) = 1$. La trajectoire optimale correspondante, partant de 0, suit donc pendant un temps π l'arc Γ^+ de cercle solution de (3.25), passant par 0 (voir FIGURE 3.3).

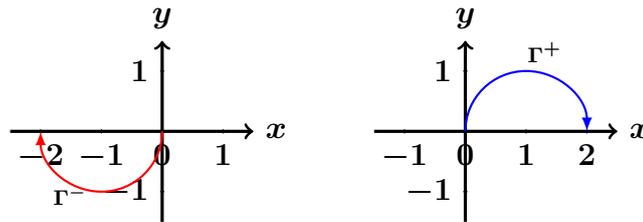


FIGURE 3.3

- Pour tout autre choix de $p(0)$ tel que $p_2(0) > 0$, la trajectoire optimale correspondante part de l'origine en suivant Γ^+ jusqu'à ce que $p_2(t) = 0$. Au-delà de ce point, $p_2(t)$ change de signe, donc le contrôle commute et prend la valeur -1 , pendant une durée π (i.e. jusqu'à ce que $p_2(t)$ change à nouveau de signe). La trajectoire optimale doit alors être solution de (3.24), en partant de ce point de commutation M , et doit donc suivre un arc de cercle centré en $(-1, 0)$, pendant un temps π . C'est donc un demi-cercle, vu la paramétrisation des courbes de (3.24) (voir FIGURE 3.4).

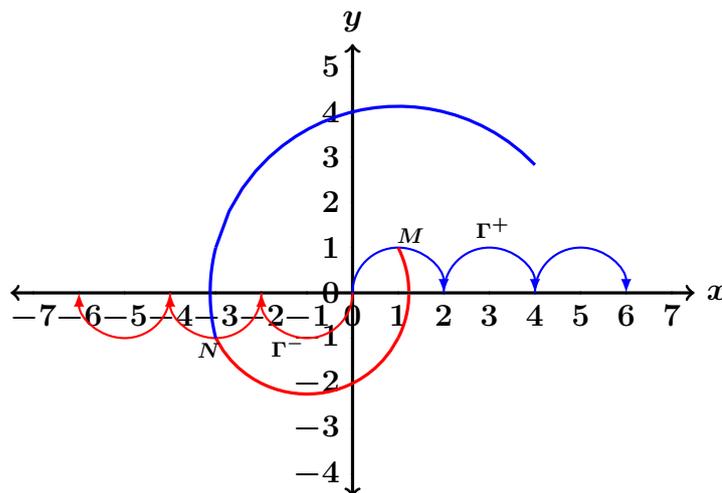


FIGURE 3.4

La trajectoire optimale rencontre un deuxième point de commutation N lorsque à nouveau $p_2(t)$ change de signe. On remarque que M et N sont symétriques par rapport au point $(-1, 0)$ (en effet ce sont les extrémités d'un demi-cercle centré en ce point). Le point M appartenant au demi-cercle Γ^+ , le point N appartient au demi-cercle image de Γ^+ par la symétrie par rapport au point $(-1, 0)$ qui est aussi, comme on le voit

facilement, le translaté à gauche de Γ^- par la translation de vecteur $(-2, 0)$.

• Poursuivons alors notre raisonnement. On se rend compte que les points de commutation de cette trajectoire optimale partant de 0 sont situés sur la courbe W construite de la manière suivante : W est l'union de tous les translatés à gauche de Γ^- par la translation précédente, et aussi de tous les translatés à droite de Γ^+ (voir FIGURE 3.5).

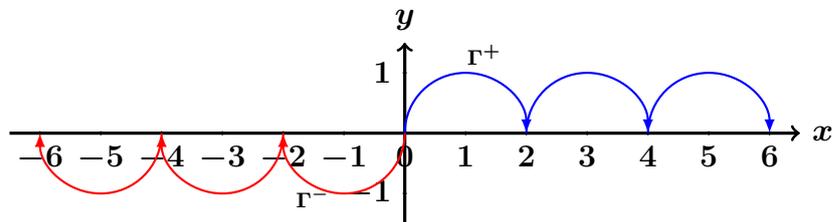


FIGURE 3.5 – Ensemble W

• Les trajectoires optimales sont alors construites de la manière suivante : on part de 0 et l'on suit un morceau de Γ^+ ou Γ^- , jusqu'à un premier point de commutation. Si par exemple on était sur Γ^+ , alors partant de ce point on suit un arc de cercle centré en $(-1, 0)$, au-dessous de W , jusqu'à ce qu'on rencontre W . De ce deuxième point de commutation, on suit un arc de cercle centré en $(1, 0)$ jusqu'à rencontrer W en un troisième point de commutation, etc (voir FIGURE 3.6).

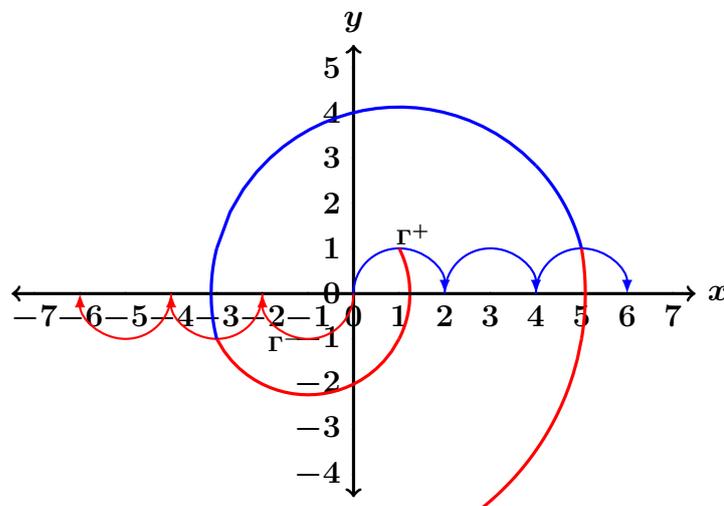


FIGURE 3.6

On est maintenant en mesure de répondre à la question, du moins graphiquement. Le but est de relier 0 et X_0 par une trajectoire optimale. La théorie prévoit qu'on peut effectivement le faire. Une trajectoire partant de 0 est, comme on vient de le voir ci-dessus, déterminée par deux choix :

1. partant de 0 , on peut suivre un morceau de Γ^+ ou de Γ^- .
2. il faut choisir le premier point de commutation.

Si maintenant on se donne un point $X_0 = (x_0, y_0)$ du plan de phase, on peut déterminer graphiquement ces deux choix, et obtenir un tracé de la trajectoire optimale (voir FIGURE 3.7). Dans la pratique il suffit d'inverser le temps, i.e. de partir du point final et d'atteindre le point initial.

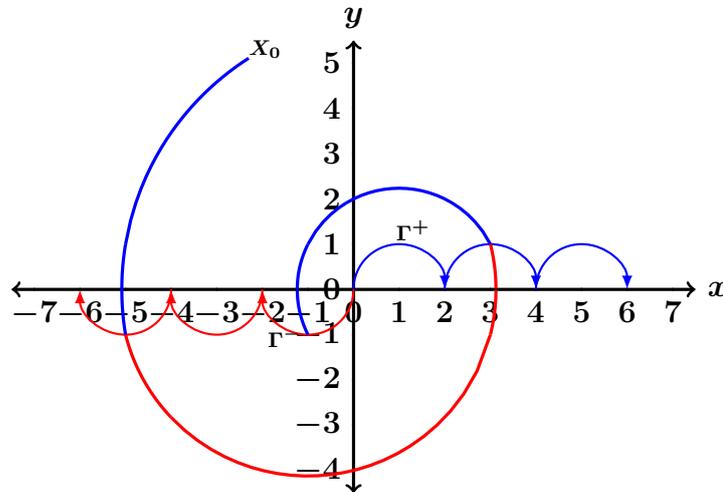


FIGURE 3.7

3.4 Conclusion

Dans ce chapitre, on a étudié l'existence et l'unicité du contrôle optimal minimisant un coût quadratique qui a une grande importance dans la pratique. D'autre part, on a étudié l'existence et l'unicité du contrôle en temps minimal, et la forme du contrôle minimisant et ceci en utilisant le principe de maximum de Pontryagin. La résolution numérique de ce problème pour donner une approximation du contrôle minimisant ainsi que la trajectoire associée se pose naturellement, c'est l'objectif du chapitre suivant.

Méthodes numériques en contrôle optimal

Sommaire

| | |
|---|----|
| 4.1 Introduction | 74 |
| 4.2 La méthode de la discrétisation totale | 75 |
| 4.3 La méthode de tir simple | 75 |
| 4.4 Mise en oeuvre des méthodes numériques | 76 |
| 4.5 Simulation des Méthodes | 77 |
| 4.6 Résolution numérique du problème d'oscillateur harmonique | 80 |
| 4.7 Conclusion | 83 |

4.1 Introduction

Ce chapitre est consacré aux méthodes numériques pour résoudre le problème de contrôle en temps minimal. Ces méthodes peuvent traiter un problème de contrôle optimal plus général. On distingue deux types de méthodes numériques : **les méthodes directes** et **les méthodes indirectes**.

Les méthodes directes consistent à discrétiser l'état et le contrôle, et réduisent le problème à un problème d'optimisation non linéaire (programmation non linéaire, ou "nonlinear programming"). Les méthodes indirectes consistent à résoudre numériquement, par une méthode de tir ("shooting method"), un problème aux valeurs limites obtenu par application du principe du maximum.

Dans la suite, nous présentons deux méthodes : **la méthode de la discrétisation totale** pour les méthodes directes et **la méthode de tir simple** pour les méthodes indirectes. On se réfère au livre de E. Trélat [29] et à l'article de O. Von Stryk et R. Bulirsch [28] pour plus de détails sur les différentes méthodes numériques.

4.2 La méthode de la discrétisation totale

C'est la méthode la plus évidente lorsqu'on aborde un problème de contrôle optimal. En discrétisant l'état et le contrôle, on se ramène à un problème d'optimisation non linéaire en dimension finie de la forme

$$\min_{Z \in C} F(Z) \quad (4.1)$$

où $Z = (x_1, x_2, \dots, x_N, u_1, u_2, \dots, u_M)$

$$C = \{Z / g_i(Z) = 0, i \in \{1, \dots, r\}, g_j(Z) \leq 0, j \in \{r + 1, \dots, m\}\} \quad (4.2)$$

Plus précisément, considérons une subdivision $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = t_f$ de l'intervalle $[0, t_f]$ et choisissons une discrétisation de l'équation différentielle, par exemple choisissons ici la méthode d'Euler explicite. On obtient alors, en posant $h_i = t_{i+1} - t_i$,

$$x_{i+1} = x_i + h_i[A(t_i)x_i + B(t_i)u_i]$$

La discrétisation précédente conduit donc au problème de programmation non linéaire

$$\begin{cases} \min F(x_1, x_2, \dots, x_N, u_1, u_2, \dots, u_M) \\ x_{i+1} = x_i + h_i(A(t_i)x_i + B(t_i)u_i), i = 0, \dots, N - 1 \\ u_i \in \Omega, i = 0, \dots, N - 1. \end{cases}$$

L'ensemble C représente les conditions initiales, finales du système, les contraintes sur la solution du système et les contraintes sur le contrôle. F est la fonction à optimiser. Dans le cas du problème en temps minimal, on cherche à minimiser le temps final alors on prend $F(Z) = t_f$. De plus, dans notre cas où le temps final t_f n'est pas connu, on rajoute une variable t_f au vecteur Z et une équation supplémentaire $t_f \geq 0$ à l'ensemble de contraintes C . On se ramène à résoudre un problème d'optimisation non linéaire sous contraintes (4.1). Ce problème peut être résolu par exemple par la méthode de SQP ou par une méthode de pénalisation.

En résumé, il existe une infinité de variantes pour les méthodes directes selon le choix de l'approximation du contrôle sur chaque subdivision du temps, le choix de la méthode d'intégration de l'équation différentielle, et le choix de la méthode de la discrétisation de l'équation différentielle.

4.3 La méthode de tir simple

Le principe de la méthode de tir simple est le suivant : considérons le problème en temps minimal, et supposons dans un premier temps que le temps final t_f est fixé. Le principe du maximum de Pontryagin nous donne une condition nécessaire d'optimalité. Si on est capable, à partir du principe du maximum, d'exprimer le contrôle

optimal en fonction de $(x(t), p(t))$, où $p(t)$ est la solution du système adjoint, la solution du problème en temps minimal s'écrit sous la forme : $\dot{z}(t) = F(t, z(t))$ où $z(t) = (x(t), p(t))$, les conditions initiales et finales se mettent sous la forme $R(z(0), z(t_f)) = 0$. Finalement, on obtient le problème aux valeurs limites :

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = F(t, z(t)) \\ R(z(0), z(t_f)) = 0 \end{cases} \quad (4.3)$$

A l'aide des méthodes numériques, on peut trouver $z(t, z_0)$ la solution du problème de Cauchy :

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = F(t, z(t)) \\ z(0) = z_0 \end{cases} \quad (4.4)$$

Posons $Z = (z_0, t_f)$ et $G(Z) = R(z_0, z(t_f, z_0))$. Le problème en temps minimal (4.4) est équivalent à résoudre $G(Z) = 0$. Il s'agit donc de trouver un zéro de la fonction $G(\cdot)$ et on peut utiliser par exemple la méthode de Newton. On se réfère par exemple au livre de J. Stoer, R. Bulirsch [27] pour plus de détails sur la méthode de Newton.

4.4 Mise en oeuvre des méthodes numériques

Commençons par expliciter les mises en œuvre des deux méthodes sous Matlab, et ceci en s'appuyant sur la fonction **fmincon.m** pour trouver un minimum d'une fonction de plusieurs variables non linéaire sous contraintes et la fonction **fsolve.m** qui permet de résoudre un système d'équations non linéaires.

