

Master Mathématique et Application au Calcul Scientifique (MACS)

MEMOIRE DE FIN D'ETUDES

Pour l'obtention du Diplôme de Master Sciences et Techniques (MST)

La conjecture forte de Berge des graphes parfaits

Réalisé par : BENTRAICHE Mohamed Amine

Encadré par: Pr. HILALI Abdelmajid

Soutenu le : 18 juin 2018

Devant le jury composé de:

- | | |
|------------------------------|---|
| • Pr. EL AYADI Rachid | Faculté des Sciences et Techniques de Fès |
| • Pr. EL HILALI ALAOUI Ahmed | Faculté des Sciences et Techniques de Fès |
| • Pr. EL KHOMSSI Mohammed | Faculté des Sciences et Techniques de Fès |
| • Pr. HILALI Abdelmajid | Faculté des Sciences et Techniques de Fès |
| • Pr. MAHDOU Najib | Faculté des Sciences et Techniques de Fès |
| • Pr. OUADGHIRI Anisse | Faculté des Sciences et Techniques de Fès |

Année Universitaire 2017 / 2018

Sommaire

Résumé	iii
Abstract	iii
Remerciements	iv
Introduction générale	1
I Notions de base	5
I.1 Les graphes	5
I.1.1 Graphes orientés	5
I.1.2 Graphes non orientés	8
I.1.3 Chemins et circuits	13
I.1.4 Sous-graphes	19
I.1.5 Coupes, points d'articulation, k -connexité	21
I.1.6 Théorème(s) de Menger	27
I.1.7 Arbre	29
I.1.8 Isomorphismes de graphes	31
I.1.9 Maximalité et Minimalité	38
I.1.10 Matrice d'adjacence	39
I.1.11 Coloration des graphes	42
I.1.12 Systèmes d'ensembles	56
Graphes d'incidence	57
Graphes d'intersection	57
I.1.13 Nos propres notations	59
I.2 Les algorithmes	60
I.2.1 Problèmes, algorithmes, complexité	60
I.2.2 Les problèmes \mathcal{P} , \mathcal{NP} et $\text{co-}\mathcal{NP}$	62
I.2.3 Réductions polynomiales	62
I.2.4 Les problèmes \mathcal{NP} -complet et \mathcal{NP} -difficile	64
I.3 Résumé des définitions les plus importantes	66
II Opérations sur les graphes	67
II.1 Construction de graphes à partir d'autres graphes	67
II.1.1 Union et Intersection	67
II.1.2 Produits	68
Produit cartésien	68

Produit direct	69
Produit fort	71
Produit lexicographique	71
II.2 Modifications de graphes	73
II.2.1 Identification de sommets et contraction d'arête	73
II.2.2 Éclatement d'un sommet et subdivision d'arête	73
II.3 Décompositions de graphes	74
II.3.1 2-amalgame	74
2-joint	75
II.3.2 Paire homogène	75
II.3.3 Partition antisymétrique	76
Partition antisymétrique paire	77
II.4 Quelques graphes particuliers	77
II.4.1 Pyramides, prismes et quasi-prismes	77
II.4.2 Graphes particuliers	79
III Le Théorème Fort des Graphes Parfaits	82
III.1 La capacité de Shannon	83
III.2 Classes de graphes parfaits	85
III.3 Les travaux de Lovász	93
III.4 2 ^{ème} conjecture de Berge	96
III.5 Les graphes basiques	97
III.6 Caractérisation des graphes basiques	98
III.7 Les théorèmes de décomposition	102
III.7.1 Partition antisymétrique	103
III.7.2 2-joint et la perfection	107
III.7.3 Paire homogène	111
III.7.4 Décompositions des graphes de Berge	112
III.8 Le Théorème Fort des Graphes Parfaits	113
III.8.1 Trigraphe	115
III.9 Reconnaissance des graphes de Berge	116
III.10 Conclusion	117
IV Le lemme de Roussel et Rubio	118
IV.1 Différentes preuves	118
IV.2 Corollaires et variantes utiles	124
V Problèmes Ouverts	128
V.1 Décomposition des graphes de Berge	128
V.2 Trigraphe de Berge	129
V.3 Lecture algorithmique de la preuve de SPGC	129

Résumé

Ce travail a pour motivation une meilleure compréhension des graphes parfaits. La preuve en 2002 de la conjecture des graphes parfaits de Claude Berge par Chudnovsky, Robertson, Seymour et Thomas a jeté une lumière nouvelle sur ce domaine de la combinatoire, mais a laissé plusieurs questions en suspens, notamment l'existence d'un algorithme combinatoire de coloration des graphes parfaits.

Abstract

This work is motivated by the desire for a better understanding of perfect graphs. The proof of the Claude Berge's perfect graph conjecture in 2002 by Chudnovsky, Robertson, Seymour and Thomas has shed a new light on this field of combinatorics. But some questions are still unsettled, particularly the existence of a combinatorial algorithm for the coloring of perfect graphs.

Remerciements

Je tiens à exprimer mes remerciements avec un grand plaisir et un grand respect à mon encadrant M. HILALI Abdelmajid pour ses conseils, sa disponibilité et ses encouragements qui m'ont permis de réaliser ce travail dans les meilleures conditions.

J'adresse mes vifs remerciements aux :

- ▷ *Pr. EL AYADI Rachid*
- ▷ *Pr. EL HILALI ALAOUI Ahmed*
- ▷ *Pr. EL KHOMSSI Mohammed*
- ▷ *Pr. HILALI Abdelmajid*
- ▷ *Pr. MAHDOU Najib*
- ▷ *Pr. OUADGHIRI Anisse*

pour avoir bien voulu examiner et juger ce travail.

j'exprime de même ma gratitude envers tous ceux qui m'ont accordés leur soutien, tant par leur gentillesse que par leur dévouement.

À tous les enseignants qui m'ont aidés pendant les deux ans passés à la Faculté des Science et Techniques - Fès.

À M. TAHIRI pour sa disponibilité, sa gentillesse et pour tous les livres qu'il m'a conseillé.

À toute personne ayant contribué de près ou de loin à l'avancement de mon projet.

À ma famille BENTRAICHE et la famille CHAKRANE pour leurs aides.

À mes amis et amies de Master MACS pour la bonne ambiance et les bons temps.

je ne pourrai nommer ici toutes les personnes qui m'ont aidées et encouragées de près ou de loin et je les remercie vivement.

Introduction générale

La théorie des graphes est, avec la combinatoire, une des pierres angulaires de ce qu'il est commun de désigner par *mathématiques discrètes*. Cependant, elle n'a reçu qu'assez tardivement une attention soutenue de la part de la communauté mathématique. En effet, bien que les graphes eulériens soient l'émanation du célèbre problème des sept ponts de Königsberg étudié par Euler en 1736, on peut dire que les premiers développements majeurs de la théorie des graphes datent du milieu du vingtième siècle (N. Biggs, C. Berge, W.T. Tutte ...). Ainsi, un des premiers ouvrages, si pas le premier, traitant de théorie des graphes "*Theorie der endlichen und unendlichen Graphen*" écrit par König remonte à 1936. Depuis cette époque, la théorie des graphes s'est largement développée et fait à présent partie du cursus standard en mathématiques de bon nombre d'université.

Un graphe $G = (V, E)$ est essentiellement défini par une relation binaire $E \subseteq V \times V$ sur un ensemble V le plus souvent fini. Les graphes sont utilisés pour modéliser de nombreuses situations et leurs applications sont par conséquent aussi nombreuses que variées : dans d'autres branches des mathématiques (algèbre, combinatoire, ...), en informatique, en recherche opérationnelle (tournées de distribution, ordonnancement de tâches, construction de circuits imprimés, ...), en cartographie (coloriage de cartes), en chimie, etc ...

Selon nous, il est impensable de vouloir traiter *efficacement* un problème réel (i.e., de taille non négligeable) sans posséder de solides bases. Ainsi, nos développements seront principalement théoriques. Néanmoins, le caractère appliqué de la théorie sera mis en exergue par de nombreux exemples (au premier chapitre, nous détaillons une série de problèmes issus du "monde réel").

Par essence, en mathématiques discrètes et *a fortiori* en théorie des graphes, de nombreux raisonnements ont une composante combinatoire importante, Ainsi, des preuves pouvant être jugées "difficiles" consistent souvent en une succession, parfois longue, de raisonnements simples (mais pas toujours aisés à saisir). Dès lors, certaines parties paraîtront peut-être complexes sans pour autant être compliquées! Nous invitons le lecteur à lire attentivement les preuves et à consulter les références proposés en cas d'ambiguïté afin de garantir une bonne compréhension. Bien évidemment,

les méthodes mises ici en évidence sont souvent tout autre que celles des "mathématiques du continu" comme l'analyse. Nous espérons que cette présentation permettra ainsi au lecteur d'enrichir sa palette de techniques et de raisonnements mathématiques. (Les mathématiques ne sont bien sûr pas cloisonnées et les interactions entre les diverses branches sont nombreuses et souvent fort riches : "It is unquestionable that interplay between ideas from different sources, and elaborate techniques successfully applied, are among the features that make much of mathematics fascinating. Moreover, mathematics does often display a tendency to unify itself and to build up a body of technique. Therefore one may well guess that graph theory, as it matures, will continue to develop its own characteristic techniques and that many of its results will become increasingly unified, both among themselves and with the rest of mathematics."¹.)

Au début des années 1960, Claude Berge a défini la classe des *graphes parfaits* qui est apparue par la suite comme une classe assez générale pour laquelle le problème de la coloration pouvait être résolu efficacement. De nombreux travaux ont été consacrés aux graphes parfaits : on recense plus de 500 articles scientifiques sur le sujet. En 1984, Martin Grötschel, László Lovász et Alexander Schrijver ont démontré qu'il est possible de colorier les graphes parfaits en temps polynomial. Ils utilisent à cette fin la méthode dite des ellipsoïdes, difficile à implémenter en pratique à cause de problèmes d'instabilité numérique.

En même temps que Claude Berge définissait les graphes parfaits, il proposait une conjecture les caractérisant par interdiction de sous-graphes induits : *la conjecture forte des graphes parfaits*. Celle-ci s'est avérée récalcitrante à la preuve : pendant 40 ans, les approches les plus diverses ont été tentées sans succès. L'une d'elle fut promue par Vašek Chvátal : pour démontrer la perfection de certains types de graphes, il proposait de les "casser" en plusieurs sous-graphes plus simples par des structures ne pouvant pas apparaître dans des graphes imparfaits minimaux, voire quand c'est possible, de "recoller les morceaux" par des moyens préservant la perfection. Cette approche a permis à de nombreux auteurs, (Michel Burlet, Jean Fonlupt, et d'autres ont suivi) de prouver la perfection de certaines classes de graphes, mais ce n'est qu'à la fin des années 1990, qu'un groupe de trois chercheurs (Michele Conforti, Gérard Cornuéjols et Kristina Vušković) a proposé un plan précis et réaliste pour appliquer cette méthode en toute généralité, espérant ainsi démontrer la conjecture forte des graphes parfaits. Ces trois chercheurs ne sont toutefois pas parvenus à faire aboutir leurs idées, malgré de nombreux résultats.

En mai 2002, un groupe de chercheurs (Maria Chudnovsky, Neil Robertson, Paul Seymour et Robin Thomas) a démontré la conjecture forte des graphes parfaits en suivant la méthode proposée par Cornuéjols et *al.*. Cette percée

1. C. ST. J. A. Nash-Williams, dans la préface de [16]

théorique n'a pas eu retombée directe sur le problème de la coloration des graphes parfaits. En novembre 2002, Chudnovsky Cornuéjols, Liu, Seymour et Vušković ont résolu une autre question ouverte : ils ont décrit un algorithme en temps polynomial qui décide si un graphe est parfait.

C'est une chance exceptionnelle d'avoir pu réaliser mon projet d'obtention de Master en mathématiques appliquées dans un domaine de mathématiques aussi actif et riche en idées nouvelles, et en particulier, d'avoir traité un des grands problèmes difficiles et anciennes de la théorie des graphes.

I

Notions de base

*“Un petit dessin vaut mieux
qu’un grand discours.”*

Napoléon

Introduire une nouvelle matière n’est pas toujours chose plaisante car il s’agit souvent d’une accumulation de définitions ! Et c’est hélas la situation rencontrée ici. Nous allons donc agrémenter cette présentation, autant que faire se peut, d’exemples mettant en lumière l’intérêt pratique de la théorie des graphes. Comme l’indique le titre de ce chapitre, nous présentons ici les notions de base : les graphes et les algorithmes. Le lecteur habitué au sujet peut se dispenser de lire ce chapitre, mais devrait consulter sa dernière section (section I.3) qui rappelle les rares points où nos conventions peuvent paraître inhabituelles. Bien que toutes les définitions de théories des graphes utiles à la compréhension de ce rapport soient données rigoureusement, le lecteur novice préférera sans doute consulter un ouvrage classique [12, 52]. Pour ce qui est des algorithmes, nous ne donnons pas d’exposé rigoureux, mais un simple aperçu des définitions et des résultats les plus classiques.

I.1 Les graphes

De nombreuses situations peuvent se décrire commodément au moyen d’un diagramme fait de points et de lignes reliant certaines paires de ces points. Par exemple, les points peuvent représenter des personnes, et les lignes des paires d’amis ; ou bien les points peuvent être des centres de communication et les lignes représenter des liaisons entre les centres. Il faut noter que dans de tels diagrammes on s’intéresse principalement au fait que deux points sont reliés ou non par une ligne ; la façon de relier ces deux points est sans importance. Une abstraction mathématique des situations de ce type a engendré le concept de *graphe*.

I.1.1 Graphes orientés

Définition I.1.1.1. Soient V un ensemble (fini ou infini) et E une partie de $V \times V$ (i.e., une *relation* sur V). Le *graphe* $G = (V, E)$ est la donnée du couple

(V, E) . Les éléments de V sont appelés les *sommets*¹ ou *nœuds* de G . Les éléments de E sont appelés les *arcs*² ou *arêtes* de G . Si V est fini, on parlera de *graphe fini* (en particulier, E est alors fini et contient au plus $|V|^2$ arcs).

Remarque I.1.1.2. Observons que l'ordre au sein des couples appartenant à E est intrinsèquement présent³. On parlera donc parfois de *graphe orienté* ou de *graphe dirigé*. Soit I , un ensemble d'indices. Si $V = \{v_i \mid i \in I\}$ et si $a = (v_i, v_j)$, $i, j \in I$, on pourra alors parler de l'*origine* v_i et de la *destination* v_j de l'arc a . On dit que v_i et v_j sont les *extrémités* de l'arc a et que a *relie* v_i à v_j . Si $b = (v_i, v_i)$, on parle généralement de la *boucle* b . Il est souvent commode de donner une représentation sagittale d'un graphe. Les graphes sont ainsi nommés parce qu'ils peuvent être représentés graphiquement, et c'est leur représentation graphique qui nous aide à comprendre beaucoup de leurs propriétés. Les sommets sont matérialisés par des points et si (v_i, v_j) est un arc, alors on trace une flèche de v_i vers v_j (cf. figure I.1). Deux arcs sont *adjacents* s'ils ont au moins une extrémité en commun.

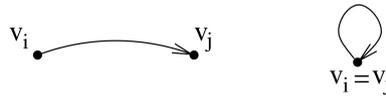


FIGURE I.1 – Un arc reliant deux sommets, une boucle.

Définition I.1.1.3. Soit $a = (v_i, v_j) \in E$. On dit que a est un arc *sortant* de v_i , ou encore que a est un arc *incident* à v_i *vers l'extérieur* (resp. un arc *entrant* dans v_j ou encore que a est un arc *incident* à v_j *vers l'intérieur*). L'ensemble des arcs sortant de v_i est noté $\omega^+(v_i)$ et l'ensemble des arcs entrant dans v_j est noté $\omega^-(v_j)$. L'ensemble des arcs incidents à un sommet v est $\omega(v) := \omega^+(v) \cup \omega^-(v)$. On définit le *demi-degré sortant* (resp. *demi-degré entrant*) d'un sommet v par

$$d^+(v) = |\omega^+(v)| \quad (\text{resp. } d^-(v) = |\omega^-(v)|).$$

Si $G = (V, E)$ est un graphe fini, il est clair que

$$\sum_{v \in V} d^+(v) = \sum_{v \in V} d^-(v)$$

Enfin, le *degré* de v est $\text{deg}(v) = d^+(v) + d^-(v)$. L'ensemble des *successeurs* d'un sommet v est l'ensemble $\text{succ}(v) = \{s_1, \dots, s_k\}$ des sommets s_i tels que $(v, s_i) \in \omega^+(v)$, i.e., $(v, s_i) \in E$. De manière analogue, l'ensemble des *prédécesseurs* d'un sommet v est l'ensemble $\text{pred}(v) = \{s_1, \dots, s_k\}$ des

1. En anglais, cela se dit "*vertex*" (au pluriel, "*vertices*"). D'où l'initiale V pour désigner l'ensemble des sommets. Dans ce rapport, nous ne dérogerons pas à la coutume anglo-saxonne de noter un graphe $G = (V, E)$.

2. En anglais, cela se dit "*edge*". D'où l'initiale usuelle E .

3. On parle de *couple* et non de *paire*. Un couple est une paire ordonnée. On distingue d'ailleurs les notations (x, y) et $\{x, y\}$.

Cette distinction va devenir rapidement indispensable, lorsqu'on introduira les graphes non orientés.

arcs adjacents

arc incident à un sommet

Handshaking formula.

sommets s_i tels que $(s_i, v) \in \omega^-(v)$, i.e., $(s_i, v) \in E$. Enfin, l'ensemble des voisins de v est simplement

$$\nu(v) = \text{pred}(v) \cup \text{succ}(v).$$

Si u appartient à $\nu(v)$, on dit que u et v sont des sommets *voisins* ou *adjacents*. sommets adjacents

Exemple I.1.1.4. Soit le graphe $G = (V, E)$ où $V = \{a, b, c, d, e\}$ et

$$E = \{(a, b), (a, c), (b, b), (b, c), (c, c), (c, d), (c, e), (d, a), (e, a), (e, d)\}.$$

Celui-ci est représenté à la figure I.2.

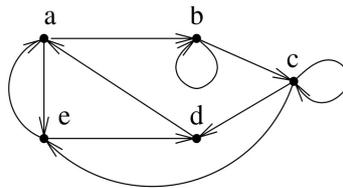


FIGURE I.2 – Un exemple de graphe.

Par exemple, $\omega^+(a) = \{(a, b), (a, c)\}$ et $\omega^-(d) = \{(c, d), (e, d)\}$. On a aussi $\text{succ}(a) = \{b, c\}$, $\text{succ}(b) = \{b, c\}$, $\text{pred}(d) = \{c, e\}$ et $\nu(a) = \{b, d, e\}$. On voit aussi que les arcs (e, a) et (d, a) sont adjacents. Enfin, le demi-degré sortant de c est $d^+(c) = 3$.

Définition I.1.1.5. Un *multi-ensemble*⁴ est un ensemble au sein duquel un même élément peut être répété plus d'une fois. Ainsi, on s'intéresse non seulement à savoir si un élément appartient ou non à un multi-ensemble donné, mais également à sa multiplicité. Par exemple, $\{1, 1, 2, 3\}$, $\{1, 2, 3\}$ et $\{1, 2, 2, 3\}$ sont des multi-ensembles distincts. Pour distinguer les copies d'un même élément x , il est commode de les indicer. Par exemple, on considère le multi-ensemble $\{1_1, 1_2, 1_3, 2_1, 2_2, 3\}$. Cette manière de procéder nous permettra de définir facilement des fonctions définies sur un multi-ensemble.

On suppose qu'un élément est répété au plus un nombre dénombrable de fois.

Un *multi-graphe* $G = (V, E)$ est un graphe pour lequel l'ensemble E des arcs est un multi-ensemble. Autrement dit, il peut exister plus d'un arc reliant deux sommets donnés. Un exemple de représentation d'un multi-graphe est donné à la figure I.3. Un multi-graphe $G = (V, E)$ est *fini* si V et E sont finis.

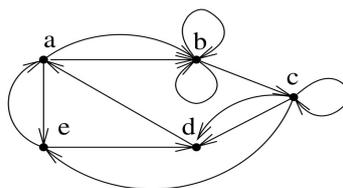


FIGURE I.3 – Un exemple de graphe.

4. Cette définition n'est pas très rigoureuse. En effet, le concept même d'ensemble ne vous a, jusqu'à présent, été induit que de manière naïve.

En effet, le cas des multi-graphes, supposer V fini n'implique pas que E soit fini.

Soit $p \geq 1$. Un p -*graphe* est un multi-graphe $G = (V, E)$ pour lequel tout arc de E est répété au plus p fois. En particulier, un 1 -*graphe* est un graphe.

Remarque I.1.1.6. On peut observer que la remarque I.1.1.2, la définition I.1.1.3 et la "handshaking formula" s'appliquent également au cas des multi-graphes. Il est laissé au lecteur le soin d'adapter les définitions de $\omega^+(v)$, $d^+(v)$, $\text{succ}(v)$ et $\omega^-(v)$, $d^-(v)$, $\text{pred}(v)$. En particulier, $\omega^+(v)$ et $\omega^-(v)$ sont en général des multi-ensembles.

Définition I.1.1.7. Un graphe $G = (V, E)$ est dit *simple* (ou *strict*) s'il ne s'agit pas d'un multi-graphe et si E est irréflexif, c'est-à-dire que quel que soit $v \in V$, (v, v) n'appartient pas à E (i.e., G ne contient pas de boucle). Un exemple de graphe simple est donné à la figure I.4.

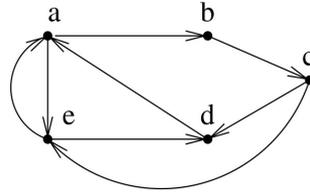


FIGURE I.4 – Un exemple de graphe simple.

I.1.2 Graphes non orientés

Les graphes non orientés sont en fait un cas particulier de graphes (orientés).

Définition I.1.2.1. Soit $G = (V, E)$ un graphe (resp. un multi-graphe). Si E est une relation symétrique sur V , on dira que G est un graphe (resp. un multi-graphe) *non dirigé* ou *non orienté*. Autrement dit, G est non dirigé si

$$\forall v_1, v_2 \in V : (v_1, v_2) \in E \Rightarrow (v_2, v_1) \in E.$$

Dans ce cas, on simplifie la représentation sagittale de G en traçant simplement un segment entre v_1 et v_2 . Pour alléger l'écriture, on identifiera les arcs (v_i, v_j) et (v_j, v_i) avec une unique "arête non orientée" donnée par la paire $\{v_i, v_j\}$. Dans le cas dirigé (resp. non dirigé), nous nous efforcerons de parler d'arcs (resp. d'arêtes).

Si par contre, on désire insister sur le caractère non symétrique de E , on parlera de graphe *dirigé* ou, par abus de langage, *digraphe*⁵.

Les définitions rencontrées précédemment s'adaptent aisément au cas non orienté.

5. En anglais "directed graph" se contracte en "digraph"

Définition I.1.2.2. Soient $G = (V, E)$, un multi-graphe non orienté et $a = \{v_i, v_j\}$ une de ses arêtes. On dit que a est *incidente* aux sommets v_i et v_j . Le nombre d'arête incidentes à v_i est le *degré* de v_i , noté $deg(v_i)$. On suppose en outre que les **boucles** apportent une double contribution au degré d'un sommet. L'ensemble des arêtes incidentes à v_i se note $\omega(v_i)$. Il est clair que, dans un graphe simple, $deg(v_i) = |\omega(v_i)|$. Ces notations sont bien évidemment compatibles avec celles données dans le cas orienté. Deux arêtes sont *adjacentes* si elles ont au moins une extrémité en commun.

arête incidente à un sommet

Deux sommets $v_i, v_j \in V$ sont *adjacents* si l'arête $\{v_i, v_j\}$ appartient à E . On dit aussi qu'ils sont *voisins*. L'ensemble des voisins de v se note $\nu(v)$. En particulier, si G est un graphe simple, $deg(v)$ est le nombre de voisins de v dans G . Un sommet de degré zéro est appelé *sommet isolé*. On désigne par $\delta(G)$ et $\Delta(G)$ les degrés minimum et maximum des sommets de G , et par $deg(G)$ leur *degré moyen*, $\frac{1}{n} \sum_{v \in V} deg(v)$. Enfin, la définition d'un *p-graphe* est analogue à celle donnée dans le cas orienté.

arêtes adjacentes
sommets adjacents

La remarque suivante établit une relation fondamentale entre les degrés des sommets d'un graphe et son nombre d'arêtes.

Remarque I.1.2.3 (Handshaking lemma). Si $G = (V, E)$ est un multi-graphe non orienté, alors

$$\sum_{v \in V} deg(v) = 2|E|.$$

C'est immédiat. (Et on comprend mieux la double contribution des boucles pour le degré d'un sommet ...)

L'exemple suivant illustre les différentes classes de graphes rencontrées jusqu'à présent. Bien sûr, tout graphe simple est un graphe et tout graphe est un multi-graphe.

Exemple I.1.2.4. À la figure I.5, on a représenté, dans le cas dirigé, un graphe simple, un graphe et enfin, un multi-graphe.

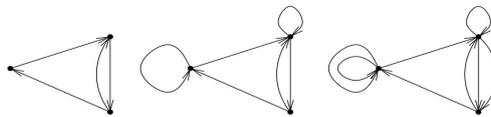


FIGURE I.5 – Un graphe (dirigé) simple, un graphe et un multi-graphe.

la figure I.6 reprend les mêmes éléments dans le cas non orienté.

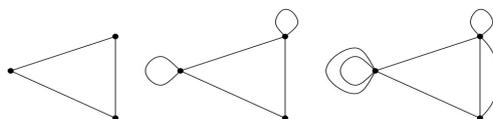


FIGURE I.6 – Un graphe (non dirigé) simple, un graphe et un multi-graphe.

Définition I.1.2.5. Soit $k \geq 1$. Un multi-graphe orienté (resp. non orienté) $G = (V, E)$ est k -régulier si pour tout $v \in V$, $d^+(v) = k$ (resp. $\deg(v) = k$). Le graphe de gauche (resp. de droite) de la figure I.7 est 3-régulier (resp. 4-régulier). Le graphe de droite de la figure I.7 est en particulier simple et complet. Un graphe $G = (V, E)$ est *complet* si $E = V \times V$, plus exactement on suppose souvent que

$$E = V \times V \setminus \{(v, v) \mid v \in V\}$$

(autrement dit, on ne tient pas compte des boucles). En particulier, un graphe complet est symétrique. On note K_n le graphe simple non orienté complet à n sommets. Ainsi la figure I.7 représente le graphe K_5 .

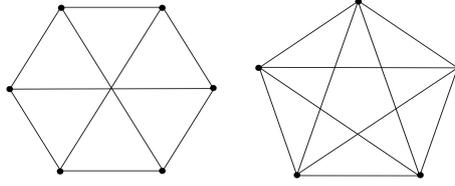


FIGURE I.7 – Des graphes non orientés 3 et 4-réguliers.

Dans ce rapport, lorsqu'on parlera de graphes complets, il sera sous-entendu qu'il s'agit de graphes simples et non orientés.

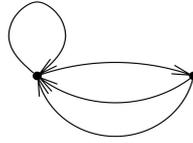


FIGURE I.8 – Un multi-graphe orienté 2-régulier.

Définition I.1.2.6. Un graphe $G = (V, E)$ est dit *biparti* si V peut être partitionné en deux ensembles V_1 et V_2 de manière telle que $E \subseteq V_1 \times V_2$; une telle partition (V_1, V_2) est appelée *bipartition* du graphe, et V_1 et V_2 ses *parties*. Nous désignons un graphe biparti G de bipartition (V_1, V_2) par $G[V_1, V_2]$. Si $|V_1| = m$, $|V_2| = n$ et $E = V_1 \times V_2$, alors on parle du graphe biparti *complet* et il est noté $K_{m,n}$.

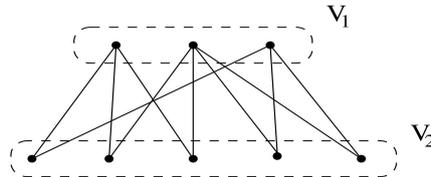


FIGURE I.9 – Un graphe biparti (non complet).

On peut généraliser cette notion et définir des graphes n -partis, pour $n \geq 2$. Pour ce faire, V doit être partitionné en n sous-ensembles V_1, \dots, V_n de manière telle que

$$E \subseteq \bigcup_{i \neq j} V_i \times V_j.$$

Définition I.1.2.7. Un multi-graphe $G = (V, E)$ (orienté ou non) est *étiqueté* (par f) s'il existe une fonction

$$f : E \longrightarrow \Sigma$$

où Σ est un ensemble quelconque. Si $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^+ = [0, +\infty[$, on parle souvent de multi-graphe *pondéré* et on dit que f est une *fonction de poids*. Un étiquetage peut par exemple servir à préciser des coûts (coûts de transport, des distances, des couleurs, etc...). Si a est un arc, $f(a)$ est l'*étiquette*, le *label* ou encore le *poids* de a . On peut de la même manière définir un étiquetage des sommets au moyen d'une fonction $g : V \longrightarrow \Sigma$.

Exemple I.1.2.8. Le graphe de la figure I.10 représente quelques villes belges connectées par un réseau autoroutier. L'étiquette de chaque arête représente la distance, par autoroute, entre les deux extrémités de celle-ci. On a choisi un graphe non orienté car les autoroutes belges vont toujours dans les deux sens.

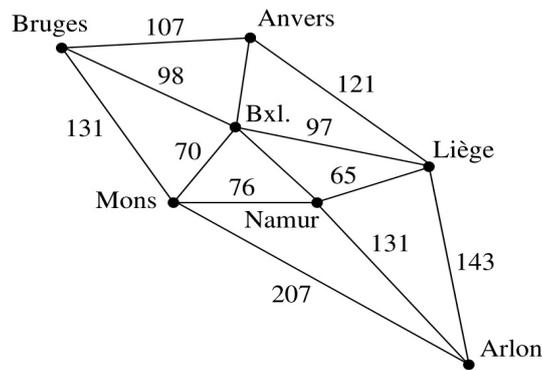


FIGURE I.10 – Graphe étiqueté par les distances entre villes (www.mappy.fr).

Remarque I.1.2.9. Il n'y a pas une unique façon de dessiner correctement un graphe; les positions relatives des points représentant les sommets et les formes des lignes représentant les arêtes n'ont habituellement aucune importance. Dans la figure I.11, les arêtes du graphe G sont représentées par des courbes, et celles de H par des segments de droites. Un diagramme de graphe représente uniquement la relation d'incidence entre ses sommets et ses arêtes.

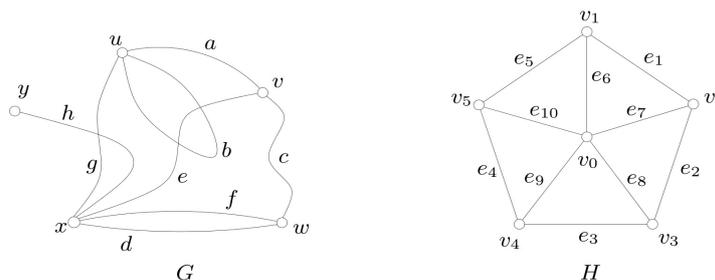


FIGURE I.11 – Diagrammes des graphes G et H .

Pour terminer cette section, nous généralisons le concept de graphe en autorisant non plus des relations binaires entre sommets (autrement dit, des arcs) mais des relations d'arité quelconque (des hyper-arêtes). Ensuite, nous relaxons la notion de graphe en définissant le trigraphe et enfin, nous donnons une brève introduction aux matroïdes.

Définition I.1.2.10. Un *hyper-graphe* $H = (V, E)$ est la donnée de deux ensembles V et E . L'ensemble V , comme dans le cas d'un graphe, est l'ensemble des sommets de H . Par contre, E est une partie de $\mathcal{P}(V)$ (l'ensemble des parties de V). Un élément de E est appelé *hyper-arête*. Soient $V = \{a, b, c, d, e\}$ et

$$E = \{\{a, b\}, \{a, c, d\}, \{b, d, e\}\}.$$

On dispose de l'hyper-graphe $H = (V, E)$ représenté à la figure I.12.

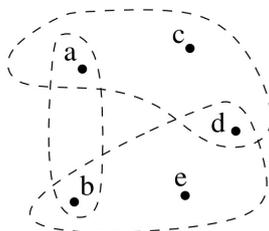


FIGURE I.12 – Un exemple d'hyper-graphe.

Un hyper-graphe $H = (V, E)$ est dit *fini* si V est fini.

La définition suivante provient de notes personnelles de Nicolas Trotignon prises lors d'un exposé de Maria Chudnovsky à Palo Alto en novembre 2002. Le trigraphe n'est rien moins qu'une relaxation de la notion de graphe.

Définition I.1.2.11. Un *trigraphe* G est un triplet (V, E_1, E_2) . Les ensembles E_1 et E_2 sont des sous-ensembles disjoints de l'ensemble $V \times V$. L'ensemble E_1 représente l'ensemble des arêtes *obligatoires* de G , tandis que E_2 est l'ensemble des arêtes *optionnelles*. Plus formellement, on appelle *réalisation* de G tout graphe $G' = (V, E)$ vérifiant $E_1 \subseteq E \subseteq E_1 \cup E_2$.

Notons qu'un graphe peut être vu comme un trigraphe ne comportant aucune arête optionnelle, et n'ayant donc pour seule réalisation que lui-même. Il semble que cette notion de trigraphe, inventée par Chudnovsky, soit en train de devenir un outil très utile en théorie structurelle des graphes. On va essayer, plus tard, d'expliquer informellement l'intérêt de ce concept.

La notion de matroïde est due à H. Whitney (1935) et a été développée par W. Tutte. Elle permet notamment l'étude axiomatique des propriétés de l'indépendance linéaire ou aussi l'étude des cycles et des arbres.

Définition I.1.2.12. Un *matroïde* (M, \mathcal{I}) est la donnée d'un ensemble fini M et d'une partie \mathcal{I} de $\mathcal{P}(M)$, i.e., d'une collection de sous-ensembles de M , vérifiant les trois propriétés suivantes

- ▶ $\emptyset \in \mathcal{I}$ (de manière équivalente, \mathcal{I} est non vide),
- ▶ si $X \in \mathcal{I}$ et $Y \subseteq X$, alors $Y \in \mathcal{I}$,
- ▶ si $X, Y \in \mathcal{I}$ et $|X| > |Y|$, alors il existe $x \in X \setminus Y$ tel que $Y \cup \{x\} \in \mathcal{I}$.

Les ensemble de \mathcal{I} sont dits *indépendants*. Enfin, un matroïde est qualifié de *normal* si tous les singletons sont indépendants.

I.1.3 Chemins et circuits

Les définitions suivantes sont toute assez naturelles et intuitives, mais il faut bien les préciser au moins une fois de manière rigoureuse pour savoir de quoi on parle exactement.

Définition I.1.3.1. Soit $G = (V, E)$ un multi-graphe non orienté⁶. Un *chemin* de longueur $k \geq 1$ est une suite ordonnée (e_1, \dots, e_k) de k arêtes adjacentes $e_i = \{e_{i,1}, e_{i,2}\}$, i.e., pour tous $i \in \{1, \dots, k-1\}$, $e_{i,2} = e_{i+1,1}$. Ce chemin de longueur k *joint* les sommets $e_{1,1}$ et $e_{k,2}$. On dit que le chemin (e_1, \dots, e_k) *pass*e par les arêtes e_1, \dots, e_k (resp. par les sommets $e_{1,1}, e_{1,2}, \dots, e_{k,1}$ et $e_{k,2}$). On supposera qu'un chemin de longueur 0 (correspondant à la suite vide) joint toujours un sommet à lui-même.

Une arête peut être répétée plus d'une fois.

On a toujours $a \sim a$.

Si les extrémités du chemin sont égales, i.e., si $e_{1,1} = e_{k,2}$, on parle plutôt de *cycle*, de *circuit* ou encore de *chemin fermé*. Si on désire préciser que le chemin considéré n'est pas un cycle, on parlera de *chemin ouvert*.

Il se peut que les arêtes d'un chemin soient toutes distinctes (cela n'implique pas que les sommets du chemin soient tous distincts). On parle alors de *piste* ou de chemin *élémentaire* voir exemple, la figure I.13).

Si les arêtes d'un chemin sont toutes distinctes **et** si de plus, les sommets sont tous distincts⁷, on parle alors de chemin *simple*.

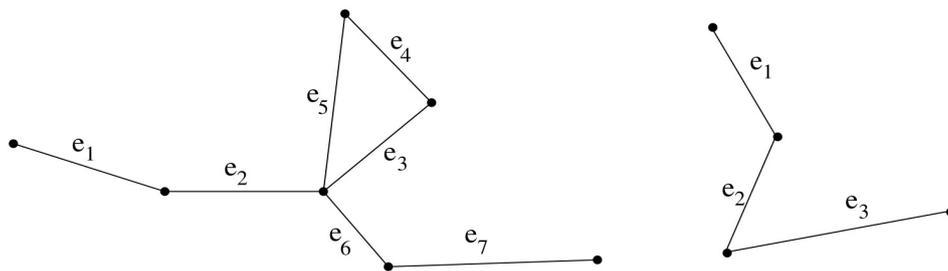


FIGURE I.13 – Une piste (ou chemin élémentaire) et un chemin simple.

Bien sûr, les circuits étant des chemins particuliers, on parle aussi de circuit élémentaire ou simple (voir par exemple, la figure I.14). Évidemment, dans la définition d'un circuit simple, on admet que les sommets $e_{1,1}$ de départ et $e_{k,2}$

6. Ce graphe peut avoir ou non des boucles, peu importe.

7. Sauf dans le cas pathologique du circuit $(\{a, b\}, \{b, a\})$, demander que les sommets d'un chemin soient tous distincts (mis à part les extrémités du chemin dans le cas d'un circuit), implique que les arêtes sont aussi toutes distinctes.

d'arrivée puissent être égaux, mais seulement eux. Il est clair que tout circuit peut se décomposer en circuits simples.

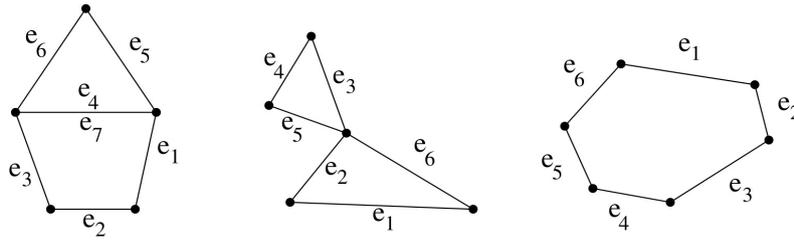


FIGURE I.14 – Un circuit, un circuit élémentaire (ou piste fermée) et un circuit simple.

Remarque I.1.3.2. Suivant les auteurs, la terminologie peut changer énormément. Ainsi, il n'est pas rare (par exemple, pour C. Berge), d'inverser les définitions des adjectifs *simple* et *élémentaire*. Pour d'autres, la notion de cycle contient de plus le caractère *élémentaire*, voire *simple*.