Méthode la discrétisation totale :

Pour la méthode de discrétisation totale, on choisit N , le nombre de discrétisation en temps et on note $t_1 = 0 < t_2 < \dots < t_{N+1} = t_f$ la discrétisation du temps. On prend des valeurs initiales pour le temps final t_f et pour le contrôle $\{u_i | u_i \in \mathbb{R}^m \ i = 1, \dots, N\}$. On cherche à minimiser le temps final, en prenant en compte la condition finale $X(t_f) = X_d$, la contrainte sur le contrôle, i.e., $\forall i \in 1, 2, \dots, N \ \|u_i\|_{\mathbb{R}^m} \leq 1$, et le fait que le temps final doit être positif. Sur chaque subdivision du temps $[t_i, t_{i+1}]$, on intègre le système par la méthode d'Euler explicite.

On programme une fonction **M_directe** (voir l'Annexe A) qui donne les résultats et les dessins pour la trajectoire de la solution et du contrôle, ainsi que le temps minimal numérique $t_{min-num}$. Le principe est d'utiliser **fmincon.m** pour minimiser la fonction **Temps.m** qui prend une variable Z contenant les discrétisations du contrôle $u(\cdot)$ et le temps final t_f sous les contraintes écrites dans la fonction **contraintes.m**. On choisit ici la méthode SQP ("Sequential Quadratic Programming") pour la méthode d'optimisation non linéaire.

Méthode de tir simple :

Pour la méthode de tir simple, on rappelle que dans le [théorème 3.7](#) on a montré que le contrôle temps minimal à la forme $u^*(t) = \text{signe}(B(t)^\top p(t))$, $t \in [0, t_f]$. Notons, $X = (p(0), t_f)$. Le principe de la méthode de tir est de trouver un zéro de la fonction $G.m$ (Voir Annexe B) qui prend X comme variable et qui rend la valeur $x(t_f) - x_d$. On utilise la fonction `ode113.m` pour calculer la solution du système $x(\cdot)$ et la solution du système adjoint $p(\cdot)$. La fonction `M_Indirecte` donne les résultats et les dessins pour la trajectoire de la solution et du contrôle, ainsi que le temps minimal numérique $t_{min-num}$.

4.5 Simulation des Méthodes

On teste les deux méthodes par un exemple pris du livre de E. Trélat [\[29\]](#) (exemple 9.3.1) où le temps minimal exact est calculable. On considère le système suivant :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad t \in \mathbb{R}_+. \tag{4.5}$$

Où

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et } |u(t)| \leq 1$$

On a $\text{rg}([A|B]) = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2$, donc le système (4.5) est exactement contrôlable. D'après les calculs dans [\[29\]](#), la fonction temps minimal est

$$t_{min}(x_{1_d}, x_{2_d}) = \begin{cases} 2\sqrt{x_{1_d} + \frac{1}{2}x_{2_d}^2} - x_{2_d} & \text{si } x_{1_d} \geq \frac{x_{2_d}^2}{2} \text{ signe}(x_{2_d}) \\ 2\sqrt{-x_{1_d} + \frac{1}{2}x_{2_d}^2} + x_{2_d} & \text{si } x_{1_d} \leq \frac{x_{2_d}^2}{2} \text{ signe}(x_{2_d}) \end{cases} \tag{4.6}$$

On cherche par la suite le contrôle en temps optimal avec les conditions $x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $x_d = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. D'après la formule (4.6), on a $t_{min} = 1 + \sqrt{2} \simeq 2.4142$.

Méthode de la discrétisation totale :

Pour la méthode de discrétisation totale avec un temps final $t_f = 5$, on a obtenue les résultats suivant :

| | | | | |
|--|--------|--------|--------|--------|
| Nombre de discrétisation N | 10 | 50 | 100 | 150 |
| Le temps minimal $t_{min-num}$ | 2.2581 | 2.3810 | 2.3973 | 2.4029 |

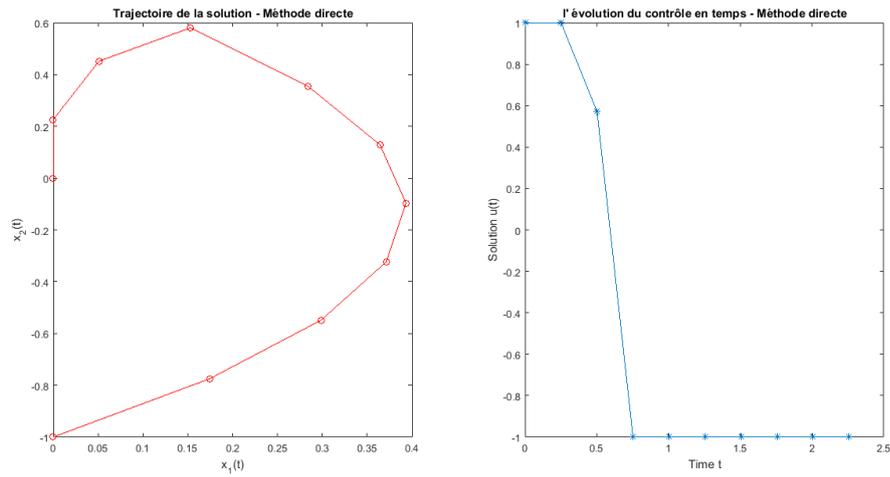


FIGURE 4.1 – $N=10$

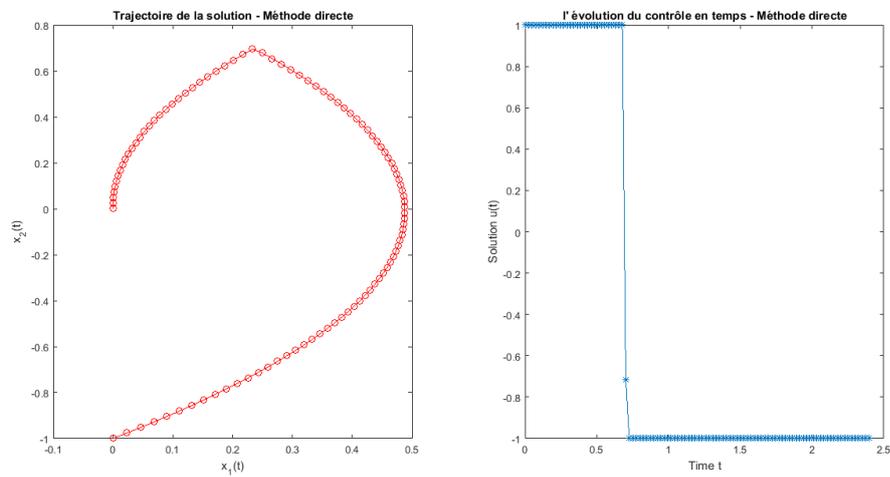


FIGURE 4.2 – $N=50$

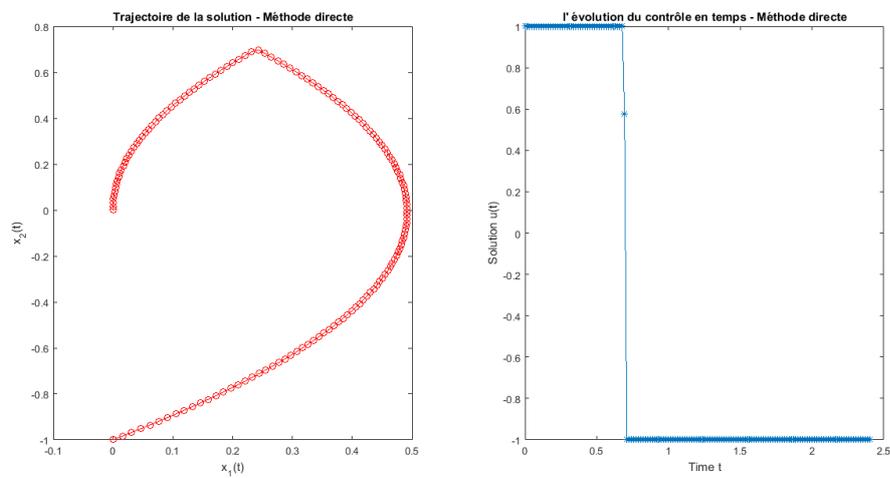


FIGURE 4.3 – $N=100$

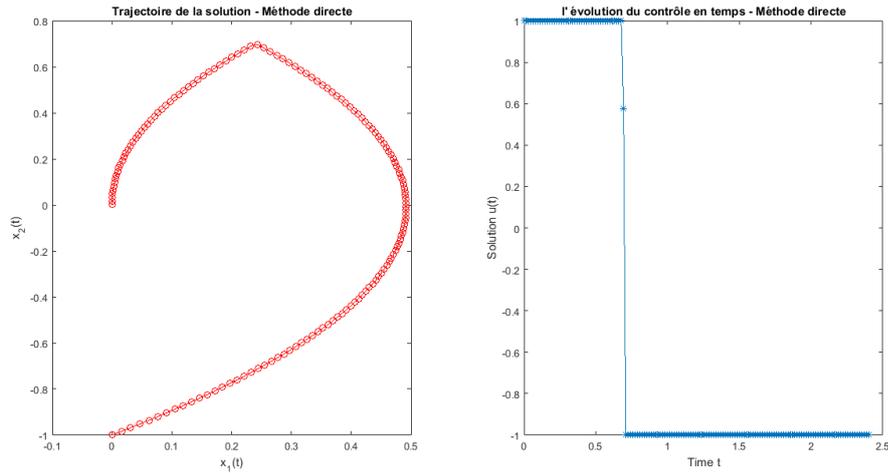


FIGURE 4.4 – N=150

On remarque que pour la méthode de la discrétisation totale, si on augmente le nombre de points de discrétisation, le temps minimal numérique est plus proche du temps final exact.

Méthode de tir simple :

Pour la méthode de tir simple, on a obtenue les résultats suivants :

| Données initiales | $t_{min-num}$ |
|------------------------|---------------|
| $p_0=[1;1], t_f = 5$ | 2.4142 |
| $p_0=[1;1], t_f = 150$ | -0.7711 |

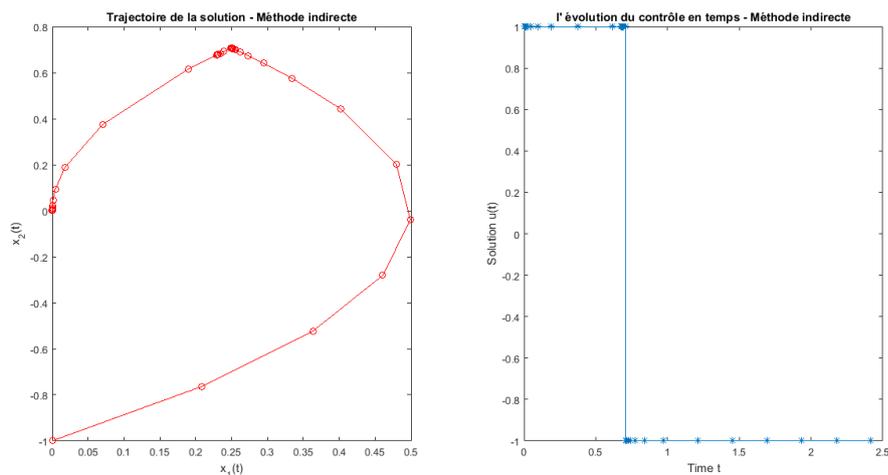
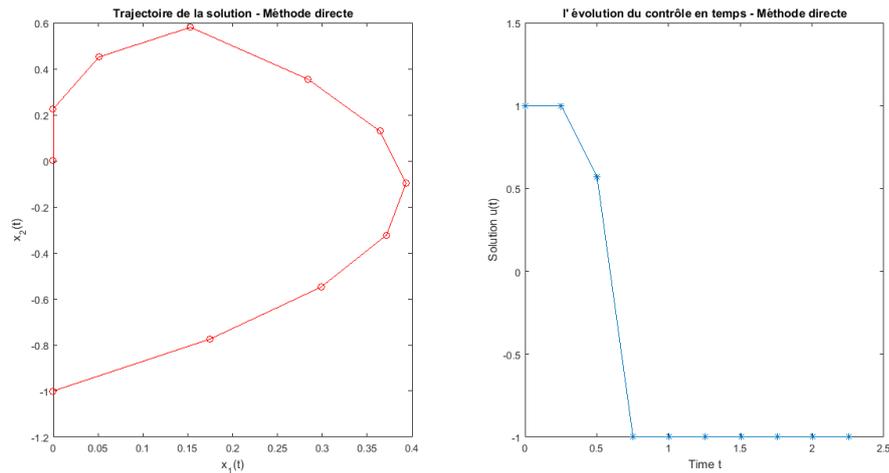


FIGURE 4.5 – $p_0=[1;1], t_f = 5$


 FIGURE 4.6 – $p_0=[1;1]$, $t_f = 150$

On remarque que le temps minimal numérique obtenu par la méthode de tir simple est très précis par rapport à celui obtenu par la méthode de la discrétisation totale, mais si on prend une valeur initiale t_f loin du temps minimal exact, on obtient un mauvais résultat.

4.6 Résolution numérique du problème d'oscillateur harmonique

On présente ici les résultats obtenus à partir des deux méthodes décrites au dessus.

Méthode de la discrétisation totale :

Pour la méthode de la discrétisation totale avec un temps final $t_f = 5$, $X_0 = [6; 2]$, $X_d = [0; 0]$ on a obtenu les résultats suivant :

| | | | |
|--|--------|--------|--------|
| Nombre de discrétisation N | 10 | 40 | 80 |
| Le temps minimal $t_{min-num}$ | 5.2606 | 7.3071 | 7.8777 |

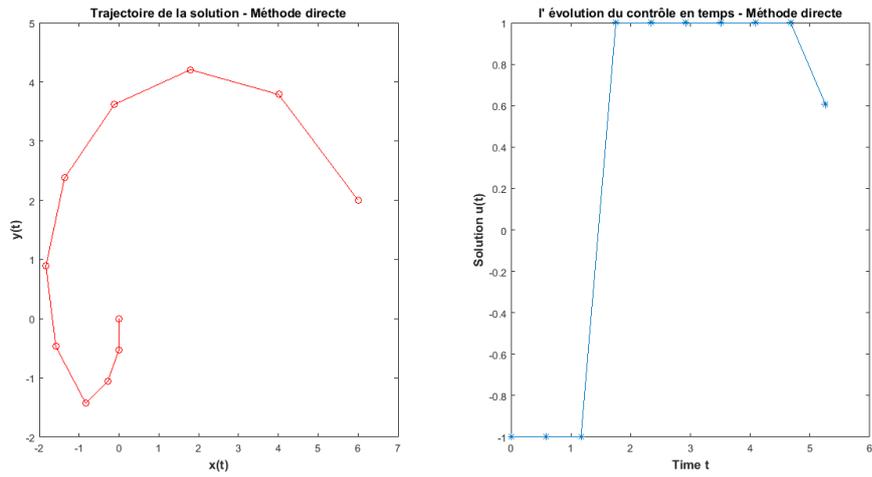


FIGURE 4.7 – $N=10$

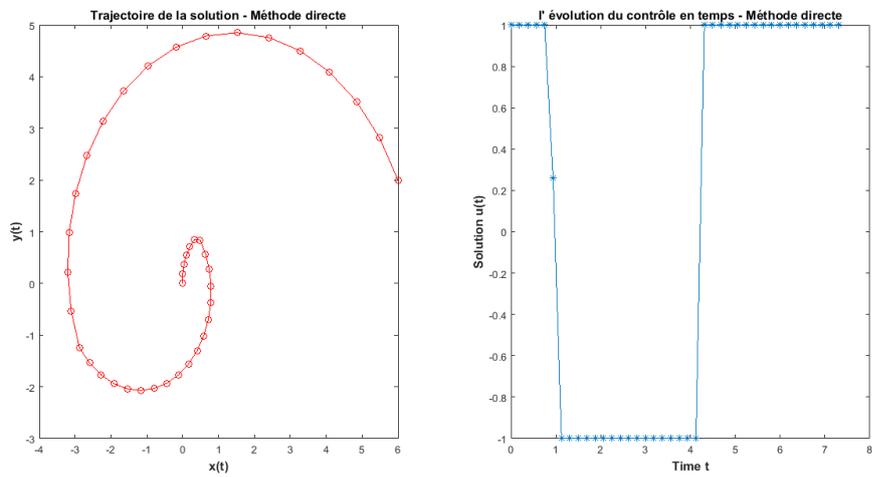


FIGURE 4.8 – $N=40$

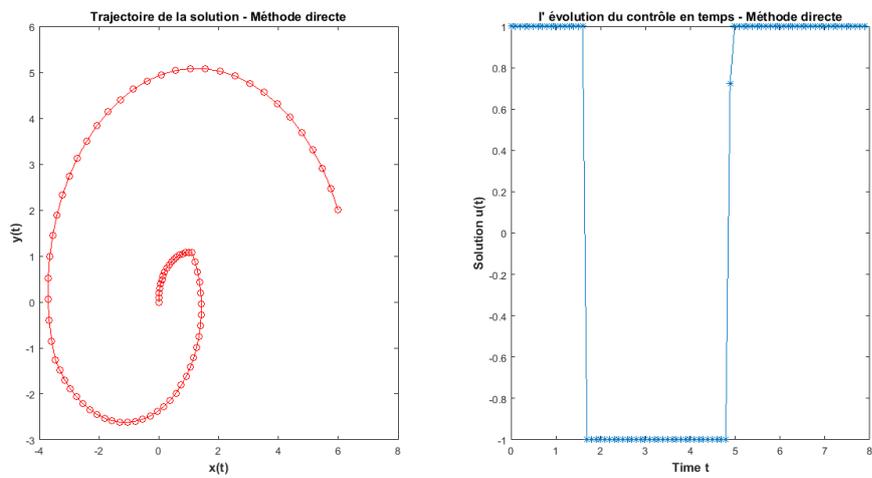


FIGURE 4.9 – $N=80$

Méthode de tir simple :

Pour la méthode de tir simple, on a obtenu les résultats suivants :

| Données initiales | $t_{min-num}$ |
|-----------------------|---------------|
| $p_0=[1;0], t_f = 10$ | 10.0242 |
| $p_0=[1;0], t_f = 15$ | 12.2730 |

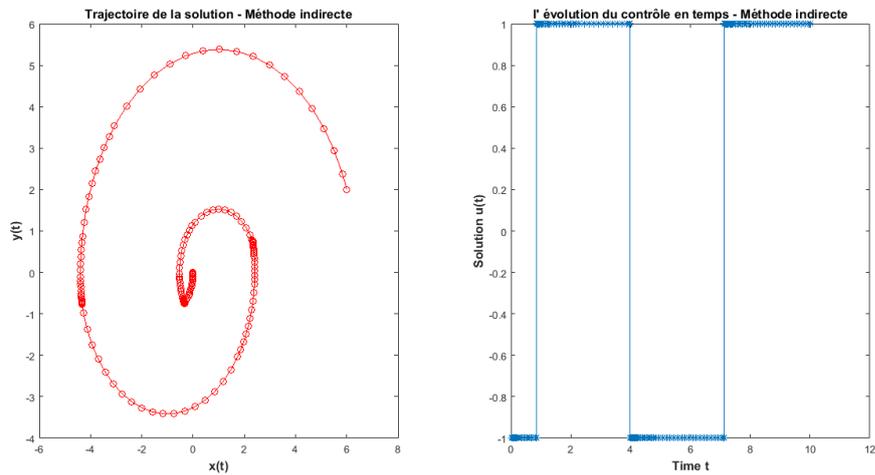


FIGURE 4.10 – $p_0=[1;0], t_f = 10$

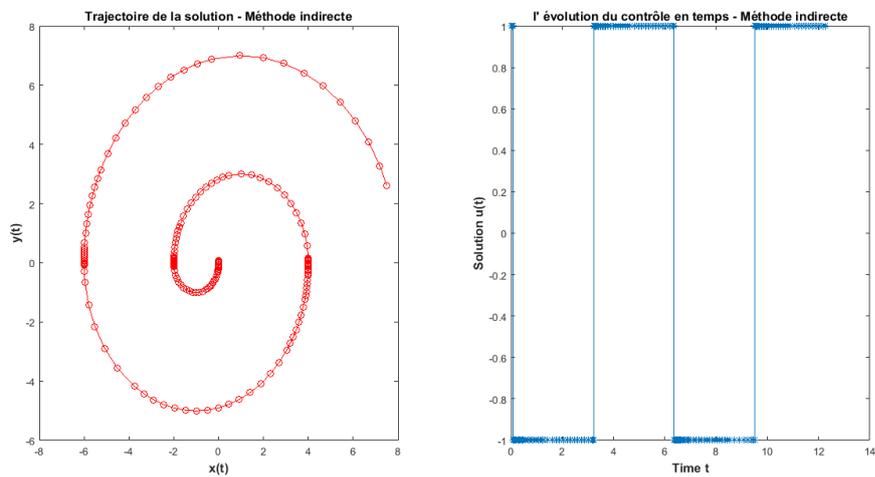


FIGURE 4.11 – $p_0=[1;0], t_f = 20$

4.7 Conclusion

Dans ce chapitre, deux méthodes numériques en contrôle optimal ont été étudiées pour résoudre le problème de contrôle en temps-minimal, la méthode de la discrétisation totale et la méthode de tir simple. Ces méthodes sont applicables aux problèmes de contrôle optimal minimisant un coût quadratique, notons qu'on peut approximer le contrôle optimal par résolution numérique de l'équation de Riccati comme on le verra après. Ce contrôle optimal est fortement lié au problème de stabilisation qui est l'objectif du chapitre suivant.

Stabilité et stabilisation

Sommaire

| | |
|---|------------|
| 5.1 Introduction | 84 |
| 5.2 Stabilité des systèmes linéaires | 85 |
| 5.2.1 Stabilité des systèmes linéaires dynamiques | 85 |
| 5.2.2 Stabilité des systèmes linéaires stationnaires | 88 |
| 5.3 Stabilisation des systèmes stationnaire par feedback linéaire | 89 |
| 5.3.1 Théorème de placement de pôles | 89 |
| 5.3.2 Grammienne de contrôlabilité et Stabilisation | 91 |
| 5.3.3 Stabilisation exponentielle par un feedback | 94 |
| 5.4 Stabilisation des systèmes dynamique par feedback linéaire | 96 |
| 5.4.1 Fonction valeur de Bellman et équation de Riccati | 97 |
| 5.4.2 Résolution numérique de l'équation de Riccati par la méthode d'intégration directe | 98 |
| 5.4.3 Grammienne de contrôlabilité, contrôle optimal et Stabilisation | 100 |
| 5.5 Conclusion | 104 |

5.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous nous intéressons au problème de stabilisation, dans un premier lieu nous étudions la stabilité des systèmes linéaires dans le cas stationnaire et le cas dynamique. Puis nous étudions la stabilisation des systèmes stationnaires par feedback linéaire en rapport avec la condition de Kalman (théorème de placement de pôle) et la Grammienne de contrôlabilité. Ensuite nous étudions le problème de stabilisation des systèmes dynamiques par feedback linéaire en rapport avec la contrôlabilité et l'équation de Riccati ainsi que le problème de contrôle optimale.

5.2 Stabilité des systèmes linéaires

5.2.1 Stabilité des systèmes linéaires dynamiques

Rappelons tout d'abord les types de stabilité. Considérons le système différentiel homogène suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t), & t \in \mathbb{R}_+ \\ x(0) = x_0, \end{cases} \quad (5.1)$$

Soit $x(\cdot)$ la solution du système.

Définition 5.1 Le point x_e est un point d'équilibre du système (5.1), si $A(t)x_e = 0, \forall t \in \mathbb{R}_+$.

Définitions 5.1 Le point d'équilibre x_e , est dit :

1. *Attractif*, si $\forall x_0 \in \mathbb{R}^n, \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = x_e$.
2. *Stable*, si $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x_0 \in \mathbb{R}^n, \|x_0 - x_e\| < \delta \Rightarrow \forall t \geq 0, \|x(t) - x_e\| \leq \varepsilon$
3. *Asymptotiquement stable*, s'il est stable et attractif.
4. *Localement asymptotiquement stable*, s'il est stable et s'il existe $\rho > 0$ telle que $\forall x_0 \in \mathbb{R}^n, \|x_0 - x_e\| < \rho \Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = x_e$.
5. *Exponentiellement stable*, si $\exists M \geq 1, \exists \beta > 0, \forall t \geq 0$, on a :

$$\|x(t) - x_e\| \leq M e^{-\beta t}.$$

Dans la proposition suivante on va énoncer le lien entre la stabilité à l'origine et la stabilité d'un point d'équilibre quelconque.

Proposition 5.1 Soit $x_e \in \mathbb{R}^n$ un point d'équilibre du système (5.1), alors l'origine 0 qui est un point d'équilibre; est asymptotiquement (resp. exponentiellement) stable si et seulement si, x_e est asymptotiquement (resp. exponentiellement) stable.

Preuve \Rightarrow] *Trivial*, c'est le cas où $x_e = 0$.

\Leftarrow] Si $x_e = 0$ c'est fini. Sinon, soit $x_e \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ posons $y = x - x_e$ alors $\dot{y}(t) = \dot{x}(t) = A(t)(x(t) - x_e) = A(t)y(t)$, or l'origine est stable donc

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall y_0 \in \mathbb{R}^n, \|y_0\| < \delta \Rightarrow \forall t \geq 0, \|y(t)\| \leq \varepsilon.$$

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x_0 \in \mathbb{R}^n, \|x_0 - x_e\| < \delta \Rightarrow \forall t \geq 0, \|x(t) - x_e\| \leq \varepsilon.$$

D'où la stabilité. D'autre part, on a :

$$\forall y_0 \in \mathbb{R}^n, \lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = 0.$$

$$\Rightarrow \forall x_0 \in \mathbb{R}^n, \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) - x_e = 0.$$

D'où l'attractivité, donc le point d'équilibre x_e est asymptotiquement stable. De même nous obtenons que x_e est exponentiellement stable.

□

Remarque 5.1 *La stabilité des système linéaire ne dépend pas de choix du point d'équilibre. Alors il suffit d'étudier la stabilité à l'origine. Si l'origine est stable, dans ce cas nous disons que le système est stable.*

Le résultat suivant donne une caractérisation de la stabilité exponentielle.

Théorème 5.1 [22, p.102, 6.7 Theorem] *Le point origine est exponentiellement stable si, et seulement si,*

$$\exists M \geq 1, \exists \beta > 0, \forall t \geq 0, \Rightarrow \|M_A(t)\| \leq M e^{-\beta t} \quad (5.2)$$

Preuve \Rightarrow] Supposons que 0 est exponentiellement stable, alors $\exists M \geq 1, \exists \beta > 0, \forall t \geq 0$ on a : $\|x(t)\| \leq M e^{-\beta t}$. Soit $t_a > 0$ et $x_a \in \mathbb{R}^n$, tel que $\|x_a\| = 1$, $\|M_A(t)x_a\| = \|M_A(t)\|$, d'où l'état initial x_a donne une solution pour le système (5.1), qui satisfait à l'instant t_a :

$$\|x(t_a)\| = \|M_A(t_a)x_a\| = \|M_A(t_a)\| \|x_a\| \leq M e^{-\beta t_a}, \quad (5.3)$$

donc $\|M_A(t_a)\| \leq M e^{-\beta t_a}$, ceci pour tout $t_a \geq 0$, donc $\|M_A(t)\| \leq M e^{-\beta t}, \forall t \geq 0$
 \Leftarrow] Réciproquement, supposons que $\|M_A(t)\| \leq M e^{-\beta t}, \forall t \geq 0$, or

$$\|x(t)\| \leq \|M_A(t)\| \|x_0\| \leq M \|x_0\| e^{-\beta t},$$

donc $\exists M \geq 1, \exists \beta > 0$, tel que $\forall t \geq 0, \|x(t)\| \leq M e^{-\beta t}$.