Remarque I.1.3.3. Dans le cas d'un graphe (qui n'est pas multi-graphe), c'est-à-dire pour un 1-graphe, un chemin est aussi univoquement déterminé par une suite de sommets (v_1, \dots, v_k) de manière telle que $\{v_i, v_{i+1}\}$ est une arête du graphe.

Définition I.1.3.4. Deux sommets a et b sont *connectés* s'il existe un chemin les joignant, ce que l'on notera $a \sim b$. La relation \sim "être connecté" est une relation d'équivalence sur V . Une classe d'équivalence pour \sim est une *composante connexe* de G . Un multi-graphe non orienté est *connexe* si V/\sim contient une seule classe d'équivalence, i.e., G possède une seule composante connexe. Autrement dit, un multi-graphe non orienté est connexe si, pour toute paire de sommets, il existe un chemin les joignant. Dans le cas contraire, le graphe est *séparé*. On supposera de plus que $G = (\{v\}, \emptyset)$ est connexe (ce qui revient à supposer qu'un chemin de longueur 0 joint toujours un sommet à lui-même).

Définition I.1.3.5. Soit $G = (V, E)$ un multi-graphe non orienté connexe⁸. La *distance*⁹ entre deux sommets a et b est la longueur de la plus court chemin joignant a et b . On la note $d(a, b)$. Le *diamètre* de G est définie par

$$\text{diam}(G) = \max_{a, b \in V} d(a, b).$$

Si G est en outre pondéré par la fonction de poids $f : E \rightarrow \mathbb{R}^+$, la distance entre les sommets a et b est égale au poids minimal des chemins joignant a et b , i.e.,

$$d(a, b) = \min_{\substack{\text{chemin } (e_1, \dots, e_t) \\ \text{joignant } a \text{ et } b}} \sum_{i=1}^t f(e_i).$$

8. Si G n'était pas connexe, la fonction distance ne serait pas une fonction totale définie sur $V \times V$ tout entier.

9. Vérifier qu'il s'agit effectivement d'une distance.

Les définitions données précédemment s'adaptent aisément au cas d'un multi-graphe orienté. Il suffit de respecter en plus le sens de parcours imposé par les arcs. Donnons quelques précisions.

Définition I.1.3.6. Soit $G = (V, E)$ un multi-graphe orienté¹⁰. Un *chemin* de longueur $k \geq 1$ est une suite ordonnée (v_1, \dots, v_k) de k arcs $v_i = (v_{i,1}, v_{i,2})$ tels que pour tous $i \in \{1, \dots, k-1\}$, $v_{i,2} = v_{i+1,1}$. Ce chemin de longueur k joint les sommets $v_{1,1}$ et $v_{k,2}$.

S'il existe un chemin joignant deux sommets a et b , on notera $a \rightarrow b$. Si $a \rightarrow b$ et $b \rightarrow a$, on dira que a et b sont *fortement connectés* et on notera $a \leftrightarrow b$. Si on impose à \leftrightarrow d'être réflexive (i.e., on suppose que $a \leftrightarrow a$), on vérifie aisément que la relation \leftrightarrow "être fortement connecté" est une relation d'équivalence sur V . Une classe d'équivalence pour \leftrightarrow est une *composante fortement connexe* (ou, plus court, *f. connexe*) de G . Si V/\leftrightarrow contient une seule classe, on dira que G est *fortement connexe* (ou *f. connexe*).

Les sommets appartenant à un cycle *maximal*, i.e., un cycle auquel on ne peut adjoindre de nouveaux sommets, constituent une composante f. connexe. Autrement dit, un multi-graphe orienté G est f. connexe si et seulement si il existe un cycle passant par chaque sommet de celui.

Si on supprime l'orientation des arcs de G et si le multi-graphe non orienté obtenu de cette manière est connexe, alors on dira que G est *simplement connexe* (ou *s. connexe*). On pourra bien entendu définir, de manière évidente, les *composantes simplement connexes* (ou *s. connexes*) de G .

Remarque I.1.3.7. Les notions de distance et de diamètre données dans le cas non orienté s'adaptent facilement au cas d'un multi-graphe orienté fortement connexe. On remarquera cependant qu'ici, la fonction $d(\cdot, \cdot)$ n'est en général pas symétrique¹¹.

Exemple I.1.3.8. Considérons le multi-graphe orienté de la figure I.15 dont l'ensemble des sommets est $\{a, \dots, e\}$ et l'ensemble des arcs est $\{1, \dots, 7\}$.

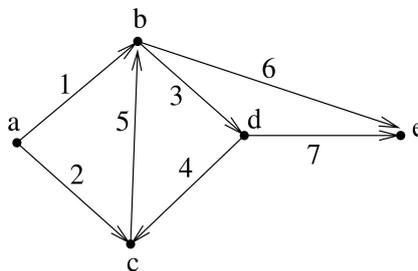


FIGURE I.15 – Un graphe orienté.

Ce graphe est simplement connexe mais il n'est pas fortement connexe. En effet, il n'existe pas de chemin joignant les sommets d à a . L'ensemble $\{b, c, d\}$ est une composante fortement connexe du graphe (les deux autres

10. Ce graphe peut avoir ou non des boucles, peu importe.

11. Il ne peut donc pas s'agir à proprement parler d'une distance.

composantes sont $\{a\}$ et $\{e\}$). Un chemin est par exemple donné par $(1, 3, 7)$, un cycle par $(3, 4, 5)$ et une piste par $(1, 3, 4, 5, 6)$. La distance entre d et c vaut 1. Par contre, la distance entre c et d vaut 2.

La définition suivante est valable aussi bien dans le cas de graphes orientés que non orientés. Nous supposons à chaque fois qu'il sera question de problèmes eulériens être en présence de graphes connexes¹².

Définition I.1.3.9. Un chemin (resp. un circuit) d'un multi-graphe G est *eulérien* s'il passe une et une seule fois par chaque arête/arc de G . (Un tel chemin (resp. circuit) peut bien évidemment passer plus d'une fois par un même sommet). Autrement dit, un chemin (resp. un circuit) eulérien est une piste (resp. une piste fermée) passant par chaque arête/arc de G . Un *multi-graphe eulérien* est une graphe qui possède un circuit eulérien.

Remarque I.1.3.10. Dans le problème consistant à déterminer si un graphe G possède ou non un chemin eulérien, l'existence de boucles au sein de G n'a aucune importance. En effet, soient G un graphe et G' le graphe obtenu en supprimant les boucles de G . Il est évident que G possède un chemin ou un circuit eulérien si et seulement si G' en possède un.

Considérons le cas des multi-graphes finis non orientés. Il est évident que pour que G possède un circuit eulérien, i.e., pour que G soit eulérien, il est nécessaire que G soit connexe et que le degré de chaque sommet soit pair. Comme le montre le résultat suivant, ces conditions sont également suffisantes. On peut donc constater que le fait d'être eulérien est une propriété "locale" (elle ne fait intervenir que le degré de chaque sommet pris "isolément").

Théorème I.1.1. *Un multi-graphe fini non orienté connexe $G = (V, E)$ possède un circuit eulérien si et seulement si le degré de chaque sommet est pair.*

Démonstration. Supposons donc que chaque sommet de G est de degré pair. Débutons la construction d'une piste avec un sommet a_1 de G . À chaque étape $i \geq 1$ de cette construction, on choisit un sommet a_{i+1} de manière telle qu'une arête $\{a_i, a_{i+1}\} \in E$ est sélectionnée parmi les $|E| - i + 1$ arêtes non déjà sélectionnées. Puisque chaque sommet est de degré pair, cette sélection est toujours possible ("lorsqu'on aboutit dans un sommet, on peut toujours en repartir"). Puisque le graphe est fini, cette procédure s'achève toujours.

On dispose alors d'une piste P joignant a_1 à un certain sommets a_ℓ . En fait, on peut supposer que cette piste est fermée, i.e., $a_\ell = a_1$. En effet, si a_ℓ diffère de a_1 , puisque le degré de chaque sommet est pair, on peut étendre la piste en ajoutant une arête $\{a_\ell, a_{\ell+1}\}$. En continuant de la sorte¹³, on épuise

12. On évite comme cela les pathologies de graphes possédant des points isolés.

13. Procédons par l'absurde et imaginons un instant ne jamais revenir en a_1 . À chaque sélection d'une nouvelle arête depuis a_ℓ , le sommet atteint diffère donc de a_1 et une des arêtes restantes est consommée. Ainsi, le nombre d'arêtes disponibles décroît strictement. Pourtant, chaque sommet étant de degré pair, on peut continuer de la sorte jusqu'à ce qu'il ne reste, dans le pire cas, qu'une seule arête disponible, celle retournant à a_1 .

les sommets jusqu'à revenir en a_1 .

Si la piste fermée P est un circuit eulérien, le théorème est démontré. Sinon, il existe un sommet b de P qui est l'extrémité d'un nombre pair d'arêtes n'apparaissant pas dans P . (Une illustration est donnée à la figure I.16).

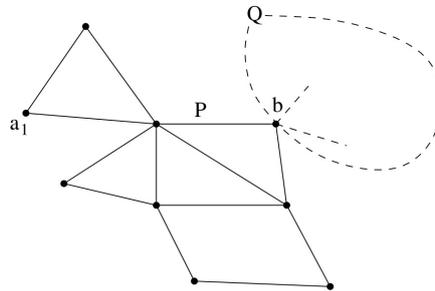


FIGURE I.16 – Construction d'un circuit eulérien.

Depuis b , il est possible de construire une piste fermée Q formée uniquement d'arêtes n'apparaissant pas dans P . (On utilise la même procédure que précédemment ; il est clair que le degré de chaque sommet est encore pair.) De cette façon, nous avons étendu la piste P en une piste plus longue $P \cup Q$ (couvrant un plus grand nombre d'arêtes). On obtient alors un circuit eulérien en répétant cette étape un nombre fini de fois. \square

Exemple I.1.3.11 (Sept ponts de Königsberg). Les ouvrages de théorie des graphes reprennent toujours le célèbre exemple des *ponts de Königsberg*. Nous ne dérogerons pas à cette règle. Au XVII-ième siècle, les habitants de Königsberg¹⁴ désiraient se promener le dimanche en passant une et une seule fois par chacun des sept ponts de la ville. Les ponts étaient disposés comme à la figure I.17. Une modélisation du problème revient à considérer un graphe ayant comme sommets, les deux rives et les deux îles et comme arêtes, les sept ponts. Puisqu'il n'y a aucune contrainte sur le sens de parcours des ponts, nous avons choisi un multi-graphe non orienté.

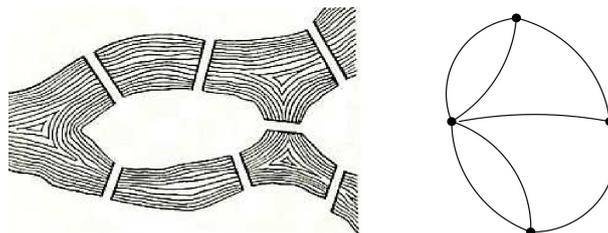


FIGURE I.17 – Les sept ponts de Königsberg.

Corollaire I.1.2. *Le problème des sept ponts de Königsberg donné dans l'exemple I.1.3.11 n'admet pas de solution.*

Démonstration. C'est immédiat, le graphe de la figure I.17 possède un sommet de degré 5 et 3 sommets de degré 3. \square

¹⁴. Actuel Kaliningrad, ville de Russie proche de la Lituanie et de la Pologne où coule la rivière Pregel.

Corollaire I.1.3. *Un multi-graphe non orienté connexe possède un chemin eulérien joignant deux sommets a et b si et seulement si a et b sont les deux seuls sommets de degré impair.*

Démonstration. Pour se ramener au théorème précédent, il suffit de considérer le graphe G auquel on ajoute une arête supplémentaire joignant les sommets a et b . \square

Exemple I.1.3.12. Fort des résultats précédents, on peut par exemple répondre à la question : "le dessin suivant peut-il ou non être tracé d'un seul trait, sans lever le crayon et sans repasser deux fois par un trait déjà tracé?". C'est une simple application du corollaire précédent¹⁵.

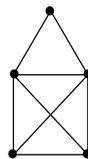


FIGURE I.18 – Une maison à tracer d'un seul trait.

Théorème I.1.4. *Un multi-graphe fini orienté simplement connexe $G = (V, E)$ possède un circuit eulérien si et seulement si le demi-degré entrant de chaque sommet est égal à son demi-degré sortant.*

Démonstration. On adaptera facilement le raisonnement de la preuve du théorème I.1.1. \square

Corollaire I.1.5. *Un multi-graphe fini orienté connexe $G = (V, E)$ possède un chemin eulérien si et seulement si il existe deux sommets v_0 et v_1 tel que*

- ▶ pour tout $v \in V \setminus \{v_0, v_1\}$, $d^-(v) = d^+(v)$,
- ▶ $d^+(v_0) = d^-(v_0) + 1$,
- ▶ $d^-(v_1) = d^+(v_1) + 1$.

Définition I.1.3.13. Soit $G = (V, E)$ un graphe orienté. On construit un nouveau graphe orienté, appelé *graphe acyclique des composantes*¹⁶ ou encore *condensé* de G , dont les sommets sont les composantes f. connexes de G . Un arc joint deux composantes f. connexes A et B , s'il existe $a \in A$ et $b \in B$ tels que $a \rightarrow b$.

Remarque I.1.3.14. Bien évidemment, s'il existe $a \in A$ et $b \in B$ tels que $a \rightarrow b$, alors il n'existe aucun $a' \in A$ ni aucun $b' \in B$ tels que $b' \rightarrow a'$. En effet, si tel était le cas, $A \cup B$ serait alors une composante f. connexe de G . Ceci est impossible vu la maximalité des composantes connexes. D'une manière générale, le graphe des composantes ne contient pas de cycle.

15. Il est clair que pour trouver la solution à ce problème, il faut débiter son dessin par un des deux coins inférieurs. Ce sont les deux seuls sommets de degré impair.

16. en anglais, (*directed acyclic collapse* ou, *acyclic component graph*).

Exemple I.1.3.15. La figure I.19 représente un digraphe et ses composantes f. connexes ainsi que le graphe des composantes correspondant.

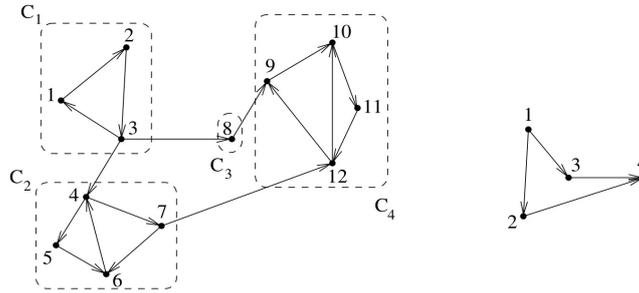


FIGURE I.19 – digraphe et graphe des composantes.

Le résultat suivant donne un lien entre la simple connexité et la forte connexité.

Lemme I.1.6. Soit G un digraphe (simple) tel que pour tout $v \in V$, $d^+(v) = d^-(v)$. Alors, G est f. connexe si et seulement si il est s. connexe.

Démonstration. Supposons le graphe s. connexe. Puisqu'il est connexe et que pour tout $v \in V$, $d^+(v) = d^-(v)$, on peut appliquer le théorème I.1.4. On conclut directement que G possède un circuit eulérien. Il est donc f. connexe. \square

I.1.4 Sous-graphes

La majorité des problèmes de théorie des graphes consiste en l'étude, l'existence ou l'optimalité de certains sous-objets contenus dans un graphe. Dans cette section, nous formalisons ce type de construction. Grosso-modo, un sous-graphe d'un graphe donné est un graphe obtenu en supprimant certains sommets et/ou arêtes.

Définition I.1.4.1. Soient $G = (V, E)$ et $G' = (V', E')$ deux graphes (orientés ou non). Le graphe G' est un *sous-graphe* de G si

- ▶ $V' \subseteq V$,
- ▶ $E' \subseteq E \cap (V' \times V')$.

Ainsi, G' est un sous-graphe de G s'il est obtenu en enlevant à G certains sommets et/ou certains arcs ou arêtes. En particulier, si on enlève un sommet v de G , il faut nécessairement enlever tous les arcs (ou arêtes) incidents à v . Par contre, pour construire G' , on peut très bien enlever un arc (ou une arête) de G sans pour autant enlever le moindre sommet de G . Le graphe G' est un *sous-graphe propre* de G si $E' \subsetneq E$ ou $V' \subsetneq V$.

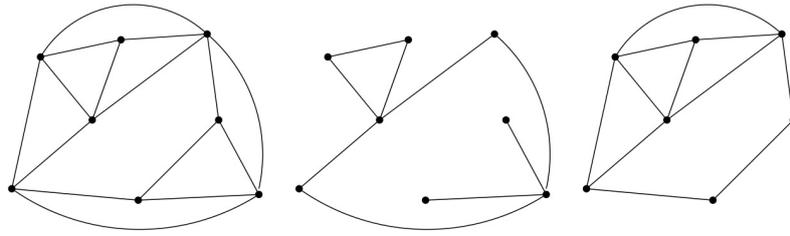


FIGURE I.20 – Un graphe et deux sous-graphes.

Dans le premier sous-graphe de la figure I.20, on a enlevé uniquement certaines arêtes. Dans le second, on a enlevé un sommet et les arêtes adjacentes.

Soient $v \in V$, et $e \in E$. On note $G - e$ (resp. $G - v$) le sous-graphe G' de G obtenu en supprimant l'arc (ou l'arête) e (resp. le sous-graphe G' obtenu en supprimant le sommet v et les arcs (ou les arêtes) adjacents). Par analogie, on notera $G = G' + e$ (resp. $G = G' + v$), le graphe obtenu par adjonction à G' d'une arête ou d'un sommet.

On peut bien évidemment étendre ces notations à un ensemble fini de sommets. Ainsi, si $W = \{v_1, \dots, v_k\} \subseteq V$, alors $G - W$ est le sous-graphe

$$(\dots((G - v_1) - v_2) \dots - v_{k-1}) - v_k := G - v_1 - \dots - v_k.$$

On procède de même manière pour un ensemble fini d'arcs (ou d'arêtes) et on introduit une notation $G - F$ pour un sous-ensemble F de E .

Soit $W \subseteq V$. Le sous-graphe de G induit par W , noté $G[W]$, est le sous-graphe $G' = (W, E')$ avec $E' = E \cap (W \times W)$.

Si $W \subseteq V$ est tel que le sous-graphe induit par W ne contient aucune arête, alors les sommets de W sont dits *indépendants* et le sous-graphe induit par W est dit *stable*. Le nombre maximal de sommets indépendants de G est noté $\alpha(G)$.

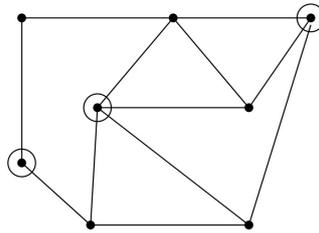


FIGURE I.21 – Des sommets indépendants.

Définition I.1.4.2. Soient $G = (V, E)$ un graphe et $G' = (V', E')$ un de ses sous-graphes. On dit que G' est un *sous-graphe couvrant* de G , si $V = V'$ et si

$$\forall v \in V, \exists z \in V : \{z, v\} \in E'.$$

On dira que E' est une couverture (des sommets) de G . Autrement dit, tout sommet de G est une extrémité d'une arête de E' .

Comme nous le verrons bientôt, on s'intéressera en particulier aux sous-graphes couvrants qui sont des arbres. Dans ce cas, on parlera naturellement de *sous-arbre couvrant*.

Exemple I.1.4.3. Une société de téléphonie souhaite câbler entièrement, au moyen de nouvelles fibres optiques, une ville en minimisant le nombre de connexions à réaliser. Le nouveau câblage s'appuie sur le réseau électrique déjà existant et bien évidemment, tous les points de la ville doivent être desservis. La figure I.22 représente le réseau actuel de la ville et ses connexions. À droite, se trouve les sélections envisagées. La question générale qui est posé est de

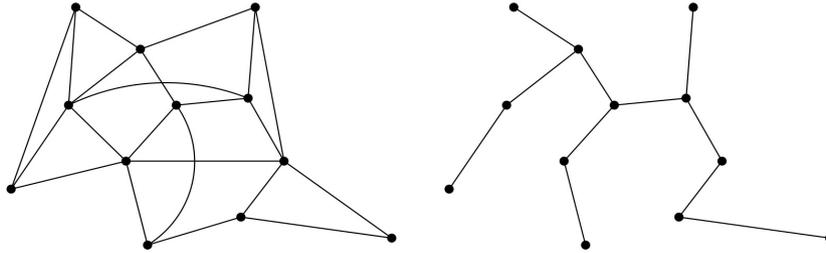


FIGURE I.22 – Sous-graphe couvrant.

rechercher un sous-graphe (ou un sous-arbre) couvrant dans un graphe donné. On peut aussi envisager une version pondérée dans laquelle chaque arc aurait un coût et on recherchait un sous-graphe (ou un sous-arbre) couvrant de poids minimal.

Le premier sous-graphe de la figure I.20 est couvrant. Un exemple de sous-arbre couvrant a été donné à la figure I.22.

I.1.5 Coupes, points d'articulation, k -connexité

Certains sommets ou arêtes d'un graphe (ou d'une composante) connexe jouent un rôle particulier : les enlever rendrait le graphe non connexe. D'un point de vue pratique (par exemple, pour un réseau électrique ou de distribution d'eau, ou encore pour l'Internet), il s'agit de composants cruciaux du réseau. En effet, une panne localisé en un tel endroit priverait par exemple toute une région de ressources peut-être vitales.

Définition I.1.5.1. Soit $H = (V, E)$ un multi-graphe¹⁷ non orienté connexe (ou une composante connexe d'un multi-graphe non orienté). Le sommet v est un *point d'articulation*, si $H - v$ n'est plus connexe, ou réduit à un point.

point d'articulation

D'une manière générale, on dit aussi que v est un point d'articulation d'un multi-graphe H si $H - v$ contient plus de composante connexes que H (ou est réduit à un point).

Si H est connexe et ne contient aucun point d'articulation, alors on dira que H est *au moins 2-connexe*.

17. Lorsqu'on s'intéresse à des questions de connexité, il est souvent inutile de considérer autre chose que des graphes simple. Cependant, les notions définies ici restent valables dans le cadre général des multi-graphes.

Définition I.1.5.2. On peut étendre la notion du point d'articulation de la manière suivante. Un *ensemble d'articulation* est un ensemble W de sommets du multi-graphe connexe $H = (V, E)$ qui est tel que $H - W$ n'est plus connexe (ou réduit à un sommet). D'une manière générale, pour un multi-graphe H quelconque, on dit aussi que W est un ensemble d'articulation si $H - W$ contient plus de composantes connexes que H .

ensemble d'articulation

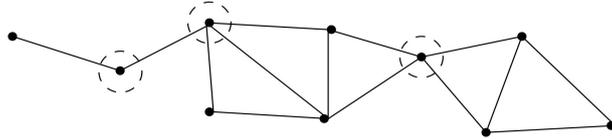


FIGURE I.23 – Un graphe et ses points d'articulation.

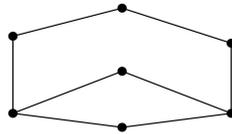


FIGURE I.24 – Un graphe au moins 2-connexe.

Définition I.1.5.3. Pour un graphe connexe H , on note $\kappa(H)$ la taille minimale d'un ensemble d'articulation de H ,

$$\kappa(H) = \min\{|W| \mid W \subseteq V : H - W \text{ disconnecté ou réduit à un sommet}\}.$$

En particulier, on a que $\kappa(K_n) = n - 1$. Pour un graphe G non connexe, on pose $\kappa(G) = 0$. Si $\kappa(H) = k \geq 1$, alors on dit que H est *k-connexe*. Ainsi, dans un graphe connexe G , $\kappa(G) = k$ signifie que quels que soient les $k - 1$ sommets supprimés, G reste connexe mais il est possible de supprimer k sommets bien choisis pour disconnecter G (ou le rendre trivial). Pour un graphe G restreint à une unique arête, on a $\kappa(G) = 1$ et pour le graphe vide, on pose $\kappa(\emptyset) = 0$.

Dans la définition I.1.5.1, lorsque nous avons parlé de graphe "au moins 2-connexe", cela signifie simplement que $\kappa(G) \geq 2$. Par exemple, le graphe de la figure I.24 qualifié d'au moins 2-connexe est en fait 2-connexe, comme on peut l'observer à la figure I.25; il suffit d'enlever deux sommets bien choisis pour le disconnecter.

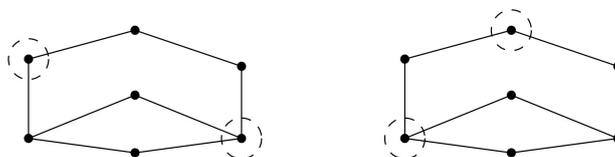
graphe k -connexe.

FIGURE I.25 – Un graphe 2-connexe.

D'une manière générale, on dira qu'un graphe G est *au moins k -connexe* si $\kappa(G) \geq k$. En particulier, il est trivial¹⁸ que si G est *au moins $(k+1)$ -connexe*, alors il est *au moins k -connexe* (i.e., $\kappa(G) \geq k + 1 \Rightarrow \kappa(G) \geq k$).

Remarque I.1.5.4. Si un graphe $G = (V, E)$ contient au moins un point d'articulation, il est souvent commode de *séparer* G en ce qu'il est coutume d'appeler *ses composante 2-connexes*. Il s'agit des composantes connexes obtenues après suppression des points d'articulations. Cette terminologie

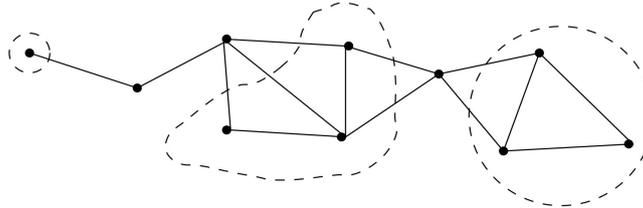


FIGURE I.26 – Un graphe et ses composantes 2-connexes.

consacré n'est pas nécessairement la meilleure car, comme on peut le noter sur la figure I.26, une composante 2-connexe n'est pas nécessairement un graphe 2-connexe! En fait, les composantes 2-connexes permettent simplement de mettre en évidence les zones du graphe robustes vis-à-vis de la connexité et de la suppression éventuelle d'un sommet.

Après s'être intéressé aux sommets qui, lorsqu'on les supprime, disconnectent un graphe, nous considérons à présent les arêtes ayant une propriété analogue.

Définition I.1.5.5. Soit $H = (V, E)$ un multi-graphe non orienté connexe (ou une composante connexe d'un multi-graphe non orienté). l'arête e est une *arête de coupure* si $H - e$ n'est plus connexe. Au moins une extrémité d'une arête de coupure est bien évidemment un point d'articulation de H . Comme le montre le graphe de droite à la figure I.27, il y a des situations où seule une extrémité de l'arête de coupure est un point d'articulation.

arête de coupure

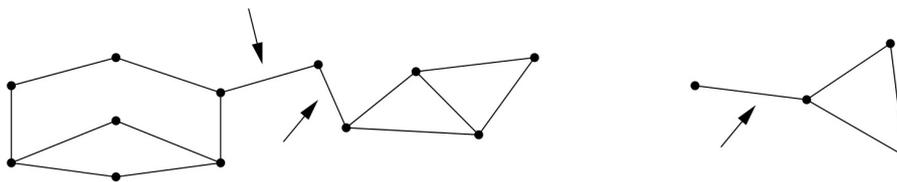


FIGURE I.27 – Un graphe et ses composantes 2-connexes.

Le résultat suivant illustre le concept d'arête de coupure et permet aussi de répondre à la question de la mise à sens unique de routes évoqué dans l'exemple I.1.5.6.

18. Attirons l'attention du lecteur sur la différence entre "être k -connexe" et "être au moins k -connexe". En effet, si G est $(K + 1)$ -connexe, il n'est pas k -connexe (i.e., $\kappa(G) = k + 1 \Rightarrow \kappa(G) \neq k$).

Exemple I.1.5.6. Suite à divers problèmes de circulation, des responsables communaux désirent placer les rues d'un quartier à sens unique. Si un graphe modélise les rues et leurs croisements, la question qui se pose est donc d'orienter les arcs d'un graphe non orienté de manière telle qu'il existe un chemin orienté entre toute paire de sommets. Un tel exemple est donné à la figure I.28.

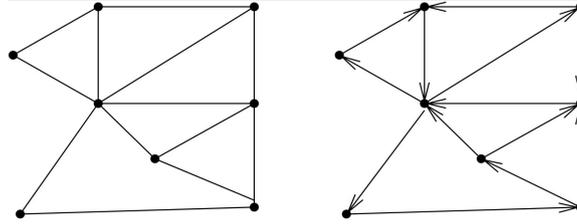


FIGURE I.28 – Orientation d'un graphe.

Proposition I.1.7. Une arête e est une arête de coupure du graphe $H = (V, E)$ si et seulement si e n'appartient à aucune piste fermée de H .

Démonstration. Si e est une arête de coupure, il existe des sommets u et v qui sont connectés dans H mais qui ne sont plus connectés dans $H - e$. Il existe donc un chemin joignant u et v qui passe par e . Dans $H - e$, une partie de ce chemin joint u à une extrémité de e , appelons-la e_1 et l'autre partie du chemin joint v à l'autre extrémité de e , appelons-la e_2 . Si e appartient à une piste fermée, il existe un chemin joignant e_1 à e_2 et ne passant pas par e . On peut donc en conclure que u et v sont encore connectés dans $H - e$, ce qui est impossible.

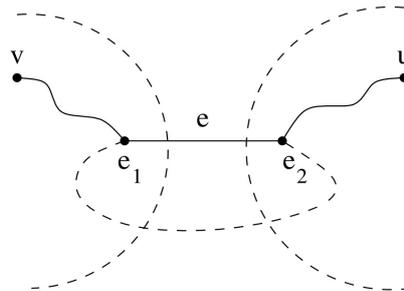


FIGURE I.29 – Illustration de la proposition I.1.7.

Passons à la réciproque et supposons que $e = \{e_1, e_2\}$ n'est pas une arête de coupure. Si H est connexe, $H - e$ l'est encore. Ainsi, il existe dans $H - e$ une piste joignant e_1 et e_2 . De là, on conclut que dans H , e appartient à une piste fermée. \square

Remarque I.1.5.7. Nous pouvons donner une solution au problème posé dans l'exemple I.1.5.6. En effet, si on dispose d'un graphe non orienté connexe et que l'on désire orienter ses arêtes de manière telle que le graphe résultant soit f. connexe, alors les arêtes de coupure doivent nécessairement être

remplacées par deux arcs (pas de sens unique). Par contre, les autres arêtes appartiennent toutes à une piste fermée qu'il est aisé d'orienter (création de sens unique).

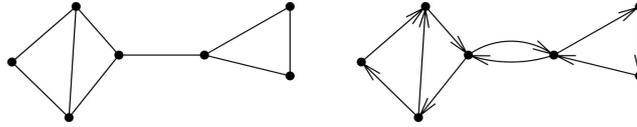


FIGURE I.30 – Mise à sens unique.

Définition I.1.5.8. Soit $H = (V, E)$ un multi-graphe non orienté connexe (ou une composante connexe d'un multi-graphe non orienté). L'ensemble $F \subseteq E$ est un *ensemble de coupure* ou plus simplement une *coupe* ou *coupure* si F est un ensemble **minimal** (pour l'inclusion) tel que $H - F$ n'est pas connexe. À la figure I.31, on a représenté en traits discontinus une des coupures du graphe.

coupe,coupure

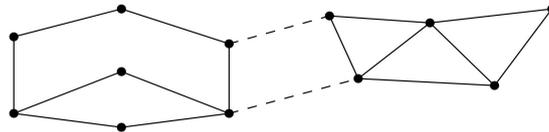


FIGURE I.31 – Un graphe et une coupure.

Définition I.1.5.9. La taille minimal d'une coupe de H se note $\lambda(H)$,

$$\lambda(H) = \min\{|F| \mid F \subseteq E : H - F \text{ disconnecté}\}.$$

Si H n'est pas connexe, on pose $\lambda(H) = 0$. Notons encore que dans la littérature, on rencontre souvent la notation $\kappa'(H)$ plutôt que $\lambda(H)$. Si H est connexe et si $\lambda(H) = k$, on dit que H est *k-connexe (pour les arêtes)*. Autrement dit, si on enlève $k - 1$ arêtes à un graphe *k-connexe (pour les arêtes)*, il reste connexe ; par contre, il est possible d'enlever k arêtes pour le disconnecter. On veillera à ne pas confondre les notions de *k-connexité* et de *k-connexité pour les arêtes*.

Enfin, on dira qu'un graphe G est *au moins k-connexe (pour les arêtes)*, si $\lambda(G) \geq k$.

Au vu de la définition ci-dessus, de la proposition I.1.7 et de la remarque I.1.5.7, on a immédiatement le résultat suivant.

Corollaire I.1.8 (Théorème de H. Robbins (1939)). *On peut orienter un graphe connexe pour le rendre f. connexe si et seulement si ce graphe est au moins 2-connexe pour les arêtes.*

Remarque I.1.5.10. Sur la figure I.32, le multi-graphe est 2-connexe pour les arêtes et pourtant, il suffit d'enlever un seul sommet pour le disconnecter. Avec nos notations, $\kappa(G) = 1$ et $\lambda(G) = 2$.

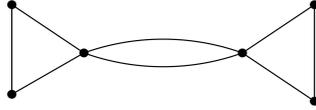


FIGURE I.32 – Un multi-graphe tel que $\lambda(G) = 2$ et $\kappa(G) = 1$.

De plus, les nombres $\lambda(G)$ et $\kappa(G)$ peuvent être très différents. En effet, pour le graphe de la figure I.33, on a $\kappa(G) = 1$ et $\lambda(G) = k$.

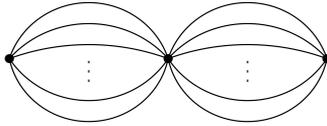


FIGURE I.33 – Un multi-graphe tel que $\lambda(G) = k$ et $\kappa(G) = 1$.

Même dans le cas d'un graphe simple, il n'existe pas de lien direct entre $\lambda(G)$ et $\kappa(G)$. On s'en convainc en considérant deux copies de K_n comme illustré à la figure I.34.

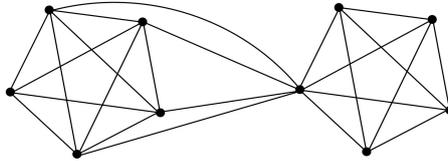


FIGURE I.34 – Un graphe simple tel que $\lambda(G) = 4$ et $\kappa(G) = 1$.

Enfin, il est clair que nous avons toujours

$$\lambda(G) \leq \min_{v \in V} \deg(v).$$

En effet, si v est un sommet de degré k , il suffit de supprimer les k arêtes incidentes à v pour isoler v des autres sommets du graphes. Signalons aussi un théorème de Whitney (1932),

$$\kappa(G) \leq \lambda(G).$$

Il semble évident que plutôt que de supprimer une arête, il suffirait d'en supprimer au plus une extrémité.

Remarque I.1.5.11. Si F est une coupure d'un graphe G connexe, alors, de par le minimalité de F , $G - F$ possède exactement deux composantes connexes et l'ensemble des sommets de G est donc partitionné en deux sous-ensemble correspondant à ces deux composantes.

Terminons cette section par une dernière définition.

Définition I.1.5.12. Une *clique* d'un graphe non orienté et simple $G = (V, E)$ est un sous-graphe complet de G . La *taille* d'une clique est le nombre de sommets qui la composent. La taille maximale d'une clique de G est noté $\omega(G)$. Comme nous le verrons plus loin, les nombres $\alpha(G)$ définie en page 20 et $\omega(G)$ sont deux paramètres importants d'un graphe.

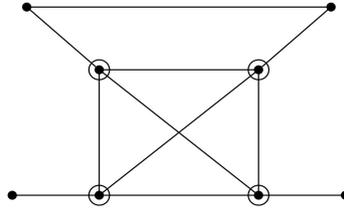


FIGURE I.35 – Une clique de taille 4, $\omega(G) = 4$.

I.1.6 Théorème(s) de Menger

Nous nous plaçons ici dans le cas des graphes simples non orientés. Comme le lecteur pourra s'en convaincre, il n'y a aucune différence à considérer le cas de multi-graphes. La notion définie ci-dessous est proche de la notion d'ensemble d'articulation.

Définition I.1.6.1. Soient un graphe $G = (V, E)$ et u, v deux sommets distincts de G . Un sous-ensemble $S \subseteq V \setminus \{u, v\}$ *sépare* u et v s'il n'existe aucun chemin joignant u et v dans le sous-graphe de G induit par $V \setminus S$.

Définition I.1.6.2. Deux chemins joignant u et v sont *indépendants* si les seuls sommets qu'ils ont en commun sont u et v .

Théorème I.1.9 (Menger (1927)). *Soient u, v deux sommets non adjacents d'un graphe connexe $G = (V, E)$. La taille minimum d'un sous-ensemble de sommets séparant u et v est égale au nombre maximum de chemins deux à deux indépendants joignant u et v .*

Démonstration. La preuve de ce résultat est assez longue. Dans ce rapport, nous ne faisons que l'esquisser sommairement. Si un sous-ensemble $S \subset V$ sépare u et v , alors tout chemin joignant u et v passe nécessairement par un sommet de S . On en conclut que $|S|$ majore le nombre de chemins indépendants joignant u et v .

La seconde partie de la preuve consiste à montrer par récurrence sur $|E| + |V|$ que si un ensemble $S \subset V$ de taille minimum sépare u et v , alors le nombre de chemins indépendants joignant u et v vaut au moins $|S|$. \square

Corollaire I.1.10 (Menger (1927)). *Soit $k \geq 2$. Un graphe $G = (V, E)$ est au moins k -connexe (pour les sommets) si et seulement si toute paire de sommets distincts de G est connectée par au moins k chemins indépendants.*

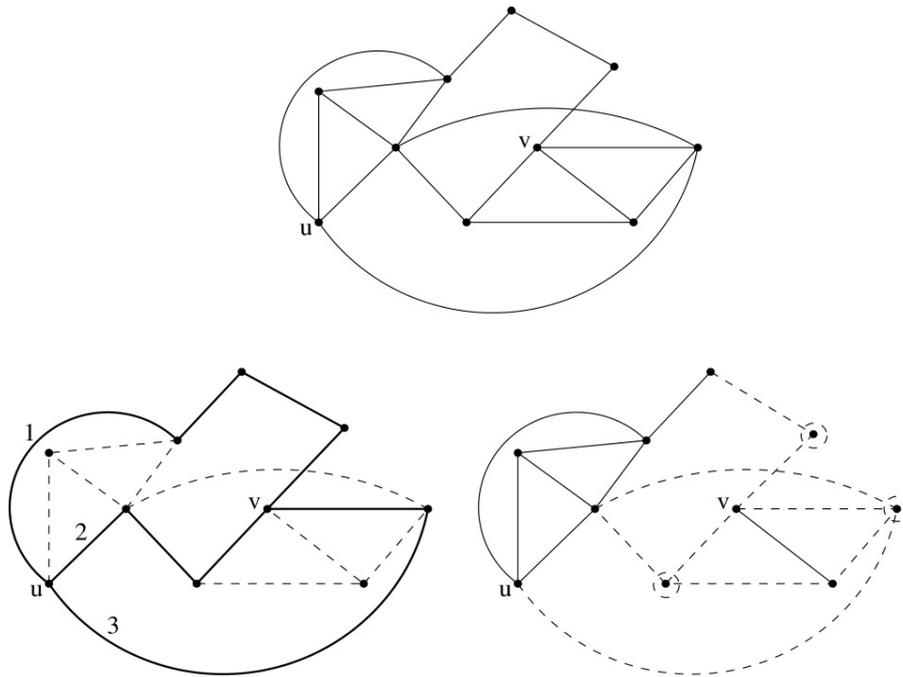


FIGURE I.36 – Une illustration du théorème de Menger :
3 chemins indépendants joignent u et v , 3 sommets séparent u
et v .

Démonstration. Il est clair¹⁹ que si toute paire de sommets est connectée par au moins k chemins indépendants, alors $\kappa(G) \geq k$.

La condition est nécessaire. Procédons par l'absurde. Supposons que $\kappa(G) \geq k$ mais qu'il existe deux sommets u et v joints par au plus $k - 1$ chemins indépendants. Au vu du théorème précédent, on en conclut que u et v sont adjacents, i.e., il existe une arête $e = \{u, v\} \in E$. Dans le graphe $G - e$, u et v sont joints par au plus $k - 2$ chemins indépendants. Puisque u et v ne sont pas adjacents dans $G - e$, on tire du théorème précédent qu'ils peuvent être séparés, dans $G - e$, par un ensemble S de taille minimale ne dépassant pas $k - 2$ sommets, i.e., $|S| \leq k - 2$.

Puisque $\kappa(G) \geq k$, cela implique en particulier que $|V| > k$. Il existe donc un sommet w n'appartenant pas à $S \cup \{u, v\}$. Dans $(G - e) - S$, il ne peut y avoir simultanément deux chemins joignant w respectivement à u et à v car sinon on disposerait dans $(G - e) - S$ de chemins joignant u à w et w à v et on pourrait en conclure que u et v ne sont pas séparés par S . Supposons dès lors qu'aucun chemin ne joint w et u dans $(G - e) - S$. L'ensemble $S \cup \{v\}$ possède (au plus) $k - 1$ éléments et sépare w et u dans G . Ceci contredit le fait que $\kappa(G) \geq k$. \square

Remarque I.1.6.3. Les résultats énoncés dans cette section concernant des propriétés de connexité relatives aux sommets d'un graphe. Il existe l'analogie de ces résultats en termes d'arêtes : *Un graphe est au moins k -connexe pour les arêtes si et seulement si toute paire de sommets est connectée par au moins k chemins ne partageant aucune arête.*

¹⁹. En effet, quand on enlève $k - 1$ sommets du graphe, toute paire de sommets est encore connectée par au moins un chemin.

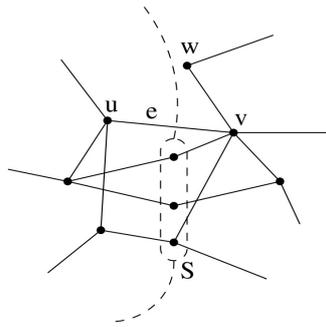


FIGURE I.37 – Une illustration de la preuve corollaire de Menger.

I.1.7 Arbre

Les graphes connexes acyclique²⁰ jouent un rôle prépondérant dans diverses applications (cf. l'exemple I.1.4.3 ou encore de nombreux exemples tirés de l'informatique : arbre binaires de recherche, base de données, etc...).

Définition I.1.7.1. Un graphe simple non orienté $A = (V, E)$ est un *arbre* s'il est connexe et sans *cycle* (sous-entendu, un "véritable" cycle : une piste fermée, pas un cycle "artificiel" comme un trivial $(\{a, b\}, \{b, a\})$ qui est un cycle de longueur 2; le fait d'imposer l'absence d'une piste fermée évite de telles arêtes doublées et on pourrait de manière équivalente imposer l'absence de circuit simple). Une *forêt* est un graphe simple non orienté dont chaque composante connexe est un arbre. Un arbre $A = (V, E)$ est qualifié de *n-aire* si pour tout sommet $v \in V$, $deg(v) \leq n$.

"Une forêt est formée d'arbre, fallait-il faire des maths pour s'en rendre compte?"

Proposition I.1.11. Soit $G = (V, E)$ un arbre ayant n sommets.

- ▶ Toute paire de sommets distincts de G est connectée par exactement un chemin simple.
- ▶ Soit $e \in (V \times V) \setminus E$ qui n'est pas une boucle. Le graphe $G + e$ contient un cycle (i.e., une piste fermée), c'est-à-dire, $G + e$ n'est plus un arbre.
- ▶ Le graphe G a exactement $n - 1$ arêtes.

Démonstration. C'est immédiat. □

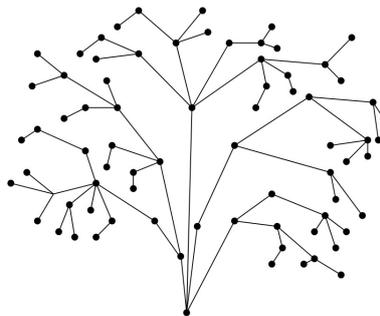


FIGURE I.38 – Un arbre.

20. Un graphe est acyclique s'il ne contient pas de cycle.

On pourra en particulier observer que tout arbre est 1-connexe, la réciproque étant bien évidemment fausse.

Proposition I.1.12. Un graphe $G = (V, E)$ simple connexe est un arbre si et seulement si chacune de ses arêtes est une arête de coupure.

Démonstration. Soient G un arbre et e une de ses arêtes. Puisque G est sans cycle, il ne possède aucune piste fermée. En appliquant la proposition I.1.7, on en déduit que e est une arête de coupure. Inversement, si G est un graphe connexe possédant une piste fermée alors, par la proposition I.1.7, les arêtes de cette piste ne peuvent être des arêtes de coupure. \square

Corollaire I.1.13. Tout graphe connexe possède un sous-arbre couvrant.

Démonstration. Soient $G = (V, E)$ un graphe connexe et $C = (V, E')$ un sous-graphe couvrant connexe minimal (i.e., on ne peut pas remplacer E' par un sous-ensemble strict tout en conservant la connexité de C). Vu la minimalité de C , chacune de ses arêtes est une arête de coupure de C . Par la proposition précédente, on en conclut que C est un arbre. \square

Corollaire I.1.14. Si $G = (V, E)$ est un graphe (simple non orienté) connexe, alors $|E| \geq |V| - 1$.

Démonstration. Par le corollaire précédent, G possède un sous-arbre couvrant $C = (V, E')$. De là, il vient

$$|E| \geq |E'| = |V| - 1$$

où pour la dernière égalité, on a utilisé la proposition I.1.11. \square

Définition I.1.7.2. Un arbre $A = (V, E)$ dans lequel on a privilégié un sommet v_0 est appelé *arbre pointé*²¹. On le notera (A, v_0) . Le sommet v_0 est parfois appelé la *racine* de l'arbre.

Pour un arbre pointé (A, v_0) , les sommets de A peuvent être ordonnés suivant leur distance à v_0 . Si v est un sommet tel que $d(v_0, v) = i$, on dira que v est un sommet du niveau i . Un arbre pointé a été représenté à la figure I.39.

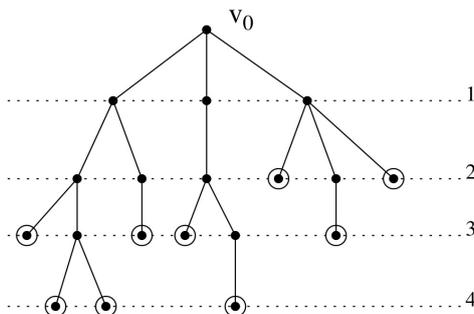


FIGURE I.39 – Un arbre pointé.

21. en anglais, *rooted tree*.

Si v est un sommet de niveau i et si tous ses voisins sont de niveau $i - 1$, on dit alors que v est une *feuille* de l'arbre. À la figure I.39, les feuilles ont été marquées d'un cercle. La *hauteur* d'un arbre est le niveau maximal de ses feuilles. L'arbre de la figure I.39 est un arbre de hauteur 4.

Remarque I.1.7.3. Pointer un arbre définit naturellement une orientation des arêtes de l'arbre. En effet, on peut orienter les arcs de façon à ce qu'ils joignent les sommets de niveau i aux sommets de niveau $i + 1$. Dans ce cadre, on parle souvent de *fil*s (resp. du *père*) d'un nœud v pour désigner ses successeurs (resp. son unique prédécesseur). Les *descendants* (resp. *ancêtres*) de v désignent les éléments de $\text{succ}^*(v)$ ²² (resp. $\text{pred}^*(v)$ ²³).

Définition I.1.7.4. Un arbre pointé est *k-aire* si tout sommet a au plus k fils. Si $k = 2$, on parle naturellement d'arbre binaire. Un arbre k -aire de hauteur n possède au plus

$$1 + k + \dots + k^n = \frac{k^{n+1} - 1}{k - 1}$$

sommets. S'il en possède exactement ce nombre, on parle d'arbre *k-aire complet*.

I.1.8 Isomorphismes de graphes

La question est de savoir si deux graphes sont "les mêmes", Est-ce qu'il existe un renommage des sommets qui permet de passer de l'un à l'autre? C'est un problème fondamental puisque c'est la décidabilité d'une égalité sur les graphes qui est en jeu. Par ailleurs ce problème a des applications plus pratiques assez nombreuses : en réseau, en chimie, en biologie, en bases de données, etc. . .

Définition I.1.8.1. Soient $G_i = (V_i, E_i)$, $i = 1, 2$, deux digraphes (resp. deux graphes non orientés). Une application $f : V_1 \rightarrow V_2$ est un *homomorphisme* si

$$(x, y) \in E_1 \Rightarrow (f(x), f(y)) \in E_2$$

$$\text{(resp. } \{x, y\} \in E_1 \Rightarrow \{f(x), f(y)\} \in E_2 \text{)}.$$

On parlera alors d'homomorphisme de G_1 dans G_2 . Il est clair que la composé d'homomorphismes est encore homomorphisme.

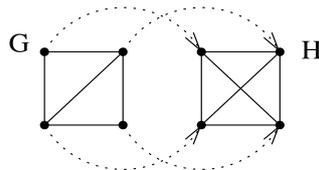


FIGURE I.40 – Homomorphisme de G dans H .

22. La *clôture réflexive et transitive* de l'application succ est définie comme suit, $\text{succ}^*(v) := \bigcup_{j=0}^{\infty} \text{succ}^j(v)$ où $\begin{cases} \text{succ}^0(v) = v \\ \text{succ}^{j+1}(v) = \text{succ}(\text{succ}^j(v)) \end{cases}$.

23. La *clôture réflexive et transitive* de l'application pred est définie de manière semblable.

Exemple I.1.8.2. Avec les graphes G et H de la figure I.40, on voit facilement qu'on a un homomorphisme de G dans H mais pas de H dans G . À la figure I.41, on donne un autre exemple d'homomorphisme entre deux graphes G et H . Cela montre que $f : V_1 \rightarrow V_2$ n'est pas nécessairement injectif. Les homomorphismes de graphes réinterviendront dans les problèmes de coloriage.

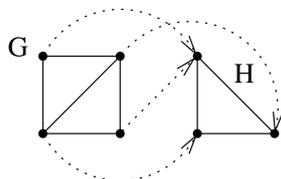


FIGURE I.41 – Homomorphisme de G dans H .

Deux graphes G et H sont *identiques*, ce qui se note $G = H$, si $V(G) = V(H)$ et $E(G) = E(H)$. Autrement dit, s'ils ont les mêmes sommets et les mêmes relations d'incidence. Si deux graphes sont identiques, ils sont clairement représentés par le même diagramme. Néanmoins, il est aussi possible que deux graphes non-identiques aient essentiellement le même diagramme. Par exemple, les graphes G et H de la figure I.42 peuvent être représentés par des diagrammes qui ont exactement la même apparence, comme le second dessin de H le montre ; la seule différence réside dans les noms des sommets et des arêtes. Bien que les graphes G et H ne soient pas identiques, ils ont des structures identiques, et sont dits isomorphes.

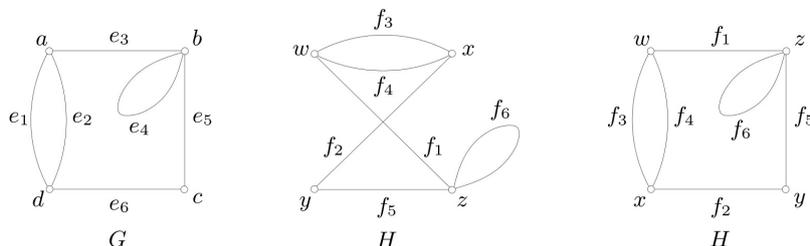


FIGURE I.42 – Graphes isomorphes.

Définition I.1.8.3. Deux digraphes (resp. deux graphes non orientés) $G_i = (V_i, E_i)$, $i = 1, 2$ sont *isomorphes*, ce qui se note $G_1 \cong G_2$, s'il existe une bijection $f : V_1 \rightarrow V_2$ qui est telle que

$$(x, y) \in E_1 \Leftrightarrow (f(x), f(y)) \in E_2$$

$$\text{(resp. } \{x, y\} \in E_1 \Leftrightarrow \{f(x), f(y)\} \in E_2 \text{)}.$$

Cette définition s'adapte au cas de multi-graphes orientés. Deux multi-graphes $G_i = (V_i, E_i)$, $i = 1, 2$, sont isomorphes s'il existe une bijection $f : V_1 \rightarrow V_2$ telle que (x, y) est un arc de multiplicité k de G_1 si et seulement si $(f(x), f(y))$ est un arc de multiplicité k de G_2 . Bien évidemment, une telle application f est qualifiée d'*isomorphisme* de graphes. Bien sûr, si f est un isomorphisme, il en va de même pour f^{-1} .

Afin de montrer que deux graphes sont isomorphes, on doit fournir un isomorphisme entre eux. L'application φ définie par

$$\varphi := \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ w & z & y & x \end{pmatrix}$$

est un isomorphisme entre les graphes G et H de la figure I.42.

Exemple I.1.8.4. Considérons, par exemple, les graphes G et H de la figure I.43

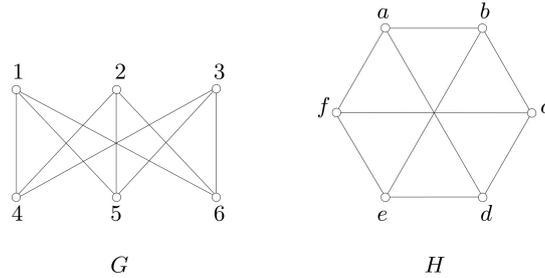


FIGURE I.43 – Graphes simples isomorphes.

L'application

$$\theta := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ b & d & f & c & e & a \end{pmatrix}$$

est un isomorphisme entre G et H , tout comme

$$\theta' := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ a & c & e & d & f & b \end{pmatrix}$$

Remarque I.1.8.5. Des graphes isomorphes ont clairement le même nombre de sommets et le même nombre d'arêtes. À l'inverse, l'égalité entre ces deux paramètres ne garantit pas l'isomorphisme. Par exemple, les deux graphes dessinés figure I.44 ont tous les deux huit sommets et douze arêtes, mais ne sont pas isomorphes. Pour s'en persuader, observons que le graphe G a quatre sommets deux à deux non-adjacents, v_1, v_3, v_6 , et v_8 . S'il y avait un isomorphisme θ entre G et H , les sommets $\theta(v_1), \theta(v_3), \theta(v_6)$, et $\theta(v_8)$ de H seraient également deux à deux non-adjacents. Mais on peut facilement vérifier que H ne possède pas quatre sommets deux à deux non-adjacents. Nous en déduisons que G et H ne sont pas isomorphes.

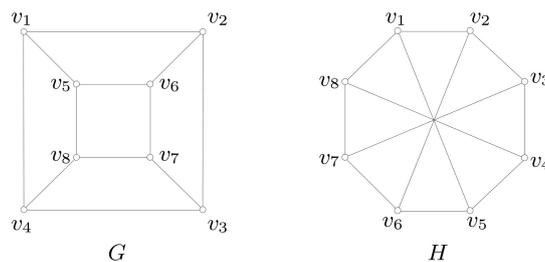


FIGURE I.44 – Graphes non-isomorphes.

Il ressort clairement des paragraphes précédents que si deux graphes sont isomorphes, alors soit ils sont identiques, soit ils diffèrent seulement par les noms des sommets et des arêtes, et donc ont la même structure. Comme nous sommes principalement intéressés par les propriétés structurelles, nous omettrons souvent les noms dans les dessins de graphes ; formellement, nous pouvons définir un *graphe non-étiqueté* comme un représentant d'une classe d'équivalence de graphes isomorphes. Nous donnerons des noms aux sommets et aux arêtes d'un graphe principalement pour pouvoir s'y référer (dans les preuves, par exemple).

À isomorphisme près, il n'y a qu'un seul graphe complet à n sommets, noté K_n . De même, étant donnés deux entiers strictement positifs m et n , il y a un unique graphe biparti complet avec des parties de taille m et n (là encore, à isomorphisme près), noté $K_{m,n}$. Avec ces notations, les graphes de la figure I.45 sont K_5 , $K_{3,3}$, et $K_{1,5}$ ²⁴, respectivement.

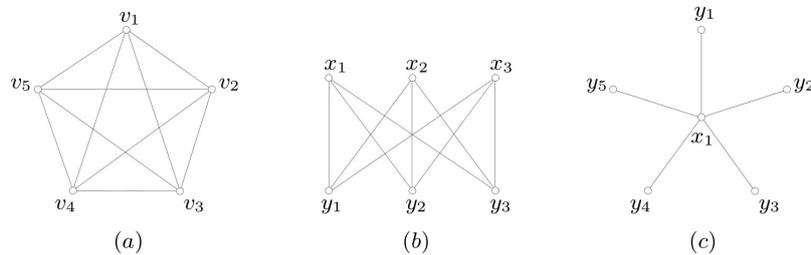


FIGURE I.45 – (a) Un graphe complet, (b) un graphe biparti complet, et (c) une étoile.

De la même manière, pour tout entier positif n , il y a un unique chemin à n sommets et un unique cycle à n sommets. Ces graphes sont notés P_n et C_n , respectivement. Les graphes représentés sur la figure I.46 sont P_4 et C_5 .

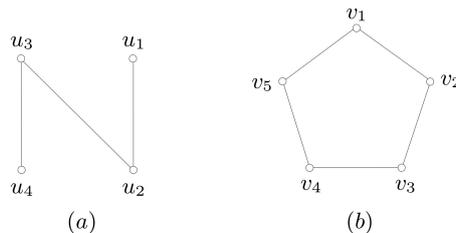


FIGURE I.46 – (a) Un chemin de longueur trois, et (b) un cycle de longueur cinq.

Remarque I.1.8.6 (Tester l'isomorphisme). Étant donnés deux graphes à n sommets, il est évidemment possible en principe de déterminer s'ils sont isomorphes. Par exemple, si G et H sont simples, on peut tout simplement considérer l'une après l'autre les $n!$ bijections entre $V(G)$ et $V(H)$, et vérifier si l'une d'entre elles est un isomorphisme entre les deux graphes. S'il se trouve que les graphes sont isomorphes, un isomorphisme pourrait (avec chance) être trouvé rapidement. À l'inverse, s'ils ne sont pas isomorphes, on devra tester les $n!$ bijections pour en être sûr. Malheureusement, même pour des valeurs relativement faibles de n (comme $n = 100$), le nombre $n!$ est trop grand pour

24. Une *étoile* est un graphe biparti complet $G = (V, E)$ avec $|V_1| = 1$ ou $|V_2| = 1$.

être géré (en effet, il est plus grand que le nombre d'atomes dans l'univers!), et donc cette approche de type "force brute" ne peut être utilisée en pratique. Bien sûr, si les graphes ne sont pas réguliers, le nombre de bijections à tester sera plus petit, puisqu'un isomorphisme doit envoyer chaque sommet sur un sommet de même degré. Toutefois, à part dans certains cas particuliers, cette restriction ne permet pas de réduire suffisamment leur nombre. Effectivement, aucune méthode générale applicable n'est connue pour tester l'isomorphisme. Cependant, en utilisant de puissantes méthodes de théorie de groupes, Luks (1982)[116] a conçu un algorithme efficace pour tester l'isomorphisme des graphes cubiques, et plus généralement des graphes de degré maximum borné.

Il y a un autre problème important lié aux questions algorithmiques telles que l'isomorphisme de graphes. Supposons que deux graphes simples G et H soient isomorphes. Il est possible qu'il ne soit pas facile de trouver un tel isomorphisme, mais une fois que l'isomorphisme f a été trouvé, il est très facile de vérifier que f est effectivement un isomorphisme : on doit simplement vérifier que, pour chacune des $\binom{n}{2}$ paires $\{u, v\}$ de sommets de G , $\{u, v\} \in E(G)$ si et seulement si $\{f(u), f(v)\} \in E(H)$. En revanche, si G et H ne sont pas isomorphes, comment peut-on vérifier cela, sans pour autant vérifier toutes les bijections entre $V(G)$ et $V(H)$? Dans certains cas, il se peut que l'on puisse montrer que G et H ne sont pas isomorphes en pointant une propriété structurelle de G qui n'est pas partagée par H , comme nous l'avons fait pour les graphes G et H de la figure I.44. Cependant, en général, vérifier que deux graphes ne sont pas isomorphes semble être aussi difficile que de déterminer s'ils sont isomorphes ou non.

Définition I.1.8.7. Soit $G = (V, E)$. On appelle *complémentaire* de G le graphe noté \bar{G} défini par

$$\begin{cases} V(\bar{G}) = V(G), \\ E(\bar{G}) = \{\{u, v\} \mid u \in V(G) \text{ et } v \in V(G) \text{ et } \{u, v\} \notin E(G)\} \end{cases}$$

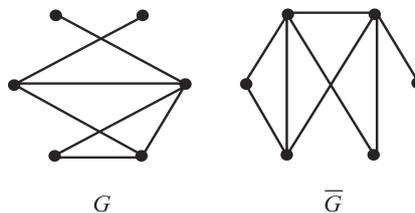


FIGURE I.47 – Un graphe et son complémentaire.

On appelle graphe *autocomplémentaire* tout graphe isomorphe à son complémentaire. Par exemple P_4 , C_5 et le "graphe taureau".

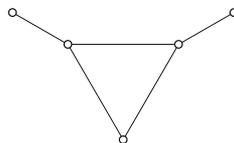


FIGURE I.48 – Graphe taureau.

Remarque I.1.8.8. On peut également définir un stable comme étant tout graphe dont le complémentaire est une clique. Ainsi, le stable ayant trois sommets est le complémentaire d'un *triangle*²⁵.

Définition I.1.8.9. Soit $G = (V, E)$ un graphe (orienté ou non). Un *automorphisme* de G est un isomorphisme de G dans lui-même. Dans le cas d'un graphe simple, un automorphisme est simplement une permutation α de son ensemble de sommets qui préserve l'adjacence : $\{u, v\}$ est une arête alors $\{\alpha(u), \alpha(v)\}$ en est une aussi.

Les automorphismes d'un graphe reflètent ses symétries. Par exemple, si u et v sont deux sommets d'un graphe simple, et s'il y a un automorphisme α qui envoie u sur v , alors u et v sont semblables dans le graphe et sont dits *similaires*. Les graphes dans lesquels tous les sommets sont similaires, tels que le graphe complet K_n , le graphe biparti complet $K_{n,n}$, ou le n -cube Q_n ²⁶, sont appelés *sommet-transitifs*. Les graphes dans lesquels il n'y a aucune paire de sommets similaires sont dits *asymétrique*; ce sont les graphes dont le seul automorphisme est la permutation identité.

Des dessins particuliers d'un graphe sont souvent utilisés pour visualiser ses symétries. En guise d'exemple, considérons les trois dessins de la figure I.49 du *graphe de Petersen*, qui est un graphe ayant de nombreuses propriétés remarquables. Le premier dessin montre que les cinq sommets du pentagone externe sont similaires (par rotation), tout comme les cinq sommets du pentagone interne. Le troisième dessin met en évidence six sommets similaires (par rotation et symétrie), à savoir les sommets de l'hexagone externe. En combinant ces deux observations, nous en concluons que les dix sommets du graphe de Petersen sont tous similaires, et donc que le graphe est sommet-transitif.

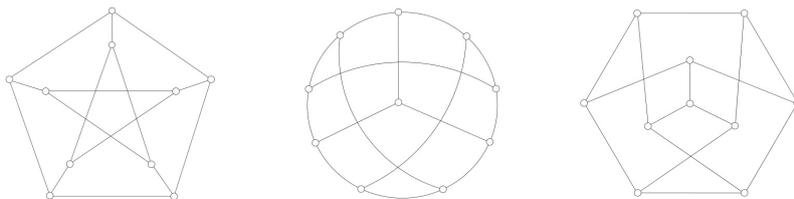


FIGURE I.49 – Trois dessins du graphe de Petersen.

L'ensemble des automorphisme d'un graphe G est noté $Aut(G)$, et son cardinal $aut(G)$. On peut vérifier que $Aut(G)$ muni de l'opération de composition est un groupe. Ce groupe est appelé *groupe d'automorphisme* de G . Le groupe d'automorphisme de K_n est le groupe symétrique \mathcal{S}_n , qui contient toutes les permutations de son ensemble de sommets. En général, pour tout graphe simple G à n sommets, $Aut(G)$ est un sous-groupe de \mathcal{S}_n . Par exemple, le groupe d'automorphisme de C_n est D_n , le groupe diédral à n éléments.

25. On appelle triangle toute clique ayant trois sommets.

26. Le n -cube Q_n ($n \geq 1$) est le graphe dont l'ensemble de sommets est $\{0, 1\}^n$, l'ensemble de tous les n -uplets de 0 ou 1, et dans lequel deux n -uplets sont adjacents s'ils diffèrent d'exactly une coordonnée.

La proposition suivante est immédiate et s'adapte aux autres cas de graphes.

Proposition I.1.15. *Soient G un graphe (simple non orienté) et φ un automorphisme de G . Pour tous sommets u, v , on a*

$$\blacktriangleright \deg(u) = \deg(\varphi(u)),$$

$$\blacktriangleright d(u, v) = d(\varphi(u), \varphi(v)).$$

Remarque I.1.8.10. Au vu de la définition I.1.5.12, on appelle clique de G tout graphe K qui est une clique est qui est un sous-graphe de G . Plus généralement, chaque fois qu'on définira un type de graphe "bidule" (clique, stable, trou . . .), on appellera "*bidule* de G tout graphe qui est un "bidule" (ou qui est isomorphe à un "bidule") et qui est un sous-graphe induit de G . On dira que G *contient* un "bidule" F si et seulement s'il existe un sous-graphe induit de G qui est un "bidule" de G et nous écrivons $G \supseteq F$ ou $F \subseteq G$. On dira que G est *sans "bidule"* si et seulement s'il n'existe aucun "bidule" qui soit un sous-graphe induit de G .

 $G \supseteq F$

Définition I.1.8.11. Une *copie* d'un graphe F dans un graphe G est un sous-graphe de G qui est isomorphe à F . Un tel sous-graphe est aussi appelé un F -*sous-graphe* de G ; par exemple, un K_3 -sous-graphe est un triangle dans le graphe. Un *plongement* d'un graphe F dans un graphe G est un isomorphisme entre F et un sous-graphe de G . Pour chaque copie de F dans G , il y a $\text{aut}(F)$ plongements de F dans G .

Un *sur-graphe* d'un graphe G est un graphe H qui contient G en tant que sous-graphe, c'est-à-dire, $H \supseteq G$. Notons que tout graphe est à la fois un sous-graphe et un sur-graphe de lui-même. Tous les autres sous-graphes F et sur-graphes H sont dits *propres*; nous écrivons alors $F \subset G$ ou $H \supset G$, respectivement.

Les définitions ci-dessus s'appliquent également aux graphes orientés, avec les modifications évidentes.

Dans de nombreuses applications de théorie de graphes, on cherche à déterminer si un graphe donné a un sous-graphe ou sur-graphe avec certaines propriétés voulues. Le théorème ci-dessous donne une condition suffisante pour qu'un graphe contienne un cycle.

Théorème I.1.16. *Soit G un graphe dans lequel tous les sommets sont de degré au moins 2. Alors G contient un cycle.*

Démonstration. Supposons sans restreindre la généralité que le graphe G est simple. Soit $P := v_0v_1 \dots v_{k-1}v_k$ un plus long chemin dans G . Puisque v_k est de degré au moins 2, il a un voisin v différent de v_{k-1} . Si v n'est pas dans P , le chemin $v_0v_1 \dots v_{k-1}v_kv$ contredit le choix de P comme plus long chemin. Par conséquent, $v = v_i$, pour un certain i , $0 \leq i \leq k-2$ et $v_iv_{i+1} \dots v_kv_i$ est un cycle dans G . \square

I.1.9 Maximalité et Minimalité

La preuve du théorème I.1.16 consiste à tous d'abord choisir un plus long chemin dans le graphe, puis à trouver un cycle à partir de ce chemin. Évidemment, d'un point de vue purement mathématique, c'est une approche tout à fait correcte. Le graphe étant fini, il a nécessairement un plus long chemin. Cependant, si l'on désirait trouver un cycle dans le graphe en suivant la preuve pas à pas, nous devrions trouver un tel chemin, et ceci est en général très difficile à faire. Heureusement, la même preuve reste valide, si "plus long chemin" est remplacé par "chemin maximal", un chemin maximal étant un chemin qui ne peut être étendu en un chemin plus long en aucune de ses deux extrémités. En outre, un chemin maximal peut être facilement trouvé : on commence tout simplement d'un sommet et on fait grandir le chemin jusqu'à ce que ne soit plus possible, ni d'un côté ni de l'autre. C'est pour ce genre de raisons que les concepts de maximalité et minimalité (des sous-graphes) sont relativement importants.

Définition I.1.9.1. Soit \mathcal{F} une famille de sous-graphes d'un graphe G . Un membre F de \mathcal{F} est *maximal* dans \mathcal{F} si aucun membre de \mathcal{F} ne contient proprement F ; de même, F est *minimal* dans \mathcal{F} si aucun membre de \mathcal{F} n'est pas proprement contenu dans F . Quand \mathcal{F} est l'ensemble de tous les chemins de G , on appelle simplement un membre maximal de \mathcal{F} un *chemin maximal* de G . Nous utilisons une terminologie similaire pour décrire les membres maximaux et minimaux d'autres familles particulières de sous-graphes. Par exemple, lorsque \mathcal{F} est l'ensemble des sous-graphes connexes de G , les membres maximaux de \mathcal{F} sont tout simplement les composantes connexes de G . De la même manière, puisque qu'un cycle impair²⁷ n'est pas biparti, mais que tous ses sous-graphes propres le sont, les cycles impairs d'un graphes sont des sous-graphes non-bipartis minimaux (voir figure I.50). En fait, comme nous le verrons, les cycles impairs sont les seuls sous-graphes non-bipartis minimaux.

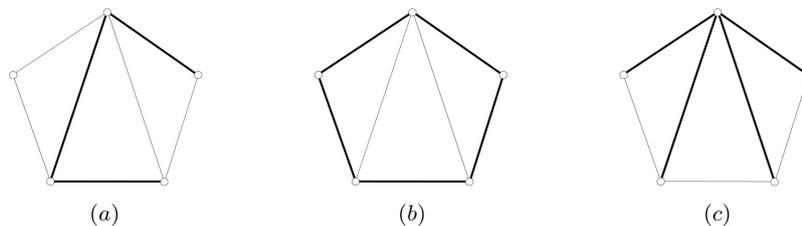


FIGURE I.50 – (a) Un chemin maximal, (b) un sous-graphe non-biparti minimal, et (c) un sous-graphe biparti maximal.

Les notions de maximalité et minimalité ne doivent pas être confondues avec celles de cardinal maximum et minimum. Tout cycle d'un graphe est un cycle maximal, car aucun cycle n'est contenu dans un autre; pour la même raison, tout cycle est un cycle minimal. En revanche, par cycle maximum d'un graphe nous entendons un cycle de longueur maximum, c'est-à-dire un

²⁷. On appelle *cycle impair* (resp. *cycle pair*), un cycle de longueur impair (resp. pair).

plus long cycle. De même par cycle minimum nous entendons un cycle de longueur minimum. Dans un graphe G qui a au moins un cycle, la longueur d'un plus long cycle est appelée la *circonférence* et la longueur d'un plus petit cycle la *maille*.

I.1.10 Matrice d'adjacence

Bien que le dessin soit un moyen pratique pour définir un graphe, il n'est clairement adapté ni au stockage des graphes dans la mémoire d'un ordinateur, ni à l'application de méthodes mathématiques pour étudier leur propriétés. Pour ces usages, nous considérons deux matrices associées à un graphe : sa matrice d'incidence et sa matrice d'adjacence.

Définition I.1.10.1. Soit $G = (V, E)$ un multi-graphe non orienté dont les sommets sont ordonnés par $V = \{v_1, \dots, v_n\}$. La *matrice d'adjacence* de G est la matrice $A(G)$ dont l'élément $[A(G)]_{i,j}$ est égal au nombre d'arêtes $\{v_i, v_j\}$ présentes dans E , $1 \leq i, j \leq n$. (Pour rappel, E est en général un multi-ensemble). Il s'agit donc d'une matrice symétrique à coefficients entiers naturels. Le polynôme caractéristique de G , noté $\chi_G(\lambda)$, est le polynôme caractéristique de sa matrice d'adjacence $A(G)$. Par abus de langage, on parlera des valeurs propres de G , étant sous-entendu qu'il s'agit des valeurs propres de $A(G)$. On parlera donc aussi du spectre de G .

On peut remarquer que les éléments de la matrice d'adjacence d'un graphe simple appartiennent à $\{0, 1\}$ et que la trace de cette matrice vaut 0.

Remarque I.1.10.2. En se rappelant quelques résultats du cours d'algèbre de première année, on remarque que la matrice d'adjacence d'un graphe non orienté est toujours diagonalisable par une matrice orthogonale (pour chaque valeur propre, les multiplicité algébriques et géométriques coïncident) et que ses valeurs propres sont réelles.

Exemple I.1.10.3. Considérons le graphe (simple) G de la figure I.51. Avec les notations précédentes, on a aussi

$$\chi_G(\lambda) = -\lambda^5 + 8\lambda^3 + 10\lambda^2 + \lambda - 2.$$

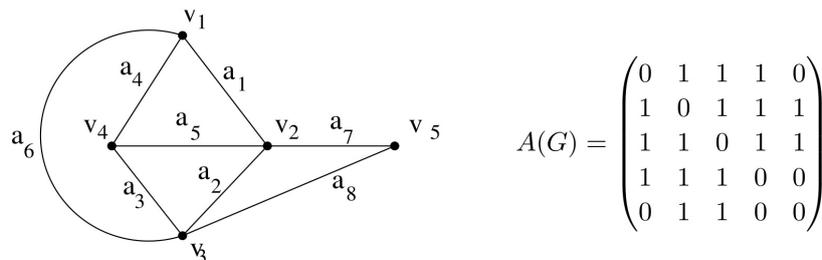


FIGURE I.51 – Un graphe G et sa matrice d'adjacence.

Proposition I.1.17. *Deux graphes G_1 et G_2 sont isomorphes si et seulement si ils ont, à une permutation près, la même matrice d'adjacence. Autrement dit, il existe une matrice de permutation²⁸ P telle que*

$$A(G_1) = P^{-1}A(G_2)P.$$

Démonstration. C'est immédiat et ce résultat est même transposable au cas de graphes orientés. \square

Définition I.1.10.4. On peut aussi définir la *matrice d'incidence "sommets/arêtes"*. Si $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ et $E = \{e_1, \dots, e_m\}$, il s'agit d'une matrice B de dimension $n \times m$ telle que $B_{i,j} = 1$ si et seulement si e_j est incident à v_i . En poursuivant l'exemple précédent, cette matrice vaut ici

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Proposition I.1.18. *Si le polynôme caractéristique de $G = (V, E)$ est de la forme*

$$\chi_G(\lambda) = (-\lambda)^n + c_1(-\lambda)^{n-1} + c_2(-\lambda)^{n-2} + \dots + c_n,$$

alors certains coefficients de χ_G sont en relation directe avec G :

- ▶ c_1 est le nombre de boucles de G , en particulier, si G est simple, $c_1 = 0$.
- ▶ Si G est simple, alors $-c_2$ est le nombre d'arêtes de G .
- ▶ Si G est simple, alors c_3 est le double du nombre de triangles de G .

Démonstration. Le premier point est immédiat. Le coefficient c_1 est la somme des éléments diagonaux de A_G . Si G est simple, les sous-matrices diagonales²⁹ de A_G de dimension 2 sont de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le coefficient c_2 étant la somme des déterminants de ces sous-matrices ceux-ci valant respectivement -1 et 0 , il est clair que $c_2 = -|E|$. Pour le dernier point, on raisonne de la même façon. Les sous-matrices diagonales non nulles de A_G de dimension 3 sont d'une des formes suivantes (à une permutation des lignes

²⁸. Une matrice de permutation est une matrice pour laquelle chaque ligne et chaque colonne contiennent exactement un 1, les autres entrées étant nulles.

²⁹. Cela signifie qu'on sélectionne des lignes et des colonnes de même indice.

et des colonnes près, ce qui ne change pas la valeur du déterminant)

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les deux premières ont un déterminant nul et la troisième a un déterminant égal à 2. Le coefficient c_3 étant la somme des déterminants de ces sous-matrices et la dernière matrice correspondant à la présence d'un triangle dans G , on obtient le résultat annoncé. \square

Remarque I.1.10.5. On voit donc que le polynôme caractéristique de $A(G)$ fournit des renseignements sur le graphe G . Cependant, deux graphes non isomorphes peuvent avoir le même polynôme caractéristique³⁰. On parle alors de *graphes cospectraux*. Par exemple, les deux graphes de la figure I.52 ont le même spectre. En effet, ils ont tous les deux comme polynôme caractéristique,

$$-1 + 4\lambda + 7\lambda^2 - 4\lambda^3 - 7\lambda^4 + \lambda^6.$$

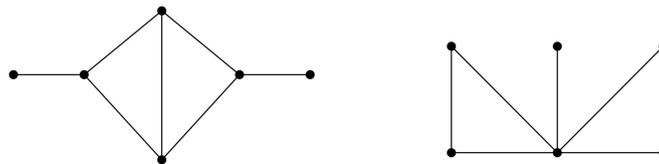


FIGURE I.52 – Deux graphes cospectraux.

Proposition I.1.19. Soit $G = (V, E)$ un graphe biparti. Si λ est valeur propre de G , alors $-\lambda$ l'est aussi. Autrement dit, le spectre d'un graphe biparti est symétrique par rapport à 0.