□

Proposition 5.2 [14] *soit (e_1, e_2, \dots, e_n) une base de \mathbb{R}^n . Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. Le système (5.1) est localement asymptotiquement stable.
2. Le système (5.1) est asymptotiquement stable.
3. $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|M_A(t)\| = 0$
4. Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|M_A(t)e_i\| = 0$

Preuve 1 \Rightarrow 2] Trivial. 2 \Rightarrow 4] Supposons que le système est globalement asymptotiquement stable, alors pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^n$ la solution de (5.1) associée à x_0 on a $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0$, en particulier, soit $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|x_0\| = 1$, on a

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|M_A(t)\| = \lim_{t \rightarrow +\infty} \|M_A(t)x_0\| = 0.$$

donc $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|M_A(t)e_i\| \leq \lim_{t \rightarrow +\infty} \|M_A(t)\| \|e_i\| = 0 \forall i = 1, \dots, n$. D'où 4.

4 \Rightarrow 3] Supposons (4) est vérifiée,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|M_A(t)e_i\| = 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall t \geq \eta \text{ on a } \|M_A(t)e_i\| < \varepsilon$$

soit $x_0 \in \mathbb{R}^n$ $\|x_0\| = 1$, alors $x_0 = \sum_{i=1}^{i=n} \xi_i e_i$. Or dans un espace de dimension finie toutes les normes sont équivalentes, il existe $a, b > 0$ tels que

$$a \max_{i \in \{1, \dots, n\}} |\xi_i| \leq \|x_0\| \leq b \max_{i \in \{1, \dots, n\}} |\xi_i|$$

$$\Rightarrow \max_{i \in \{1, \dots, n\}} |\xi_i| \leq a^{-1}.$$

$$\text{Donc } \|M_A(t)x_0\| = \left\| \sum_{i=1}^{i=n} \xi_i M_A(t)e_i \right\| \leq a^{-1} \sum_{i=1}^{i=n} \|M_A(t)e_i\| \leq a^{-1} n \varepsilon.$$

D'où 3.

3 \Rightarrow 1] Trivial.

Remarque 5.2

- Si un système linéaire est attractif (voir Définition 5.1), alors il est aussi asymptotiquement stable.
- Si un système est exponentiellement stable, alors il est aussi asymptotiquement stable.

Le concept de stabilité exponentielle peut être caractérisé en termes de l'exposant de Lyapunov.

Définition 5.2 [2] L'exposant de Lyapunov K_L du système 5.1 est défini par :

$$K_L(A) = \inf \{ \beta \in \mathbb{R} / \exists M_\beta \geq 0, \forall t \geq 0, \|M_A(t)\| \leq M_\beta e^{\beta t} \} \quad (5.4)$$

Proposition 5.3 [10] Le système (5.1) est exponentiellement stable si et seulement si, $K_L(A) < 0$.

Preuve \Rightarrow] Supposons que le système (5.1) est exponentiellement stable, alors $\exists M \geq 1 \exists \beta > 0, \forall t \geq 0$ on a $\|M_A(t)\| \leq M e^{-\beta t}$, posons $\alpha = -\beta$ alors $\alpha < 0$, donc $\exists M \geq 1 \exists \alpha < 0, \forall t \geq 0 \Rightarrow \|M_A(t)\| \leq M e^{\alpha t}$, ainsi

$$K_L(A) = \inf \{ \beta \in \mathbb{R} / \exists M_\beta \geq 0, \forall t \geq 0, \|M_A(t)\| \leq M_\beta e^{\beta t} \} < 0.$$

\Leftarrow] Réciproquement, supposons que $K_L(A) \geq 0$, s'il existe $M \geq 0, \forall t \geq 0, \|M_A(t)\| \leq M e^{\beta t}$ alors $\beta \geq 0$, posons $\beta = -\alpha$ d'où s'il existe $M \geq 0, \forall t \geq 0, \|M_A(t)\| \leq M e^{-\alpha t}$ alors $\alpha \leq 0$. Ceci implique que le système (5.1) n'est pas exponentiellement stable.

La section suivante concerne la stabilité dans le cas stationnaire.

5.2.2 Stabilité des systèmes linéaires stationnaires

Dans ce cas le système (5.1) devient :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t), & t \in \mathbb{R}_+ \\ x(0) = x_0, \end{cases} \quad (5.5)$$

Où $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

Dans le résultat suivant, on va énoncer des caractérisations de quelque type de stabilité par le spectre du système A .

Théorème 5.2 [29, p.231, Théorème 13.1.1.]

1. S'il existe une valeur propre λ de A telle que $\Re(\lambda) > 0$, alors le point d'équilibre 0 est instable.
2. Si toutes les valeurs propres de A sont à partie réelle strictement négative, alors le point d'équilibre 0 est asymptotiquement stable.
3. Le point d'équilibre 0 est stable si et seulement si toute valeur propre de A est à partie réelle négative ou nulle, et si toute valeur propre à partie réelle nulle est simple.

Preuve 1.] On a la solution du système (5.5) s'écrit sous la forme : $x(t) = e^{tA}x_0$ pour chaque condition initial $x_0 \in \mathbb{R}^n$, alors le point origine est stable si et seulement si, la fonction : $t \mapsto \exp(tA)$ est bornée $\forall t \geq 0$. Supposons qu'il existe une valeur propre $\lambda_{i_0} \in \sigma(A)$ telle que $\Re(\lambda_{i_0}) > 0$. $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ alors il existe $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$P^{-1}AP = J := \text{diag}(J_1, J_2, \dots, J_r)$$

où $\forall i = 1, \dots, r$, J_i est le bloc de Jordan associé à la valeur propre $\lambda_i \in \sigma(A)$ de la forme (1.5). D'où

$$e^{tA} = \sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^{m_i} t^{k-1} e^{t\lambda_i} R_{ik}$$

d'où $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{tA} = \infty$ car $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{t\lambda_{i_0}} = +\infty$, donc 0 n'est pas un équilibre stable d'où 1.

2.] Supposons que $\forall \lambda \in \sigma(A)$, $\Re(\lambda) < 0$, alors $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{tA} = 0$, ceci implique $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0$ donc l'origine est asymptotiquement stable.

3.] Pour que 0 soit stable, il faut que $\forall \lambda \in \sigma(A)$ $\Re(\lambda) \leq 0$, s'il existe une valeur propre $\lambda \in \sigma(A)$ tel que $\Re(\lambda) = 0$, alors nécessairement l'ordre de multiplicité de λ soit égale à 1, car sinon $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^{k-1} e^{t\lambda_i} = +\infty$ d'où 3.

□

Théorème 5.3 [29, p.237] (Principe d'invariance de Lasalle)

Soit ϑ un ouvert non vide de \mathbb{R}^n contenant le point d'équilibre x_e , et $V : \vartheta \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 telle que

1. $V(x_e) = 0$ et $\forall x \in \vartheta \setminus \{x_e\}$, $V(x) > 0$.

2. V est propre, i.e. $\forall l \in V(\vartheta) \subset \mathbb{R}$, $V^{-1}([0, l])$ est compact dans ϑ .
3. $\forall x \in \vartheta$, $\langle \nabla V(x), Ax \rangle \leq 0$, et de plus si $x(t)$ est une solution du système (5.1) telle que $\langle \nabla V(x(t)), Ax(t) \rangle = 0$, pour tout $t \geq 0$, alors $x(t) = x_e$, $\forall t \geq 0$

Alors x_e est asymptotiquement stable.

5.3 Stabilisation des systèmes stationnaire par feedback linéaire

Dans cette section, on considère le système de contrôle linéaire stationnaire suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), & t \in \mathbb{R}_+ \\ x(0) = x_0, \end{cases} \quad (5.6)$$

Où $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$.

Définitions 5.2 [29] • Le système (5.6) est asymptotiquement stabilisable par feedback linéaire, s'il existe $K \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ tel que le système bouclé par le feedback $u(t) = Kx(t)$ (ie $\dot{x}(t) = (A + BK)x(t)$) est asymptotiquement stable.

• Le système (5.6) est exponentiellement stabilisable par feedback linéaire, s'il existe $K \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ tel que le système bouclé par le feedback $u(t) = Kx(t)$ (ie $\dot{x}(t) = (A + BK)x(t)$) est exponentiellement stable.

5.3.1 Théorème de placement de pôles

On note par \mathcal{P}_n l'ensemble des polynômes unitaires de degré n en z tels que les coefficients sont des nombres réels. Posons χ_M le polynôme caractéristique de la matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors on a le théorème classique suivant appelé placement de pôle "pole-shifting".

Théorème 5.4 [9, p.275] (Théorème de placement de pôles) Si le système (5.6) vérifie la condition de Kalman (2.7), alors on a :

$$\mathcal{P}_n = \{\chi_{A+BK}, K \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})\} \quad (5.7)$$

La preuve de ce théorème est basée sur le lemme suivant, dans le cas où $m > 1$.

Lemme 5.1 [9, p.277, Lemma10.3] Si le contrôle est un scalaire i.e. $m = 1$ et le système (5.6) vérifie la condition de Kalman (2.7), alors il existe $y \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$ et $C \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ telles que le système contrôlé $\dot{x}(t) = (A + BC)x(t) + Byu(t)$ vérifie la condition de Kalman (2.7).

Preuve du théorème On montre le théorème premièrement dans le cas où le contrôle est un scalaire i.e. $m = 1$. Le système (3.12) vérifie la condition de Kalman (2.7) alors il est semblable à la forme de Brunovski, i.e. $\exists S \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ tel que $A = S\tilde{A}S^{-1}$, $B = S\tilde{B}$ où

\tilde{A} , \tilde{B} sont de la forme donné par le [théorème 2.3](#). Soit $P \in \mathcal{P}_n$, notons par $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ les n nombres réels tels que :

$$P(z) = z^n - \sum_{i=0}^{i=n-1} \beta_{i+1} z^i$$

et par $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ les n nombres réels tels que :

$$\chi_A(z) = z^n - \sum_{i=0}^{i=n-1} \alpha_{i+1} z^i.$$

Posons $\tilde{K} = \begin{pmatrix} \alpha_1 + \beta_1 & \cdots & \alpha_n + \beta_n \end{pmatrix}$ alors on a :

$$\tilde{A} + \tilde{B}\tilde{K} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_n \end{pmatrix},$$

d'où $P_{\tilde{A}+\tilde{B}\tilde{K}} = z^n - \sum_{i=0}^{i=n-1} \beta_{i+1} z^i = P(z)$. Posons $K = \tilde{K}S^{-1}$, par un simple calcul on obtient $P_{A+BK} = P$ d'où le résultat.

Déduisons maintenant le cas ou $m > 1$. Soit $P \in \mathcal{P}_n$, $y \in \mathcal{M}_{m,1}$, et $C \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ vérifiant le lemme précédent, alors d'après le cas précédent, il existe $K_1 \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ telle que

$$P = \chi_{(A+BC)+ByK_1} = \chi_{A+B(C+yK_1)}.$$

Posons $K = C + yK_1$, alors $\chi_{A+BK} = P$ ce qui achève la démonstration du théorème. □

Corollaire 5.1 Si le système (5.6) est exactement contrôlable, alors il est asymptotiquement stabilisable.

Preuve Considérons le polynôme $P(X) = (X + 1)^n$, d'après le théorème de placement de pôles il existe $K \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ tel que $\chi_{A+BK} = P$, donc le spectre de la matrice de $A + BK$,

$$\sigma(A + BK) = \{-1\}$$

ceci équivalent à $\forall \lambda \in \sigma(A + BK)$, $\Re(\lambda) < 0$, donc d'après le [théorème 5.2](#), le système

$$\dot{x} = (A + BK)x$$

est asymptotiquement stable, ainsi le système (5.6) est asymptotiquement stabilisable. □

Remarque 5.3 D'après le corollaire précédent tout système de contrôle stationnaire exactement contrôlable est asymptotiquement stabilisable, la réciproque n'est pas vrai en générale. En effet, considérons le système suivant :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) := \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} u(t)$$

La matrice de Kalman du système est $[A|B] = \begin{pmatrix} B & AB \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, d'où la condition de Kalman n'est pas vérifiée ainsi le système n'est pas exactement contrôlable. Mais il est asymptotiquement stabilisable, considérons le système bouclé par le feedback $u(t) = Kx(t)$ où $K = \begin{pmatrix} -2 & 0 \end{pmatrix}$. Les valeurs propre de la matrice $A + BK = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ sont $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = -3$, donc le système bouclé par $u(t) = Kx(t)$ est asymptotiquement stable.

Les résultats suivant donnent l'équivalence entre la contrôlabilité et la stabilisation.

Théorème 5.5 [30] Le système (5.6) est exactement contrôlable si et seulement si, il est asymptotiquement stabilisable et $\text{rg}(A - \lambda I, B) = n \forall \lambda \in \sigma(A)$ telle que $\Re(\lambda) < 0$.

Théorème 5.6 [21](Wonham's Theorem) Le système (5.6) est exactement contrôlable si et seulement si, il est exponentiellement stabilisable avec un taux de décroissance exponentielle arbitraire, i.e.

$$\forall \mu \in]-\infty, 0[, \exists K \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}), \exists C > 0, \|e^{t(A+BK)}\| \leq Ce^{\mu t} \quad \forall t \geq 0.$$

Passons maintenant à un résultat qui nous permettra de déterminer le feedback stabilisant le système (5.6).

5.3.2 Grammienne de contrôlabilité et Stabilisation

Considérons le système (5.6), on présente dans cette partie la forme du feedback stabilisant le système (5.6) obtenue par Dahlard L. Lukes [19].

Théorème 5.7 [19] Si le système de contrôle (5.6) est exactement contrôlable, alors il est asymptotiquement stabilisable à l'aide de feedback linéaire $u(x) = -B^\top G(T)^{-1}x$.