Remarque I.1.10.6. On peut aussi définir la matrice d'adjacence d'un multi-graphe orienté. La définition est analogue à celle donnée précédemment sauf qu'on tient ici compte de l'orientation. Il en résulte que la matrice obtenue n'est en général pas symétrique.

Théorème I.1.20. Soit $G = (V, E)$ un multi-graphe (orienté ou non) tel que $V = \{v_1, \dots, v_k\}$. Pour tous $i, j \in \{1, \dots, k\}$ et pour tout $n \geq 0$,

$$[A(G)^n]_{i,j}$$

est exactement le nombre de chemins de longueur n joignant v_i à v_j .

Démonstration. On procède par récurrence et on utilise le fait que

$$[A(G)^{n+1}]_{i,j} = \sum_{s=1}^k [A(G)^n]_{i,s} [A(G)]_{s,j}.$$

\square

³⁰. C'est comme en algèbre matricielle, deux matrices peuvent avoir le même polynôme caractéristique sans pour autant se réduire à la même forme de Jordan.

I.1.11 Coloration des graphes

Dans beaucoup de domaines des mathématiques, des tentatives pour trouver des solutions à des problèmes ouverts difficiles ont fait progresser techniques et idées. Dans le cas de la théorie des graphes, c'est un problème apparemment anodin de coloration de cartes qui fut la motivation de nombreux développements durant la première centaine d'années. C'est le fameux problème des 4 couleurs posé par Francis Guthrie en 1852 : *est-il possible de colorier toute carte géographique avec au plus 4 couleurs de sorte que 2 régions qui ont une frontière en commun aient des couleurs différentes ?*

Depuis, c'est un champ majeur et très actif de la théorie des graphes avec un nombre important de conjectures. La coloration de graphes permet de modéliser de nombreux problèmes réels, depuis le placement de personnes autour d'une table ou de pièces sur un échiquier jusqu'aux différents problèmes d'ordonnancement et de planning de la vie de tous les jours (réservation de ressources, logistique, ...) et notamment dans le domaine des réseaux/télécom.

Comme nous allons le voir, il n'y a pas une seule façon de colorier les graphes mais plusieurs (un très grand nombre même). On peut déjà vouloir colorier différents éléments d'un graphe (les sommets, les arêtes, les faces, un mélange de ces éléments, des sous-structures, ...) et à ceci peut s'ajouter différentes contraintes.

Bien que différents éléments d'un graphe puissent être coloriés, on peut toujours se ramener à un problème de coloration de sommets. C'est donc le paramètre de coloration le plus général (et le plus étudié).

Définition I.1.11.1. Soit $c : V \rightarrow \Sigma$ un étiquetage des sommets du graphe où l'on suppose que Σ est fini. Dans le contexte qui nous intéresse, on parlera plutôt de *coloriage* et pour tout sommet u , on dira que $c(u)$ est la couleur de u . Un coloriage c des sommets d'un graphe est dit *propre* si deux sommets voisins ont des couleurs distincts pour c . Tous les graphes sans boucle admettent des colorations propres.

S'il existe un coloriage propre $c : V \rightarrow \Sigma$ de G tel que $|\Sigma| = k$, on dira que G est *k-colorable*. Habituellement, on prend pour ensemble Σ de couleurs $\{1, 2, \dots, k\}$. La valeur minimum de k pour laquelle G est *k-colorable* est appelée le *nombre chromatique* de G et est noté $\chi(G)$. Si $\chi(G) = k$, le graphe G est dit *k-chromatique*. Une coloration de G avec $\chi(G)$ couleurs est dite *optimale*.

Remarque I.1.11.2. De manière alternative, une *k-coloration* peut se voir comme une partition $\{V_1, V_2, \dots, V_k\}$ de V , où V_i désigne l'ensemble (possiblement vide) des sommets de couleur i . Les ensembles V_i sont appelés les *classes de couleur* de la coloration. Une *k-coloration propre* est alors une *k-coloration* pour laquelle chaque classe de couleur est un stable. Dans ce rapport, nous nous intéressons uniquement aux colorations propres. Par conséquent, par commodité, à chaque fois que nous parlerons de coloration, il

sera implicite qu'elle est propre.

Lemme I.1.21. *Le nombre chromatique d'un graphe $G = (V, E)$ (non orienté et simple) est le plus petit entier n tel qu'il existe un homomorphisme de G dans K_n .*

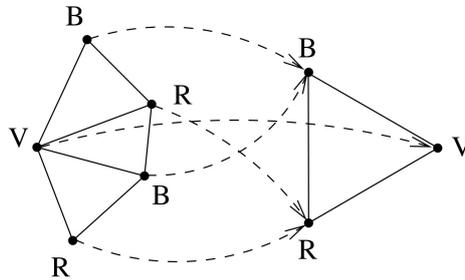


FIGURE I.53 – Une illustration du lemme I.1.21.

Démonstration. Soient $H = (V', E')$ un graphe simple et $f : V \rightarrow V'$ un homomorphisme de graphes. Pour tout $y \in V'$,

$$f^{-1}(y) = \{x \in V \mid f(x) = y\}.$$

Puisque H est simple, il ne contient aucune boucle et donc, $f^{-1}(y)$ est formé de sommets indépendants

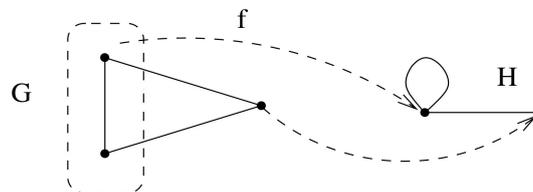


FIGURE I.54 – Si H n'est pas simple.

Par conséquent, s'il existe un homomorphisme de G vers un graphe simple à n sommets (comme K_n par exemple), alors G est n -colorable ($\chi(G) \leq n$). Réciproquement, si G est n -colorable, alors l'application qui envoie les sommets de G d'une même couleur sur un sommet de K_n est un homomorphisme. \square

Le lemme suivant est trivial :

Lemme I.1.22. *Soit G un graphe*

- ▶ G est un stable si et seulement si $\chi(G) = 1$.
- ▶ G est un stable si et seulement si $\omega(G) = 1$.
- ▶ G est une clique si et seulement si $\chi(G) = n$.
- ▶ G est une clique si et seulement si $\omega(G) = n$.
- ▶ G est biparti si et seulement si $\chi(G) \leq 2$.

Démonstration. C'est immédiat. \square

Le triangle, ainsi que tous les cycles impairs, sont clairement 3-colorables. En revanche, ils ne sont pas 2-colorables parce qu'ils ne sont pas bipartis. Leur nombre chromatique vaut donc 3 : ils sont 3-chromatiques. Un graphe 4-chromatique connu sous le nom de *graphe de Hajós* est représenté figure I.55. Le graphe complet K_n est de nombre chromatique n car deux sommets ne peuvent pas recevoir la même couleur. Plus généralement, tout graphe G vérifie l'inégalité

$$\chi(G) \geq \frac{n}{\alpha(G)} \quad (\text{I.1})$$

car chaque classe de couleur est un stable, et de ce fait comprend au plus α sommets.

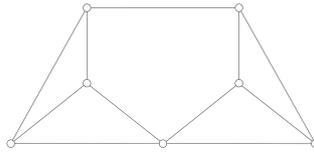


FIGURE I.55 – Le graphe de Hajós : un graphe 4-chromatique.

Des problèmes de coloration apparaissent naturellement dans beaucoup de situations pratiques où il est question de répartir les objets d'un ensemble donné en groupes de telle sorte que les membres de chaque groupe soient mutuellement compatibles suivant certains critères. Nous donnons ici un exemple. D'autres viendront très certainement à l'esprit du lecteur.

Exemple I.1.11.3 (Planification d'examens). Les étudiants d'une université ont des examens annuels dans tous les cours auxquels ils s'inscrivent. Naturellement, les examens de deux cours différents ne peuvent avoir lieu en même temps s'il y a des étudiants inscrits à ces deux cours. Comment doit-on organiser les examens pour qu'il y ait le moins de sessions possibles ? Pour trouver un tel planning, considérons le graphe de G dont l'ensemble de sommets est l'ensemble de tous les cours, deux cours étant reliés par une arête s'il font l'objet d'un conflit. Clairement, les stables de G correspondent aux groupes de cours sans conflit. Ainsi le nombre minimum de sessions requis est le nombre chromatique de G .

Si H est un sous-graphe de G et si G est k -colorable, alors H l'est aussi. Ainsi $\chi(G) \geq \chi(H)$. En particulier, si G contient une copie du graphe complet K_r , alors $\chi(G) \geq r$. Par conséquent, pour tout graphe G ,

$$\chi(G) \geq \omega(G) \quad (\text{I.2})$$

Les cycles impairs de longueur cinq ou plus, pour lesquels $\omega = 2$ et $\chi = 3$, montre que cette borne sur le nombre chromatique n'est pas toujours atteinte. Plus surprenant, comme nous le montrons à la suite de cette section, il existe des graphes de maille et de nombre chromatique arbitrairement grands.

Quand un sommet v va être coloré, le nombre de ses voisins déjà colorés n'est clairement pas plus grand que son degré $\deg(v)$, et donc que le degré maximum, Δ . Ainsi une des couleurs $1, 2, \dots, \Delta + 1$ sera forcément disponible pour v . Nous en concluons que, pour tout graphe G ,

$$\chi(G) \leq \Delta + 1 \quad (\text{I.3})$$

Autrement dit, tout graphe k -chromatique a un sommet de degré au moins $k - 1$. En fait, tout graphe k -chromatique a au moins k sommets de degré au moins $k - 1$.

La borne (I.3) sur le nombre chromatique ne donne pas la moindre information sur le nombre de sommets de chaque couleur dans une $(\Delta + 1)$ -coloration. Hajnal et Szemerédi (1970)[77] ont considérablement renforcé l'inégalité (I.3), en montrant que tout graphe G admet une $(\Delta + 1)$ -coloration *équilibrée*, c'est-à-dire, telle que les nombres de sommets de les différentes couleurs diffèrent d'au plus un. Une preuve plus courte de ce résultat a été donnée par Kierstead et Kostochka (2008)[101].

Bien que la borne (I.3) sur le nombre chromatique soit la meilleure possible, car atteinte par les cycles impairs et les graphes complets, Brooks (1941)[22] a montré que ces derniers sont les seuls graphes connexes pour lesquels il y a égalité.

Théorème I.1.23 (Brooks (1941)). *Si G est un graphe connexe, qui n'est ni un cycle impair ni un graphe complet, alors $\chi(G) \leq \Delta$.*

Lorsqu'on traite de colorations, il est utile d'étudier les propriétés d'une classe de graphes particuliers appelés graphes critiques (pour la coloration).

Définition I.1.11.4. On dit qu'un graphe G est *critique pour la coloration* si $\chi(H) < \chi(G)$ pour tout sous-graphe propre H de G . Dirac (1951) [54] fut le premier à étudier de tels graphes. Dans cette section, par simplicité, nous abrégeons le terme "critique pour la coloration" en "critique". Un graphe k -critique est un graphe qui est k -chromatique et critique. Observons qu'un sous-graphe k -chromatique minimal d'un graphe k -chromatique est k -critique, donc tout graphe k -chromatique a un sous-graphe k -critique.

Exemple I.1.11.5. Le *graphe de Grötzsch*, un graphe 4-critique découvert indépendamment par Grötzsch (1985/1959)[74] et Mycielski (1955)[127] est représenté figure I.56.

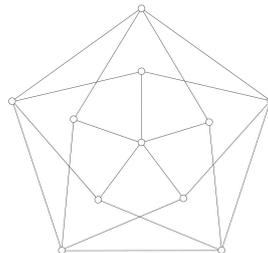


FIGURE I.56 – Le graphe de Grötzsch : un graphe 4-critique.

Théorème I.1.24. *Si G est k -critique, alors $\delta(G) \geq k - 1$.*

Démonstration. Par l'absurde. Soit G un graphe k -critique tel que $\delta(G) < k - 1$, est soit v un sommet de degré $\delta(G)$ dans G . Comme G est k -critique, $G - v$ est $(k - 1)$ -colorable. Soit $\{V_1, V_2, \dots, V_{k-1}\}$ une $(k - 1)$ -coloration de $G - v$. Le sommet v est adjacent à $\delta(G) < k - 1$ sommets. Par conséquent, il est forcément non-adjacent dans G à tous les sommets d'un certain V_j . Mais alors $\{V_1, V_2, \dots, V_j \cup \{v\}, \dots, V_{k-1}\}$ est une $(k - 1)$ -coloration de G , une contradiction. Ainsi $\delta(G) \geq k - 1$. \square

Le théorème I.1.24 implique que tout graphe k -chromatique a au moins k sommets de degré au moins $k - 1$, comme nous l'avons déjà observé.

Comme nous l'avons observé dans la partie précédente, un graphe qui contient une grande clique est nécessairement de grand nombre chromatique. D'autre part, et de manière quelque peu surprenante, il existe des graphes sans triangle de nombre chromatique arbitrairement grand. Les premières constructions de tels graphes ont été données par (Blanche) Descartes (voir Ungar et Descartes (1954)[157]). Plus tard, Erdős (1961)[59] a utilisé la méthode probabiliste pour démontrer l'existence de graphes de maille et nombre chromatique arbitrairement grands.

Théorème I.1.25. *Pour tout entier strictement positif k , il existe un graphe de maille au moins k et de nombre chromatique au moins k .*

Des constructions récursives de tels graphes ont été données par Lovász (1968)[111] ainsi que par Nešetřil et Rödl (1979)[128]. Nous décrivons ici une construction plus simple de graphes sans triangle k -chromatiques, due à Mycielski (1955)[127].

Théorème I.1.26. *Pour tout entier k strictement positif, il existe un graphe sans triangle k -chromatique.*

Démonstration. Pour $k = 1$ et $k = 2$, les graphes K_1 et K_2 ont la propriété requise. Nous procédons par récurrence sur k . Supposons que nous ayons déjà construit un graphe sans triangle G_k de nombre chromatique $k \geq 2$. Soient v_1, v_2, \dots, v_n les sommets de G_k . Formons le graphe G_{k+1} à partir de G_k comme suit : nous ajoutons $n + 1$ nouveaux sommets u_1, u_2, \dots, u_n, v , et ensuite, pour $1 \leq i \leq n$, nous relierons u_i aux voisins de v_i dans G_k , ainsi qu'à v . Par exemple, si $G_2 := K_2$, alors G_3 est le 5-cycle et G_4 le graphe de Grötzsch.

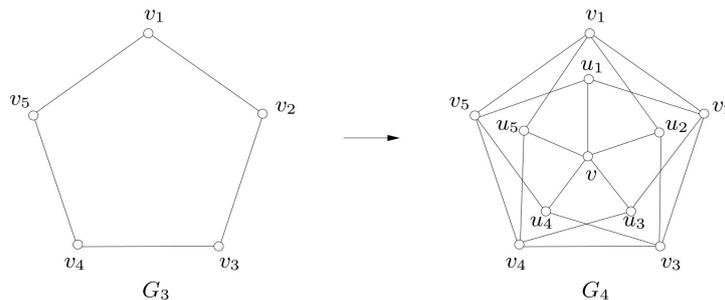


FIGURE I.57 – Construction de Mycielski.

Le graphe G_{k+1} n'a pas de triangles. En effet, comme u_1, u_2, \dots, u_n est un stable dans G_{k+1} , aucun triangle ne peut contenir plus d'un u_i ; et si $u_i v_j v_k u_i$ était un triangle dans G_{k+1} , alors $v_i v_j v_k v_i$ serait un triangle dans G_k , contrairement à notre hypothèse.

Nous montrons maintenant que G_{k+1} est $(k + 1)$ -chromatique. Notons, d'abord, que G_{k+1} est $(k + 1)$ -colorable, car toute k -coloration de G_k peut être étendue en une $(k + 1)$ -coloration de G_{k+1} en donnant la couleur de v_i à u_i , $1 \leq i \leq n$, et en affectant une nouvelle couleur à v . Par conséquent, il reste à montrer que G_{k+1} n'est pas k -colorable.

Supposons que G_{k+1} ait une k -coloration. La restriction de cette coloration à $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, est une k -coloration du graphe k -chromatique G_k . Pour chaque couleur j , il existe un sommet v_i de couleur j qui adjacent dans G_k à des sommets de toutes les autres couleurs. Comme u_i a exactement les mêmes voisins dans G_k que v_i , le sommets u_i doit également être de couleur j . Donc, chacune des k couleurs apparaît sur au moins un des sommets u_i . Mais aucune couleur n'est alors disponible pour le sommet v , une contradiction. Nous en déduisons que G_{k+1} est bien $(k + 1)$ -chromatique, et le théorème suit par récurrence. \square

Jusqu'à présent, nous nous sommes intéressés à la possibilité de colorier ou non un graphe donnée à l'aide de k -couleurs. La question suivante serait de déterminer le nombre de façons distinctes de réaliser un tel coloriage. Cette approche a été développée par Birkhoff (1912/13)[17] comme un moyen possible pour attaquer la Conjecture des Quatre Couleurs.

Définition I.1.11.6. Soit $G = (V, E)$ un multi-graphe non orienté ayant n sommets. On dénote par $m_{k,G}$, le nombre de coloriages propres distincts³¹ de G utilisant **exactement** k couleurs et par $z^{\underline{k}}$, le polynôme³² en $z \in \mathbb{C}$ de degré k

Deux colorations sont considérées comme distinctes si un des sommets reçoit des couleurs différentes dans les deux colorations.

$$z^{\underline{k}} = z(z - 1) \cdots (z - k + 1).$$

Avec ces notations, le *polynôme chromatique* de G est donné par

$$\begin{aligned} \pi_G(z) &= \sum_{i=1}^n \frac{m_{i,G}}{i!} z^{\underline{i}} \\ &= \frac{m_{1,G}}{1!} z + \frac{m_{2,G}}{2!} z(z - 1) + \frac{m_{3,G}}{3!} z(z - 1)(z - 2) + \cdots \\ &\quad \cdots + \frac{m_{n,G}}{n!} z(z - 1) \cdots (z - n + 1). \end{aligned}$$

Il s'agit d'un polynôme de degré n en la variable z .

31. On suppose que les sommets de G sont énumérés une fois pour toutes : $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ et que les k couleurs sont données par $\{1, \dots, k\}$. On énumère donc les fonctions de coloriage $c : V \rightarrow \Sigma$ qui sont propres.

32. Il s'agit d'une notation classique "falling power" que l'on retrouve chez Graham, Knuth et Patashnik. Remarquez que $1, z, \dots, z^{\underline{k}}$ forment une base de l'ensemble des polynômes de degré au plus k .

Remarque I.1.11.7. La quantité

$$\frac{m_{k,G}}{k!}$$

est le nombre de partitions de V en k sous-ensembles (disjoints et non vides) donnant lieu à tous les coloriage propres possibles de G utilisant exactement k couleurs. En fait, cette quantité équivaut au *nombre de partitions de V en k sous-ensembles (disjoints et non vides) de sommets indépendants*.

Exemple I.1.11.8. Soit le graphe de la figure I.58. Considérons les partitions de V en k sous-ensembles (disjoints et non vides) donnant lieu à tous les coloriage propres possibles de G utilisant exactement k couleurs, $k = 2, 3$. Pour $k = 2$, on a la partition $V = \{v_1, v_3\} \cup \{v_2, v_4\}$ et les coloriage

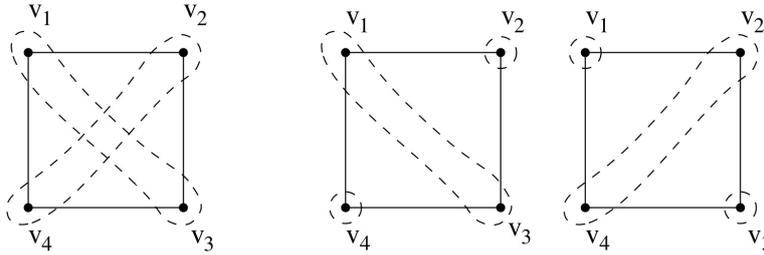


FIGURE I.58 – Illustration de $m_{k,G}$.

$c_1 : v_1, v_3 \mapsto 1, v_2, v_4 \mapsto 2$ et $c_2 : v_1, v_3 \mapsto 2, v_2, v_4 \mapsto 1$. Ainsi, $m_{2,G} = 2$ et $m_{2,G}/2! = 1$ correspond bien à la seule partition convenable de V . Pour $k = 3$, on a deux partitions possibles de V en $\{v_1, v_3\} \cup \{v_2\} \cup \{v_4\}$ ou bien $\{v_1\} \cup \{v_3\} \cup \{v_2, v_4\}$. Chaque partition donne lieu à $3!$ coloriage propres distincts de G . Ainsi, $m_{3,G} = 12$ et $m_{3,G}/3! = 2$. Pour $k = 4$, il y a une seule partition de V en quatre singletons donc $m_{4,G}/4! = 1$. Par conséquent, le polynôme chromatique du graphe est donné par

$$\underbrace{m_{1,G}}_{=0} z + \underbrace{\frac{m_{2,G}}{2!}}_{=1} z(z-1) + \underbrace{\frac{m_{3,G}}{3!}}_{=2} z(z-1)(z-2) + \underbrace{\frac{m_{4,G}}{4!}}_{=1} z(z-1)(z-2)(z-3)$$

ou encore

$$\pi_G(z) = z^4 - 4z^3 + 6z^2 - 3z.$$

Exemple I.1.11.9. Pour le graphe complet K_n , les seuls ensembles de sommets indépendants sont les singletons. Ainsi, pour tout $k < n$,

$$\frac{m_{k,K_n}}{k!} = 0 \quad \text{et} \quad \pi_{K_n}(z) = z^n.$$

Remarque I.1.11.10. Quelques remarques immédiates.

- Si G possède n sommets, alors $m_{n,G} = n!$ car on assigne une couleur par sommet. On en déduit que le polynôme chromatique est monique.
- Si G n'est pas connexe mais possède 2 composantes G_1 et G_2 , alors

$$\pi_G(z) = \pi_{G_1}(z) \cdot \pi_{G_2}(z)$$

Cela résulte du fait que les sommets de G_1 peuvent être colorés indépendamment de ceux de G_2 .

- Il est clair que $\pi_G(0) = 0$ pour tout graphe G .
- Il est impossible de colorier un graphe non vide avec aucune couleur.

Proposition I.1.27. Soit $k \in \mathbb{N}$. Le nombre $\pi_G(k)$ est le nombre de coloriage propres de G utilisant au plus k couleurs.

Exemple I.1.11.11. Avec le graphe de la figure I.58, si on calcule $\pi_G(4)$, on trouve $\pi_G(4) = 84$ et donc, il y est possible de colorier proprement G avec au plus 4 couleurs de 84 façons distinctes.

Démonstration. Tout d’abord, il est inutile de considérer dans l’expression de $\pi_G(k)$, les termes d’exposant $> k$. En effet, si $i > k$, alors z^i évalué en k est nul. Ainsi, on a

$$\pi_G(k) = \sum_{i=1}^k \frac{m_{i,G}}{i!} k^i.$$

Ensuite, pour tout $i \leq k$, on dispose de $\frac{m_{i,G}}{i!}$ partitions de V en i sous-ensembles de sommets indépendants. Considérons ces partitions et autorisons-nous cette fois à choisir i couleurs parmi k , pour chaque partition $C_1 \cup \dots \cup C_i$ de V , à C_1 , on peut assigner k couleurs, pour C_2 , on a $k - 1$ choix possibles, ... et pour C_i , on a $k - i + 1$ choix possibles. Ainsi, chacune des $\frac{m_{i,G}}{i!}$ partitions de V en i sous-ensembles donnent lieu à k^i coloriage utilisant exactement i des k couleurs disponibles. La conclusion en découle. \square

Exemple I.1.11.12. En continuant l’exemple précédent, le nombre de coloriage du graphe repris à la figure I.58 utilisant au plus 3 couleurs vaut

$$\pi_G(3) = \underbrace{m_{1,G}}_{=0} + \frac{m_{2,G}}{2!} 3 \cdot 2 + \frac{m_{3,G}}{3!} 3 \cdot 2 \cdot 1 = 0 + 6 + 2 \cdot 6 = 18.$$

Ces coloriage sont donnés par

v_1	v_2	v_3	v_4
1	2	1	2
2	1	2	1
1	3	1	3
3	1	3	1
2	3	2	3
3	2	3	2

v_1	v_2	v_3	v_4
1	2	1	3
1	3	1	2
2	1	2	3
2	3	2	1
3	1	3	2
3	2	3	1

v_1	v_2	v_3	v_4
2	1	3	1
3	1	2	1
1	2	3	2
3	2	1	2
1	3	2	3
2	3	1	3

Corollaire I.1.28. Le nombre chromatique de G est le plus petit entier k tel que $\pi_G(k) \neq 0$.

Ainsi la détermination du nombre chromatique d’un graphe à n sommets peut se ramener à l’estimation des zéros d’un polynôme de degré n . Par exemple, avec le graphe repris à la figure I.58, on a $\pi_G(1) = 0$ et $\pi_G(2) \neq 0$.

Définissons tout d'abord une opération de contraction d'un sommet. Celle-ci va nous permettre de donner une formule récursive pour obtenir le polynôme chromatique d'un graphe.

Définition I.1.11.13. Soient $G = (V, E)$ un multi-graphe (non orienté) et e une arête de G . Le graphe obtenu en supprimant l'arête e et en identifiant les extrémités de celle-ci est appelé *contraction* de G (pour l'arête e) et se note $G \cdot e$.

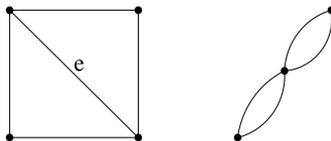


FIGURE I.59 – Contraction d'un graphe G en $G \cdot e$.

Si G est connexe et si e est une arête qui n'est pas une boucle, il en va de même de sa contraction $G \cdot e$.

Proposition I.1.29. Si e est une arête de G (qui n'est pas une boucle), alors le polynôme chromatique satisfait la relation

$$\pi_G(z) = \pi_{G-e}(z) - \pi_{G \cdot e}(z). \quad (\text{I.4})$$

Le polynôme $\pi_G(z)$ est de degré n , à coefficients entiers qui alternent en signe, de terme dominant z^n , et de terme constant zéro.

Démonstration. Si on considère tous les coloriage propres de $G - e$ avec exactement k couleurs. Il y en a de deux types : ceux pour lesquels on assigne aux extrémités de e deux couleurs distinctes (resp. une même couleur). Ceux du premier type sont en bijection avec les coloriage propres de G utilisant k couleurs. Pour conclure, on remarque que ceux du seconde type sont en bijection avec les coloriage propres de $G \cdot e$ utilisant k couleurs. \square

Corollaire I.1.30. Le polynôme chromatique d'un arbre T à n sommets vaut

$$\pi_T(z) = z(z-1)^{n-1}.$$

Démonstration. On procède par récurrence sur n . Le cas $n = 1$ est immédiat. Supposons le résultat acquis pour $n \geq 1$ et vérifions-le pour $n + 1$. Si un arbre possède $n + 1$ sommets, il a au moins un sommet de degré 1 et soit e , l'arête incidente à ce sommet. Ainsi, $T - e$ possède deux composantes : un sommet isolé dont le polynôme chromatique vaut z et un arbre à n sommets (qui n'est autre que la contraction $T \cdot e$) de polynôme chromatique $z(z-1)^{n-1}$ (par hypothèse de récurrence). On en conclut que

$$\pi_{T-e}(z) = z \pi_{T \cdot e}(z).$$

Par le proposition précédente,

$$\pi_T(z) = \pi_{T-e}(z) - \pi_{T \cdot e}(z) = (z-1) \pi_{T \cdot e}(z) = z(z-1)^n. \quad \square$$

$G \cdot e$

$G \cdot e$ contient une arête et un sommet de moins que G .

La formule I.4 fournit un moyen de calculer les polynômes chromatiques récursivement. Elle peut s'utiliser de deux manières :

- i) par applications successives de la récurrence $\pi_G(z) = \pi_{G-e}(z) - \pi_{G \cdot e}(z)$, exprimant ainsi $\pi_G(z)$ comme une combinaison linéaire à coefficients entiers des polynômes chromatiques de graphes vides,
- ii) par applications successives de la récurrence $\pi_{G-e}(z) = \pi_G(z) + \pi_{G \cdot e}(z)$, exprimant ainsi $\pi_G(z)$ comme une combinaison linéaire à coefficients entiers des polynômes chromatiques de graphes complets.

La méthode (i) est plus adaptée aux graphes ayant peu d'arêtes, alors que (ii) s'applique plus efficacement aux graphes ayant beaucoup d'arêtes.

Le calcul de polynômes chromatiques peut parfois être facilité par l'utilisation d'un certain nombre de formules reliant le polynôme chromatique d'un graphe aux polynômes chromatiques de certains sous-graphes. Cependant, aucun algorithme polynomial n'est connu pour trouver le polynôme chromatique d'un graphe.

Un tel algorithme fournirait clairement un algorithme polynomial pour calculer le nombre chromatique.

Bien que de nombreuses propriétés des polynômes chromatiques aient été découvertes, personne n'a pour l'instant découvert quels polynômes sont chromatiques. Il a été conjecturé par Read (1968)[141] que la suite des coefficients de n'importe quel polynôme chromatique doit d'abord augmenter en valeur absolue et ensuite diminuer ; autrement dit, aucun coefficient n'est encadré par deux coefficients ayant une valeur absolue plus grande que la sienne. Mais même si elle était vraie, cette propriété et celles listées dans la Proposition I.1.29 ne serait pas suffisantes pour caractériser les polynômes chromatiques. Par exemple, le polynôme $x^4 - 3x^3 + 3x^2$ satisfait toutes ces propriétés mais n'est pas le polynôme chromatique d'aucun graphe.

Dans ce qui précède, nous avons étudié la coloration des sommets d'un graphe. Nous nous intéressons maintenant au concept de coloration des arêtes. C'est en quelque sorte la question "duale" de la coloration des sommets ; mais on va voir qu'elle se traite très différemment.

Définition I.1.11.14. Une *k-arête-coloration* d'un graphe $G = (V, E)$ est une application $c : E \rightarrow \Sigma$, où Σ est un ensemble de k couleurs. Autrement dit, c'est une affectation de k couleurs aux arêtes de G . Habituellement, l'ensemble de couleurs Σ est $\{1, 2, \dots, k\}$. Une arête-coloration est *propre* si les arêtes adjacentes reçoivent des couleurs distinctes.

Un graphe est *k-arête-colorable* s'il a une *k-arête-coloration*. Clairement, si G est *k-arête-colorable*, G est aussi *l-arête-colorable* pour tout $l > k$; de plus, tout graphe G est *m-arête-colorable*³³. L'*indice chromatique*, $\chi'(G)$, d'un graphe G est le plus petit k pour lequel G est *k-arête-colorable*, et G est *k-arête-chromatique* si $\chi'(G) = k$.

33. La *taille* d'un graphe est son nombre d'arêtes. Habituellement, on désigne par m ce paramètre, c'est-à-dire $|E| = m$.

Remarque I.1.11.15. Une k -arête-coloration peut se voir comme une partition $\{E_1, E_2, \dots, E_k\}$ de E , où E_i désigne l'ensemble (possiblement vide) des arêtes de couleur i . Ainsi, une k -arête-coloration propre est une k -arête-coloration $\{M_1, M_2, \dots, M_k\}$ pour laquelle chaque sous-ensemble M_i est un couplage³⁴. Comme il ne s'agira ici que d'arête-colorations propres, tous les graphes sont supposés sans boucle, et nous diront simplement 'arête-coloration' pour arête-coloration propre. Le graphe de la figure I.60 a pour 4-arête-coloration $\{\{a, g\}, \{b, e\}, \{c, f\}, \{d\}\}$

Comme les boucles sont adjacentes à elle-mêmes, seuls les graphes sans boucle admettent des arête-colorations propres.

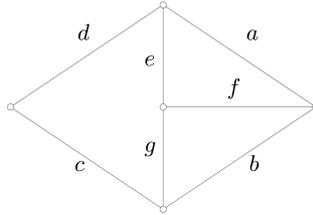


FIGURE I.60 – Un graphe 4-arête-chromatique.

Il est facile de vérifier que le graphe de la figure I.60 n'est pas 3-arête-colorable. Ce graphe est donc 4-arête-chromatique.

Dans une arête-coloration, les arêtes incidentes à un même sommet doivent évidemment toutes avoir des couleurs différentes. Cette observation donne la borne inférieure

$$\chi' \geq \Delta \quad (\text{I.5})$$

Des problèmes d'arête-coloration apparaissent en pratique de la même manière que les problèmes de coloration de sommets. Voici un exemple typique.

Exemple I.1.11.16 (Problème d'Emploi du Temps). Dans une école, il y a m professeurs x_1, x_2, \dots, x_m , et n classes y_1, y_2, \dots, y_n . Étant donné que le professeur x_i doit faire cours à la classe y_i pendant p_{ij} heures, planifier un emploi du temps complet dans le plus petit nombre d'heures.

Pour résoudre ce problème, nous représentons les services d'enseignement par un graphe biparti $H[V_1, V_2]$, où $V_1 = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$, $V_2 = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$, et les sommets x_i et y_i sont reliés par p_{ij} arêtes. Il est facile de voir que le problème posé revient à trouver une arête-coloration de H avec le plus petit nombre de couleurs possible. Ceci peut se résoudre au moyen d'un algorithme polynomial, que nous décrivons ci-dessous. Pour plus de détails sur le problème d'Emploi du Temps, voir Bondy et Murty (1976)[20].

Avec l'exemple de la figure I.60, nous voyons que l'inégalité (I.5) peut être stricte. Cependant, comme nous allons tout de suite le montrer, il y a toujours égalité dans (I.5) quand G est biparti. Ultérieurement, nous donnons des bornes supérieures sur χ' pour d'autres classes de graphes. Nous montrons, en particulier, que si G est un graphe simple, alors $\chi' \leq \Delta + 1$. La preuve que

34. Un *couplage* dans un graphe est un ensemble de liens non-adjacents

nous présentons est constructive, et montre comment, dans les conditions appropriées, une k -arête coloration d'un graphe G peut être obtenue en colorant les arêtes une à une, quitte à réajuster le coloration en chemin si nécessaire. Nous supposons que nous avons déjà obtenu une k -arête-coloration d'un certain sous-graphe H de G et expliquons comment l'étendre en une k -arête-coloration de G . Les notions suivantes sont fondamentales pour notre approche.

Définition I.1.11.17. Soit H un sous-graphe couvrant d'un graphe G et soit $\mathcal{C} := \{M_1, M_2, \dots, M_k\}$ une k -arête-coloration de H . Une couleur i est *représentée* au sommet v si elle est attribuée à une arête de H incidente à v ; dans le cas contraire, elle est *disponible* en v . Une couleur est *disponible* pour une arête de $E(G) \setminus E(H)$ si elle est disponible aux deux extrémités de l'arête. Donc, si une arête e n'est pas colorée, n'importe quelle couleur disponible pour e peut lui être attribuée afin d'étendre \mathcal{C} en une k -arête-coloration de $H + e$.

Soient i et j deux couleurs distinctes, et posons $H_{ij} := H[M_i \cup M_j]$. Comme M_i et M_j sont des couplages disjoints, chaque composante de H_{ij} est soit un cycle pair, soit un chemin; nous appelons les composantes de H_{ij} qui sont des chemins des *ij-chemins*. Ils sont un des principaux outils dans les démonstrations des résultats ci-dessous consiste à choisir soigneusement des couleurs i et j et à échanger les couleurs sur un ij -chemin bien choisi de manière à obtenir une nouvelle k -arête-coloration pour laquelle il y a une couleur disponible pour une arête de $E(G) \setminus E(H)$. La preuve du théorème suivant est une illustration simple de cette technique.

Théorème I.1.31 (König (1916) [102]). *Si G est biparti, alors $\chi' = \Delta$.*

Démonstration. Par récurrence sur m . Soit $e = \{u, v\}$ une arête de G . Nous supposons que $H = G - e$ a une Δ -arête-coloration $\{M_1, M_2, \dots, M_\Delta\}$. Si une couleur est disponible pour e , celle-ci peut être attribuée à e pour donner une Δ -arête-coloration de G . Nous pouvons donc supposer que chacune des Δ couleurs est représentée soit en u soit en v . Comme le degré de u dans $G - e$ est au plus $\Delta - 1$, au moins une couleur i est disponible en u , et donc représentée en v . De même, au moins une couleur j est disponible en v et représentée en u . Considérons le sous-graphe H_{ij} . Comme u est de degré 1 dans ce sous-graphe, la composante contenant u est un ij -chemin P . Ce chemin ne termine pas en v . Car s'il le faisait, il serait de longueur paire, commençant par une arête colorée i et finissant avec une arête colorée j , et $P + e$ serait un cycle de longueur impaire dans G , contredisant l'hypothèse que G est biparti. En échangeant les couleurs sur P , nous obtenons une nouvelle Δ -arête-coloration de H pour laquelle la couleur i est disponible à la fois en u et v . Attribuant la couleur i à e , nous obtenons une Δ -arête-coloration de G . \square

Il est facile d'extraire de la preuve précédente un algorithme polynomial pour trouver une Δ -arête-coloration d'un graphe biparti G .

Comme nous l'avons déjà observé, si G n'est pas biparti, il n'est pas toujours vrai que $\chi' = \Delta$. Un théorème important dû à Vizing (1964)[158], et indépendamment Gupta (1966)[75], affirme que pour tout graphe simple G , $\chi' = \Delta$ ou $\chi' = \Delta + 1$.

Dans une démonstration par récurrence sur m du Théorème de Vizing, on peut supposer (comme dans la preuve du Théorème I.1.31) qu'il y a une $(\Delta + 1)$ -arête-coloration de $G - e$, pour $e \in E$. Pour terminer la preuve, il suffit de montrer comment une $(\Delta + 1)$ -arête-coloration de G peut s'obtenir à partir de cette $(\Delta + 1)$ -arête-coloration de $G - e$. Avec d'autres applications en tête, nous considérons le problème plus général consistant à élaborer une k -arête-coloration de G à partir d'une k -arête-coloration de $G - e$, pour un entier k supérieur ou égal à Δ .

Lemme I.1.32. *Soit G un graphe simple, v un sommet de G , e une arête de G incidente à v , et k un entier, $k \geq \Delta$. Supposons que $G - e$ ait une k -arête-coloration c pour laquelle tout voisin de v a au moins une couleur disponible. Alors G est k -arête-colorable.*

Démonstration. Nous ne ferons pas cette preuve. Pour une preuve de ce lemme, voir Bondy et Murty [21] page 488³⁵. \square

Comme l'hypothèse du Lemme I.1.32 est vérifiée quand $k = \Delta + 1$, le Théorème de Vizing vient directement par récurrence sur m . De plus, une $(\Delta + 1)$ -arête-coloration de tout graphe simple G peut être trouvée, en ajoutant les arêtes une à une, en temps polynomial.

Théorème I.1.33 (Vizing (1964)). *Pour tout graphe simple G ,*

$$\chi' \leq \Delta + 1$$

Le lecteur observateur aura remarqué que la borne sur l'indice chromatique du Théorème de Vizing (I.1.33) ressemble étrangement à la borne (I.3) sur le nombre chromatique.

Il y a une généralisation naturelle du théorème I.1.33 aux multi-graphes sans boucles. Considérons un tel multi-graphe G . Pour des sommets u et v de G , on note $\mu(u, v)$ le nombre d'arêtes parallèles reliant u et v . La *multiplicité* de G , noté par $\mu(G)$, est la valeur maximum de μ , prise sur toutes les paires de sommets de G . Vizing (1964)[158] a étendu son théorème comme suit.

Théorème I.1.34 (Vizing (1964)). *Pour tout multi-graphe G ,*

$$\chi' \leq \Delta + \mu$$

Ce théorème plus général a été établi en adaptant la preuve du Théorème I.1.33.

35. Cette numérotation est celle de la version française traduite de l'anglais par F. HAVET

Par exemple, si G est un graphe simple dont les sommets de degré maximum Δ induisent une forêt, alors $\chi' = \Delta$

Le graphe G dessiné Figure I.61 montre que ce théorème I.1.34 est le meilleur possible pour toute valeur de μ . Ici $\Delta = 2\mu$ et, les arêtes étant deux à deux adjacentes, $\chi' = m = 3\mu = \Delta + \mu$.

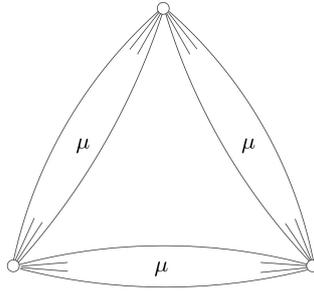


FIGURE I.61 – Un graphe G tel que $\chi' = \Delta + \mu$.

Revenons aux graphes simples. Le théorème I.1.33 implique que l'indice chromatique d'un graphe simple G est égal à Δ ou $\Delta + 1$. Les graphes simples G pour lesquels $\chi' = \Delta$ sont dits être de *Classe 1*, et les autres de *Classe 2*. Le problème de décider de quelle classe est un graphe est \mathcal{NP} -dur (Holyer (1981)[92] et Leven et Galil (1983)[109]). Il est par conséquent utile d'avoir des critères simples pour être de Classe 1 ou de Classe 2. Par exemple, à l'aide de Lemme I.1.32 on peut montrer qu'un graphe G est de Classe 1 si ses sommets de degré Δ induisent une forêt. Un graphe simple G est de Classe 2 s'il est *surabondant* (i.e., si $m > \lfloor n/2 \rfloor \Delta$). D'autres exemples sont fournis par la proposition suivante.

Proposition I.1.35. *Soit $n \geq 2$,*

i) Si n est impair, K_n est de Classe 2 : $\chi'(K_n) = n = \Delta(K_n) + 1$.

ii) Si n est pair, K_n est de Classe 1 : $\chi'(K_n) = n - 1 = \Delta(K_n)$.

Démonstration.

i) Supposons n impair. K_n n'est pas $(n - 1)$ -arête-colorable : le nombre maximum de paires de sommets ayant une intersection vide est égal à $\frac{n-1}{2}$, donc le nombre maximum d'arêtes de la même couleur est $\frac{n-1}{2}$, puis

$$|E(K_n)| = \binom{n(n-1)}{2} \leq \frac{n-1}{2} \chi'(K_n),$$

d'où $\chi'(K_n) \geq n$, puis $\chi'(K_n) = n$ par le Théorème de Vizing I.1.33. On en déduit que chaque couleur est incidente à exactement $n - 1$ sommets de K_n et donc qu'il y a une bijection entre les n couleurs de cette coloration des arêtes correspondant à $\chi'(K_n)$ et les n sommets de K_n .

ii) Supposons n pair. On colorie le sous-graphe K_{n-1} selon i) avec $n - 1$ couleurs; le sommet restant v est adjacent aux $n - 1$ sommets de K_{n-1} ; chacun de ces sommets étant de degré $n - 2$ dans K_{n-1} , il manque une couleur incidente à ce sommet; cette couleur manquante est différente pour tous les sommets de K_{n-1} , on l'utilise pour toutes les arêtes entre v et les sommets de K_{n-1} . \square

I.1.12 Systèmes d'ensembles

Un *système d'ensembles* est un couple (V, \mathcal{F}) , où V est l'ensemble des éléments et \mathcal{F} une famille de sous-ensembles de V . Notons que lorsque \mathcal{F} est formé de paires d'éléments de V , alors un système d'ensembles (V, \mathcal{F}) est un graphe sans boucle. Ainsi, les systèmes d'ensembles (V, \mathcal{F}) peuvent être vus comme une généralisation des graphes, et sont habituellement appelés *hypergraphes*, particulièrement lorsque l'on cherche à étendre des propriétés de graphes aux systèmes d'ensembles (voir Berge (1973)[9]). Les éléments de V sont alors appelés les *sommets* de l'hypergraphe, et les éléments de \mathcal{F} ses *arêtes* ou *hyperarêtes*. Un hypergraphe est *k-uniforme* si toute arête est un k -ensemble (un ensemble à k éléments). Comme nous le verrons plus loin, les systèmes d'ensembles génèrent principalement deux types de graphes : les graphes d'incidence et les graphes d'intersection.

De nombreux exemples intéressants d'hypergraphes sont fournis par les configurations géométriques.

Définition I.1.12.1. Une *configuration géométrique* (P, \mathcal{L}) est un ensemble fini P d'éléments appelés *points*, et une famille finie \mathcal{L} de sous-ensembles de P appelés *droites*, avec la propriété que toute paire de points est contenue dans au plus une droite.

Deux exemples classiques de configurations géométriques sont le *plan de Fano* et la *configuration de Desargues*. Ces deux configurations sont représentées Figure I.62. Dans les deux cas, chaque droite contient trois points. Ces configurations engendrent des hypergraphes 3-uniformes ; l'*hypergraphe de Fano* a sept sommets et sept arêtes, l'*hypergraphe de Desargues* a dix sommets et dix arêtes.

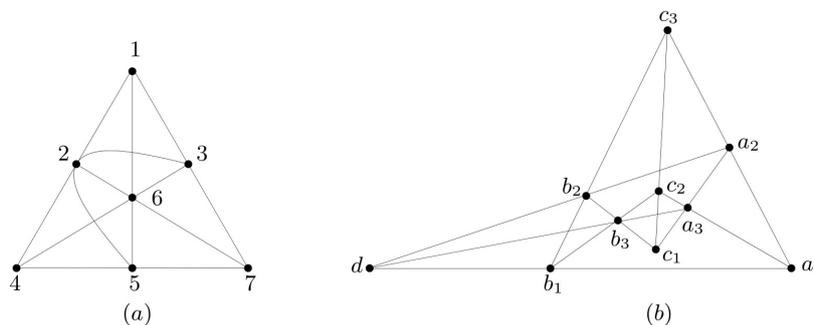


FIGURE I.62 – (a) Le plan de Fano, et (b) la configuration de Desargues.

Le plan de Fano est la plus simple des configurations géométriques d'une famille importante, les *plans projectifs*. La configuration de Desargues provient d'un célèbre théorème en géométrie projective. D'autres exemples de configurations géométriques intéressantes sont données dans Coxeter (1950)[49] et Godsil et Royle (2001)[70].

Graphes d'incidence

Un graphe naturellement associé à un système d'ensembles $H = (V, \mathcal{F})$ est le graphe biparti $G[V, \mathcal{F}]$, dans lequel $v \in V$ et $F \in \mathcal{F}$ sont adjacents si $v \in F$. Ce graphe biparti G est appelé le *graphe d'incidence* du système d'ensembles H , et la matrice d'adjacence bipartie de G est la *matrice d'incidence* de H ; ce sont des alternatives simples pour représenter un système d'ensembles. Les graphes d'incidence de configurations géométriques sont souvent des graphes bipartis intéressants; dans ce contexte, le graphe d'incidence est parfois appelé le *graphe de Levi* de la configuration. Le graphe d'incidence du plan de Fano est représenté Figure I.63. Ce graphe est connu sous le nom de *graphe de Heawood*.

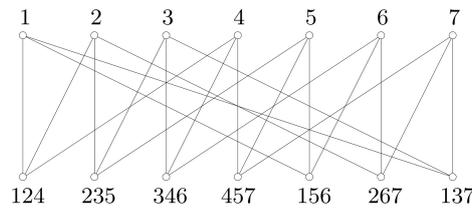


FIGURE I.63 – Le graphe d'incidence du plan de Fano : le graphe de Heawood.

Graphes d'intersection

À tout système d'ensembles (V, \mathcal{F}) , on peut associer son *graphe d'intersection*. C'est le graphe dont l'ensemble de sommets est \mathcal{F} , deux ensembles de \mathcal{F} étant adjacents si leur intersection est non-vidé. Par exemple, quand V est l'ensemble de sommets d'un graphe simple G et $\mathcal{F} := E$, l'ensemble d'arêtes de G , le graphe d'intersection de (V, \mathcal{F}) a pour sommets les arêtes de G , deux arêtes étant adjacentes si elles ont une extrémité en commun. Pour des raisons historique, ce graphe est connu comme le *graphe des lignes* (ou le *graphe adjoint*³⁶) de G et noté $L(G)$. La Figure I.64 montre un graphe et son graphes des lignes.

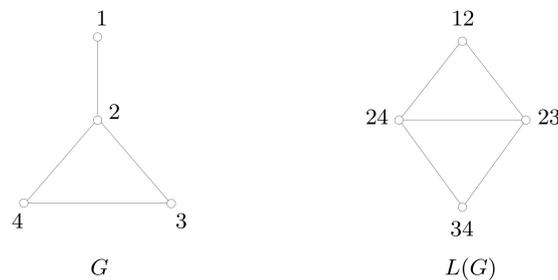


FIGURE I.64 – Un graphe et son graphe des lignes.

On peut montrer que le graphe d'intersection de la configuration de Desargues est isomorphe au graphe des lignes de K_5 , qui à son tour est isomorphe au graphe de Petersen (Figure I.49). Quant au plan de Fano, son

36. En français comme en anglais, il existe de nombreux termes (derivative, edge-to-vertex dual, interchange graph, conjugate, derived graph ou même encore theta-obrazom ...) pour désigner un graphe adjoint.

graphe d'intersection est isomorphe à K_7 car, quelles que soient deux de ses sept lignes, elles ont un point en commun.

La définition du graphe des lignes $L(G)$ peut être étendue à tous les graphes sans boucle comme étant le graphe d'ensemble de sommets E dans lequel deux sommets sont reliés par exactement autant d'arêtes qu'ils ont d'extrémités en commun dans G .

Si $V = \mathbb{R}$ et \mathcal{F} est un ensemble d'intervalles fermés de \mathbb{R} , le graphe d'intersection de (V, \mathcal{F}) est appelé un *graphe d'intervalles*. Des exemples de situations faisant apparaître des graphes d'intervalles se trouvent dans le livre de Berge (1973)[9]. Berge a même écrit un roman policier dont la solution de l'énigme est basée sur la théorie des graphes d'intervalles ; Berge (1995)[13].

Remarque I.1.12.2. Par définition, tout graphe possède un graphe des lignes, mais un graphe n'est pas forcément le graphe des lignes d'un autre graphe. Considérons par exemple le graphe de la figure I.65, appelé *griffe*. Appelons e le sommet central, e_1 , e_2 et e_3 les trois autres sommets, et essayons de reconstruire un graphe G dont la griffe serait le graphe des lignes. Dans G , e est une arête, dont les extrémités peuvent être notées u et v . Comme e est adjacent à e_1 , on peut supposer que ces arêtes ont pour extrémité commune u dans G , de même e et e_2 ont une extrémité commune dans G , mais ce ne peut être u puisque e_1 et e_2 n'ont pas d'extrémité commune, c'est donc v . On voit alors qu'il n'est pas possible que l'arête e_3 soit adjacente à l'arête e sans être adjacente ni à l'arête e_1 ni à l'arête e_2 . La griffe ne peut donc pas être le graphe des lignes d'un graphe.

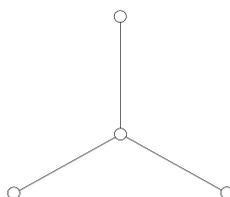


FIGURE I.65 – La griffe.

Exemple I.1.12.3. Considérons les intervalles ouverts $]0, 2[$, $]1, 4[$, $]2, 5[$, $]3, 4[$, $]3, 8[$ et $]6, 8[$. Le graphe d'intervalles correspondant aux intervalles donnés est représenté à la figure I.66. Ces graphes sont parfois utilisés en archéologie ou encore en génétique pour exprimer ou mettre en évidence des

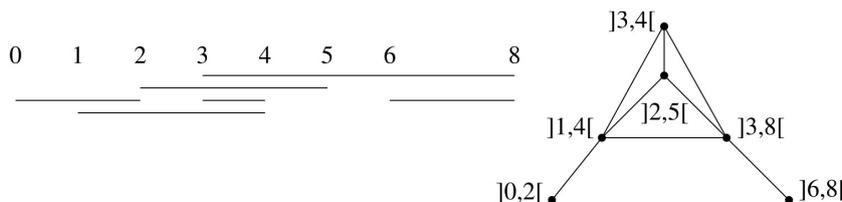


FIGURE I.66 – Graphe d'intervalles.

éléments communs se produisant à travers le temps (par exemple, des caractéristiques communes d'une période de l'histoire ou des mutations génétiques au sein du génome).

I.1.13 Nos propres notations

Dans ce travail, il sera beaucoup question de “chemins”. Or il existe en théorie des graphes plusieurs notions de chemins, variant selon les auteurs (remarque I.1.3.2). Il nous semble qu’aucune notation n’est vraiment standard. Nous présentons ici des notations, que nous espérons claires, intuitives et rigoureuses.

Soit G un graphe. On appelle *chaîne* de G toute suite $C = (v_1, v_2, \dots, v_k)$ de sommets deux à deux distincts de G vérifiant pour tout $1 \leq i \leq k - 1$: $v_i v_{i+1} \in E(G)$. Les arêtes de G de la forme $v_i v_{i+1}$ avec $1 \leq i \leq k - 1$, sont alors appelées les *arêtes de la chaîne*. Les arêtes de G de la forme $v_i v_j$ avec $|i - j| > 1$ sont appelées les *cordes de la chaîne*. Les sommets v_1 et v_k sont appelés les *extrémités de la chaîne*. La *longueur de la chaîne* est égale à son nombre d’arêtes.

On appelle *cycle* de G toute suite $C = (v_1, v_2, \dots, v_k)$ de sommets deux à deux distincts de G vérifiant pour tout $1 \leq i \leq k$: $v_i v_{i+1} \in E(G)$, où l’addition des indices est entendue modulo n . Les arêtes de G de la forme $v_i v_{i+1}$ avec $1 \leq i \leq k$, sont alors appelées les *arêtes du cycle*. Les arêtes de G de la forme $v_i v_j$ avec $|i - j| > 1$ sont appelés les *cordes du cycle*.

On appelle *chemin* tout graphe P dont l’ensemble des sommets peut être ordonné de manière à former une chaîne sans corde de P , et on appelle *trou* tout graphe H avec au moins quatre sommets dont les sommets peuvent être ordonnés de manière à former un cycle sans corde de H . Notons qu’il existe aux plus deux manières d’ordonner les sommets d’un chemin de manière à former une chaîne. Pour ces ordres, les extrémités sont les mêmes, et on les appelle les *les extrémités du chemin*; les autres sommets du chemin sont dits *intérieurs*. On note P^* le sous-chemin de P induit par les sommets intérieurs de P . On note $lg(P)$ la *longueur* de P , c’est-à-dire son nombre d’arêtes. On appelle *antichemin* tout graphe qui est le complémentaire d’un chemin, et *antitrou* tout graphe qui est le complémentaire d’un trou. On dit qu’un trou (ou un antitrou) est *pair* (resp. *impair*) s’il contient un nombre pair d’arêtes (resp. impair). On dit qu’un trou ou un antitrou est *long* s’il contient au moins 5 sommets.

Si $n \geq 1$ est un entier et si $v_1, v_2 \dots v_n$ sont des objets mathématiques quelconques, on note $v_1 - v_2 - \dots - v_n$ le graphe dont les sommets sont v_1, v_2, \dots, v_n et dont l’ensemble des arêtes est $\{v_i v_{i+1}; 1 \leq i \leq n - 1\}$. Le graphe $v_1 - v_2 - \dots - v_n$ est donc un chemin d’extrémités v_1, v_n et de longueur $n - 1$. Si P est un chemin et si u, v sont des sommets de P , alors, on note $u - P - v$ le *sous-chemin* de P d’extrémités u et v , c’est-à-dire l’unique sous-graphe induit de P qui est un chemin d’extrémités u et v . Il est coutumier de noter P_n un chemin avec n sommets, \overline{P}_n un antichemin avec n sommets, C_n un trou avec n sommets et \overline{C}_n un antitrou avec n sommets. On appelle *carré* le trou avec quatre sommets, noté C_4 .

I.2 Les algorithmes

La notion d'algorithme est malaisée à définir formellement, mais cela est tout à fait possible (cf. [135]) : un algorithme est un objet mathématique tout aussi clair qu'un nombre entier ou un graphe. La notion de rapidité d'un algorithme est très importante si l'on envisage des applications pratiques. De plus, depuis des temps très reculés, on sait que la recherche d'algorithmes rapides enrichit globalement les mathématiques pures – nous voulons dire ici pures d'algorithmes. Citons comme exemple l'algorithme d'Euclide pour le calcul de PGCD de deux entiers qui en plus de son intérêt pratique permet de prouver des théorèmes importants (Bezout, théorème de Gauss ...). Toutefois, jusqu'au milieu du XX^e siècle, la notion de rapidité d'un algorithme était vague et ne faisait pas l'objet de recherches pour elle-même. Finalement le développement de la théorie de la complexité algorithmique depuis le milieu des années 1960 a placé la notion de rapidité d'un algorithme au cœur de questions très difficiles et profondes.

I.2.1 Problèmes, algorithmes, complexité

Un *problème* est défini par la donnée d'un objet mathématique représenté par un nombre fini de symboles (*l'instance* ou *l'entrée*) et d'une *question* dont la réponse dépend uniquement de l'instance. Si la réponse à la question ne peut être que "oui" ou "non", on parle de *problème de décision*. Naïvement, un algorithme est une description de longueur finie, dans un *langage de programmation*, d'une suite finie d'opérations élémentaires (*le calcul*) ne dépendant que de l'instance et fournissant une réponse à la question (*la sortie*). Tous nos algorithmes auront pour instance des graphes, ou des graphes avec quelques objets supplémentaires (sommets, chemins du graphe ...).

On appelle *taille* de l'instance le nombre de symboles nécessaires à sa représentation. Pour chaque algorithme, et pour chaque entier n , nous chercherons à évaluer la *complexité* de l'algorithme, c'est-à-dire la nombre d'opérations élémentaires nécessaires à l'exécution de l'algorithme pour une instance de taille n dans le pire des cas. Nos estimations de complexité seront toujours données à une constante multiplicative près à l'aide de la notation de Landau : $O(\dots)$. Dire qu'un algorithme est de complexité $O(n^{23})$ par exemple, veut dire qu'il existe une constante c telle que le nombre d'opérations pour exécuter l'algorithme sur une instance de taille n est inférieur à $c \times n^{23}$.

Nous considérons qu'un algorithme est *efficace* s'il est en *temps polynomial*, c'est-à-dire si sa complexité est majorée par un polynôme dans la taille de l'instance. Un tel algorithme est encore qualifié de *linéaire* si le polynôme est une fonction linéaire, *quadratique* si c'est une fonction quadratique, et ainsi de suite. Un algorithme dont la complexité est $O(2^n)$ sera donc par définition non-efficace. Le premier à avoir remarqué que beaucoup d'algorithmes classiques s'exécutent en temps polynomial, indépendamment de tout choix raisonnable de représentations des données, semble être Cobham [41], mais

l'idée d'en faire un critère de classification est due à Jack Edmonds [58]. Ce dernier a aussi le premier formulé l'idée souvent vérifiée que la découverte d'un algorithme en temps polynomial pour un problème va généralement de pair avec une meilleure compréhension de celui-ci. Pour certains problèmes (les problèmes *indécidables*), il n'existe aucun algorithme. Mais pour tous les problèmes que nous traitons dans ce rapport, l'existence d'un algorithme non-efficace sera triviale.

Comme nous l'avons vu, beaucoup de problèmes importants en pratique peuvent être formulés en termes de graphes. Concevoir des algorithmes efficaces d'un point de vue computationnel pour résoudre ces problèmes est l'une des principales préoccupations des théoriciens des graphes et des informaticiens. À cet égard, les deux aspects théoriques intéressants sont, premièrement, de vérifier qu'un algorithme proposé fonctionne bien correctement et, deuxièmement, d'analyser à quel point cette procédure est efficace.

On considère généralement que la taille d'un graphe, en tant qu'instance d'un algorithme, est la somme de son nombre de sommets et de son nombre d'arêtes : $n + m$. Si l'on admet qu'un algorithme dont l'entrée est un graphe doit au moins prendre connaissance de l'instance, on voit que pour tout problème non-trivial, il est vain d'espérer une complexité meilleure que $O(n + m)$. Un algorithme ayant une telle complexité est dit en *temps linéaire* ou parfois *optimal*.

Nous tenons à préciser que le point de vue conventionnel et majoritaire sur la complexité des algorithmes est par certains aspects critiquable. Tout d'abord, un algorithme mauvais dans le pire des cas peut être intéressant pour beaucoup d'instances, voire en moyenne. De plus, même si chacun convient qu'un algorithme en temps exponentiel sera toujours plus lent qu'un algorithme polynomial à *partir d'une certaine taille t de l'instance*, il se peut que t soit suffisamment grand pour que seules les instances de taille très inférieure à t soient traitables en pratique par l'une ou l'autre des méthodes. En pratique, un algorithme en temps $O(2^n)$ peut donc être préférable à un algorithme en $O(n^{23})$ par exemple. En outre, pour les applications pratiques, la constante multiplicative est loin d'être négligeable. Finalement, la complexité algorithmique telle qu'on la donne n'est qu'une indication de la performance effective de l'algorithme : l'implémentation finale de l'algorithme et des tests empiriques sont indispensables si l'on se préoccupe d'applications concrètes. En dépit de ces critiques, la classification des algorithmes reste un outil simple et puissant, qui a l'avantage d'être peu dépendant des représentations de données et des langages de programmation.

On utilise souvent l'algorithme fondamental ci-dessous. Notons que cet algorithme parfois appelé "parcours en largeur d'abord" est souvent attribué à Dijkstra, parce qu'il a été le premier à résoudre un problème plus général (le chemin de poids minimum). Nous renvoyons au livre de Alexander Schrijver ([148], page 87) pour des éclaircissements historiques.

Algorithme I.1 (Berge [5], Moore [125]).ENTRÉE : Un graphe G et deux sommets s et t de G .SORTIE : Un plus court chemin de G d'extrémités s et t .COMPLEXITÉ : $O(n + m)$.**I.2.2 Les problèmes \mathcal{P} , \mathcal{NP} et $\text{co-}\mathcal{NP}$**

On dit qu'un problème appartient à la classe \mathcal{P} s'il existe un algorithme polynomial pour le résoudre. Un *certificat du oui* (resp. *du non*) pour un problème de décision est un objet représentable par une suite finie de symboles, dépendant seulement de l'instance et qui existe si et seulement si la réponse au problème est "oui" (resp. "non"). Un *bon certificat* est un certificat dont la taille est bornée par un polynôme en la taille de l'instance, et qui est *vérifiable en temps polynomial*. C'est-à-dire qu'il doit exister un algorithme en temps polynomial, prenant en entrée l'instance et le certificat, et qui répond "oui" (resp. "non") si et seulement si l'entrée est un certificat du oui (resp. du non) pour cette instance. On dit qu'un problème appartient à la classe \mathcal{NP} (resp. $\text{co-}\mathcal{NP}$) s'il existe pour ce problème un bon certificat du "oui" (resp. "non"). Les notions de certificats pour un problème ont été introduites par Jack Edmonds [57]. Il est clair qu'un problème \mathcal{P} est toujours \mathcal{NP} et $\text{co-}\mathcal{NP}$. Une conjecture célèbre affirme que la réciproque est également vraie :

Conjecture I.2.1 ($\mathcal{P} = \mathcal{NP} \cap \text{co-}\mathcal{NP}$). *Si un problème admet un bon certificat du oui et un bon certificat du non, alors il existe un algorithme en temps polynomial pour le résoudre.*

La Conjecture I.2.1, proposée par Edmonds (1965)[57], est fortement appuyée par des constats empiriques. La plupart des problèmes de décision que l'on sait appartenir à $\mathcal{NP} \cap \text{co-}\mathcal{NP}$ sont aussi connus pour être \mathcal{P} . C'est le cas par exemple du problème de décider si un entier donné est premier. Bien qu'il ait été connu depuis un certain temps que ce problème appartenait à la fois à \mathcal{NP} et $\text{co-}\mathcal{NP}$, un algorithme polynomial testant la primalité n'a été découvert que beaucoup plus récemment, par Agrawal et al. (2004)[1].

I.2.3 Réductions polynomiales

Une approche usuelle pour résoudre un problème donné consiste à transformer ce problème en un autre dont la solution est déjà connue, et d'ensuite convertir cette solution en une solution du problème original. Bien sûr, cette approche n'est réalisable que si la transformation peut se faire rapidement. Le concept de réduction polynomiale formalise cela.

Une *réduction polynomiale* d'un problème P à un problème Q est une paire d'algorithmes polynomiaux, l'un qui transforme chaque instance I de P en une instance J de Q , et l'autre qui transforme une solution pour l'instance J en une solution pour l'instance I . Si une telle réduction existe, on dit que P est *polynomialement réductible* à Q , et nous écrivons $P \preceq Q$; cette relation est clairement à la fois réflexive et transitive. Être polynomialement réductible

a la signification suivante : si $P \preceq Q$, et s'il y a un algorithme polynomial pour résoudre Q , alors cet algorithme peut être converti en un algorithme polynomial pour résoudre P . En symboles mathématiques

$$(P \preceq Q \text{ et } Q \in \mathcal{P}) \Rightarrow P \in \mathcal{P} \tag{I.6}$$

Un exemple très simple ce paradigme est la réduction polynomiale du Problème de l'Arbre Couvrant de Poids Minimum au problème suivant :

Problème I.2 (Problème de l'Arbre Couvrant de Poids Maximum).

ÉTANT DONNÉ : Un graphe valué connexe G ,

TROUVER : Un arbre couvrant de poids maximum dans G .

Afin de résoudre une instance de ce problème, il suffit de remplacer chaque poids par son opposé et d'appliquer l'Algorithme de Jarník-Prim pour trouver un arbre optimal dans le graphe valué ainsi obtenu. Ce même arbre sera un arbre de poids maximum dans le graphe valué original. (Nous remarquons que, d'une façon similaire, on peut réduire le problème de trouver un plus long xy -chemin dans un graphe au Problème du Plus Court Chemin. Cependant aucun algorithme polynomial n'est connu pour résoudre ce dernier problème quand il y a des arêtes de poids négatifs.)

Toutes les réductions ne sont pas aussi aisées que celle-ci. Rappelons que deux (x, y) -chemins dirigés sont *intérieurement disjoints* s'ils n'ont pas de sommets internes en commun. Considérons le problème suivant, qui est l'analogue pour les chemins intérieurement disjoints du Problème des Chemins Dirigés Arc-disjoint (PCDA).

Problème I.3 (Problème des Chemins Dirigés Intérieurement Disjoints (PCDI)).

ÉTANT DONNÉ : Un digraphe $D := D(x, y)$,

TROUVER : Une famille maximum de (x, y) -chemins dirigés intérieurement disjoints dans D .

Une réduction polynomiale de PCDI à PCDA peut être obtenue en construisant un nouveau digraphe $D' := D'(x, y)$ à partir de D comme suit :

- ▷ Éclater chaque sommet $v \in V \setminus \{x, y\}$ en deux nouveau sommets v^- et v^+ , reliés par un nouvel arc (v^-, v^+) .
- ▷ Pour chaque arc (u, v) de D , remplacer sa queue u par u^+ (sauf si $u = x$ ou $x = y$) et sa tête v par v^- (sauf si $v = x$ ou $v = y$).

Il est commode de désigner un digraphe D avec deux sommets distingués x et y par $D(x, y)$

Cette construction est illustrée Figure I.67

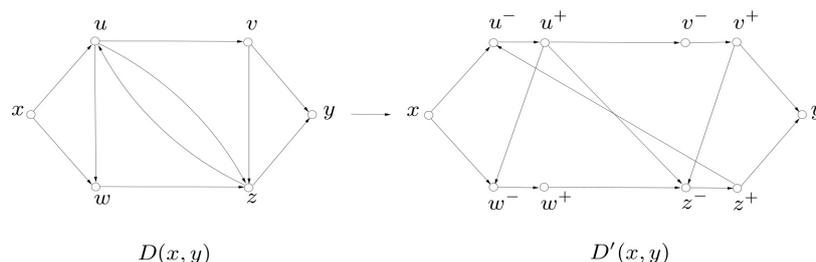


FIGURE I.67 – Réduction de PCDI à PCDA.

On peut voir qu'il y a une bijection entre les familles de (x, y) -chemins dirigés intérieurement disjoints dans D et les familles de (x, y) -chemins dirigés arc-disjoints dans D' . Ainsi, trouver une famille maximum de (x, y) -chemins dirigés intérieurement disjoints dans $D(x, y)$ revient à trouver une famille maximum de (x, y) -chemins dirigés arc-disjoints dans $D'(x, y)$. Cette transformation de l'instance $D(x, y)$ de PCDI en l'instance $D'(x, y)$ de PCDA est une réduction polynomiale parce que $|V(D')| = 2|V(D)| - 2$ et $|E(D')| = |E(D)| + |V(D)| - 2$. Ainsi $\text{PCDI} \preceq \text{PCDA}$.

L'Algorithme Folt-Max Coupe-Min est un algorithme polynomial pour résoudre PCDA. Par conséquent, $\text{PCDA} \in \mathcal{P}$. Comme $\text{PCDI} \preceq \text{PCDA}$, nous pouvons en conclure que $\text{PCDI} \in \mathcal{P}$.

La plupart des problèmes concernant les chemins dans les graphes non-orientés peuvent être réduits à leurs analogues dans les graphes orientés, tout simplement en considérant le digraphe associé. Par exemple, soit $G := G(x, y)$ un graphe non-orienté et soit $D := D(x, y)$ son digraphe associé. Il y a une bijection évidente entre les familles de xy -chemins intérieurement disjoints dans G et les familles de (x, y) -chemins dirigés intérieurement disjoints dans D . Ainsi $\text{PCI} \preceq \text{PCDI}$, où PCI est le problème de trouver une famille maximum de xy -chemins intérieurement disjoints dans un graphe donné $G(x, y)$. Nous avons montré ci-dessus que $\text{PCDI} \in \mathcal{P}$. Il s'ensuit maintenant par transitivité de la relation \preceq que $\text{PCI} \in \mathcal{P}$.

1.2.4 Les problèmes \mathcal{NP} -complet et \mathcal{NP} -difficile

Nous venons de voir comment des réductions polynomiales peuvent être utilisées pour produire de nouveaux algorithmes polynomiaux à partir d'autres existants. De la même manière, des réductions polynomiales peuvent également être utilisées pour relier entre eux les problèmes "durs", ceux pour lesquels aucun algorithme polynomial n'existe, comme on peut le voir en écrivant I.6 sous une forme différente :

$$(Q \preceq P \text{ et } P \notin \mathcal{P}) \Rightarrow Q \notin \mathcal{P}$$

Ce point de vue a mené Cook (1971)[44] et Levin (1973)[110] à définir une classe spéciale de problème de décision vraisemblablement insolubles, la classe des problèmes \mathcal{NP} -complet. Informellement, ce sont les problèmes de la classe \mathcal{NP} qui sont 'au moins aussi dur à résoudre' que n'importe quel problème de \mathcal{NP} .

Formellement, un problème P de \mathcal{NP} est \mathcal{NP} -complet si $P' \preceq P$ pour tout problème P' de \mathcal{NP} . La classe des problèmes \mathcal{NP} -complet est notée \mathcal{NPC} . Si un problème n'appartenant pas à la classe \mathcal{NP} peut être réduit de la sorte, on dit qu'il est \mathcal{NP} -difficile. Il n'est absolument pas évident que des problèmes \mathcal{NP} -complets existent. En revanche, une fois qu'un de ces problèmes a été trouvé, la \mathcal{NP} -complétude d'autres problèmes peut être établie comme suit au moyen de réductions polynomiales.

Afin de prouver qu'un problème Q dans \mathcal{NP} est \mathcal{NP} -complet, il suffit de trouver une réduction polynomiale de Q à un problème \mathcal{NP} -complet P . Pourquoi cela? Supposons que P soit \mathcal{NP} -complet. Alors $P' \preceq P$ pour tout $P' \in \mathcal{NP}$. Si $P \preceq Q$, alors $P' \preceq Q$ pour tout $P' \in \mathcal{NP}$, par transitivité de la relation \preceq . Autrement dit, Q est \mathcal{NP} -complet. En symboles :

$$(P \preceq Q \text{ et } P \in \mathcal{NPC}) \Rightarrow Q \in \mathcal{NPC}$$

Cook (1971)[44] et Levin (1973)[110] ont fait une avancée fondamentale en montrant qu'il existe bel et bien des problèmes \mathcal{NP} -complets. Plus précisément, ils ont prouvé que le problème de satisfiabilité des formules booléennes est \mathcal{NP} -complet.

Rappelons qu'une fonction booléenne à n variables est une fonction f de $\{0, 1\}^n$ dans $\{0, 1\}$. Un vecteur booléen $\xi \in \{0, 1\}^n$ satisfait f si $f(\xi) = 1$. Pour toute variable booléenne x sur $\{0, 1\}$, on écrit $\bar{x} := 1 - x$, et on appelle x et \bar{x} des *littéraux*. Une instance 3-SAT est une fonction booléenne f donnée comme un produit booléen de clauses, chaque clause étant la somme booléenne de trois littéraux. La question de 3-SAT est de décider si on peut satisfaire f . Steve Cook a démontré un extraordinaire théorème :

Théorème I.2.2 (Cook (1971)[44]). *Si l'on dispose d'un algorithme en temps polynomial pour résoudre 3-SAT, alors, pour n'importe quel problème \mathcal{NP} , on peut donner un algorithme en temps polynomial.*

Le problème 3-SAT est \mathcal{NP} -complet. À la suite du théorème de Cook, fondateur de la théorie de la complexité algorithmique, on a prouvé que de nombreux problèmes de décision sont \mathcal{NP} -complets (voir [67]). Le premier exemple en théorie des graphes a été donné par Cook lui-même :

Problème I.4 (Cliques).

ÉTANT DONNÉ : Un graphe G et un entier k .

TROUVER : Une clique de G de taille k .

COMPLEXITÉ : \mathcal{NP} -complet (Cook [44]).

Évidemment, l'existence d'un algorithme en temps polynomial pour résoudre 3-SAT est une question fondamentale, mais encore ouverte à ce jour. L'opinion majoritaire est qu'un tel algorithme n'existe sans doute pas :

Conjecture I.2.3 ($\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$). *Il n'existe pas d'algorithme en temps polynomial pour résoudre 3-SAT.*

La Conjecture I.2.3 est une des questions ouvertes les plus importantes de toutes les mathématiques. (Un prix d'un million de dollars est offert pour sa résolution.) Cette conjecture a été, pour l'essentiel, avancée par J. Edmonds au milieu des années 1960, lorsqu'il a affirmé qu'il pourrait ne pas exister de 'bon' (c'est-à-dire, en temps polynomial) algorithme pour le Problème du Voyageur de Commerce. La conjecture est donc antérieure à la définition formelle de la classe \mathcal{NP} par Cook (1971)[44] et Levin (1973)[110].

I.3 Résumé des définitions les plus importantes

Contient : On dit qu'un graphe G contient un graphe H si H est isomorphe à un sous-graphe induit de G .

Sans : On dit qu'un graphe G est sans "bidule" (trou, diamant ...) s'il ne contient aucun "bidule".

Chaîne : Une chaîne est une suite de sommets d'un graphe telle que chaque sommet (sauf le dernier) voit le suivant. Dans le graphe, il peut y avoir d'autres arêtes que celles nécessaires pour satisfaire la définition : les *cordes*.

Chemin : Un chemin est un graphe dont les sommets peuvent être ordonnés de manière à former une chaîne sans corde. La notation $v_1 - \dots - v_n$ désigne le chemin sur lequel les sommets apparaissent dans l'ordre v_1, \dots, v_n . Ce graphe est un chemin par définition, mais même si les sommets v_i sont dans un graphe G , ce n'est pas forcément un chemin de G . Si P est un chemin, si u et v sont des sommets de P , alors $u - P - v$ désigne le sous-chemin de P d'extrémités u et v .

Cycle : Un cycle est une suite de sommets d'un graphe telle que chaque sommet voit le suivant (le suivant du dernier étant le premier). Dans le graphe, il peut y avoir d'autres arêtes : les *cordes*.

Trou : Un trou est un graphe avec au moins 4 sommets dont les sommets peuvent être ordonnés de manière à former un cycle sans corde. On appelle trou long tout trou ayant au moins 5 sommets.

Anti : Le préfixe "anti" désigne un propriété ou une structure du complémentaire (à une exception près : les partitions antisymétriques).

II

Opérations sur les graphes

“A mathematician who is not also something of a poet will never be a complete mathematician”

Karl Weierstrass

Nous décrivons ici plusieurs opérations sur les graphes (construction, modification, séparations ...) qui vont tous jouer un rôle dans la suite de ce travail. Nous notons que la compréhension de ce chapitre est primordiale pour la compréhension des chapitres suivants.

II.1 Construction de graphes à partir d'autres graphes

Nous avons déjà vu deux manières d'associer à chaque graphe un autre graphe : le complémentaire (dans le cas des graphes simples) et le graphe des lignes. Si nous partons de deux graphes G et H plutôt d'un seul un, un nouveau graphe peut être défini de plusieurs manières. Pour simplifier les notations, nous supposons que G et H sont simples, de telle sorte que chaque arête soit une paire de sommets ; les concepts décrits ici peuvent être étendus sans difficulté au cas général.

II.1.1 Union et Intersection

Deux graphes sont *disjoints* s'ils n'ont aucun sommet en commun, et *arête-disjoints* s'ils n'ont aucune arête en commun. La manière la plus simple de combiner des graphes sont l'union et l'intersection.

L'*union* des graphes simples G et H est le graphe $G \cup H$ d'ensemble de sommets $V(G) \cup V(H)$ et d'ensemble d'arêtes $E(G) \cup E(H)$. Si G et H sont disjoints, on dit que leur union est *disjointe*, et on la note généralement par $G + H$. Ces opérations sont associatives et commutatives, et peuvent être étendues à un nombre arbitraire de graphes. On peut voir qu'un graphe est séparé si et seulement si c'est l'union disjointe de deux graphes (non-nuls¹). Plus généralement, tout graphe G peut s'exprimer de manière unique (à l'ordre près) comme l'union disjointe de ses composantes connexes. (Le graphe nul a la propriété anormale d'être le seul graphe sans composante.)