Preuve Le système de contrôle (5.6) est asymptotiquement stabilisable à l'aide de feedback linéaire $u(x) = -B^\top G(T)^{-1}x$ si et seulement si, le système homogène

$$\dot{x}(t) = (A + BK)x(t) \quad \text{où } K = -B^\top G(T)^{-1} \quad (5.8)$$

est asymptotiquement stable. D'après la remarque 5.2. il suffit de montrer que tout solution

$x(\cdot)$ du système (5.8) vérifie $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0$. On définit l'application :

$$\begin{aligned} V : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ z &\longmapsto V(z) := z^\top G(T)^{-1}z \end{aligned}$$

Alors $v(0) = 0^\top G(T)^{-1}0 = 0$ et $V(z) = z^\top G(T)^{-1}z > 0 \quad \forall z \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, d'où $\lim_{\|z\| \rightarrow +\infty} V(z) = +\infty$. Posons $v(t) := V(x(t))$, $\forall t \in \mathbb{R}$, on vérifie facilement que

$$\dot{v}(t) = -\|B^\top G(T)^{-1}x\|^2 + x^\top A^\top G(T)^{-1}x + x^\top G(T)^{-1}Ax - x^\top BB^\top G(T)^{-1}x.$$

D'après la définition de $G(T)$ et intégration par partie on obtient

$$AG(T) = -e^{-TA}BB^\top e^{-TA^\top} + BB^\top - G(T)A^\top. \quad (5.9)$$

On multiplie l'équation à gauche et à droite par $G(T)^{-1}$ on obtient

$$G(T)^{-1}A = -G(T)^{-1}e^{-TA}BB^\top e^{-TA^\top}G(T)^{-1} + G(T)^{-1}BB^\top G(T)^{-1} - A^\top G(T)^{-1}$$

donc \dot{v} devient :

$$\dot{v} = -\|B^\top G(T)^{-1}x\|^2 - \|B^\top e^{-TA^\top}G(T)^{-1}x\|^2 \leq 0$$

donc d'après le principe d'invariance de Lasalle ([théorème 5.3](#)), il suffit de montrer que si $\dot{v}(t) = 0 \quad \forall t \geq 0$ alors $x(t) = 0$. Supposons que $\dot{v}(t) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}_+$

$$\Rightarrow -\|B^\top G(T)^{-1}x\|^2 - \|B^\top e^{-TA^\top}G(T)^{-1}x\|^2 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} B^\top G(T)^{-1}x(t) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}_+ \\ B^\top e^{-TA^\top}G(T)^{-1}x(t) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}_+ \end{cases} \quad (5.10)$$

on a $\dot{x} = (A + BK)x = (A - BB^\top G(T)^{-1})x = Ax + -BB^\top G(T)^{-1}x$ d'où d'après la première équation de (5.10) $\dot{x}(t) = Ax(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}_+$. Dérivons la première équation de (5.10), on obtient

$$B^\top G(T)^{-1}Ax(t) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}_+,$$

d'après (5.9) et (5.10) on obtient

$$G(T)^{-1}Ax(t) = -A^\top G(T)^{-1}x(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}_+$$

d'où $B^\top A^\top G(T)^{-1}x(t) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}_+$, par dérivations on obtient

$$B^\top (A^\top)^i G(T)^{-1}x(t) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \forall i \in \mathbb{N},$$

ainsi

$$x(t)^\top G(T)^{-1}A^i B = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n-1\},$$

d'après la condition de Kalman on a :

$$\mathbf{x}(t)^\top \mathbf{G}(T)^{-1} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{x}(t) = \mathbf{0} \forall t \in \mathbb{R}_+.$$

D'où le résultat. □

Exemple 5.1 Considérons le système,

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t) := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t),$$

on a : $e^{t\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}$, et $\mathbf{A}^\top = -\mathbf{A}$. Alors $e^{-t\mathbf{A}^\top} = e^{t\mathbf{A}}$. La Grammiene de contrôlabilité en $T = 2\pi$ est :

$$\mathbf{G}(2\pi) = \begin{pmatrix} \pi & 0 \\ 0 & \pi \end{pmatrix}.$$

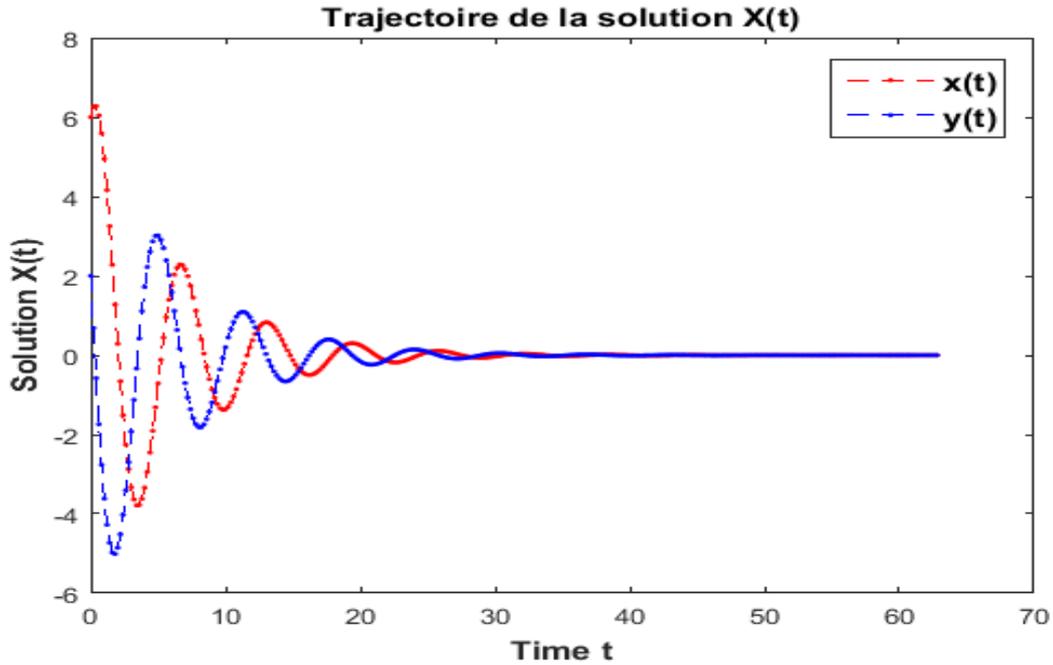
Alors le système est exactement contrôlable, ainsi il est asymptotiquement stabilisable par le feedback linéaire donné par :

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{K}\mathbf{x}(t) := -\mathbf{B}^\top \mathbf{G}(2\pi)^{-1} \mathbf{x}(t) = -\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\pi} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\pi} \end{pmatrix} \mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{\pi} \end{pmatrix} \mathbf{x}(t).$$

Si $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ donc le feedback stabilisant le système est $\mathbf{u} = -\frac{1}{\pi}x_2$. La résolution numérique du système bouclé par le feedback $\mathbf{u}(t) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{\pi} \end{pmatrix} \mathbf{x}(t)$,

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = [\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K}]\mathbf{x}(t) & t \in \mathbb{R}_+ \\ \mathbf{x}(0) = (\mathbf{6}, \mathbf{0})^\top \end{cases} \quad (5.11)$$

donne le résultat suivant :


 FIGURE 5.1 – L'évolution des composantes de $X(t)$.

Nous remarquons que la solution du système bouclé par le feedback $u(t) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{\pi} \end{pmatrix} x(t)$ converge vers 0 , donc le feedback $u(\cdot)$ est bien un contrôle stabilisant.

5.3.3 Stabilisation exponentielle par un feedback

Pour garantir une convergence rapide on choisi $T = \infty$ dans la Grammiene de contrôlabilité, nous présentons ici une méthode dite méthode de Bass. Notons par $\mu(A) = \max\{\Re(\lambda), \lambda \in \sigma(A)\}$.

Proposition 5.4 Soit $\lambda \in (\mu(-A), +\infty)$, la matrice $C_{\lambda, \infty} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par

$$C_{\lambda, \infty} := \int_0^{\infty} e^{-2\lambda t} e^{-tA} B B^{\top} e^{-tA^{\top}} dt,$$

est symétrique positive. De plus si le système (5.6) est exactement contrôlable, alors $C_{\lambda, \infty}$ est inversible.

Preuve Soit $\lambda \in (\mu(-A), +\infty)$, il est claire que $C_{\lambda, \infty}$ est une matrice symétrique positive, de plus

$$\begin{aligned} x^{\top} C_{\lambda, \infty} x &= x^{\top} \int_0^1 e^{-2\lambda t} e^{-tA} B B^{\top} e^{-tA^{\top}} dt x + x^{\top} \int_1^{\infty} e^{-2\lambda t} e^{-tA} B B^{\top} e^{-tA^{\top}} dt x \\ &= x^{\top} \int_0^1 e^{-2\lambda t} e^{-tA} B B^{\top} e^{-tA^{\top}} dt x + \int_1^{\infty} \|e^{-\lambda t} e^{-tA} B x\|^2 dt \\ &\geq x^{\top} \int_0^1 e^{-2\lambda t} e^{-tA} B B^{\top} e^{-tA^{\top}} dt x \\ &\geq e^{-2 \max\{0, \lambda\}} x^{\top} \int_0^1 e^{-tA} B B^{\top} e^{-tA^{\top}} dt x \end{aligned}$$

donc

$$\mathbf{x}^\top \mathbf{C}_{\lambda, \infty} \mathbf{x} \geq e^{-2 \max\{0, \lambda\}} \mathbf{x}^\top \int_0^1 e^{-tA} \mathbf{B} \mathbf{B}^\top e^{-tA^\top} dt \mathbf{x}, \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

si le système (5.6) est exactement contrôlable alors, d'après l'inégalité d'observabilité (2.21), il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\mathbf{x}^\top \int_0^1 e^{-tA} \mathbf{B} \mathbf{B}^\top e^{-tA^\top} dt \mathbf{x} \geq C \|\mathbf{x}\|^2, \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

d'où

$$\mathbf{x}^\top \mathbf{C}_{\lambda, \infty} \mathbf{x} \geq e^{-2 \max\{0, \lambda\}} C \|\mathbf{x}\|^2, \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

donc $\mathbf{C}_{\lambda, \infty}$ est inversible.

□

Proposition 5.5 [31] Soit $\lambda \in (\mu(-A), +\infty)$, alors

$$\sigma(A + \mathbf{B} \mathbf{K}_{\lambda, \infty}) = \{-2\lambda - \xi / \xi \in \sigma(A)\}.$$

Où $\mathbf{K}_{\lambda, \infty} = -\mathbf{B}^\top \mathbf{C}_{\lambda, \infty}^{-1}$

Preuve On a

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{\lambda, \infty} &= \int_0^{+\infty} e^{-2\lambda t} e^{-tA} \mathbf{B} \mathbf{B}^\top e^{-tA^\top} dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-t(A + \lambda \mathbf{I}_n)} \mathbf{B} \mathbf{B}^\top e^{-t(A^\top + \lambda \mathbf{I}_n)} dt \end{aligned}$$

par intégration par partie nous obtenons

$$(A + \lambda \mathbf{I}_n) \mathbf{C}_{\lambda, \infty} + \mathbf{C}_{\lambda, \infty} (A + \lambda \mathbf{I}_n)^\top = \mathbf{B} \mathbf{B}^\top$$

multiplions l'équation par $\mathbf{C}_{\lambda, \infty}^{-1}$ à droite on obtient

$$(A + \lambda \mathbf{I}_n) + \mathbf{C}_{\lambda, \infty} (A + \lambda \mathbf{I}_n)^\top \mathbf{C}_{\lambda, \infty}^{-1} = \mathbf{B} \mathbf{B}^\top \mathbf{C}_{\lambda, \infty}^{-1}.$$

Calculons maintenant le terme $A + \mathbf{B} \mathbf{K}_{\lambda, \infty}$

$$\begin{aligned} A + \mathbf{B} \mathbf{K}_{\lambda, \infty} &= A - \mathbf{B} \mathbf{B}^\top \mathbf{C}_{\lambda, \infty}^{-1} \\ &= A - [(A + \lambda \mathbf{I}_n) + \mathbf{C}_{\lambda, \infty} (A + \lambda \mathbf{I}_n)^\top \mathbf{C}_{\lambda, \infty}^{-1}] \\ &= \mathbf{C}_{\lambda, \infty} (-A^\top - 2\lambda \mathbf{I}_n) \mathbf{C}_{\lambda, \infty}^{-1} \end{aligned}$$

soit $\zeta \in \sigma(A + \mathbf{B} \mathbf{K}_{\lambda, \infty})$ alors il existe $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ tel que $(A + \mathbf{B} \mathbf{K}_{\lambda, \infty}) \mathbf{v} = \zeta \mathbf{v}$ ceci implique $\mathbf{C}_{\lambda, \infty} (-A^\top - 2\lambda \mathbf{I}_n) \mathbf{C}_{\lambda, \infty}^{-1} \mathbf{v} = \zeta \mathbf{v}$, on multiplie l'équation $\mathbf{C}_{\lambda, \infty}^{-1}$ à gauche, on obtient $(-A^\top - 2\lambda \mathbf{I}_n) \mathbf{C}_{\lambda, \infty}^{-1} \mathbf{v} = \zeta \mathbf{C}_{\lambda, \infty}^{-1} \mathbf{v}$. Posons $\mathbf{w} = \mathbf{C}_{\lambda, \infty}^{-1} \mathbf{v}$ on a bien $\mathbf{w} \neq 0$ d'où

$$(-A^\top - 2\lambda \mathbf{I}) \mathbf{w} = \zeta \mathbf{w} \Rightarrow A^\top \mathbf{w} = (-2\lambda - \zeta) \mathbf{w}$$

donc $\xi = -2\lambda - \zeta \in \sigma(A) \Rightarrow \zeta = -2\lambda - \xi$ où $\xi \in \sigma(A)$ ainsi

$$\sigma(A + BK_{\lambda,\infty}) = \{-2\lambda - \xi/\xi \in \sigma(A)\}.$$

D'où le résultat. □

Le corollaire suivant donne un résultat pour que le système (5.6) soit exponentiellement stabilisable.

Corollaire 5.2 *Supposons que le système (5.6) est exactement contrôlable et $A^\top = -A$, soit $\lambda > 0$, alors il existe $M > 0$ tel que pour toute solution $x(\cdot)$ de $\dot{x} = (A + BK_{\lambda,\infty})x$, vérifie $\|x(t)\| \leq Me^{-2\lambda t}\|x(0)\|$, $\forall t \geq 0$*

Preuve Soit $x(\cdot)$ la solution définie dans le corollaire et soit $y : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ définie par : $y(t) := C_{\lambda,\infty}^{-1}x(t)$, $t \in \mathbb{R}_+$, d'après la proposition 5.4 $y(\cdot)$ est bien définie. On a

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= C_{\lambda,\infty}^{-1}\dot{x}(t) = C_{\lambda,\infty}^{-1}(A + BK_{\lambda,\infty})x(t) \\ &= C_{\lambda,\infty}^{-1}C_{\lambda,\infty}(-A^\top - 2\lambda I_n)C_{\lambda,\infty}^{-1}x(t) \\ &= -(A^\top + 2\lambda I_n)y(t) \end{aligned}$$

donc $\dot{y}(t) = -(A^\top + 2\lambda I_n)y(t)$. Or $A^\top = -A$ alors $\frac{d}{dt}\|y\|^2 = -4\lambda\|y\|^2$, d'où

$$\|y(t)\| = e^{-2\lambda t}\|y(0)\|, \forall t \in \mathbb{R}_+.$$

Or $y(t) = C_{\lambda,\infty}^{-1}x(t)$, alors $\|x(t)\| \leq \|C_{\lambda,\infty}\| \|C_{\lambda,\infty}^{-1}\| e^{-2\lambda t}\|x(0)\|$, $\forall t \in \mathbb{R}_+$, Donc

$$\|x(t)\| \leq Me^{-2\lambda t}\|x(0)\|.$$

D'où le résultat. □

5.4 Stabilisation des systèmes dynamique par feedback linéaire

Considérons le système de contrôle dynamique suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), & t \in \mathbb{R}_+ \\ x(0) = x_0, \end{cases} \quad (5.12)$$

Où $A(\cdot) \in L^\infty(\mathbb{R}_+, \mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$, $B(\cdot) \in L^\infty(\mathbb{R}_+, \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R}))$, $u(\cdot) \in L^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^m)$

Définitions 5.3 [2]

- Le système (5.12) est dit asymptotiquement stabilisable par feedback linéaire (ou retour d'état linéaire) s'il existe $F(\cdot) \in L_{loc}^\infty(\mathbb{R}_+, \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}))$ tel que le système homogène

$$\dot{x}(t) = [A(t) + B(t)F(t)]x(t) \quad (5.13)$$

est asymptotiquement stable.

- Le système (5.12) est dit exponentiellement stabilisable par retour d'état linéaire, s'il existe $\alpha > 0$ et $F(\cdot) \in L_{loc}^\infty(\mathbb{R}_+, \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}))$ tels que $K_L(A + BF) < -\alpha$ (voir Définition 5.2).

Dans la section suivant on va déterminer la forme du contrôle en boucle fermée minimisant la fonction valeur en fonction de la solution de l'équation de Riccati.

5.4.1 Fonction valeur de Bellman et équation de Riccati

Considérons le système (5.12), avec $u(\cdot) \in L^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^m)$ et le coût en temps fini (resp. infini) sur $[0, T]$ (resp. $[0, +\infty)$) suivant :

$$C(T, u) = \int_0^T [\|x(s, x_0, u)\|^2 + \|u(s)\|^2] ds \quad (5.14)$$

$$C(\infty, u) = \int_0^{+\infty} [\|x(s, x_0, u)\|^2 + \|u(s)\|^2] ds \quad (5.15)$$

Définition 5.3 [29] La fonction valeur associée au coût (5.14) est la borne inférieure des coûts, autrement dit

$$\mathcal{V}(T) = \inf \{C(T, u) / u(\cdot) \in L^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^m)\} \quad (5.16)$$

Remarque 5.4 L'hypothèse (3.6) du chapitre 3 est vérifiée car $R(\cdot) = I_n$, d'où d'après le théorème 3.1 on a l'existence et l'unicité de la trajectoire optimale et dans ce cas cette borne inférieure est un minimum.

Considérons l'équation différentielle de Riccati, suivante :

$$\dot{P}(t) = -A(t)^\top P(t) - P(t)A(t) + P(t)B(t)B(t)^\top P(t) - I_n \quad (5.17)$$

Le théorème suivant résume certaines propriétés bien connues reliant le problème de contrôle optimal et l'équation (5.17).

Théorème 5.8 [26, p.364, theorem 37] Considérons le système (5.12) sur $[0, T]$, alors l'équation de Riccati (5.17) avec la condition finale $P(T) = 0$ à une unique solution $P(\cdot, T) : [0, T] \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique, cette solution a les propriétés suivantes :

1. Le contrôle en boucle fermée $u(t) = -B(t)^\top P(t)x(t)$ est l'unique contrôle optimal pour le problème (5.14)(5.16).

2. $\forall t \in [0, T]$ on a : $\int_t^T [\|x(s, x_0, u)\|^2 + \|u(s)\|^2] ds = x_0^\top P(t, T) x_0$.
3. En vue de 2. et 5.14 on a pour tout $t \in [0, T]$ $P(t, T)$ est une matrice définie positive.
4. D'après 2. on conclut que $\forall 0 \leq t \leq T_1 \leq T_2$ $[P(t, T_2) - P(t, T_1)]$ est une matrice positive.

A fin de donner un exemple, passant a une méthode de résolution de l'équation différentielle de Riccati.

5.4.2 Résolution numérique de l'équation de Riccati par la méthode d'intégration directe

La solution numérique des équations différentielles de Riccati a un rôle très important dans le problème de contrôle optimal, la question de son implémentation numérique se pose naturellement. Il existe plusieurs méthodes pour résoudre numériquement ce type d'équations, on se réfère à l'article [8]. On s'intéresse ici la **méthode d'intégration directe**, dans cette méthode l'équation de Riccati (5.17) se transforme au système d'équations différentielles vectorielles de taille n^2 suivant :

$$P_{ij} = -(A^\top)_i P^j - P_i A^j + P_i B B^\top P^j - I_{ij} \quad \forall i = 1, \dots, n, \forall j = 1, \dots, n. \quad (5.18)$$

Où M_i (res M^j) est la i -ème ligne (resp la j -ème colonne) de la matrice M . Et d'intégrer le système résultant de n^2 équations différentielles en utilisant un type de schéma d'intégration numérique, cela peut être réduit à la résolution de $n(n+1)/2$ équations en exploitant la symétrie de l'équation de Riccati. Ci-dessous, nous traitons sous Matlab un exemple.

Exemple 5.2 Considérons le problème LQ pour le système dans \mathbb{R}^3 suivant :

$$\dot{X}(t) = AX(t) + Bu(t)$$

Où

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

et le coût

$$C(T, u) = \int_0^T (x_1(s)^2 + x_2(s)^2 + x_3(s)^2 + u(s)^2) ds$$

On programme une fonction **Riccati** (voir l'Annexe A) qui donne le dessin de la trajectoire $P(\cdot)$ de l'équation de Riccati (5.17), ainsi que la trajectoire de la solution du système de contrôle associée au contrôle $u(t) = -BP(t)X(t)$. Le principe est d'utiliser **ode113** pour calculer la solution $P(\cdot)$ de **Eq_Riccati** et la solution $X(\cdot)$ de **Sys_Cont**, notons que pour implémenter l'équation de Riccati (5.17), une condition finale étant donnée $P(T) = 0$,

on inverse le temps de façon à se ramener à une condition initiale. Pour rétablir le bon sens du temps, on utilise la fonction **flipud**. Sur l'intervalle de temps $[0, T] = [0, 10]$ et $X_0 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}^T$ on a obtenu les résultats suivant :

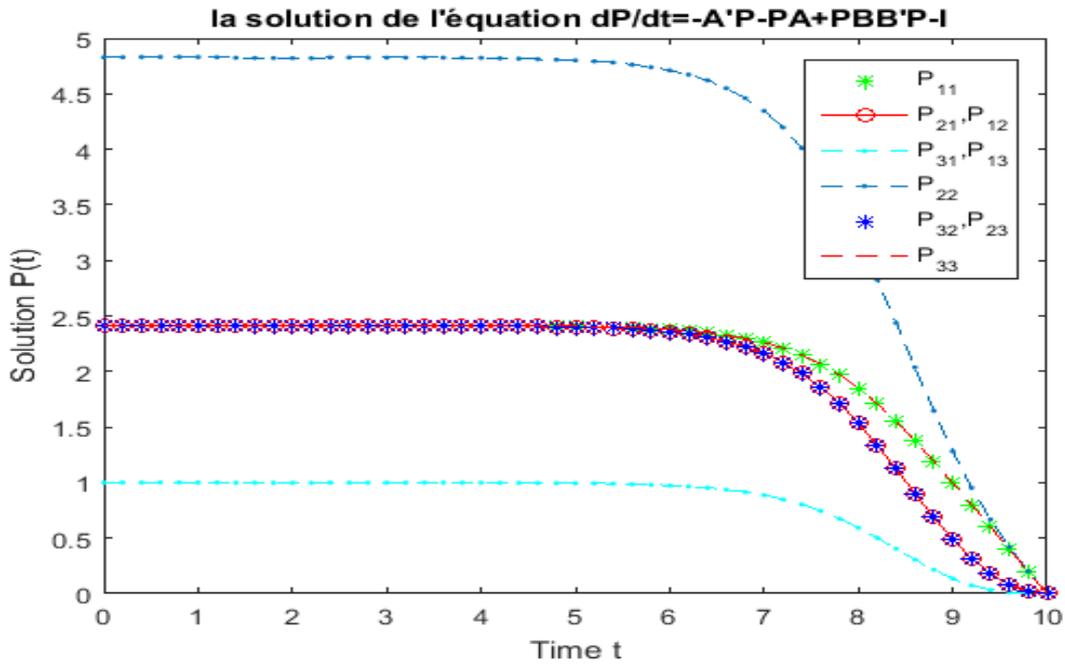


FIGURE 5.2 – l'évolution des composantes de $P(t)$.

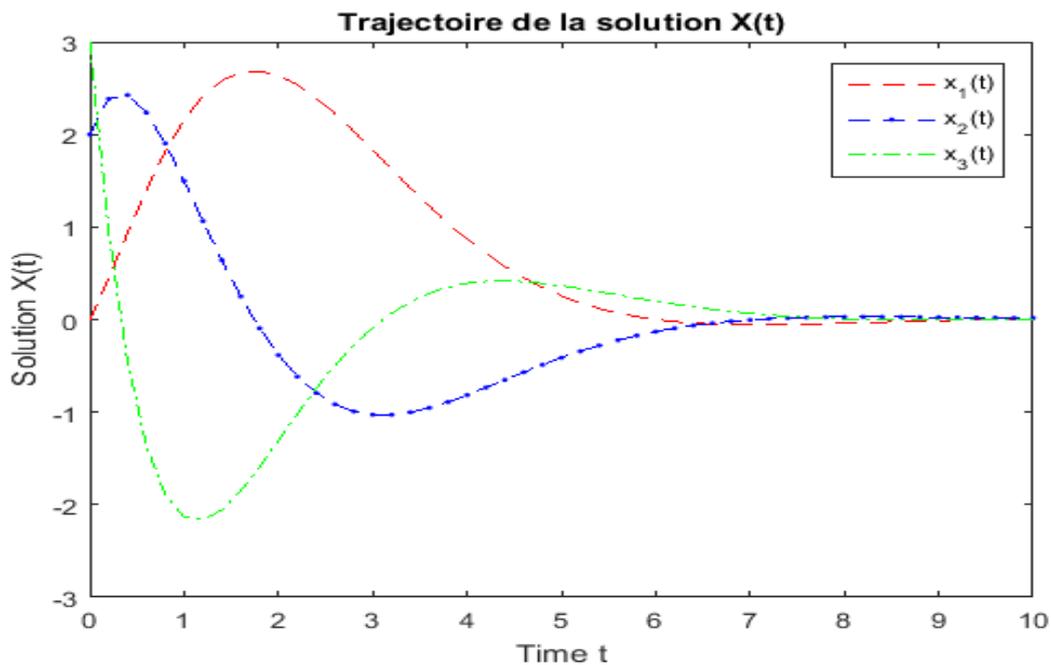


FIGURE 5.3 – L'évolution des composantes de $X(t)$.

5.4.3 Grammienne de contrôlabilité, contrôle optimal et Stabilisation

Dans cette partie nous déduisons en termes de coût quadratique, une condition suffisante pour la stabilité asymptotique. L'hypothèse H_1 est essentielle dans ce paragraphe.

$$H_1 : \exists C > 0, \forall x_0 \in \mathbb{R}^n, \exists u(\cdot) \in L^2([0, \infty), \mathbb{R}^m), C(\infty, u) \leq C \|x_0\|^2$$

$$\text{où } C(\infty, u) = \int_0^{+\infty} [\|x(s, x_0, u)\|^2 + \|u(s)\|^2] ds$$

Proposition 5.6 [2] *Considérons le système (5.12) alors les assertions H_2 et H_3 suivantes sont équivalentes à H_1*

$$H_2 : \forall x_0 \in \mathbb{R}^n, \exists u(\cdot) \in L^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^m), C(\infty, u) < \infty.$$

$$H_3 : \forall x_0 \in \mathbb{R}^n, \exists u(\cdot) \in L^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^m), x(\cdot, x_0, u) \in L^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n) \text{ et } \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t, x_0, u) = 0.$$

La preuve de cette proposition nécessite le lemme suivant :

Lemme 5.2 [14, p.133, lemma 2.39] *Soit $t_0 \in \mathbb{R}$ et $y(\cdot) : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ absolument continue tel que $y(\cdot), \dot{y}(\cdot) \in L^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n)$, alors $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = 0$.*

Preuve Les implications $H_1 \Rightarrow H_2$ et $H_3 \Rightarrow H_2$ sont triviales.