1. Le graphe nul est un graphe sans sommet (et donc sans arêtes).

L'intersection $G \cap H$ de G et H est définie de manière analogue. (Notons que si G et H sont disjoints, leur intersection est le graphe nul.) La Figure II.1 illustre ces concepts. La graphes $G \cup H$ représenté Figure II.1 a une seule composante, alors que le graphe $G \cap H$ a deux composantes.

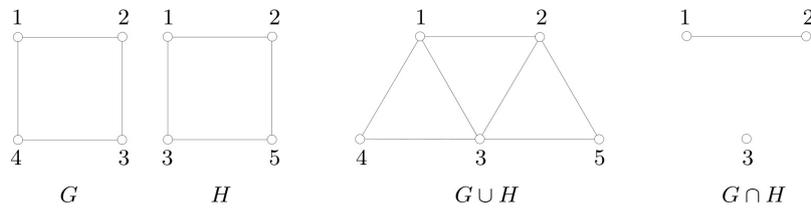


FIGURE II.1 – L'union et l'intersection de deux graphes.

II.1.2 Produits

Il y a également plusieurs manières de construire à partir de deux graphes un nouveau graphe dont l'ensemble de sommets est le produit cartésien de leurs ensembles de sommets. Ces constructions sont de ce fait appelées 'produits'. Les quatre produits de graphes qui retiennent notre attention sont considérés comme les produits "standard" car ils possèdent des propriétés intéressantes et sont les plus étudiés. Les notations que nous utiliserons proviennent du livre de Imrich et Klavžar [96].

Dans chacun des produits présentés, $G * H$, les sommets du graphes produits sont des paires de sommets (u, v) où $u \in V(G)$ et $v \in V(H)$. De plus, pour un sommet $(u, v) \in V(G) \times V(H)$, nous dirons que u et v sont ses *coordonnées* dans les graphes G et H .

Produit cartésien

Le *produit cartésien* des graphes simples G et H est le graphe $G \square H$ dont l'ensemble de sommets est $V(G) \times V(H)$ et dont l'ensemble d'arêtes est l'ensemble des paires $(u_1, v_1)(u_2, v_2)$ telle que, ou bien $u_1 u_2 \in E(G)$ et $v_1 = v_2$, ou $v_1 v_2 \in E(H)$ et $u_1 = u_2$. Donc pour toute arête $u_1 u_2$ de G et toute arête $v_1 v_2$ de H , il y a quatre arêtes dans $G \square H$; à savoir $(u_1, v_1)(u_2, v_1)$, $(u_1, v_2)(u_2, v_2)$, $(u_1, v_1)(u_1, v_2)$, et $(u_2, v_1)(u_2, v_2)$ (voir Figure II.2(a)); la notation utilisée pour le produit cartésien reflète ce fait. Plus généralement, le produit cartésien $P_m \square P_n$ de deux chemins est la $(m \times n)$ -grille. Un exemple est donné dans la Figure II.2(b).

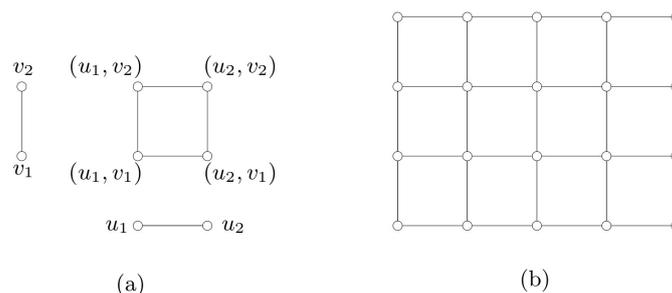


FIGURE II.2 – (a) Le produit cartésien $K_2 \square K_2$, et (b) la (5×4) -grille.

Définition II.1.2.1 (Graphe Polyédral). Un *graphe polyédral* est le 1-squelette d'un polyèdre, c'est-à-dire, le graphe dont les sommets et les arêtes sont simplement les sommets et les arêtes du polyèdre, avec les mêmes relations d'incidence. En particulier, les cinq solides platoniques (le tétraèdre, le cube, l'octaèdre, le dodécaèdre, et l'icosaèdre) engendrent les cinq *graphes platoniques* dessinés Figure II.3. Pour des polyèdres classiques comme ceux-ci, nous donnons le même nom au graphe qu'au polyèdre dont il est dérivé.

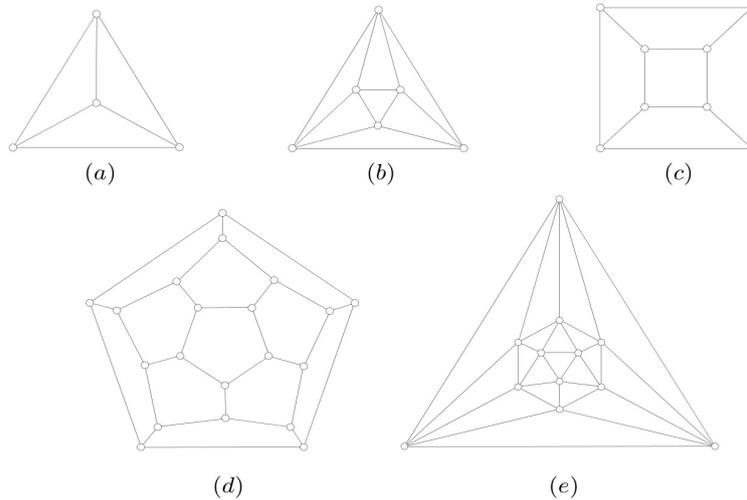


FIGURE II.3 – Les cinq graphes platoniques : (a) Le tétraèdre, (b) l'octaèdre, (c) le cube, (d) le dodécaèdre, (e) l'icosaèdre.

Pour $n \geq 3$, le produit cartésien $C_n \square K_2$ est un graphe polyédral, le n -*prisme* ; les 3-prisme, 4-prisme, et 5-prisme sont communément appelés le *prisme triangulaire*, le *cube*, et le *prisme pentagonal* (voir Figure II.4). Le produit cartésien est sans doute le plus simple des produits de graphes. Enfin, le degré d'un sommet dans le produit cartésien est la somme des degrés de ses coordonnées dans les facteurs :

$$\deg_{G \square H}(u, v) = \deg_G(u) + \deg_H(v)$$

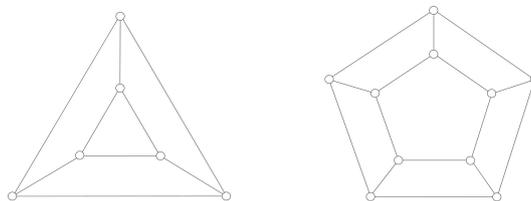


FIGURE II.4 – Les prismes triangulaire et pentagonal.

Produit direct

Le *produit direct* de deux graphes simples G et H est le graphe $G \times H$ d'ensemble de sommets $V(G) \times V(H)$ et dont deux sommets (u_1, v_1) et (u_2, v_2) sont reliés par une arête si et seulement si $u_1 u_2 \in E(G)$ et $v_1 v_2 \in E(H)$. Autrement dit, deux sommets du produit $G \times H$ sont adjacents si et seulement

si dans chaque facteur, leurs coordonnées sont des sommets adjacents. Là encore, on utilise le symbole \times pour désigner ce produit car il représente le graphe produit de deux arêtes. On pourra remarquer que

$$E(G \square H) \cap E(G \times H) = \emptyset$$

Enfin, le degré d'un sommet dans le produit direct est le produit des degrés de ses coordonnées dans les facteurs :

$$\deg_{G \times H}(u, v) = \deg_G(u) \deg_H(v)$$

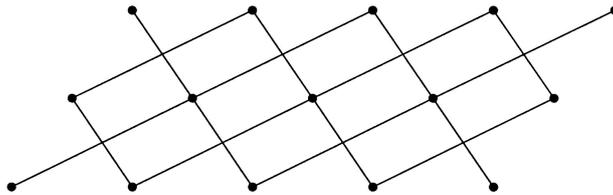


FIGURE II.5 – Le produit direct $P_5 \times P_3$.

Définition II.1.2.2 (Graphe total). Le *graphe total* T_n à n sommets est le graphe associé à la relation totale (où chaque sommet est adjacent à chaque sommet). Il peut être obtenu à partir du graphe complet K_n en ajoutant une boucle à chaque sommet. Dans [96], il est noté K_n^s .

Définition II.1.2.3 (Double graph). Nous définissons le *double* d'un graphe simple G comme le graphe $\mathcal{D}[G] = G \times T_2$. Puisque le produit direct d'un graphe simple avec n'importe quel graphe est toujours simple, il s'ensuit que le double d'un graphe simple est aussi un graphe simple.

Dans $\mathcal{D}[G]$ nous avons $(u_1, v_1)(u_2, v_2) \in E(\mathcal{D}[G])$ si et seulement si $u_1 u_2 \in E(G)$. Alors, si $V(T_2) = \{0, 1\}$, nous avons que $G_0 := \{(u, 0) : u \in V(G)\}$ et $G_1 := \{(u, 1) : u \in V(G)\}$ sont deux sous-graphes de $\mathcal{D}[G]$ tous deux isomorphes à G et tels que $G_0 \cap G_1$ est le graphe nul et $G_0 \cup G_1$ est un sous-graphe couvrant de $\mathcal{D}[G]$. De plus, nous avons une arête entre $(u_1, 0)$ et $(u_2, 1)$ et de même nous avons une arête entre $(u_1, 1)$ et $(u_2, 0)$ chaque fois que $u_1 u_2 \in E(G)$. Nous appelons $\{G_0, G_1\}$ la *décomposition canonique* de $\mathcal{D}[G]$. Voir la Figure II.6 pour quelques exemples.

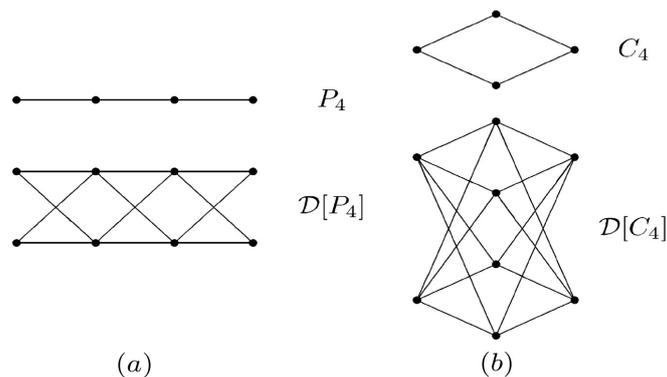


FIGURE II.6 – (a) Un chemin et son double, et (b) Un cycle est son double.

Produit fort

Le *produit fort* de deux graphes simples G et H est le graphe $G \boxtimes H$ d'ensemble de sommets $V(G) \times V(H)$ et dont deux sommets (u_1, v_1) et (u_2, v_2) étant adjacents si et seulement si $u_1u_2 \in E(G)$ et $v_1 = v_2$, ou $u_1 = u_2$ et $v_1v_2 \in E(H)$, ou $u_1u_2 \in E(G)$ et $v_1v_2 \in E(H)$. Là encore, on utilise le symbole \boxtimes pour désigner ce produit car il représente le graphe produit de deux arêtes. On remarquera que

$$E(G \boxtimes H) = E(G \square H) \cup E(G \times H)$$

Enfin, le degré d'un sommet dans le produit fort vérifie

$$\deg_{G \boxtimes H}(u, v) = \deg_G(u) + \deg_H(v) + \deg_G(u) \deg_H(v)$$

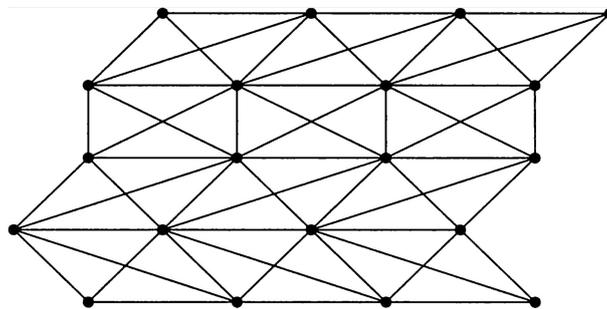


FIGURE II.7 – Le produit fort $P_4 \boxtimes P_5$.

Il y a trois manières essentiellement différentes pour représenter K_4 comme un produit $K_2 \boxtimes K_2$. Ces manières correspondent aux trois sous-graphes de K_4 isomorphes au carré ou, en considérant les diagonales de ces carrés, aux trois façons de choisir une paire d'arêtes indépendantes dans K_4 . Voir Figure II.8.

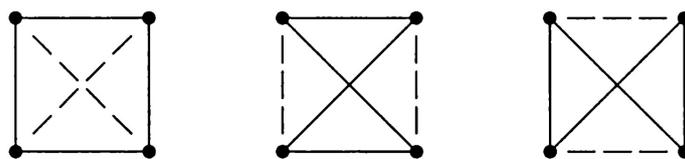


FIGURE II.8 – Les carrés dans $K_4 = K_2 \boxtimes K_2$.

Produit lexicographique

La *composition*, ou *produit lexicographique*, de deux graphes simples G et H est le graphe simple $G \circ H$ d'ensemble de sommets $V(G) \times V(H)$ dans lequel (u_1, v_1) est adjacent à (u_2, v_2) si et seulement si, ou bien $u_1u_2 \in E(G)$, ou bien $u_1 = u_2$ et $v_1v_2 \in E(H)$. Ce produit est le seul qui ne soit pas commutatif. On a

$$E(G \boxtimes H) \subseteq E(G \circ H)$$

Enfin, le degré d'un sommet dans le produit lexicographique vérifie :

$$\deg_{G \circ H}(u, v) = \deg_G(u) |V(H)| + \deg_H(v)$$

Cela revient à remplacer chaque sommet v de G par une copie H_v de H , et à relier les copies correspondant à des sommets adjacents dans G par des graphes bipartis complets ([96], page 185). Sur la Figure II.9, les copies de H dans $G \circ H$ sont indiquées par des traits discrets.

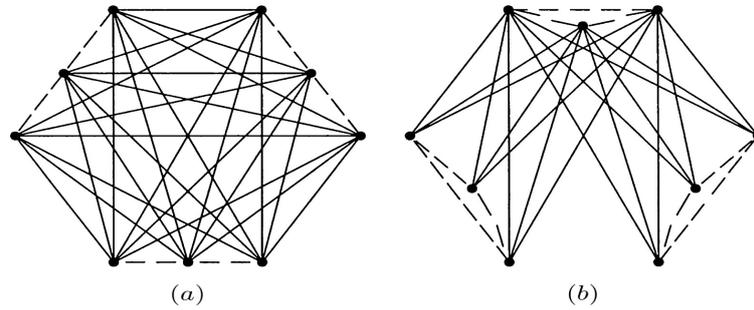


FIGURE II.9 – (a) Le produit $K_3 \circ P_3$, et (b) le produit $P_3 \circ K_3$.

Lemme II.1.1 (Munarini et al. [126]). *Pour tout graphe simple G , on a $G \times T_n = G \circ N_n$, où N_n est le graphe à n sommets sans arêtes.*

Démonstration. Pour simplifier, on considère que T_n et N_n ont le même ensemble de sommets. La fonction $f : G \times T_n \rightarrow G \circ N_n$, définie par $f(u, k) = (u, k)$ pour tout $(u, k) \in V(G \times T_n)$, est un isomorphisme de graphes. En effet, puisque N_n n'a pas d'arêtes, on a $(u, h)(v, k) \in E(G \circ N_n)$ si et seulement si $uv \in E(G)$. \square

du lemme II.1.1, il suit immédiatement que

Lemme II.1.2. *Pour tout graphe G à n sommets, $\mathcal{D}[G] = G \circ N_2$ et $\mathcal{D}[G]$ est n -partis. (voir Figure II.10.)*

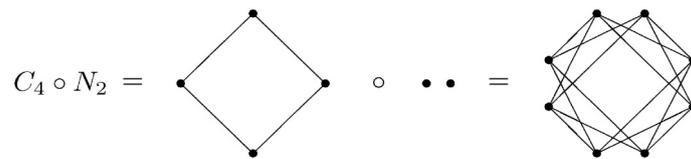


FIGURE II.10 – Le double de C_4 dessiné comme produit lexicographique.

Proposition II.1.3. *Le double $\mathcal{D}[G]$ d'un graphe simple à n sommets contient au moins 2^n sous-graphes isomorphes à G lui-même.*

Démonstration. Soit $\{G_0, G_1\}$ la décomposition canonique de $\mathcal{D}[G]$. Soient S_0 un sous-ensemble de $V(G_0)$ et S_1 le sous-ensemble de $V(G_1)$ correspondant au complémentaire de S_0 . Alors, le graphe induit par $S_0 \cup S_1$ est isomorphe à G . \square

Pour des informations plus complètes sur le double de graphe, on pourra se référer à [126].

II.2 Modifications de graphes

Nous avons déjà vu des manières simples pour modifier des graphes, à savoir la suppression et l'ajout de sommets ou d'arêtes. Ici, nous décrivons plusieurs autres opérations de graphes.

II.2.1 Identification de sommets et contraction d'arête

Identifier des sommets non-adjacents x et y d'un graphe G consiste à remplacer ces sommets par un unique sommet incident à toutes les arêtes qui étaient incidentes dans G à x ou à y . Nous notons le graphe ainsi obtenu $G/\{x, y\}$ (voir Figure II.11(a)).

Contracter une arête e d'un graphe G consiste à supprimer l'arête et à ensuite (si l'arête est un lien) identifier ses extrémités. Le graphe obtenu est noté $G \cdot e$ (voir Figure II.11(b)).

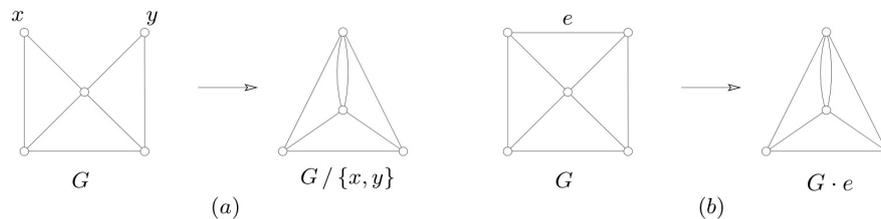


FIGURE II.11 – (a) Identification de deux sommets, et (b) contraction d'une arête.

II.2.2 Éclatement d'un sommet et subdivision d'arête

L'opération inverse à la contraction d'arête est l'éclatement d'un sommet. *Éclater* un sommet v consiste à remplacer v par deux sommets adjacents, v' et v'' et à remplacer chaque arête incidente à v par une arête incidente soit à v' soit à v'' (mais pas les deux, sauf si c'est une boucle en v), l'autre extrémité de l'arête restant inchangée (voir Figure II.12(a)). Notons qu'un sommet de degré non-nul peut être éclaté de plusieurs manières, donc le graphe obtenu n'est pas unique en général.

Un cas particulier d'éclatement d'un sommet se produit quand exactement un lien, ou exactement une extrémité d'une boucle, est affectée à l'un des deux sommets v' et v'' . Le graphe qui en résulte peut être vu comme ayant été obtenu en subdivisant une arête du graphe original, où *subdiviser* une arête e consiste à supprimer e , ajouter un nouveau sommet x , et relier x aux deux extrémités de e (lorsque e est un lien, cela revient à remplacer e par un chemin de longueur deux, comme dans la Figure II.12(b)).

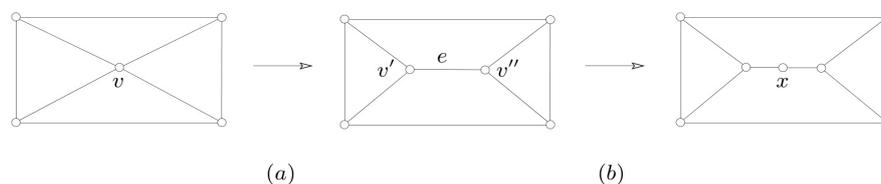


FIGURE II.12 – (a) Éclatement d'un sommet, et (b) subdivision d'une arête.

II.3 Décompositions de graphes

Une opération qui, avec deux graphes G_1 et G_2 , construit un troisième graphe G sera appelée *composition*. On écrit $G = G_1 * G_2$. Inversement, un graphe donné G peut être **-décomposable* s'il existe deux graphes G_1 et G_2 tels que $G = G_1 * G_2$ et que chacun de ces deux graphes G_1 et G_2 ait moins de sommets que G .

L'idée de décomposer un problème en plusieurs problèmes similaires, mais sur des données plus petites (et, de préférence, plus facile à étudier) est aussi ancienne que naturelle. La première approche a probablement été de décomposer le graphe en composantes connexes, et beaucoup d'autres lui ont suivi. L'identification de cliques [9], La décomposition par substitution [113], joint [18], la split-décomposition [50], l'amalgame [23], le 2-amalgame [46], l'union généralisée [94], les décompositions paire [36], impaire [86], et partenaire [37] sont quelques-unes d'entre elles.

Dans cette section, nous introduisons trois type de séparations qui vont tous jouer un rôle primordiale dans la suite de ce travail.

II.3.1 2-amalgame

Étant donné deux graphes G_1 et G_2 , nous définissons la composition Φ_{ik} comme suit. Pour $j = 1, 2$, considérons une clique de taille $i + k$ dans G_j avec les sommets $\{v_1^j, \dots, v_i^j\} \cup K_j$, et soit U_j l'ensemble des sommets restant dans G_j . Supposons qu'aucun sommet de U_j ne soit adjacent à plus d'un sommet v_h^j . De plus, chaque sommet de U_j qui est adjacent à v_h^j pour certain h est également adjacent à tous les sommets de K_j .

Le graphe composé $G = G_1 * G_2$ est obtenu en identifiant les cliques K_1 et K_2 , et pour chaque h supprimant v_h^1 et v_h^2 et en joignant chaque voisin de v_h^1 à chaque voisin de v_h^2 .

Φ_{00} est l'union de G_1 et G_2 , Φ_{0k} est l'identification de cliques, Φ_{10} est le simple joint de G_1 et G_2 , Φ_{1k} est l'amalgame. La composition Φ_{2k} est appelé le *2-amalgame* de G_1 et G_2 (voir Figure II.13). Le *2-joint* est le cas particulier du 2-amalgame où $k = 0$;

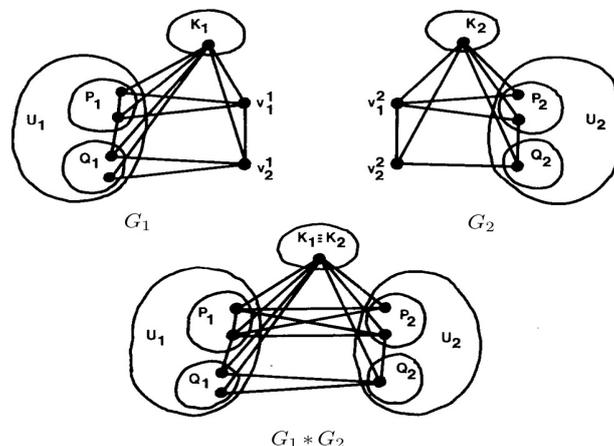


FIGURE II.13 – Un exemple de la composition 2-amalgame.

2-joint

Cette décomposition importante est définie par C. Cornuéjols et W. H. Cunningham en 1985 [46]. Notons que la définition précise du 2-joint varie selon les auteurs. Nous donnons ici une définition provisoire, qui sera précisée ensuite. Soit G un graphe. On appelle *2-joint* de G toute partition des sommets de G en deux ensembles V_1 et V_2 tels qu'il existe $A_i, B_i \subseteq V_i$ ($i = 1, 2$) vérifiant certaines conditions parmi les suivantes :

1. Pour $i = 1, 2$, $A_i \cap B_i = \emptyset$;
2. Chaque sommet de A_1 voit chaque sommet de A_2 ;
3. Chaque sommet de B_1 voit chaque sommet de B_2 ;
4. Il n'y a aucune arête entre V_1 et V_2 autres que celles entre A_i et B_i ($i = 1, 2$);
5. Pour $i = 1, 2$, si $|A_i| = |B_i| = 1$ et si $G[V_i]$ est un chemin joignant l'unique sommet de A_i à l'unique sommet de B_i , alors ce chemin est de longueur au moins 3;
6. Pour $i = 1, 2$, chaque composante connexe de $G[V_i]$ comporte des sommets de A_i et de B_i ;
7. Pour $i = 1, 2$, si $|A_i| = |B_i| = 1$, alors $G[V_i]$ n'est pas un chemin joignant l'unique sommet de A_i à l'unique sommet de B_i ;
8. Pour $i = 1, 2$, il existe un chemin de $G[V_i]$ ayant une extrémité dans A_i et une extrémité dans B_i ;
9. Les ensembles V_1 et V_2 sont de cardinal au moins 3.

Dans les articles de Chudnovsky *et al.* dans [31], les 2-joints doivent seulement vérifier les conditions 1 à 6. En l'absence d'indication supplémentaire, c'est cette définition que nous utilisons. Dans les articles de Cornuéjols *et al.*, des définitions légèrement différentes sont utilisées, que nous précisons pour chaque théorème.

Lorsqu'un graphe G a un 2-joint, on peut décomposer G en deux blocs G_1 et G_2 . Si A_2 et B_2 sont dans des composantes connexes différentes de $G[V_2]$, définir le *bloc* G_1 comme étant $G[V_1 \cup \{p_1, q_1\}]$, où $p_1 \in A_2$ et $q_1 \in B_2$. Sinon, soit P_1 un plus court chemin avec une extrémité dans A_2 et l'autre dans B_2 , et définir le bloc G_1 comme étant $G[V_1 \cup P_1]$. Le bloc G_2 est défini de façon similaire.

II.3.2 Paire homogène

Pour définir cette séparation, nous avons besoin de quelques notions supplémentaires. Soit G un graphe. Si $X, Y \subset V(G)$, on dit que le couple (X, Y) est *complet* (ou que X est complet à Y) si chaque sommet de X voit chaque sommet de Y . On dit que (X, Y) est *anticomplet* si chaque sommet de X manque chaque sommet de Y .

La notion de paire homogène (homogeneous pair) a été introduite par V. Chvátal et N. Sbihi en 1987 [38]. On appelle *paire homogène* toute partition des sommets de G en 6 ensembles non vides (A, B, C, D, E, F) tels que :

- Chaque sommet de A a un voisin et non-voisin dans B . Chaque sommet de B a un voisin et un non-voisin dans A .
- Les couples (C, A) , (A, F) , (F, B) , (B, D) sont complets.
- Les couples (D, A) , (A, E) , (E, B) , (B, C) sont anticomplets.

En d'autres termes, Un graphe G a une paire homogène si $V(G)$ peut être partitionné en sous-ensembles A_1 , A_2 et B tels que :

- (*) $|A_1| + |A_2| \geq 3$ et $|B| \geq 2$.
- (**) Si un sommet de B est adjacent à un sommet de A_i , alors il est adjacent à tous les sommets de A_i , pour $i \in \{1, 2\}$.

Par exemple, le graphe G de la Figure II.14 a une paire homogène. En effet, $A_1 = \{a, b\}$, $A_2 = \{c, d\}$ et $B = \{e, f, g, h\}$ vérifient bien les conditions ci-dessus.

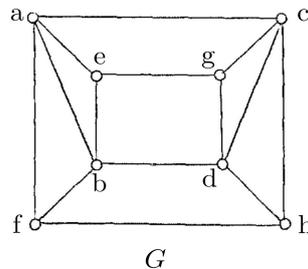


FIGURE II.14 – Une illustration d'une paire homogène.

II.3.3 Partition antisymétrique

On appelle *partition antisymétrique* (skew partition) d'un graphe G toute partition des sommets de G en deux ensembles X et Y tels que $G[X]$ n'est pas connexe et $G[Y]$ n'est pas anticonnexe. D'une manière équivalente, un graphe G a une partition antisymétrique si ses sommets peuvent se partitionner en quatre ensembles non vides A, B, C, D tels que $E(G)$ contienne toutes les arêtes possibles entre A et B et aucune arête entre C et D . Pour une telle partition, les sous-graphes induits $G[A \cup B]$ et $G[C \cup D]$ sont respectivement n'est pas anticonnexe et n'est pas connexe. Cette notion a été introduite par V. Chvátal en 1985 [35]. Notons que le cas où $|A| = 1$ est appelé *étoile d'articulation*.

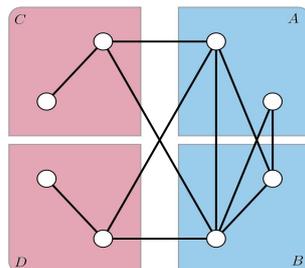


FIGURE II.15 – Une illustration d'une partition antisymétrique.

Partition antisymétrique paire

La notion suivante a été introduite par M. Chudnovsky *et al.* [31]. Une partition antisymétrique est *paire* (balanced skew partition) si :

- (i) Tout chemin² de longueur au moins 2 dans G avec ses extrémités dans $A \cup B$ est ses sommets intérieurs dans $C \cup D$ est pair, et
- (ii) Tout chemin de longueur au moins 2 dans \overline{G} (antichemin) avec ses extrémités dans $C \cup D$ et ses sommets intérieurs dans $A \cup B$ est pair.

Les séparations que nous venons de définir dans cette section permettent de mieux décrire et comprendre les structures de graphes. Ainsi, de nombreux théorèmes de décomposition ont été prouvés au cours des dernières décennies et certains d'entre eux seront exposés dans les chapitres suivants.

II.4 Quelques graphes particuliers

Nous présentons ici quelques graphes particuliers qui vont tous jouer un rôle dans la suite de ce travail. Beaucoup de graphes dans cette section non seulement sont intéressants pour eux-mêmes, mais permettent également d'avoir une meilleure compréhension des structures dont ils découlent.

II.4.1 Pyramides, prismes et quasi-prismes

On appelle *prisme* tout graphe F dont les sommets se partitionnent en trois ensembles induisant des chemins P_1, P_2, P_3 tels que pour $i = 1, 2, 3$, P_i est de longueur au moins 1, d'extrémités a_i et b_i , tels que $\{a_1, a_2, a_3\}$ et $\{b_1, b_2, b_3\}$ induisent des triangles, et tels qu'il n'y ait aucune arête entre sommets de P_i et P_j ($1 \leq i < j \leq 3$) autre que celles des triangles. Si F est sous-graphe induit d'un graphe G , alors on dit que les trois chemins P_1, P_2 , et P_3 *forment* un prisme de G . On dit que les sommets a_i, b_i $i = 1, 2, 3$ sont les *coins* du prisme. On dit que F est *pair* (resp. *impair*) si les trois chemins P_1, P_2, P_3 sont de longueur paire (resp. impaire). On dit qu'un prisme est *long* s'il possède au moins sept sommets, c'est-à-dire si l'un au moins de ses chemins est de longueur supérieure ou égale à 2.

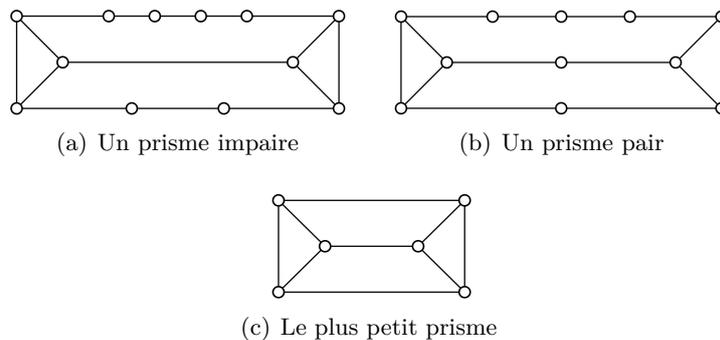


FIGURE II.16 – Des prismes.

2. Voir la section I.1.13

On appelle *quasi-prisme* tout graphe S dont les sommets se partitionnent en quatre ensembles induisant des chemins $S_1 = a - \dots - a'$, $S_2 = b - \dots - b'$, $S_3 = c - \dots - c'$ et $S_4 = d - \dots - d'$, où S_1 et S_2 peuvent être de longueur 0 mais où S_3, S_4 sont de longueur au moins 1, et tels que $E(S) = E(S_1) \cup E(S_2) \cup E(S_3) \cup E(S_4) \cup \{a'c, a'd, cd, b'c', b'd', c'd'\}$. Notons que $\{a', c, d\}$ et $\{b', c', d'\}$ sont des triangles de S . On appelle a et b les *extrémités* du quasi-prisme. Le quasi-prisme est dit *strict* si l'un au moins de S_1 et S_2 est de longueur au moins 1.

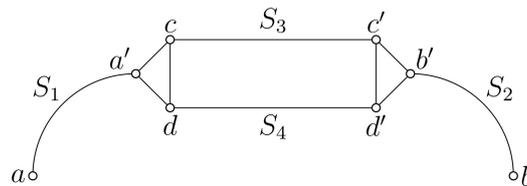


FIGURE II.17 – Un quasi-prisme.

On appelle *pyramide* tout graphe F dont l'ensemble des sommets est l'union de trois ensembles induisant des chemins P_1, P_2, P_3 tels que pour $i = 1, 2, 3$, P_i est de longueur au moins 1, d'extrémités a et b_i , et tels que $\{b_1, b_2, b_3\}$ induit un triangle, tels que a est l'unique sommet commun aux trois chemins, et tels qu'il n'y ait aucune arête entre des sommets de P_i et P_j ($1 \leq i < j \leq 3$) autre que celles du triangle et celles d'extrémité a . De plus, un seul chemin parmi P_1, P_2, P_3 est autorisé à être de longueur 1, les deux autres doivent être de longueur au moins 2. Si F est sous-graphe induit d'un graphe G , alors on dit que les trois chemins P_1, P_2 et P_3 *forment* une pyramide de G . On dit que le sommet a est le *coin* de la pyramide.

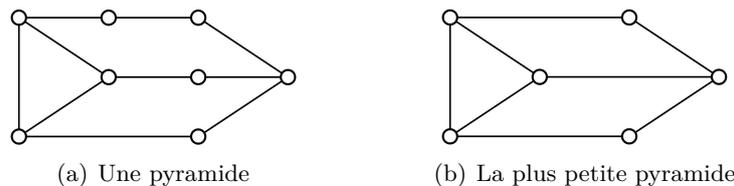


FIGURE II.18 – Des pyramides.

Le lemme suivant est souvent très pratique pour prouver qu'un graphe contient un trou impair :

Lemme II.4.1. *Soit F une pyramide. Alors F contient un trou impair.*

Démonstration. Il existe deux chemins de F qui sont de même parité, sans perte de généralité, P_1 et P_2 . Parmi eux, il y en a au maximum un de longueur 1 et $V(P_1) \cup V(P_2)$ induit un trou impair. \square

Le lemme suivant montre que dans les graphes sans trou impair, les prismes sont tous pairs ou impairs :

Lemme II.4.2. *Soit F un prisme ni pair ni impair. Alors F contient un trou impair.*

Démonstration. Soit F un prisme. Si l'un des chemins P_1 de F est de longueur paire et un autre chemin P_2 de longueur impaire, alors $V(P_1) \cup V(P_2)$ induit un trou impair. \square

II.4.2 Graphes particuliers

De manière assez curieuse (et non préméditée), beaucoup de graphes présentés ici sont autocomplémentaires. Pour une étude des graphes autocomplémentaires, nous renvoyons à la thèse de Master très complète de Alastair Farrugia [60].

Le graphe $a - b - c - d$ est souvent appelé P_4 (voir Figure II.19). C'est le plus petit graphe autocomplémentaire (à part le cas trivial du graphe vide et du graphe réduit à un sommet). C'est aussi, avec le carré C_4 et son complémentaire, le plus grand graphe qui soit à la fois biparti et complémentaire de biparti. Notons qu'il est aussi le graphe des lignes d'un graphe biparti, et le complémentaire du graphe des lignes d'un graphe biparti. La *griffe*, parfois notée $K_{1,3}$, est le plus petit graphe qui ne soit pas un graphe des lignes : voir Figure I.65 et la remarque I.1.12.2.

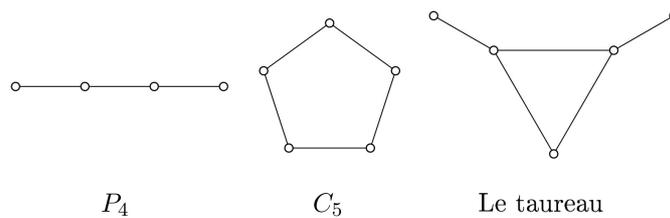


FIGURE II.19 – Les trois graphes autocomplémentaires avec 4 ou 5 sommets.

Le graphe C_5 est représenté Figure II.19. C'est un graphe autocomplémentaire. C'est le plus petit trou impair. Le *taureau* est le graphe contenant un triangle représenté Figure II.19. C'est encore un graphe autocomplémentaire. Le taureau et le C_5 sont les seuls graphes autocomplémentaires avec cinq sommets (voir [60]).

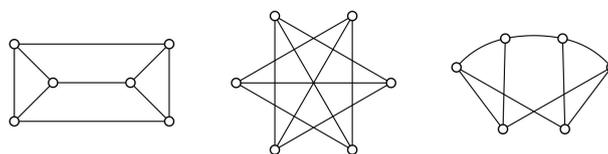


FIGURE II.20 – Trois représentations de $\overline{C_6}$.

Le graphe $\overline{C_6}$ est représenté de diverses manières sur la Figure II.20. La première représentation le fait apparaître comme le plus petit prisme. Sur la deuxième représentation, on le voit comme le plus petit antitrou pair connexe. Sur la troisième représentation, on le voit apparaître comme un chemin de longueur 3 (en haut) dont les extrémités voient deux sommets non adjacents (en bas), et cela sans que le chemin de longueur 3 ne possède d'arête dont les extrémités voient les deux sommets en bas.

Le *diamant* est le graphe à quatre sommets dont le complémentaire ne contient qu'une seule arête. Le *double-diamant* est le graphe avec huit sommets représenté Figure II.22. C'est un graphe autocomplémentaire.

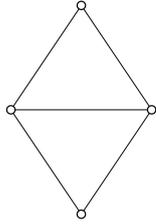


FIGURE II.21 – Le diamant.

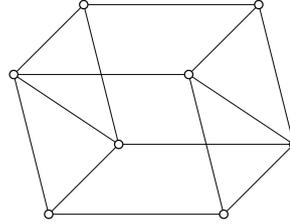


FIGURE II.22 – Le double-diamant.

Figure II.23, on a représenté K_4 et son graphe des lignes, noté $L(K_4)$.

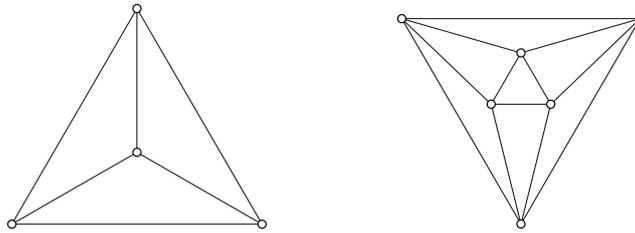
FIGURE II.23 – K_4 et $L(K_4)$.

Figure II.24, on a présenté $K_{3,3}$.

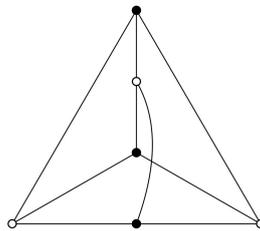
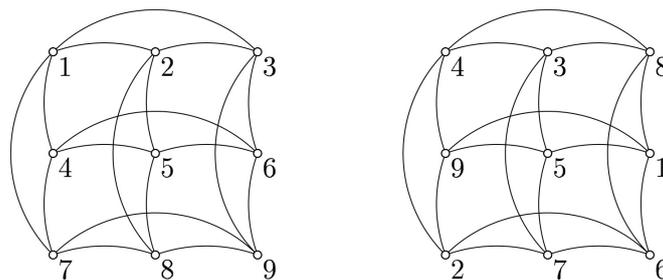
FIGURE II.24 – $K_{3,3}$.

Figure II.25, on a représenté le graphe des lignes de $K_{3,3}$ avec une numérotation naturelle des sommets. À côté, on a représenté son complémentaire de manière à faire apparaître un isomorphisme avec le graphe de départ, montrant ainsi que $L(K_{3,3})$ est autocomplémentaire. Il faut bien noter que les deux graphes représentés côte à côte sont *différents*, que chaque arête de l'un est une non-arête de l'autre.

FIGURE II.25 – $L(K_{3,3})$ et son complémentaire.

On remarquera (fait anecdotique!) que les numéros des sommets du complémentaire forment alors un *carré magique*, c'est-à-dire que si l'on additionne les trois chiffres d'une colonne, d'une ligne, ou d'une diagonale du carré, on obtient toujours la constante "magique" : 15. Pour plus d'informations sur les carrés magiques, voir [51].

Il est habituel de noter $K_{3,3} \setminus e$ le graphe biparti représenté figure II.26. C'est le plus petit graphe biparti qui soit une subdivision de K_4 . Son graphe des lignes représenté sur la même figure est un graphe autocomplémentaire, que l'on désigne par $L(K_{3,3} \setminus e)$. Beineke [4] a prouvé que les seuls graphes des lignes autocomplémentaires sont K_1 , P_4 , C_5 , le taureau, $L(K_{3,3} \setminus e)$ et $L(K_{3,3})$.

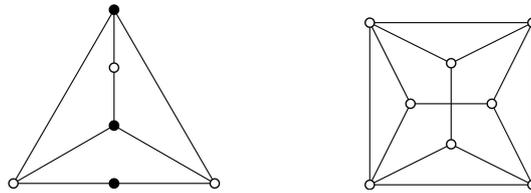


FIGURE II.26 – $K_{3,3} \setminus e$ et $L(K_{3,3} \setminus e)$.

III

Le Théorème Fort des Graphes Parfaits

*“To ask the right question is harder
than to answer it.”*

Georg Cantor

Les graphes parfaits ont été introduits par Claude Berge au début des années 1960 à la suite d’un cheminement assez complexe qu’il raconte lui-même dans un article agréable [14]. Pour une synthèse complète des recherches sur les graphes parfaits nous renvoyons à quatre références : un article un peu ancien de L. Lovász [115], un ouvrage collectif publié sous la direction de C. Berge et V. Chvátal [10], un ouvrage collectif plus récent, publié sous la direction de L. Ramírez Alfonsín et B. Reed [140] et un article récent de M. Chudnovsky, N. Robertson, P. Seymour et R. Thomas [31]. De manière un peu anachronique, on peut aujourd’hui motiver l’introduction des graphes parfaits par la théorie de la complexité. Le problème qui nous occupe est celui de la coloration, reformulé ci-dessous comme un problème de décision :

Problème III.1 (Coloration).

ÉTANT DONNÉ : Un graphe G et un entier $k \geq 3$.

TROUVER : Une k -coloration de G .

COMPLEXITÉ : \mathcal{NP} -complet (Karp [100]).

Il est clair que si un graphe G contient une clique de taille k , il faut au moins k couleurs pour le colorier. Donc, pour tout graphe on a : $\chi(G) \geq \omega(G)$. Une plus grande clique apparaît donc comme un bon candidat pour être un certificat du non du problème de la coloration. Il est donc naturel de se demander s’il y a toujours égalité entre le nombre chromatique et la taille d’une plus grande clique. Ce n’est pas le cas et le plus petit contre-exemple est C_5 : $\chi(C_5) = 3$ et $\omega(C_5) = 2$. Plus généralement, n’importe quel trou impair H vérifie $\chi(H) = 3$ et $\omega(H) = 2$. Alain Ghouila-Houri [68] a également remarqué que n’importe quel antitrou impair \overline{H} avec $2n + 1$ sommets vérifie $\chi(\overline{H}) = n + 1$ et $\omega(\overline{H}) = n$. Donc, l’égalité $\chi = \omega$ est fautive en général, mais on peut se demander pour quels graphes elle demeure exacte. Dès les origines, Claude Berge s’est intéressé aux graphes vérifiant $\chi = \omega$ (ou ayant comme

il disait “la belle propriété”) pour tous leurs sous-graphes induits. En effet, sans cette restriction, n’importe quel graphe peut être muni artificiellement de la belle propriété par l’ajout d’une grande clique par exemple. L’étude des graphes ayant la belle propriété risque donc de se ramener à celle des graphes ayant quelque part une grande clique.

Définition III.0.0.1 (Berge, [6]). Un graphe G est dit *parfait* si et seulement si pour chacun de ses sous-graphes induits G' on a $\chi(G') = \omega(G')$; autrement, le graphe G est dit *imparfait*.

Pour la classe des graphes parfaits, on dispose d’un bon certificat du non et aussi du oui pour le problème de la coloration. Il est donc naturel de se demander s’il existe un algorithme en temps polynomial pour colorier les graphes parfaits. C’est bien le cas :

Algorithme III.2 (Grötschel, Lovász, Schrijver, [73]).

ENTRÉE : Un graphe parfait G .

SORTIE : Une coloration optimale de G .

COMPLEXITÉ : Polynomiale.

Il faut noter que les recherches ayant conduit à l’algorithme ci-dessus ont joué un rôle central dans le développement de branches importantes de l’optimisation, comme la programmation semi-définie (Cf. [143]). Il utilise la méthode des ellipsoïdes qui a la réputation d’être très difficile à implémenter en raison de problème d’instabilité numérique. La recherche d’un algorithme performant ou conceptuellement simple pour colorier les graphes parfaits reste donc d’actualité.

Nous avons vu que les trous impairs et les antitrous impairs sont des graphes imparfaits. Donc, dès qu’un graphe contient l’un deux, il est lui aussi imparfait. Les graphes sans trou impair et sans antitrou impair sont donc la plus grande classe de graphes dont on peut espérer la perfection. Cela justifié la définition suivante :

Définition III.0.0.2. Un graphe G est dit *de Berge* si et seulement s’il ne contient ni trou impair ni antitrou impair.

III.1 La capacité de Shannon

Revenons dans l’histoire et passons en revue ce qui a motivé Berge à introduire les graphes parfaits. Considérons la transmission de messages par un canal bruité. Un transmetteur sur un canal de communication est capable d’envoyer des signaux appartenant à un certain ensemble fini (ou *alphabet*) A . Certaines paires de ces signaux sont si semblables l’un à l’autre qu’ils pourraient être confondus par le récepteur à cause des distorsions possibles au cours de la transmission. Étant donné un entier strictement positif k , quel est le plus grand nombre de suites de signaux (ou *mots*) de longueur k qui peuvent être transmises sans confusion possible par le récepteur ?

Pour être plus précis, nous associons à chaque $a \in A$ les symboles a_1, a_2, \dots d'un alphabet de sortie. La signification de ceci est que lorsque a est envoyé à travers le canal, un de a_1, a_2, \dots est reçu, disons selon une distribution de probabilité. Cependant, dans ce modèle nous nous intéressons aux transmissions qui sont 100% sans erreur, et nous définissons donc la confusion comme suit. Soit $a \in A$ comme ci-dessus, et soit $b \in A$ a b_1, b_2, \dots comme membres correspondants à l'alphabet de sortie. Nous disons que a et b sont *confondants* si $a_i = b_j$ pour certains i, j , sinon nous disons qu'ils sont *non-confondants*. Enfin, nous disons que deux mots $x, y \in A^t$ de longueur t sont *non-confondants* si pour au moins une coordonnée i les entrées correspondantes x_i et y_i sont non-confondantes.

Pour traduire ce problème en théorie des graphes, nous avons besoin du concept de produit fort de deux graphes G et H (voir la section II.1.2). Notons G le graphe d'ensemble de sommets A dans lequel deux sommets u et v sont adjacents s'ils représentent des signaux qui peuvent être confondus l'un avec l'autre, et soit G^k le produit fort de k copies de G . Ainsi G^k est le graphe dont les sommets sont les mots de longueur k sur A dans lequel deux mots distincts (u_1, u_2, \dots, u_k) et (v_1, v_2, \dots, v_k) sont reliés par une arête si $u_i = v_i$ ou $u_i v_i \in E(G)$, pour tout $1 \leq i \leq k$. Autrement dit, deux mots distincts sont adjacents dans G^k s'il y a possibilité que l'un deux puisse être pris pour l'autre par le récepteur. Il s'ensuit que le nombre maximum de mots de longueur k ayant la propriété souhaitée est tout simplement la stabilité de G^k . Par exemple si $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ et que tout signal i peut être confondu avec $i - 1$ ou $i + 1 \pmod{5}$, alors $G = C_5$. Un dessin de $G^2 = C_5^2$ sur le tore, ainsi qu'un stable d'ordre 5 indiqué par les points noirs, est donnée Figure III.1; notons que, comme le graphe est dessiné sur le tore, les quatre sommets des coins représentent un seul et même sommet, $(0, 0)$. Cela montre que $\alpha(G^2) \geq 5$. On peut en fait vérifier que $\alpha(G^2) = 5$. Ainsi, dans ce cas, un maximum de cinq mots de longueur 2, par exemple 00, 12, 24, 31, 43, peut être transmis sans risque de confusion par le récepteur.

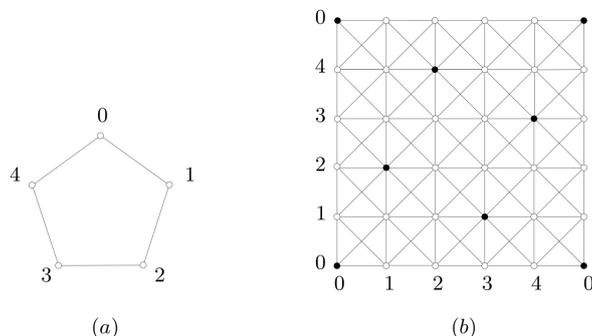


FIGURE III.1 – (a) C_5 , et (b) un stable à cinq sommets dans C_5^2 .

Motivé par son travail original en théorie de l'information, Shannon (1956) [150] a introduit le paramètre

$$\Theta(G) := \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\alpha(G^k)}$$

maintenant communément appelé la *capacité de Shannon* de G , comme mesure de la capacité de transmission sans erreur sur un canal bruité dont le graphe associé est G . (Il peut être démontré que cette limite existe et est égale à $\sup_k \sqrt[k]{\alpha(G^k)}$, voir Berge (1985) [12].) Comme $\alpha^k(G) \leq \alpha(G^k)$ pour tout k , il vient que

$$\alpha(G) \leq \Theta(G) \quad (\text{III.1})$$

Le plus petit graphe pour lequel l'inégalité III.1 est stricte est le 5-cycle. En employant des techniques algébriques ingénieuses, Lovász (1979) [114] a montré que $\Theta(C_5) = \sqrt{5}$.

D'une manière équivalente, on peut considérer le graphe G comme étant le graphe d'ensemble de sommets A et les arêtes sont les paires d'éléments d'éléments non-confondants de A . Ainsi, nous nous intéressons aux cliques maximums de G^k , où G^k est le graphe ayant comme sommets tous les k -uplets de sommets de G dans lequel deux tels k -uplets sont adjacents si et seulement si pour une certaine coordonnée les entrées correspondantes sont adjacentes dans G . La capacité de Shannon est définie comme suit

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \log \omega(G^k).$$

Il est facile de voir que la limite existe. De plus, nous avons les inégalité suivantes

$$\omega^n(G) \leq \omega(G^n) \leq \chi(G^n) \leq \chi^n(G) \quad (\text{III.2})$$

Il s'ensuit que si $\chi(G) = \omega(G)$, alors la capacité de Shannon est égale au logarithme de cette valeur. Cela soulève la question de savoir quels sont les graphes minimaux qui ne satisfont pas $\chi(G) = \omega(G)$, ce qui amène Berge à formuler ses conjectures influentes.

III.2 Classes de graphes parfaits

Dans cette section, nous présentons brièvement par ordre alphabétique les définitions de certaines classes de graphes parfaits. Pour chaque classe, nous donnons une référence à une preuve que tous les graphes de la classe sont parfaits. Notez qu'avec la démonstration de la Conjecture Forte des Graphes Parfaits, il suit immédiatement pour toutes les classes qu'elles ne contiennent que des graphes parfaits. Pour des informations plus complètes sur les relations entre ces classes, on pourra se référer à un article de Stefan Hougardy [93].

alternativement colorable Un graphe est dit *alternativement colorable* si ses arêtes peuvent être colorées en utilisant seulement deux couleurs telle que dans chaque cycle induit de longueur au moins quatre aucuns deux arêtes adjacentes ont la même couleur. Cette classe de graphes a été définie par Hoàng [87] qui a également prouvé la perfection de ces graphes.

alternativement orientable Un graphe est dit alternativement orientable s'il admet une orientation de ses arêtes telle que dans chaque cycle induit de longueur au moins quatre l'orientation des arêtes alterne. Cette classe de graphes a été définie par Hoàng [87] qui a également prouvé la perfection de ces graphes.

AT-free Berge Un graphe est appelé AT-free Berge¹ s'il est un graphe de Berge et ne contient pas d'astéroïde triple. Un *astéroïde triple* est un ensemble indépendant de trois sommets, de sorte que chaque paire est jointe par un chemin qui évite le voisinage du troisième. Cette classe de graphes a été introduite en [108]. La perfection de ces graphes a été observée par Maffray [[45], page 401]. Comme son argument n'est pas publié, nous l'énonçons brièvement ici. Si un AT-free Berge graphe a la stabilité numéro deux alors il doit être le complément d'un graphe biparti et donc parfait. Si le graphe a un ensemble stable de taille trois, disons $\{x, y, z\}$, alors puisque le graphe est AT-free, il doit être que l'ensemble de tous les voisins de l'un, disons z , sépare x de y , c'est-à-dire que z est le centre d'une étoile d'articulation. La perfection découle de [35].

BIP* Un graphe appartient à la classe BIP* si tous les sous-graphes induits H qui ne sont pas bipartis ont la propriété que H ou \overline{H} contient une étoile d'articulation. Cette classe de graphes a été définie par Chvátal [35] qui a également prouvé la perfection de ces graphes.

biparti Un graphe est dit biparti si son nombre chromatique est au plus égal à deux. La perfection des graphes bipartis découle de la définition.

brittle Un graphe est dit brittle² si tout sous-graphe H de G contient un sommet qui n'est une extrémité ni un point intérieur d'un P_4 dans H . Cette classe de graphes a été introduite par Chvátal. La perfection suit facilement car tous ces graphes sont parfaitement ordonnés [88].

Berge dégénéré Un graphe est dit de Berge dégénéré s'il s'agit d'un graphe de Berge et tout sous-graphe induit H possède un sommet de degré au plus $\omega(H) + 1$. Cette classe de graphes a été définie par Aït Haddadène et Maffray [2] qui ont également prouvé la perfection de ces graphes.

Berge sans C_4 Un graphe de Berge sans C_4 est un graphe de Berge qui ne contient pas un cycle à 4 sommets comme un sous-graphe induit. La perfection de ces graphes a été montrée par Conforti, Cornuéjols, et Vušković [43].

Berge sans chaise Un graphe de Berge sans chaise est un graphe de Berge qui ne contient pas une *chaise* (voir la figure III.2(c)) en tant que sous-graphe induit. La perfection de ces graphes a été montrée par Sassano [147].

1. Ces termes ont probablement une bonne traduction, mais j'ai préféré garder ici les termes d'origines afin de permettre au lecteur averti de reconnaître immédiatement des concepts familiers.

2. En français : fragile.

Berge sans diamant Un graphe de Berge sans diamant est un graphe de Berge qui ne contient pas de diamant (un K_4 avec une arête enlevé, voir Figure II.21) comme un sous-graphe induit. Tucker [156] a prouvé la perfection de ces graphes basés sur les résultats antérieurs de Parthasarathy et Ravindra [137].

Berge sans fléchette Un graphe est de Berge sans fléchettes si c'est un graphe de Berge qui ne contient pas de fléchette (voir la figure III.2(d)) comme un sous-graphe induit. Sun [151] a prouvé la perfection de ces graphes.

Berge sans gemme Un graphe est appelé Berge sans gemme s'il s'agit d'un graphe de Berge sans gemme (voir figure III.2(f)) en tant que sous-graphe induit. La perfection de ces graphes découle du théorème Fort des Graphes Parfaits [31].

Berge sans griffe Un graphe de Berge sans griffe est un graphe de Berge qui ne contient pas une griffe comme sous-graphe induit. Parthasarathy et Ravindra [136] ont prouvé la perfection de ces graphes.

Berge sans I_4 Un graphe de Berge sans I_4 est un graphe de Berge qui ne contient pas un stable à quatre sommets. Ce sont des complémentaires de $\rightarrow Berge sans K_4$.

Berge sans $2K_2$ Ce sont les complémentaires des graphes $\rightarrow Berge sans C_4$.

Berge sans K_4 Un graphe de Berge sans K_4 est un graphe de Berge qui ne contient pas une clique à quatre sommets. Tucker [155] a prouvé la perfection de ces graphes.

Berge sans (K_5, P_5) Un graphe de Berge sans (K_5, P_5) est un graphe de Berge qui ne contient pas un K_5 ou un P_5 comme sous-graphe induit. Maffray et Preissmann ont démontré la perfection de ces graphes [117].

Berge sans patte Un graphe de Berge sans patte est un graphe de Berge qui ne contient pas une patte (voir la figure III.2(a)) comme un sous-graphe induit. La perfection découle de l'observation que ces graphes sont de Meyniel. Voir [131] pour une caractérisation de graphes sans patte.

Berge sans taureau Un graphe de Berge sans taureau est un graphe de Berge qui ne contient pas un taureau comme un sous-graphe induit. Chvátal et Sbihi [38] a prouvé que ces graphes sont parfaits.

clique séparable Un graphe est dit clique-séparable si chaque sous-graphe induit qui ne contient pas une clique d'articulation est de l'un des deux types suivants. Soit un graphe multiparti complet, soit son ensemble de sommets peut être partitionné en deux ensembles V_1 et V_2 tels que V_1 est un graphe biparti connexe, V_2 est une clique et tous les sommets de V_1 sont adjacents à tous les sommets de V_2 . Cette classe de graphes apparaît d'abord dans l'article de Gallai [64]. Gavril [66] a inventé le nom de cette classe. La perfection découle immédiatement de la définition.

co-classe Complémentaires de graphes dans $\rightarrow classe$.

cographe voir $\rightarrow P_4$ -free.

contraction de cographe Un graphe G est une contraction de cographe s'il existe un cographe H et quelques ensembles indépendants deux-à-deux disjoints dans H tels que G est obtenu à partir de H en contractant chacun des ensembles indépendants à un seul sommet (les multiples arêtes résultantes sont identifiées) et rejoignant les nouveaux sommets par paires. Hujter et Tuza [95] ont introduit cette classe de graphes et prouvé qu'ils sont parfaits. Une bonne caractérisation de ces graphes est donnée dans [106].

comparabilité Un graphe est un graphe de comparabilité s'il existe un ordre partiel " $<$ " sur ses sommets tel que deux sommets x et y sont adjacents dans le graphe si et seulement si $x < y$ ou $y < x$. Ces graphes sont également appelés transitifs orientables. La perfection découle d'un résultat classique de Dilworth [53].

cordal voir \rightarrow *triangulé*.

$\Delta \leq 6$ **Berge** La classe $\Delta \leq 6$ Berge contient tous les graphes de Berge dans lesquels le degré maximum est d'au plus 6. Grinstead [72] a prouvé que ces graphes sont parfaits.

doc-free Berge Le nom doc-free Berge est l'abréviation de la classe des graphes de Berge sans *cycle impair diamanté* (**d**iamonded **o**dd **c**ycle). Ce sont des graphes de Berge qui ne contiennent pas de cycles impairs diamantés comme sous-graphes induits. Un cycle impair diamanté à cinq sommets est un P_4 ou un C_4 avec un cinquième sommet adjacent à tous les autres. Un cycle impair C avec plus de cinq sommets est appelé un cycle impair diamanté s'il a deux cordes $\{x, y\}$ et $\{x, z\}$ avec $\{y, z\}$ une arête de C et qu'il existe un sommet w sur C adjacent à y et z mais pas x . De plus, aucune arête de C autre que $\{y, z\}$ ne se trouve dans un triangle induit par les sommets de C . Carducci [25] a prouvé la perfection de ces graphes.

élémentaire Un graphe est dit élémentaire si ses arêtes peuvent être colorées par deux couleurs, de sorte qu'aucun P_3 induit monochromatique ne se produise. Les graphes élémentaires ont été introduits par Chvátal et Sbihi [39]. La perfection de ces graphes découle du fait qu'ils sont de Berge sans griffe. Maffray et Reed [119] donnent une description de la structure des graphes élémentaires.

faiblement cordal voir \rightarrow *faiblement triangulé*.

faiblement triangulé Un graphe est appelé faiblement triangulé si ni le graphe ni son complémentaire ne contiennent un cycle induit de longueur au moins cinq. Ces graphes sont aussi appelés *faiblement cordal*. Hayward [80] a prouvé que les graphes faiblement triangulés sont parfaits.

fortement parfait Un graphe est fortement parfait si chaque sous-graphe induit contient un stable qui intersecte toutes les cliques maximales. Berge et Duchet [11] ont introduit les graphes fortement parfaits et prouvé leur perfection.

forêt Un graphe est appelé une forêt s'il ne contient pas de cycle. Ces graphes sont parfaits car ils sont bipartis.

Gallai Il existe deux classes différentes de graphes parfaits qui ont reçu le nom de Gallai. Historiquement \rightarrow les graphes *triangulés* ont été appelés graphes de Gallai [14]. Plus tard, \rightarrow *i-triangulés* ont reçu ce nom.

HHD-free Un graphe est dit HHD-free s'il ne contient pas de *maison* (voir la figure III.2(b)), un trou de longueur au moins 5 ou un *domino* (voir la figure III.2(e)) en tant que sous-graphe induit. Cette classe de graphes a été introduite dans [88]. La perfection découle facilement de l'observation que ces graphes sont Meyniel.

i-triangulé Un graphe est dit *i-triangulé* si chaque cycle impaire de longueur au moins cinq a deux cordes non croisées. Ces graphes sont également appelés \rightarrow Gallai. Gallai [64] a prouvé la perfection de ces graphes.

intervalle Un graphe est un graphe d'intervalles si chaque sommet peut être représenté par un intervalle sur la ligne réelle de telle sorte que deux sommets sont adjacents si et seulement si leurs intervalles correspondants se croisent. Ces graphes sont \rightarrow *triangulés* [69] et donc parfaits.

légèrement triangulé Un graphe est dit légèrement triangulé s'il ne contient pas de trou de longueur au moins cinq et chaque sous-graphe induit H contient un sommet dont le voisinage dans H ne contient pas de P_4 . Cette classe de graphes a été introduite par Maire [120] qui a également prouvé la perfection de ces graphes.

LGBIP La classe LGBIP comprend tous les graphes des lignes des graphes bipartis. Comme noté dans [6], la perfection de ces graphes découle d'un résultat classique de König [102].

line parfait Un graphe est dit line parfait si son graphe des lignes est parfait. La perfection découle d'une caractérisation de Trotter [153].

localement parfait Un graphe est dit localement parfait si tout sous-graphe induit admet une coloration de ses sommets de sorte que pour tout sommet, le nombre de couleurs utilisées au voisinage de ce sommet soit égal au cliquicité³ du voisinage du sommet. Cette classe de graphes a été introduite par Preissmann [138] qui a également prouvé la perfection de ces graphes.

Meyniel Un graphe est dit de Meyniel si chaque cycle impair de longueur au moins cinq a au moins deux cordes. Meyniel [122], [123] a prouvé la perfection de ces graphes. Le même résultat a été prouvé indépendamment par Markosian et Karapetian [121].

murky Un graphe est appelé murky⁴ s'il ne contient pas C_5 , P_6 ou $\overline{P_6}$ comme sous-graphe induit. Hayward [81] a prouvé que ces graphes sont parfaits.

3. la taille maximum d'une clique

4. Ces termes ont probablement une bonne traduction, mais j'ai préféré garder ici les termes d'origines afin de permettre au lecteur averti de reconnaître immédiatement des concepts familiers.

opposition Un graphe est appelé opposition s'il admet une orientation de ses arêtes telle que dans chaque P_4 induit, les deux arêtes d'extrémité se dirigent vers l'intérieur ou vers l'extérieur. Cette classe de graphes a été introduite par Chvátal [40]. La perfection découle du théorème Fort des Graphes Parfaits [31]. Notez qu'il existe une autre classe de graphes parfaits appelée opposition [129] qui exige en outre que l'orientation des arêtes soit acyclique. On appelle donc cette classe \rightarrow *opposition stricte*.

opposition stricte Un graphe est appelé opposition stricte s'il admet une orientation acyclique de ses arêtes telle que dans chaque P_4 induit, les deux arêtes d'extrémité se dirigent toutes les deux vers l'intérieur ou vers l'extérieur. Olariu [129] a prouvé que ces graphes sont parfaits.

P_4 -free Un graphe est dit sans P_4 s'il ne contient pas de P_4 comme sous-graphe induit. Ces graphes sont aussi appelés cographes. La perfection découle d'un résultat de Seinsche [149].

P_4 -lite Un graphe est appelé P_4 -lite si tout sous-graphe induit H avec au plus six sommets contient au plus deux P_4 induits ou H ou \overline{H} est le graphe 3-sun (voir la figure III.2(g)). Ces graphes ont été introduits dans [98]. La perfection découle du fait qu'ils sont \rightarrow *faiblement triangulés*.

P_4 -réductible Un graphe est appelé P_4 -réductible si chaque sommet appartient à au plus un P_4 induit. Ces graphes ont été introduits dans [97]. La perfection découle du fait qu'ils sont \rightarrow *faiblement triangulés*.

P_4 -sparse Un graphe est appelé P_4 -sparse⁵ si aucun ensemble de cinq sommets n'induit plus d'un P_4 . Cette classe de graphes a été introduite dans [85]. La perfection découle du fait que ces graphes sont \rightarrow *faiblement triangulés*.

P_4 -stable Berge Un graphe est appelé P_4 -stable Berge s'il s'agit d'un graphe de Berge contenant un stable qui intersecte tous les P_4 induits. Hoàng et Le [90] ont prouvé que ces graphes sont parfaits.

parfaitement contractile Un graphe est dit parfaitement contractile si pour tout sous-graphe induit H il existe une suite $H = H_0, H_1, \dots, H_k$ pour un k tel que H_{i+1} est obtenu à partir de H_i par contraction d'une paire d'amis et H_k est une clique. Bertschi [15] a introduit cette classe de graphes et prouvé qu'ils sont parfaits.

parfaitement ordonnable Un graphe est dit parfaitement ordonnable s'il existe une orientation acyclique des arêtes telle que dans aucun P_4 induit les deux arêtes d'extrémité ne sont orientées vers l'intérieur. Cette classe de graphes a été introduite par Chvátal [34] qui a également prouvé qu'ils sont parfaits.

parité Un graphe est appelé graphe de parité si pour chaque paire de sommets, les longueurs de tous les chemins induits qui les relient ont la même parité. Burlet et Uhry [24] ont prouvé qu'un graphe est un

5. clairsemé

graphe de parité si et seulement si chaque cycle impaire de longueur au moins cinq a deux cordes croisées. La perfection de ces graphes a été prouvée par Olaru [132].

permutation Un graphe est appelé graphe de permutation s'il peut être représenté par une permutation $\pi : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$ de telle sorte que deux sommets $i < j$ sont adjacents si et seulement si $\pi(i) > \pi(j)$. La perfection de ces graphes découle d'une caractérisation de Dushnik et Miller [56].

planar Berge La classe planar Berge contient tous les graphes de Berge qui sont planaires. La perfection de ces graphes a été montrée par Tucker [154].

pré-parfait Un sommet x dans un graphe G est dit *prédominant* s'il existe un autre sommet y tel que toute clique maximum de G contenant y contient x ou chaque ensemble stable maximum contenant x contient y . Un graphe est pré-parfait si chaque sous-graphe induit a un sommet prédominant. Hammer et Maffray [78] ont introduit cette classe de graphes et prouvé que tous les graphes pré-parfaits sont parfaits.

quasi-parité Un graphe est de quasi-parité si pour chaque sous-graphe induit H de G , H ou \overline{H} contient une paire d'amis. Meyniel [124] a prouvé que les graphes de quasi-parité sont parfaits.

quasi-parité stricte Un graphe est de quasi-parité stricte si chaque sous-graphe induit ou bien contient une paire d'amis ou est une clique. Meyniel [124] a prouvé que les graphes de quasi-parité stricte sont parfaits.

Raspail Un graphe est de Raspail si chaque cycle impair a une corde courte, c'est-à-dire une corde joignant deux sommets ayant une distance de deux sur le cycle. Voir [151] pour une explication de l'origine du nom de cette classe. La perfection de ces graphes découle du théorème Fort des Graphes Parfaits [31].

scindé Un graphe est scindé si son ensemble de sommets peut être partitionné en deux ensembles V_1 et V_2 tels que V_1 induise un stable et V_2 induise une clique. La perfection des graphes scindés découle du fait qu'ils sont triangulés.

squelette Un graphe est appelé squelette s'il peut être obtenu en supprimant une collection S d'étoiles dans un graphe de parité. Aucun centre d'étoiles dans S ne doit être joint par un chemin induit de longueur au plus deux. Hertz [84] a prouvé que ces graphes sont parfaits.

slender Un graphe est dit slender s'il peut être obtenu à partir d'un graphe \rightarrow *i-triangulé* en supprimant tous les arêtes d'un ensemble d'arêtes indépendantes arbitraire. Hertz [83] a prouvé la perfection.

slim Un graphe est appelé slim s'il peut être obtenu à partir d'un graphe de Meyniel en supprimant tous les arêtes qui sont induites par un ensemble de sommets arbitraire. Hertz [82] a prouvé que ces graphes sont parfaits.

snap Un graphe est appelé snap s'il est de Berge et chaque sous-graphe induit contient un sommet dont le voisinage peut être partitionné en un ensemble stable et une clique. Maffray et Preissmann [118] ont prouvé la perfection de ces graphes.

2-split Berge Un graphe est appelé 2-split Berge s'il s'agit d'un graphe de Berge et s'il peut être divisé en deux \rightarrow graphes *scindés*. Hoàng et Le [91] ont prouvé que les graphes 2-split sont parfaits.

threshold Un graphe est appelé threshold graph s'il ne contient pas de C_4 , $\overline{C_4}$ et P_4 comme sous-graphe induit. La perfection de ces graphes suit facilement puisqu'ils sont triangulés.

totalement unimodulaire voir \rightarrow *unimodulaire*.

transitivement orientable voir \rightarrow *comparabilité*.

tree Un graphe connexe qui ne contient pas de cycle s'appelle un arbre (tree). Les arbres sont parfaits car ils sont bipartis.

triangulé Un graphe est triangulé si chaque cycle de longueur au moins quatre contient une corde. Ces graphes sont également appelés cordal. La perfection des graphes triangulés découle des résultats de Hajnal et Surányi [76] et Dirac [55].

trivialement parfait Un graphe est dit trivialement parfait si pour chaque sous-graphe induit H la stabilité de H est égal au nombre de cliques maximales dans H . Golumbic [71] a introduit ces graphes et a prouvé leur perfection. Il a également montré qu'un graphe est trivialement parfait si et seulement s'il ne contient pas de C_4 et pas de P_4 comme sous-graphe induit.

unimodulaire Un graphe est appelé unimodulaire si sa matrice d'incidence des sommets et des cliques maximales est totalement unimodulaire, c'est-à-dire que chaque sous-matrice carrée a un déterminant 0, 1 ou -1 . La perfection de ces graphes a été prouvée par Berge [8].

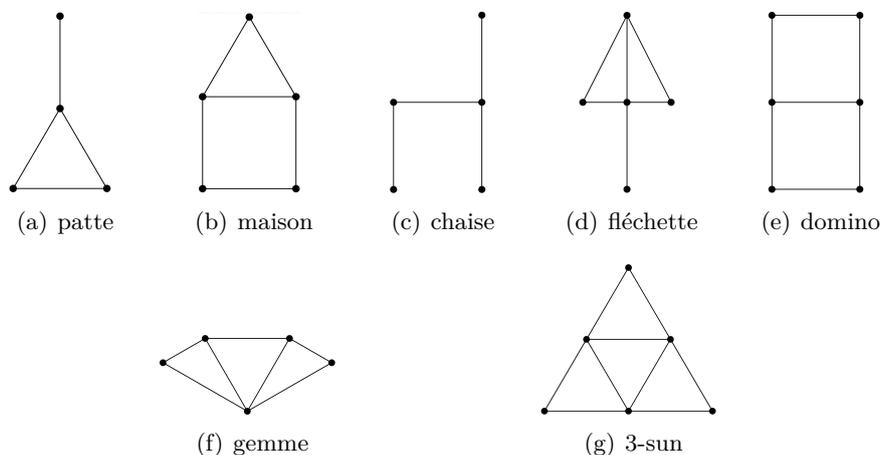


FIGURE III.2 – Graphes remarquables.

III.3 Les travaux de Lovász

Berge (1963) [7] a observé que certains graphes parfaits des classes ci-dessus ont un complémentaire parfait. Par exemple, le Théorème de König-Rado implique que le complémentaire de tout graphe biparti est parfait, et le Théorème de Dilworth implique que le complémentaire d'un graphe de comparabilité est parfait. Au vu de ces résultats, Berge [7] a conjecturé qu'un graphe est parfait si et seulement si son complémentaire l'est aussi. Ray Fulkerson [63] s'est cassé les dents sur cette conjecture (mais a développé pour l'attaquer la belle théorie des polyèdres antibloquants) et c'est Laci Lovász (1972) [113] qui l'a démontrée en 1972. Cette conjecture devenant ainsi ce qu'on appelle le *Théorème Faible des Graphes Parfaits*.

Théorème III.3.1 (Théorème Faible des Graphes Parfaits). *Un graphe est parfait si et seulement si son complémentaire est parfait.*

Très peu de temps après, A. Hajnal (voir [112]) a proposé une belle caractérisation des graphes parfaits. Cela aussi a été confirmé par Lovász [112].

Théorème III.3.2. *Un graphe G est parfait si et seulement si tout sous-graphe induit H de G satisfait l'inégalité*

$$|V(H)| \leq \alpha(H) \omega(H)$$

Observons que cette inégalité est invariante par passage au complémentaire, parce que $|V(\overline{H})| = |V(H)|$, $\alpha(\overline{H}) = \omega(H)$, et $\omega(\overline{H}) = \alpha(H)$. Le Théorème III.3.2 implique donc le Théorème Faible des Graphes Parfaits (III.3.1).

Définition III.3.0.1. Un graphe imparfait est dit *minimalement imparfait* si tous ses sous-graphes propres induits sont parfaits.

Les trous impairs de longueur cinq ou plus, ainsi que leurs complémentaires sont minimalement imparfaits.

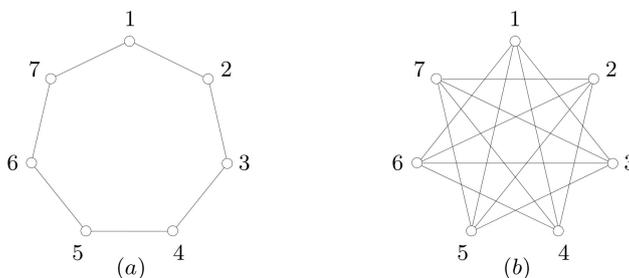


FIGURE III.3 – Les graphes minimalement imparfaits (a) C_7 , et (b) $\overline{C_7}$

La démonstration du théorème III.3.2 que nous donnons est due à Gasparian (1996) [65]. Elle repose sur un argument élémentaire de rang. Nous avons besoin d'une propriété des graphes minimalement imparfaits.

Proposition III.3.3. *Soit S un stable dans un graphe minimalement imparfaits G . Alors $\omega(G - S) = \omega(G)$*

Démonstration. Nous avons la chaîne d'inégalités suivantes

$$\omega(G - S) \leq \omega(G) \leq \chi(G) - 1 \leq \chi(G - S) = \omega(G - S)$$

Comme les membres gauche et droit sont les mêmes, il y a égalité partout. En particulier, $\omega(G - S) = \omega(G)$. \square

Nous pouvons maintenant établir un résultat structurel sur les graphes minimalement imparfait. Il joue un rôle clé dans la démonstration du Théorème III.3.2.

Lemme III.3.4. *Soit G un graphe minimalement imparfait de stabilité α et de cliquicité ω . Alors G contient $\alpha\omega + 1$ stables $S_0, S_1, \dots, S_{\alpha\omega}$ et $\alpha\omega + 1$ cliques $C_0, C_1, \dots, C_{\alpha\omega}$ tels que :*

- ▷ chaque sommet de G appartient à exactement α des stables S_i ,
- ▷ chaque clique C_i possède ω sommets,
- ▷ $C_i \cap S_i = \emptyset$, pour $0 \leq i \leq \alpha\omega$,
- ▷ $|C_i \cap S_j| = 1$, pour $0 \leq i < j \leq \alpha\omega$.

Démonstration. Soit S_0 un stable de α sommets de G , et soit $v \in S_0$. Le graphe $G - v$ est parfait puisque G est minimalement imparfait. Ainsi $\chi(G - v) = \omega(G - v) \leq \omega(G)$. Ainsi pour tout $v \in S_0$, l'ensemble $V \setminus \{v\}$ peut se partitionner en une famille \mathcal{S}_v de ω stables. Notons $\{\cup \mathcal{S}_v : v \in S_0\}$ par $\{S_1, S_2, \dots, S_{\alpha\omega}\}$, on peut voir que $\{S_0, S_1, \dots, S_{\alpha\omega}\}$ est une famille de $\alpha\omega + 1$ stables de G satisfaisant la première des propriétés ci-dessus.