$H_2 \Rightarrow H_1$] Soit $x_0 \in \mathbb{R}^n$ alors $x_0 = \sum_{i=1}^n x_0^i e_i$ où $\{e_1, \dots, e_n\}$ est la base canonique de \mathbb{R}^n . Supposons que H_2 n'est pas vraie, alors $\forall i = 1, \dots, n \exists u_i(\cdot) \in L^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^m)$ tel que $C(\infty, u_i) < \infty$, posons $u(\cdot) = \sum_{i=1}^n x_0^i u_i(\cdot)$, alors on a

$$\begin{aligned} x(t, x_0, u) &= M_A(t)x_0 + M_A(t) \int_0^t M_A(s)^{-1} B(s)u(s) ds \\ &= \sum_{i=1}^n x_0^i [M_A(t)e_i + M_A(t) \int_0^t M_A(s)^{-1} B(s)u_i(s) ds] \\ &= \sum_{i=1}^n x_0^i x(t, e_i, u_i) \end{aligned}$$

D'après l'inégalité suivante $\left(\sum_{k=1}^n a_k\right)^2 \leq n \left(\sum_{k=1}^n a_k^2\right)$ on a

$$\begin{aligned} C(\infty, u) &= \int_0^{+\infty} [\|x(t, x_0, u)\|^2 + \|u(t)\|^2] dt \\ &= \int_0^{+\infty} [\|\sum_{i=1}^n x_0^i x(t, e_i, u_i)\|^2 + \|\sum_{i=1}^n x_0^i u_i(t)\|^2] ds \\ &\leq n \max_{i=1, \dots, n} |x_0^i|^2 \sum_{i=1}^n \int_0^{+\infty} [\|x(t, x_0, u_i)\|^2 + \|u_i(t)\|^2] dt \\ &\leq n \sum_{i=1}^n C(\infty, u_i) \|x_0\|^2 := C \|x_0\|^2. \end{aligned}$$

$H_2 \Rightarrow H_3$] Si $C(\infty, u) < \infty$ alors $x(\cdot, x_0, u) \in L^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n)$ et $u(\cdot) \in L^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^m)$ or $A(\cdot), B(\cdot) \in L^\infty(\mathbb{R}_+)$ donc $\dot{x}(\cdot, x_0, u) \in L^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n)$, ainsi d'après le lemme précédent $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t, x_0, u) = 0$. Ceci termine la preuve.

□

Le résultat suivant présente la condition suffisante de stabilisation asymptotique.

Théorème 5.9 [2, Theorem 3.2.] Pour le système (5.12) on a les implications suivantes : $H_1 \Rightarrow (5.19) \Rightarrow (5.20) \Rightarrow (5.21)$. Où :

$$\begin{cases} \exists \gamma : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty) | \forall 0 < T \leq \infty, \forall x_0 \in \mathbb{R}^n \text{ on a :} \\ \gamma(T) \|x_0\|^2 \leq \mathcal{V}(T) \leq C \|x_0\|^2 \end{cases} \quad (5.19)$$

$$\begin{cases} \text{il existe une solution } \Pi(\cdot) : [0, \infty) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ de (5.17) avec} \\ \text{la condition initial } \Pi(0) = \lim_{T \rightarrow +\infty} P(0, T), \text{ où } P(\cdot, T) \text{ celle du} \\ \text{proposition précédente, cette solution est unique s.d.p } \forall t \geq 0 \\ \text{ainsi } \Pi(t) = \lim_{T \rightarrow +\infty} P(t, T). \end{cases} \quad (5.20)$$

$$\begin{cases} \text{le système } \dot{x} = [A - BB^\top \Pi]x \text{ est asymptotiquement stable, où } \Pi(\cdot) \\ \text{est définie dans (5.20), en particulier } B(\cdot)^\top \Pi(\cdot) \in L_{loc}^\infty(\mathbb{R}_+, \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})). \end{cases} \quad (5.21)$$

Pour prouver le théorème, nous aurons besoin du lemme suivant :

Lemme 5.3 [14, p.256, Lemma3.3.4] La résolvante du système homogène satisfaite pour $a = \|A\|_{L^\infty}$ et pour tout $0 \leq s \leq t$:

$$\begin{aligned} e^{-at} &\leq \|M_A(t)\| \leq e^{at} \\ e^{-at} &\leq \|M_A(t)^{-1}\|^{-1} \leq e^{at} \end{aligned}$$

Preuve du théorème $H_1 \Rightarrow (5.19)$] Si $x_0 = 0$ il n'y a rien à montrer. Supposons que $x_0 \neq 0$, soit $a = \|A\|_{L^\infty}$, $b = \|B\|_{L^\infty}$ alors on a :

$$\begin{aligned} \|x(t, x_0, u)\| &= \|M_A(t)x_0 + M_A(t) \int_0^t M_A(s)^{-1} B(s)u(s)ds\| \\ &\geq \|M_A(t)x_0\| - \|M_A(t) \int_0^t M_A(s)^{-1} B(s)u(s)ds\| \\ &\geq e^{-at} \|x_0\| - \int_0^t e^{at} e^{-as} b \|u(s)\| ds \\ &\geq e^{-at} \|x_0\| - b \|e^a\|_{L^1(0,t)} \|u\|_{L^2(0,t)} \end{aligned}$$

Posons $\Lambda(t, u) = e^{-at} \|x_0\| - b \|e^a\|_{L^1(0,t)} \|u\|_{L^2(0,t)}$, donc $\|x(t, x_0, u)\| \geq \Lambda(t, u)$. No-

tons que $\Lambda(r, u)$ est strictement décroissante en $r > 0$. On définit :

$$\begin{aligned} T_1 &= \min\left\{T, \frac{(\log 2)}{2a}\right\} \\ R(r) &= \min\left\{r, \frac{(\log 2)}{2a}\right\} \\ t_u &= \min\left\{t \geq 0 \mid \Lambda(t, u) = \frac{\|x_0\|}{2}\right\} \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} C(T, u) \geq C(T_1, u) &= \int_0^{T_1} [\|x(t, x_0, u)\|^2 + \|u(t)\|^2] dt \\ &\geq \int_0^{\min(T_1, t_u)} \frac{1}{4} \|x_0\|^2 + \|u(t)\|^2 dt \quad (\text{car } \Lambda \searrow) \end{aligned}$$

Nous allons maintenant dériver une borne inférieure pour l'expression du côté droit, on a deux cas :

i. Si $u(\cdot) \in L^2([0, T], \mathbb{R}^m)$ tel que $t_u \geq T_1$, on a :

$$C(T_1, u) \geq \frac{T_1}{4} \|x_0\|^2 = \frac{R(T)}{4} \|x_0\|^2 \quad (5.22)$$

ii. Si $u(\cdot) \in L^2([0, T], \mathbb{R}^m)$ tel que $t_u < T_1$, alors $\Lambda(t_u, u) = \frac{1}{2} \|x_0\|$ d'où

$$\|u\|_{L^2(0, t_u)}^2 = \left(\frac{e^{-at_u} - \frac{1}{2}}{b \|e^{a\cdot}\|_{L^1(0, t_u)}} \right)^2 \|x_0\|^2 \geq \frac{(\sqrt{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2})^2}{b^2 \|e^{a\cdot}\|_{L^1(0, t_u)}^2} \|x_0\|^2 \quad (5.23)$$

donc, d'après (5.22) et (5.23) pour tout $u \in L^2([0, T], \mathbb{R}^m)$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ on a :

$$\begin{aligned} C(t, u) &\geq \min\left\{ \frac{R(T)}{4}, \frac{(\sqrt{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2})^2}{b^2 \|e^{a\cdot}\|_{L^1(0, t_u)}^2} \right\} \|x_0\|^2 \\ &:= \gamma(T) \|x_0\|^2 \end{aligned}$$

D'où l'inégalité gauche. Supposons que H_1 est vérifiée, soit $u(\cdot)$ le contrôle défini en H_1 , alors on a :

$$\begin{aligned} x_0^\top P(t, T)x_0 &= \inf \int_t^T [\|x(s, x_0, u)\|^2 + \|u(s)\|^2] ds \\ &\leq \int_0^{+\infty} [\|x(s, x_0, u)\|^2 + \|u(s)\|^2] ds \\ &= C(\infty, u) \leq C \|x_0\|^2 \end{aligned}$$

D'où (5.19)

(5.19) \Rightarrow (5.20)] Pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^n$ on a :

$$\gamma(T)\|x_0\|^2 \leq x_0^\top P(t, T)x_0 \leq C(\infty, u) \leq C\|x_0\|^2.$$

Ainsi, puisque $P(t, \cdot)$ est croissante de façon monotone d'après (4) du théorème précédent. On conclut l'existence d'une matrice s.d.p $\Pi(t) = \lim_{T \rightarrow +\infty} P(t, T)$ solution de l'équation de Riccati avec la condition initiale $\Pi(0) = \lim_{T \rightarrow +\infty} P(0, T)$. L'unicité découle des théorèmes standard sur les équations différentielles ordinaires.

(5.20) \Rightarrow (5.21)] Considérons le système suivant :

$$\dot{x}(t) = [A(t) - B(t)B(t)^\top \Pi(t)]x(t) \quad t \in \mathbb{R}_+ \quad (5.24)$$

Correspond au contrôle $u(\cdot) = -B(\cdot)^\top \Pi(\cdot)x(\cdot)$, par dérivation de la fonction définie positive $(t, x) \rightarrow x^\top \Pi(t)x$, le long de toutes solution $x(\cdot)$ de (5.24). On obtient pour tout $t \geq 0$

$$\frac{d}{dt}(x(t)^\top \Pi(t)x(t)) = x(t)^\top \left\{ A(t)^\top \Pi(t) + \Pi(t)A(t) - 2\Pi(t)B(t)B(t)^\top \Pi(t) + \dot{\Pi}(t) \right\} x(t)$$

d'après l'équation de Riccati (4.23) on obtient :

$$\frac{d}{dt}(x(t)^\top \Pi(t)x(t)) = x(t)^\top \{-I_n - \Pi(t)B(t)B(t)^\top \Pi(t)\}x(t)$$

par intégration sur l'intervalle $[0, T]$ on obtient :

$$\begin{aligned} x(0)^\top \Pi(0)x(0) &\leq x(T)^\top \Pi(T)x(T) - x(0)^\top \Pi(0)x(0) \\ &= \int_0^T [\|x(t)\|^2 + \|B(t)^\top \Pi(t)x(t)\|^2] dt \\ &\leq - \int_0^T \|x(t)\|^2 dt \end{aligned}$$

Donc

$$x(0)^\top \Pi(0)x(0) \geq \|x(\cdot)\|_{L^2([0, T], \mathbb{R}^n)}. \quad (5.25)$$

De même on montre que

$$x(0)^\top \Pi(0)x(0) \geq \|u(\cdot)\|_{L^2([0, T], \mathbb{R}^m)}. \quad (5.26)$$

les deux équation (5.25), (5.26) sont vraies pour tout $T \geq$, alors $x(\cdot) \in L^\infty(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n)$, et $u(\cdot) \in L^\infty(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^m)$. Or $A(\cdot) \in L^\infty(\mathbb{R}_+, \mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ et $B(\cdot) \in L^\infty(\mathbb{R}_+, \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R}))$, donc $\dot{x}(\cdot) \in L^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n)$. D'après le lemme 5.2, $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0$. Donc le système (5.24) est attractif ceci implique qu'il est aussi asymptotiquement stable. Ainsi on a : $B(\cdot)^\top \Pi(\cdot) \in L_{loc}^\infty(\mathbb{R}_+, \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}))$ car $B(\cdot) \in L^\infty(\mathbb{R}_+, \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R}))$ et $\Pi(\cdot)$ est continue. Ceci complète la démonstration du théorème.

□

Corollaire 5.3 [2] Soit le système (5.12) tel que, le système $\dot{x}(t) = [A(t) - \lambda I_n]x(t) + B(t)u(t)$, satisfait l'hypothèse H_1 pour un certain $\lambda > 0$. Alors le système (5.12) est exponentiellement stable.

Preuve D'après le théorème précédent il existe un feedback $F(\cdot)$ tel que le système $\dot{x}(t) = [A(t) - \lambda I_n]x(t) + B(t)u(t)$, est asymptotiquement stable, alors $K_L(A - \lambda I_n + BF) \leq 0$. D'où $K_L(A + BF) \leq -\lambda$. Donc le système (5.12) est exponentiellement stable.

□

Le résultat suivant garante que le système (5.12) est asymptotiquement stabilisable s'il est complètement contrôlable.

Théorème 5.10 [2, Theorem 3.6.] Le système (5.12) est complètement contrôlable si, et seulement si, $\forall \lambda > 0$, $\exists F(\cdot) \in L_{loc}^\infty(\mathbb{R}_+, \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}))$ tel que $K_L(A + BF) \leq -\lambda$, les deux conditions impliquent H_1 .

Corollaire 5.4 Si système (5.12) est exactement contrôlable alors il est asymptotiquement stabilisable.

Preuve Si le système est exactement contrôlable, alors il est aussi complètement contrôlable, d'où l'hypothèse H_1 est vérifiée et d'après le théorème 5.9, le système est asymptotiquement stabilisable.

□

5.5 Conclusion

Dans ce chapitre, on a étudié les types de stabilisation par feedback linéaire dans le cas stationnaire et le cas dynamique, ses types de stabilisation sont fortement liés au problème de contrôlabilité et de contrôle optimal ainsi que l'équation de Riccati qui donne la forme du contrôle stabilisant.

Conclusion et perspectives

Dans ce travail, nous avons considéré une classe des systèmes de contrôle linéaire en dimension finie. Nous avons étudié la contrôlabilité et quelques testes de contrôlabilité dans le cas stationnaire et dynamique ; sans contraintes et avec contraintes.

Ensuite, nous avons étudié le problème de contrôle optimal minimisant un coût quadratique qui a une grande importance dans les problèmes de stabilisation. Ainsi que le problème de contrôle en temps minimal, nous avons déterminé la forme du contrôle minimisant en utilisant le principe de maximum de Pontryagin et le principe de Bang-Bang. L'application de ses résultats est réalisé sur le problème d'oscillateur harmonique. Ensuite, nous avons étudié deux méthodes numériques pour résoudre numériquement le problème de control en temps minimal ; la méthode de la discrétisation totale et la méthode de tir simple. Numériquement, on peut trouver le temps minimal et le contrôle minimisant en utilisant les méthodes précédentes. Une application a été effectuée pour la résolution numérique du problème d'oscillateur harmonique.

Enfin, nous avons étudié la stabilité des systèmes homogènes, ainsi que les types de stabilisation par feedback linéaire des systèmes contrôlés. Dans un premier lieu, nous avons présenté les résultats de stabilisation dans le cas stationnaires ainsi que celle donnant la forme du feedback stabilisant, nous avons prouvé que la notion de stabilisation est fortement liée à la notion de contrôlabilité. Dans un second lieu, nous avons étudié la stabilisation des systèmes dynamiques et leur rapport avec la Grammienne de contrôlabilité et le contrôle optimale et l'équation de Riccati. Nous avons aussi simulé l'équation de Riccati par la méthode d'intégration directe dans le bute de donner la forme du contrôle minimisant un coût quadratique.

Nombreuses sont les classes des systèmes contrôlés sur lesquelles nous pouvant étudier la contrôlabilité et la stabilisation, dans le présent travail on a étudié les systèmes linéaires en dimension finie. En analysant avec profondeur le contenu de ce traité des questions naturelles à regarder, sont directement menées à l'esprit :

1. Continuer à généraliser les testes et les méthodes de contrôlabilité pour les systèmes linéaires en dimension infini et les systèmes bilinéaires ainsi que les systèmes semi-linéaires.
2. L'étude de stabilisation des systèmes bilinéaires en dimension finie et infini.

Annexe

A Méthode de la discrétisation totale

```
function[tf,U]=M_Directe(N)
%N nbr de discrétisation / tf temps final /U Les valeurs du contrôle.
A=[0 1;0 0]; B=[0;1];
n=2; % Dimension de l'espace des états.
m=1; % Dimension de l'espace des contrôle.
tf=10; % Choix arbitraire de temps final.
U= -1+2*rand(m,N); % Choix arbitraire de contrôle.
Z0=[reshape(U,N*m,1);tf];
X0=zeros(n,1); %Etat initial.
Xd=[0;-1]; % Etat final.
options=optimset('Algorithm','sqp'); %Choix de la méthode sqp comme méthode
d'optimisation non linéaire.
[Z,tf]=fmincon(@Temps,Z0,[],[],[],[],[],[],@Z)Contraintes(Z,A,B,m,N,X0,Xd)
,options); % Minimisation la fonction temps sous contraintes décrit dans
la fonction contraintes.
U=Z(1:end-1);
U=reshape(U,m,N);
X=zeros(n,N+1);
h=(tf/N);
for i=1:N
X(:,i+1)=X(:,i)+h*(A*X(:,i)+B*U(:,i)); % On utilise le schéma d'Euler
explicite pour résoudre le système.
end % Dessin de la trajectoire de la solution.
subplot(1,2,1); plot(X(1,:),X(2:,:),'-o');
title('Trajectoire de la solution - Méthode directe') % Dessin de contrôle.
subplot(1,2,2);plot(linspace(0,tf,N),U,'-*');
title('l' évolution du contrôle en temps - Méthode directe')
end
```

```

function [c,ceq]=Contraintes(Z,A,B,m,N,X0,Xd)
tf=Z(end);
U=Z(1:(end-1));
U=reshape(U,m,N); % Redimensionné le vecteur U.
h=tf/N ;
c=[(sum(abs(U).^m,1).^(1/m))-1,-tf]; % la contrainte sur le contrôle
norme u(ti)<= 1 et tf >=0.
X=X0 ;
for i=1:N
X=X+h*(A*X+B*U(:,i));
% On utilise le schéma d'Euler explicite pour résoudre le système.
end
ceq=X-Xd; % ceq représente la condition finale
end

function [t]=Temps(Z)
t=Z(end);
end

```

B Méthode de tir simple

```

function [tf,u]= M_Indirecte
A=[0 1;0 0]; B=[0;1];
n=2; m=1;
tf=20;
p0=[1;0];
xd=[0;-1];
x0=[0;0]; % A,B,n,m,tf,p0,x0,xd sont les données
options=optimset('Display','iter','LargeScale','on');
[potf]=fsolve(@(X) G(X,A,B,x0,xd,n,m), [p0;tf],options); % On utilise
fsolve pour trouver un zero de la fonction G.
tf=potf(end);
p0=potf(1:end-1);
Z0=[x0;p0];
options = odeset('AbsTol',1e-9,'RelTol',1e-9);
[TZ,Z]=ode113(@(t,Z) Etat_glob(t,Z,A,B,n,m), [0 tf], Z0,options);
Z=Z'; x=Z(1:n,:);
p=Z((n+1):end,:);
q=B'*p; u=zeros(m,length(TZ));
for i=1:length(TZ)

```

```

    u(:,i)=sign( q(:,i));
end
subplot(121); plot(x(1,:),x(2:,:),'r-o');
title('Trajectoire de la solution - Méthode indirecte')
subplot(122); plot(TZ,u,'-*');
title('l' évolution du contrôle en temps - Méthode indirecte')
end

function[res]=G(X,A,B,x0,xd,n,m)
tf=X(end);
p0=X(1:(end-1));
Z0=[x0;p0];
tspan =[0,tf];
options = odeset('AbsTol',1e-9,'RelTol',1e-9);
[TZ,Z]= ode113(@(t,Z) Etat_glob(t,Z,A,B,n,m),tspan,Z0,options); %Z
    contient les valeurs de p et x.
res = Z(end,1:n)'-xd; % res contient la distance entre x(tf)et xd
end

function[r]=Etat_glob(t,Z,A,B,n,m)
x=Z(1:n);
p=Z((n+1):end);
q=B'*p ;
u=sign(q);
r=[(A*x+B*u);(-A'*p)];
end

function[re]=f_g(Z)
re=G(Z,A,B,x0,xd,n,m);
end

```

C Méthode d'intégration directe

```

function Riccati
% Systeme dx_1/dt=x_2, dx_2/dt=x_3, dx_3/dt=u
% min int_0^T (x_1^2+x_2^2+x_3^2+u^2)dt
clc; clear all; n=3;
range =[0:0.2:10];
global tricca ricca ;
minit=zeros(n^2,1);
[tricca,ricca] = ode113(@Eq_Riccati,[10:-0.2:0],minit);

```

```

ricca=flipud(ricca); % on remet le temps dans le bon sens.
tricca=flipud(tricca);
xinit = [ 0 ; 2 ; 3 ] ;
[t,X] = ode113(@Sys_Cont,range,xinit);
subplot(1,2,1); plot(tricca,ricca(:,1),'g*',tricca,ricca(:,2),'r-o',
tricca,ricca(:,3),'--.c',tricca,ricca(:,5),'--.',tricca,ricca(:,6),
'*b',tricca,ricca(:,9),'--r');
xlabel('Time t');
ylabel('Solution P(t)');
legend('P_{11}','P_{21},P_{12}','P_{31},P_{13}','P_{22}','P_{32},P_{23}',
'P_{33}')
title(' la solution de l''équation dP/dt=-A'P-PA+PBB'P-I')
subplot(1,2,2); plot(t,X(:,1),'r--',t,X(:,2),'b--.',t,X(:,3),'-.g');
xlabel('Time t');
ylabel('Solution X(t)');
legend('x_1(t)','x_2(t)','x_3(t)')
title('Trajectoire de la solution X(t)')
end

function dPdt = Eq_Riccati(t,P)
% Equation de Riccati dP/dt=-A'P-PA+PBB'P+In.
n=3; A=[0,1,0;0,0,1;0,0,0]; B=[0;0;1];
I=eye(n);
b=zeros(n);
P=reshape(P,n,n);
b = -A'*P-P*A +P*B*B'*P-I; %Determine derivative
dPdt=reshape(b,n^2,1);
end

function dXdt = Sys_Cont(t,X)
global tricca ricca;
n=3;
A=[0,1,0;0,0,1;0,0,0];
B=[0;0;1];
[bla,k]=min(abs(tricca-t));
P=reshape(ricca(k,:),n,n);
u=-(B')*P*X; u; % controle feedback u=-B'EX
dXdt= A*X+B*u;
end

```

Bibliographie

- [1] F. Ammar-Khodja and all, Recent results on the controllability of linear coupled parabolic problems : A survey. *Mathematical Control and Related Fields*, 1(3) :267–306, 2011.
- [2] B. D.O. Anderson, A. Ilchmann, F. R. Wirth, Stabilizability of linear time-varying systems, *Systems Control Lett.* 62 (2013) 747–755.
- [3] S. Boyd, L. Vandenberghe, *Convex Optimization*, Cambridge University Press, New York, (2004).
- [4] R.F. Brammer, Controllability in linear autonomous systems with positive controllers, *SIAM J.Control*, (1972), 10(2) :329–353.
- [5] H. Brezis, *Analyse fonctionnelle théorie et applications*, Masson, Paris, (1987).
- [6] R. W.Brockett, *FINITE DIMENSIONAL LINEAR SYSTEMS*, John Wiley & Sons, Inc., the United States of America, 1970.
- [7] A. Cheng, An Algebraic Characterization of Controllability, *IEE Trans. Automat. Control* (1965) 112-113.
- [8] Chiu H. Choi, A Survey Of Numerical Methods For Solving Matrix Riccati Differential Equations, *IEE Trans.* (1990) 696-700.
- [9] J. M. Coron, *Control and Nonlinearity*, *Mathematical Surveys and Monographs*, Volume 136, American Mathematical Society,(2007).
- [10] J.L. Dalecki, M.G. Krein, *Stability of Solutions of Differential Equations in Banach Spaces*, in : *Translations of Mathematical Monographs*, vol. 43, American Mathematical Society, Providence, RI, (1974).
- [11] L. GAGNON, MÉTHODE DE LEGENDRE-GALERKIN APPLIQUÉE AU CONTRÔLE DE L'ÉQUATION DES ONDES : Filtrage des hautes fréquences. (Mémoire de maîtrise en mathématiques, Faculté des études supérieures et postdoctorales de l'Université Laval, France)(2012).
- [12] M. L. J. Hautus, Controllability and observability conditions of linear autonomous systems, *Ned. Akad. Wetenschappen*, vol. 72, (1969), pp.443–448.
- [13] H. Hermes, J. P.Lasalle, *Functional analysis and time optimal control*, Elsevier, New York, (1998).

-
- [14] D. Hinrichsen, A.J. Pritchard, *Mathematical Systems Theory I. Modelling, State Space Analysis, Stability and Robustness*, in : *Texts in Applied Mathematics*, vol. 48, Springer-Verlag, Berlin, (2005).
- [15] N. Jacobson, *Lectures in Abstract Algebra, Vol. II*, Van Nostrand, Princeton, N. J., 1953.
- [16] J. Lasalle, S. Lefschetz, *Stability by Liapunov's Direct Method With Applications*, ACADEMIC PRESS, INC, 1961.
- [17] E. B. Lee, L. Markus, *Foundations of optimal control theory*, John Wiley, New York, 1967.
- [18] J.L. Lions, *Contrôlabilité exacte, perturbations et stabilisation de systèmes distribués. Tome 1, Recherches en Mathématiques Appliquées [Research in Applied Mathematics]*, vol. 8, Masson, Paris, (1988), *Contrôlabilité exacte. [Exact controllability]*, With appendices by E. Zuazua, C. Bardos, G. Lebeau and J. Rauch. MR 953547 (90a :49040)
- [19] Dahlard L. Lukes, *Stabilizability and optimal control*, Funkcial, Ekvac, 11 (1968), 39–50.
- [20] L. Pujo-Menjouet. *Equations Différentielles Ordinaires et Partielles.*[Notes de cours]. Université Claude Bernard, Lyon I. Repéré à : <http://math.univ-lyon1.fr/begnac/enseignement/Topologie/EDO-Pujo.pdf>
- [21] L. Rosier, *A survey of controllability and stabilization results for partial differential equations*, *Journal européen des systèmes automatisés*, (2007), 41(3/4), 365.
- [22] W.J. Rugh, *Linear System Theory*, second ed., in : *Information and System Sciences Series*, Prentice-Hall, NJ, (1996).
- [23] S. SALSA, *Partial differential equations in action, From modelling to theory*, Springer, 2008.
- [24] S. SAPRSTON AND J. YORK, *Controllability of linear oscillatory systems using positive controls*, *this Journal*, 9 (1971), pp. 253-262.
- [25] E.D.Sontag, *Mathematical control theory*, second ed., *Texts in Applied Mathematics*, vol.6, Springer-Verlag, New York, (1998), *Deterministic finite-dimensional systems*. MR 1640001(99k :93001)
- [26] E.D. Sontag, *Mathematical Control Theory : Deterministic Finite Dimensional Systems*, second ed., Springer-Verlag, New York, 1998.
- [27] J. Stoer, R. Bulirsch, *Introduction to numerical analysis*, volume 12 of *Texts in Applied Mathematics*, Springer-Verlag, New York, third edition, 2002.
- [28] O.V. Stryk and R. Bulirsch, *Direct and indirect methods for trajectory optimization*. *Ann. Oper. Res.*, (1992), 37(1-4) :357–373. *Nonlinear methods in economic dynamics and optimal control (Vienna, 1990)*.
- [29] E. Trélat, *Contrôle optimal : théorie et applications*, Vuibert, Paris, 2005.

- [30] W. J. Terrell, *An Introduction : Stability and Stabilization*, Princeton University Press (2009).
- [31] J. M. URQUIZA, Rapid exponential feedback stabilization with unbounded control operators, *SIAM J. Control Optim.* 43 (2005), no. 6, 2233–2244.
- [32] E. Zuazua and all, *Control of Partial Differential Equations*, Lecture Notes in Mathematics 2048, springer, Italy, (2010).