Par la proposition III.3.3, $\omega(G - S_i) = \omega(G)$, $0 \leq i \leq \alpha\omega$. Par conséquent, il existe une clique maximum C_i de G qui est disjointe de S_i . Comme chacun des ω sommets de C_i est dans α stables S_j , $0 \leq i \leq \alpha\omega$, et comme deux sommets de C_i ne peuvent appartenir à un même stable, $|C_i \cap S_j| = 1$, pour $0 \leq i < j \leq \alpha\omega$. \square

Illustrons le lemme III.3.4 en prenant pour graphe minimalement imparfait G , le graphe $\overline{C_7}$, avec les sommets étiquetés comme sur la Figure III.3(b). Nous avons $\alpha = 2$ et $\omega = 3$. En appliquant la procédure décrite dans la preuve du lemme, nous obtenons les sept stables et sept cliques.

$$\begin{aligned} S_0 &= 12, & S_1 &= 23, & S_2 &= 45, & S_3 &= 67, & S_4 &= 34, & S_5 &= 56, & S_6 &= 17 \\ C_0 &= 357, & C_1 &= 146, & C_2 &= 136, & C_3 &= 135, & C_4 &= 257, & C_5 &= 247, & C_6 &= 246 \end{aligned}$$

S :	$\begin{array}{c} S_0 \ S_1 \ S_2 \ S_3 \ S_4 \ S_5 \ S_6 \\ 1 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \\ 2 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \\ 3 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \\ 4 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \\ 5 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \\ 6 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \\ 7 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \end{array}$	C :	$\begin{array}{c} C_0 \ C_1 \ C_2 \ C_3 \ C_4 \ C_5 \ C_6 \\ 1 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \\ 2 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \\ 3 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \\ 4 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \\ 5 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \\ 6 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \\ 7 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \end{array}$
------------	---	------------	---

FIGURE III.4 – Matrices d'incidence de familles des stables et cliques de $\overline{C_7}$.

(où 12 est l'ensemble $\{1, 2\}$, et ainsi de suite.) Les matrices d'incidences S et C de ces familles sont données Figure III.4.

Nous pouvons maintenant prouver le Théorème III.3.2.

Démonstration. Supposons que G soit parfait, et soit H un sous-graphe induit de G . Comme G est parfait, H est $\omega(H)$ -colorable, ce qui implique $|V(H)| \leq \alpha(H)\omega(H)$. Nous prouvons la réciproque par la contraposée en montrant que si G est minimalement imparfait, alors $|V(G)| \geq \alpha(G)\omega(G) + 1$.

Considérons les familles $\{S_i : 0 \leq i \leq \alpha\omega\}$ et $\{C_i : 0 \leq i \leq \alpha\omega\}$ de stables et cliques décrites au lemme III.3.4. Soit \mathbf{S} et \mathbf{C} les matrices d'incidence $n \times (\alpha\omega + 1)$ de ces familles. Il découle du lemme III.3.4 que $\mathbf{S}^t \mathbf{C} = \mathbf{J} - \mathbf{I}$, avec \mathbf{J} est la matrice carrée d'ordre $\alpha\omega + 1$ dont toutes les entrées valent 1 et \mathbf{I} la matrice identité d'ordre $\alpha\omega + 1$. Maintenant $\mathbf{J} - \mathbf{I}$ est une matrice inversible (d'inverse $(1/\alpha\omega)\mathbf{J} - \mathbf{I}$). Son rang est donc égale à son ordre, $\alpha\omega + 1$. Donc \mathbf{S} et \mathbf{C} sont elles aussi de rang $\alpha\omega + 1$. Mais ces matrices ont n lignes, donc $n \geq \alpha\omega + 1$. \square

Deux conséquences du Théorème Faible des Graphes Parfaits sont les suivantes :

Corollaire III.3.5. *Un graphe G est parfait si et seulement si, pour tout sous-graphe induit H de G , le nombre maximum de sommets d'un stable de H est égal au nombre minimum de cliques nécessaires pour couvrir les sommets de H .*

Corollaire III.3.6. *La capacité de Shannon d'un graphe parfait G est égale à sa stabilité : $\Theta(G) = \alpha(G)$.*

Le corollaire III.3.6 soulève le problème de déterminer les capacités de Shannon des graphes minimalement imparfaits. De celle-ci, on ne connaît que $\Theta(C_5)$. Il serait intéressant de déterminer $\Theta(C_7)$.

Lovász a également introduit une notion importante. Soient $\alpha, \omega \geq 1$ des entiers et G un graphe. On dit que G est (α, ω) -partitionnable si et seulement si pour tout sommet v de G , le graphe $G - v$ peut être partitionné en α cliques de taille ω et en ω stables de taille α . Le théorème suivant est une conséquence directe du Théorème III.3.2 :

Théorème III.3.7 (Lovász, [112]). *Soit G un graphe imparfait minimal. Alors G est partitionnable.*

Les graphes partitionnables ont de très nombreuses propriétés intéressantes (voir [139]). Notons que pour prouver le Théorème Fort des Graphes Parfaits, il suffit de montrer que tout graphe partitionnable contient un trou impair ou un antitrou impair. Le théorème suivant montre les principales propriétés des graphes partitionnables. Notons que Padberg [134] avait déjà démontré ce théorème dans le cas plus restreint des graphes minimalement imparfaits.

Théorème III.3.8 (Bland, Huang, Trotter [19]). *Soit G un graphe (α, ω) -partitionnable avec $n = \alpha\omega + 1$ sommets. Alors :*

- (a) *G possède exactement n cliques de taille ω .*
- (b) *G possède exactement n stables de taille α .*
- (c) *Chaque sommet de G appartient à exactement ω cliques de taille ω .*
- (d) *Chaque sommet de G appartient à exactement α stables de taille α .*
- (e) *Chaque clique de G de taille ω est disjointe d'exactlyement un stable de G de taille α .*
- (f) *Chaque stable de G de taille α est disjointe d'exactlyement une clique de G de taille ω .*
- (g) *Pour chaque sommet v de G , il existe une unique coloration de $G - v$ avec ω couleurs.*

III.4 2^{ème} conjecture de Berge

Si un graphe est parfait, alors tous ses sous-graphes induits le sont aussi. Cela implique que l'on peut caractériser les graphes parfaits en décrivant tous les graphes minimalement imparfaits. Nous avons observé que les trous impairs de longueur cinq ou plus sont minimalement imparfaits, de même que leurs complémentaires. Berge [7] a conjecturé que ce sont les seuls graphes minimalement imparfaits; de manière équivalente, il a conjecturé qu'un graphe est parfait si et seulement si aucun de ses sous-graphes induits n'est un cycle impair de longueur au moins cinq, ni le complémentaire d'un tel cycle. Il a baptisé cette conjecture, dont la véracité impliquerait le Théorème Faible des Graphes Parfaits, *Conjecture Forte des Graphes Parfaits*. Environ quarante ans plus tard, elle a été prouvée par Chudnovsky *et al.* [31].

Théorème III.4.1 (Conjecture Forte des Graphes Parfaits). *Un graphe est parfait si et seulement si aucun de ses sous-graphes induits n'est un trou impair de longueur au moins cinq ni le complémentaire d'un tel trou.*

Ayant démontré le Théorème Faible des Graphes Parfaits III.3.1, nous allons maintenant nous attaquer à la Conjecture Forte. Rappelez-vous qu'il suffit de démontrer que tout graphe de Berge est parfait. L'idée de la démonstration est que tout graphe de Berge ou bien fait partie d'une classe de graphes parfaits parmi quatre classes élémentaires connues, ou bien a un type de séparation qui ne peut pas se produire dans un graphe minimalement imparfait. Un tel résultat structurel démontre la Conjecture Forte puisqu'il implique qu'un graphe de Berge minimalement imparfait n'existe pas. Une petite remarque : on peut se contenter de séparations qui ne peuvent pas se produire dans un graphe de Berge minimalement imparfait avec le plus petit nombre de sommets : cela implique aussi qu'un graphe de Berge minimalement imparfait n'existe pas. C'est un tel résultat structurel qu'ont démontré Maria Chudnovsky, Neil Robertson, Paul Seymour et Robin Thomas [31].

III.5 Les graphes basiques

Nous mentionnons ici les quatre classes dites *basiques* de graphes parfaits, à savoir les graphes bipartis, les graphes des lignes de bipartis, et leurs complémentaires. La perfection des graphes bipartis est triviale (elle résulte par exemple du lemme I.1.22). La perfection des graphes des lignes de bipartis résulte du Théorème de König I.1.31.

Proposition III.5.1. *Le graphe des lignes d'un graphe biparti est parfait.*

Démonstration. Soit G un graphe biparti. König [102] a démontré que l'indice chromatique d'un graphe biparti est égal au degré maximum $\Delta(G)$, soit $L(G)$ le graphe des lignes de G , on a $\chi(L(G)) = \chi'(G)$ et $\omega(L(G)) = \Delta(G)$. Le théorème de König implique donc que $\chi(L(G)) = \omega(L(G))$. La proposition découle maintenant du fait que les sous-graphes induits de $L(G)$ sont aussi des graphes des lignes de graphes bipartis. \square

Nous aurons parfois besoin d'informations sur la structure des graphes des lignes de bipartis. Signalons que Lowell Beineke [3] a prouvé un théorème caractérisant les graphes des lignes en général. Indépendamment l'un de l'autre, Philippe Lehot et Nicholas Roussopoulos ont ensuite donné l'algorithme suivant :

Algorithme III.3 (Lehot [107], Roussopoulos [145]).

ENTRÉE : Un graphe G .

SORTIE : Un graphe R tel que $G = L(R)$. Si un tel graphe n'existe pas, l'algorithme retourne " G n'est pas un graphe des lignes".

COMPLEXITÉ : $O(n + m)$.

Nul n'a semble-t-il songé à spécialiser cet algorithme aux graphes des lignes de bipartis. Il y a de bonnes raisons à cela. Un théorème ancien de Hassler Whitney [159] affirme qu'en dehors du cas trivial de la griffe et du triangle, deux graphes différents ont toujours des graphes des lignes différents. Donc si on donne à l'algorithme de Lehot un graphe des lignes de biparti différent du triangle, on est certain que le graphe R retourné sera biparti. Autrement dit, l'algorithme de Lehot se spécialise de lui même aux graphes des lignes de bipartis, et comme il est déjà en temps linéaire, il est impossible d'améliorer sa complexité. Il existe cependant un théorème sur la structure des graphes des lignes de graphes bipartis :

Théorème III.5.2 (Harary et Holzmann, [79]). *Soit G un graphe. G est un graphe des lignes de biparti si et seulement si G est sans griffe, sans diamant et sans trou impair.*

Puisque les graphes bipartis et les graphes des lignes de graphes bipartis sont parfaits, il découle du Théorème Faible des Graphes Parfaits de Lovász III.3.1 que les complémentaires des graphes bipartis et des graphes des lignes de graphes bipartis sont parfaits. On peut aussi le vérifier directement, sans

faire appel au Théorème Faible des Graphes Parfaits (voir [115, 64, 103, 104]). Pour résumer, nous avons introduit dans cette section quatre classes de graphes parfaits :

- \mathcal{B} : la classe des graphes bipartis,
- $\overline{\mathcal{B}}$: la classe des compléments de graphes bipartis,
- \mathcal{LB} : la classe des graphes des lignes de graphes bipartis,
- $\overline{\mathcal{LB}}$: la classe des compléments de graphes des lignes de graphes bipartis.

Nous appellerons ces classes de graphes les *classes élémentaires de graphes parfaits*.

Définition III.5.0.1 (Conforti *et al.* [43]). La classe des graphes basiques est définie comme

$$BASIC = \mathcal{B} \cup \overline{\mathcal{B}} \cup \mathcal{LB} \cup \overline{\mathcal{LB}}.$$

III.6 Caractérisation des graphes basiques

Dans cette section, on va montrer que la classe des graphes basiques est caractérisée en termes de sous-graphes induits interdits. Le théorème suivant est bien connu :

Théorème III.6.1 (König, [105]). *Un graphe est biparti si et seulement s'il n'a pas de cycle impair.*

Il s'ensuit qu'un graphe de Berge est biparti si et seulement s'il est sans C_3 . Par conséquent, un graphe de Berge est co-biparti si et seulement s'il est sans O_3 , où O_3 est le graphe à trois sommets sans arêtes (voir la figure III.5). Le corollaire suivant découle du Théorème III.5.2.

Corollaire III.6.2. *La classe \mathcal{LB} est exactement la classe des graphes de Berge sans griffe et sans diamant, et la classe $\overline{\mathcal{LB}}$ est exactement la classe des graphes de Berge sans co-griffe et sans co-diamant.*

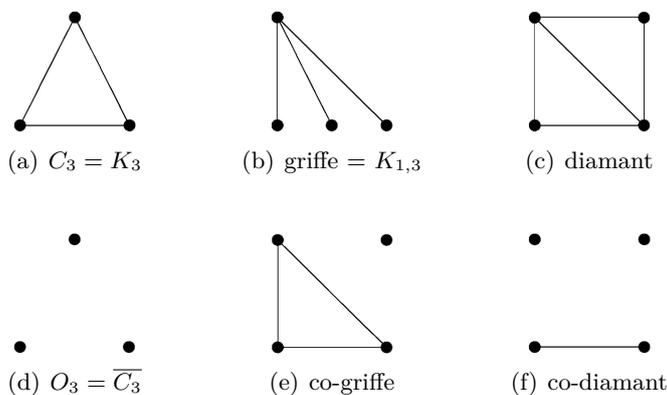


FIGURE III.5 – C_3 , la griffe, le diamant, et leurs compléments.

Le théorème suivant fournit une caractérisation des graphes basiques en termes de sous-graphes induits interdits.

Théorème III.6.3. *Un graphe G est basique si et seulement s'il ne contient aucun des graphes G_1, G_2, \dots, G_{16} (figure III.7), les trous impairs et les antitrous impairs comme sous-graphes induits.*

Démonstration. (Croquis) : Il suffit de prouver que chaque graphe de Berge non basique contient au moins un des graphes G_1, G_2, \dots, G_{16} (Figure III.7) comme sous-graphe induit. En fonction de l'existence de griffe et de co-griffe, nous divisons tous les graphes de Berge non basiques en quatre sous-classes. Le tableau 1 montre les quatre variantes possibles pour un graphe de Berge non basique arbitraire G , où "oui" signifie que G contient le sous-graphe induit correspondant et "non" signifie que G ne le fait pas.

Par exemple, la Classe 1 comprend tous les graphes de Berge qui contiennent à la fois griffe et co-griffe en tant que sous-graphes induits. Par le Théorème III.5.2, la Classe 1 est disjointe de $\mathcal{LB} \cup \overline{\mathcal{LB}}$. Puisque O_3 est un sous-graphe induit de griffe et C_3 est un sous-graphe induit de co-griffe, la Classe 1 est aussi disjointe de $\mathcal{B} \cup \overline{\mathcal{B}}$. Ainsi, la Classe 1 consiste seulement aux graphes de Berge non basiques. La Classe 2 est disjointe de $\mathcal{LB} \cup \overline{\mathcal{B}}$ parce que la griffe est interdite et O_3 est un sous-graphe induit de la griffe. Dès lors que les graphes de la Classe 2 sont sans co-griffe et la Classe 2 doivent être disjointe de $\overline{\mathcal{LB}} \cup \mathcal{B}$, il suit que les graphes de la Classe 2 doivent contenir à la fois co-diamant et C_3 comme sous-graphes induits.

Ainsi, il y a quatre possibilités à considérer.

Classe 1 : Si griffe et co-griffe ont une arête en commun, alors il y a quatre arêtes indéterminées. Bien qu'il y ait 16 combinaisons possibles, il n'est pas nécessaire de considérer tous les 16 sous-cas séparément. Laissez-nous illustrer la technique pour ce cas. Soit $V(\text{griffe}) = \{c, a, d, e\}$ et c soit le sommet central de la griffe, et que $V(\text{co-griffe}) = \{a, b, c, i\}$ et i soit le sommet isolé de co-griffe. Soient $\{a, c\}$ l'arête commune et H le graphe induit par ces six sommets. Ainsi, les quatre arêtes indéterminées dans H sont $\{d, b\}, \{d, i\}, \{e, b\}$ et $\{e, i\}$. Le graphe $H - i$ n'est pas isomorphe à G_2 dans la figure III.7. On peut donc supposer sans perte de généralité que d est adjacent à b . Maintenant, le sommet d est adjacent à i , sinon $H - e$ est isomorphe à G_1 . Supposons que e ne soit pas adjacent à b . Alors H est isomorphe à G_4 ou G_8 selon l'existence de $\{e, i\}$. Donc e est adjacent à b . Maintenant e est adjacent à i , sinon $H - d$ est isomorphe à G_1 . Ainsi, H est isomorphe à G_{10} . Par conséquent, chaque graphe ayant une griffe et une co-griffe avec une arête commune contient l'un des graphes de la figure III.7.

Si griffe et co-griffe ont une paire de sommets non adjacents en commun, alors il y a quatre arêtes indéterminées. Supposons que griffe et co-griffe aient un seul sommet en commun. Ensuite, il y a quatre cas à considérer, et chaque cas conduit à neuf arêtes indéterminées. Enfin, si griffe et co-griffe sont disjoints, alors nous devons considérer les graphes d'ordre 8. On peut

montrer que chaque graphe dans les cas ci-dessus contient un des graphes de la Figure III.7.

Classe 2 : Le tableau 1 implique une limite supérieure 11 de l'ordre maximal d'un graphe minimal dans la Classe 2. Pour réduire la limite supérieure, on peut facilement vérifier que chaque graphe de Berge minimal sans co-griffe qui contient C_3 et une griffe induit a cinq sommets - tous ces graphes sont montrés sur la figure III.6. Il s'ensuit que l'ordre d'un graphe minimal dans la Classe 2 est au plus neuf. On peut montrer que chaque graphe de la Classe 2 contient l'un des graphes de la figure III.7.

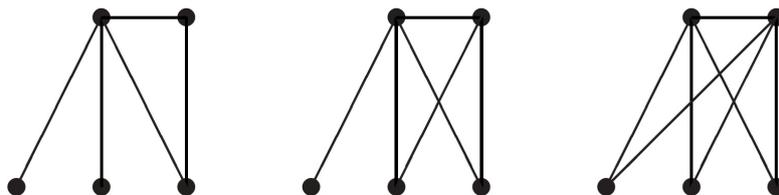


FIGURE III.6 – Illustration pour Classe 2

Classe 3 : Cette classe est complémentaire de la Classe 2. Par conséquent, l'ordre d'un graphe minimal dans la Classe 3 est au plus neuf et le résultat suit.

Classe 4 : Il y a deux cas à considérer si diamant et co-diamant ont une arête en commun, et il y a deux cas à considérer si diamant et co-diamant ont une paire de sommets non adjacents en commun. Supposons que diamant et co-diamant aient un seul sommet en commun. Ensuite, il y a quatre cas à considérer. Le dernier cas lorsque diamant et co-diamant sont disjoints produit des graphes d'ordre 8. Étant donné que la griffe et co-griffe sont interdits comme sous-graphes induits, il n'est difficile de montrer que la Classe 4 est vide. \square

Nous avons présenté seulement le croquis de la preuve parce que la preuve est très longue. On peut remarquer que l'idée développée ci-dessus peut être utilisée pour vérifier le résultat du Théorème III.6.3 par un ordinateur - en fait ; Igor E. Zverovich et Vadim E. Zverovich ont effectué une recherche informatique confirmant ce résultat.

Classe	C_3	O_3	Griffe	Diamant	co-Griffe	co-Diamant
Classe 1			Oui		Oui	
Classe 2	Oui		Oui		Non	Oui
Classe 3		Oui	Non	Oui	Oui	
Classe 4			Non	Oui	Non	Oui

Tableau 1: Les quatre classes.

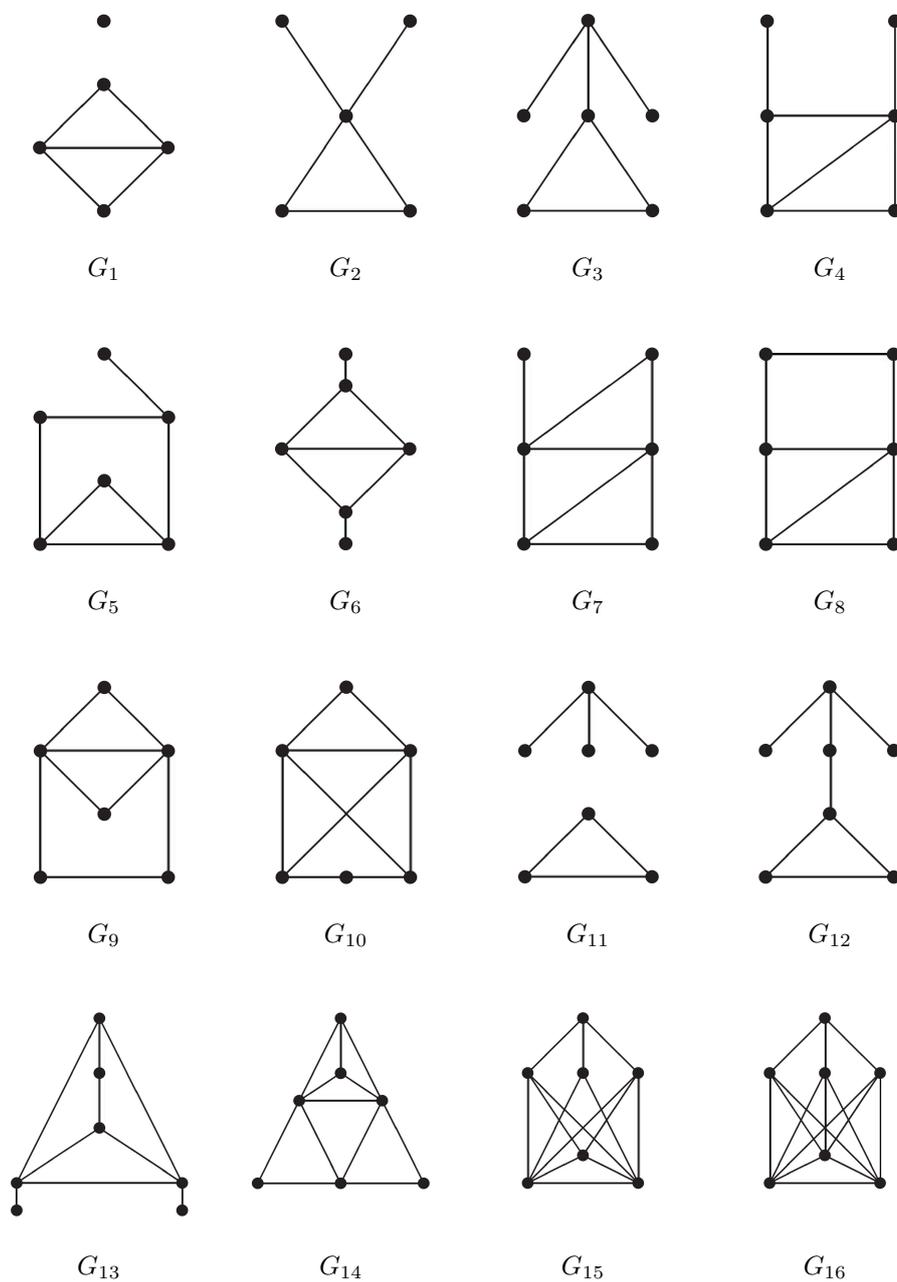


FIGURE III.7 – Sous-graphes induits minimaux interdits pour les graphes de Berge basiques.

III.7 Les théorèmes de décomposition

Par théorème de décomposition, nous entendons ici tout résultat affirmant que pour tout graphe G d'une certaine classe \mathcal{C} , ou bien G appartient à une sous-classe \mathcal{C}' ou bien G peut être cassé (décomposé) d'une manière *ad hoc* en plusieurs "morceaux". Un tel résultat sera d'autant plus intéressant que la sous-classe \mathcal{C}' sera simple et que l'opération de décomposition préservera de bonnes propriétés, comme par exemple l'appartenance à la classe \mathcal{C} .

On peut débattre longtemps pour savoir si tel ou tel théorème est ou non un véritable théorème de décomposition. Certains résultats ont de bonnes propriétés algorithmiques (2-joint, clique d'articulation ...), d'autres permettent de montrer beaucoup de théorèmes (étoile d'articulation), d'autres enfin ont l'avantage de s'appliquer à des classes de graphes très larges (partition antisymétrique, étoile doublé ...). Nous avons choisi la solution de facilité, consistant à ne pas entrer dans ce débat et à inclure dans cette section tous les résultats nous semblant nécessaires. Au Chapitre V consacrée aux problèmes ouverts, nous expliquerons pourquoi la partition antisymétrique n'a pas de bonnes propriétés algorithmiques.

L'utilisation de théorèmes de décomposition pour l'étude de classes de graphes parfaits a commencé avant même que Berge ait formulé clairement sa célèbre conjecture (voir [14] et [142] pour un historique détaillé des origines). Mais ce n'est qu'à la fin des années 1970 qu'est apparu le projet de prouver la conjecture forte des graphes parfaits par des techniques de décompositions. Lors de la conférence en l'honneur de Claude Berge qui s'est tenue à Paris en juillet 2004, Vašek Chvátal a raconté que la première personne ayant à sa connaissance formulé ce projet est Sue Whitesides, à l'automne 1977. Le premier résultat dans cette direction fut l'étude de la décomposition par *amalgame* des graphes de Meyniel par Burllet et Fonlupt [23]. Une autre étape importante fut la conférence de Princeton en 1993, où Chvátal et Reed ont compris que les théorèmes de décomposition des matrices équilibrées de Conforti, Cornuéjols, Kapoor et Vušković pouvaient avoir des analogies avec les graphes parfaits. Puis sont venus d'autres résultats que nous allons examiner ici.

L'exemple le plus ancien et le plus simple d'utilisation de décompositions provient d'un théorème de Dirac. Si G est un graphe, on appelle *clique d'articulation* de G tout ensemble d'articulation K de G , qui induit une clique de G . On appelle alors *pièces* de G les graphes $G[G_1 \cup K], \dots, G[G_k \cup K]$ où G_1, \dots, G_k sont les composantes connexes de $G \setminus K$.

Théorème III.7.1 (Dirac, [55]). *Soit G un graphe triangulé. Alors ou bien G est une clique, ou bien G possède une clique d'articulation.*

Théorème III.7.2 (Gallai, [64]). *Soit G un graphe possédant une clique d'articulation. Si les pièces de G sont parfaits, alors G est parfait.*

Ce dernier théorème a pour conséquence immédiate que les graphes minimalement imparfaits n'ont pas de clique d'articulation. Claude Berge [6] a donc remarqué la perfection des graphes triangulés, que l'on peut prouver par une récurrence évidente : les cliques sont des graphes parfaits. Si un graphe triangulé n'est pas une clique, il a une clique d'articulation par le Théorème III.7.1, ses pièces sont parfaites par hypothèse de récurrence, et il est parfait par le Théorème III.7.2. Depuis les années 1960, de nombreux théorèmes sur les graphes parfaits ont été démontrés sur ce modèle (voir [146]), l'idée étant de trouver des décompositions interdites dans les graphes minimalement imparfaits, ou mieux, préservant la perfection.

III.7.1 Partition antisymétrique

L'étoile d'articulation est l'une des décompositions les plus connues. Son intérêt provient entre autres du lemme suivant :

Lemme III.7.3 (Lemme de l'Étoile d'Articulation (**Chvátal**, [35])). *Un graphe minimalement imparfait ne peut pas avoir d'étoile d'articulation.*

Démonstration. Supposons qu'un graphe G minimalement imparfait ait une étoile d'articulation A, B, C, D . Soient G_1 le graphe induit par $A \cup B \cup C$ et G_2 le graphe induit par $A \cup B \cup D$. Les graphes G_1 et G_2 sont parfaits. Dans une $\omega(G)$ -coloration de G_i , soit S_i la classe de couleur qui contient le sommet unique de A , pour $i \in \{1, 2\}$. Le stable S_i intersecte toutes les $\omega(G)$ -cliques de G_i , i.e $\omega(G - (S_1 \cup S_2)) < \omega(G)$ [le fait que $V(G)$ ne contienne aucune arête entre C et D implique que $S = S_1 \cup S_2$ est un stable. Soit Q une clique de $G - S$. Q est entièrement contenue dans $G_1 - S_1$ ou dans $G_2 - S_2$ (car (C, D) est anticomplet). Puisque chacun de ces deux graphes est $(\omega(G) - 1)$ -colorable, alors $|Q| \leq \omega(G) - 1$ donc $\omega(G - (S_1 \cup S_2)) < \omega(G)$. Il en découle que le graphe $G - (S_1 \cup S_2)$ peut être colorié avec moins d' $\omega(G)$ couleurs, puisque c'est un graphe parfait. Comme $S_1 \cup S_2$ est un stable, G peut être colorié avec $\omega(G)$ couleurs, une contradiction. \square

L'étoile d'articulation a permis de prouver la perfection de nombreuses classes de graphes. Chvátal [35] a aussi conjecturé que les graphes minimalement imparfaits n'ont pas de partition antisymétrique :

Conjecture III.7.4 (**Chvátal**, [35]). *Soit G un graphe minimalement imparfait. Alors G ne possède pas de partition antisymétrique.*

Cette conjecture s'est révélée difficile, et de nombreux cas particuliers ont été étudiés. Cornuéjols et Reed [47] ont montré qu'un graphe minimalement imparfait ne peut pas contenir d'ensemble d'articulation induisant un graphe multipartite complet avec au moins deux composantes anticonnexes (un graphe *multipartite complet* est un graphe dont le complémentaire a pour composantes connexes des cliques). Mentionnons les travaux de Chín Hoàng [89] ainsi que ceux de Florian Roussel et Philippe Rubio qui ont eu des prolongements inattendus (voir Chapitre IV) :

Théorème III.7.5 (Roussel et Rubio, [144]). *Soit G un graphe minimalement imparfait possédant une partition antisymétrique (X, Y) . Alors aucune composante anticonnexe de $G[Y]$ n'est un stable.*

C'est Chudnovsky, Robertson, Seymour et Thomas qui sont venus à bout de la conjecture de Chvátal sur les partitions antisymétriques.

Théorème III.7.6 (Chudnovsky et al., [31]). *Un graphe minimalement imparfait ne peut pas avoir de partition antisymétrique.*

Malheureusement, pour démontrer ce résultat, ils utilisent le Théorème Fort des Graphes Parfaits III.4.1! C'est bien dommage car on aurait besoin d'un résultat de ce genre pour démontrer le Théorème Fort des Graphes Parfaits. Que faire? Chudnovsky, Robertson, Seymour et Thomas commencent par démontrer un résultat intermédiaire plus faible que le Théorème III.7.6.

Théorème III.7.7 (Chudnovsky et al., [30]). *Un graphe de Berge minimalement imparfait avec le plus petit nombre de sommets ne peut pas avoir de partition antisymétrique paire.*

Nous allons démontrer le Théorème III.7.7. Nous aurons besoin du *Lemme de Duplication* de Lovász [113]. Pour l'anecdote, ce lemme était la seule pièce qui manquait à Fulkerson pour démontrer le Théorème Faible des Graphes Parfaits III.3.1. Fulkerson s'était convaincu que ce lemme était sans doute faux, et il n'avait donc pas essayé très sérieusement de le démontrer. Fulkerson [63] dit : "In the Spring of 1971, I received a postcard from Berge saying that he had just heard that Lovász had a proof of the perfect graph conjecture. This immediately rekindled my interest, naturally, and so I sat down at my desk and thought again about the replication lemma. Some four or five hours later, I saw a simple proof of it".

Lemme III.7.8. (Lemme de Duplication (Lovász, [113])) *Soient G un graphe parfait et $v \in V(G)$. Créer un nouveau sommet v' et le joindre à v et à tous les voisins de v . Le graphe G' qui en résulte est parfait.*

Démonstration. Il suffit de démontrer que $\chi(G') = \omega(G')$ puisque, pour les sous-graphes induits, la démonstration est identique. Nous distinguons deux cas :

- Cas 1.** Le sommet v est contenu dans une clique maximum de G . Alors $\omega(G') = \omega(G) + 1$. Ceci implique que $\chi(G') = \omega(G')$, puisqu'une nouvelle couleur est nécessaire dans G' .
- Cas 2.** Le sommet v n'est contenu dans aucune clique maximum de G . Dans une $\omega(G)$ -coloration de G , considérons la classe S de couleur contenant v . On a $\omega(G - (S \setminus \{v\})) = \omega(G) - 1$, puisque toutes les cliques maximums de G intersectent $S \setminus \{v\}$. La perfection de G implique que le graphe $G - (S \setminus \{v\})$ peut être colorié avec $\omega(G) - 1$ couleurs. En utilisant une couleur supplémentaire pour les sommets de $(S \setminus \{v\}) \cup \{v'\}$, on obtient une $\omega(G)$ -coloration de G' . \square

Nous disons que G' est obtenu à partir de G en dupliquant v . La duplication peut être appliquée de manière récursive. Nous disons que v est dupliqué k fois si k copies de v sont faites, y compris v . Nous donnons maintenant la démonstration du Théorème III.7.7 :

Démonstration. Soit G un graphe de Berge minimalement imparfait avec le plus petit nombre de sommets. Supposons que G ait une partition antisymétrique paire A, B, C, D . Le Lemme III.7.3 implique que chacun des ensembles A, B, C, D a cardinalité au moins deux. Soit G' le graphe obtenu à partir de G en ajoutant un sommet v adjacent à tous les sommets de A et à aucun autre sommet de G . Si G' contient un trou impair, alors G a un chemin impair qui contredit (i) dans la définition d'une partition antisymétrique paire (voir page 77). De la même façon, si $\overline{G'}$ contient un trou impair, cela contredit (ii). Donc G' est un graphe de Berge. Considérons maintenant $G_1 = G' - D$ et $G_2 = G' - C$. Pour $i \in \{1, 2\}$, le graphe G_i est parfait puisque c'est un graphe de Berge avec moins de sommets que G . On duplique le sommet v dans G_i jusqu'à ce que v appartienne à une clique de cardinalité $\omega(G)$. Le Lemme de Duplication III.7.8 implique que le graphe R_i qui en résulte est parfait. Donc R_1 admet une $\omega(G)$ -coloration et de même R_2 admet une $\omega(G)$ -coloration. Ces deux colorations ont le même nombre de couleurs dans A . On suppose sans perte de généralité que ces couleurs sont numérotées $1, 2, \dots, k$. Soit K le sous-graphe de G induit par les sommets de couleurs $1, 2, \dots, k$ et soit H le sous-graphe de G induit par les sommets coloriés avec les autres couleurs. Puisque toutes les cliques de G sont dans $G - D$ ou $G - C$, la plus grande clique dans K a cardinalité k et la plus grande clique dans H a cardinalité $\omega(G) - k$. Les graphes H et K sont parfaits puisque ce sont des sous-graphes propres de G . Colorier K avec k couleurs et H $\omega(G) - k$ couleurs. On a ainsi colorié le graphe G avec $\omega(G)$ couleurs, ce qui contredit l'hypothèse que G est minimalement imparfait. \square

Le Théorème III.7.7 a été annoncé pour la première fois par Chudnovsky, Robertson, Seymour et Thomas en septembre 2001 à un atelier à Princeton [31]. Ce résultat clé justifie l'usage des partitions antisymétriques paires dans un théorème structurel sur les graphes de Berge, dans le but de démontrer la Conjecture Forte des Graphes Parfaits. Et c'est bien cette structure que Chudnovsky, Robertson, Seymour et Thomas [31] utilisent à fond dans leur article. Ils sont cependant parvenus à se débarrasser de la condition de parité en janvier 2002 (Chudnovsky et Seymour [32]) :

Théorème III.7.9 (Chudnovsky, Robertson, Seymour et Thomas, [31]). *Un graphe de Berge minimalement imparfait avec le plus petit nombre de sommets ne peut pas avoir de partition antisymétrique.*

Nous ne donnons pas la preuve de ce théorème difficile ici. Au lieu de cela, nous prouvons les résultats dus à Hoàng [89] sur deux partitions antisymétriques spéciales appelées respectivement T -cutset et U -cutset.

Supposons que G est un graphe minimalement imparfait avec une partition antisymétrique A, B, C, D . Soit $a = \omega(A)$, $b = \omega(B)$, $\omega = \omega(G)$ et $\alpha = \alpha(G)$. Les ensembles de sommets $A \cup B \cup C$ et $A \cup B \cup D$ induisent des graphes parfaits G_1 et G_2 respectivement et chacun de ces deux graphes contient une ω -clique. En effet, chaque sommet d'un graphe minimalement imparfait appartient à ω ω -cliques [133] et, pour $u \in C$, ces ω -cliques sont contenues dans G_1 . Pour $u \in D$, elles sont contenues dans G_2 .

Lemme III.7.10 (Hoàng, [89]). *Soit C_i une ω -coloration de G_i , pour $i = 1, 2$. Alors C_1 et C_2 ne peuvent pas avoir le même nombre de couleurs en A .*

Démonstration. Supposons que C_1 et C_2 aient le même nombre de couleurs en A et supposons sans perte de généralité que ces couleurs sont $1, 2, \dots, k$. Soit K le sous-graphe de G induit par les sommets avec les couleurs $1, 2, \dots, k$ et soit $H = G \setminus K$. Comme chaque ω -clique de G est dans G_1 ou G_2 , la plus grande clique de K est de taille k et la plus grande clique de H est de taille $\omega - k$. Les graphes H et K sont parfaits puisqu'ils sont des sous-graphes propres de G . Colorer K avec k couleurs et H avec $\omega - k$ couleurs. Maintenant G est coloré avec ω couleurs, une contradiction avec l'hypothèse que G est minimalement imparfait. \square

Lemme III.7.11. *Aucune ω -clique n'est contenue dans $A \cup B$.*

Démonstration. Supposons qu'une ω -clique soit contenue dans $A \cup B$. Alors toute ω -coloration de G_i , pour $i = 1, 2$, contiendrait a couleurs dans A et $b = \omega - a$ couleurs dans B , contredisant le Lemme III.7.10. \square

Lemme III.7.12. *Chaque α -stable intersecte $A \cup B$.*

Démonstration. En appliquant le Lemme III.7.11 au graphe complémentaire, aucun α -stable n'est contenu dans $C \cup D$. \square

Lemme III.7.13. *Si $u \in A$ n'a pas de voisin dans C , alors il existe une ω -coloration de G_1 avec b couleurs dans B .*

Démonstration. Soit C_1 une ω -coloration de G_1 avec le nombre minimum k de couleurs dans B et supposons que ce nombre soit strictement supérieur à b . Considérons le sous-graphe H de G_1 induit par les sommets colorés avec les couleurs de C_1 qui apparaissent dans B . Le graphe $H + u$ peut être coloré avec k couleurs car il est parfait et n'a pas de clique de taille supérieure à k . En gardant les autres couleurs de C_1 dans $G_1 \setminus (H + u)$, nous obtenons une ω -coloration de G_1 avec moins de couleurs sur B que C_1 , une contradiction. \square

Lemme III.7.14. *Si $u \in A$ n'a pas de voisin dans C , alors chaque sommet de A a un voisin dans D et chaque sommet de B a un voisin dans C .*

Démonstration. Par le Lemme III.7.13, il existe une ω -coloration de G_1 avec b couleurs dans B . Ainsi, d'après le Lemme III.7.10, il n'existe aucune ω -coloration de G_2 avec b couleurs dans B . Par le Lemme III.7.13, ceci implique que chaque sommet de A a un voisin dans D .

Supposons que $v \in B$ n'a pas de voisin dans C . Dans le graphe complémentaire, u et v sont adjacents à tous les sommets de C . Par le Lemme III.7.10, $|A| \geq 2$ et $|B| \geq 2$. Donc $A' = A \setminus \{u\}$, $B' = B \setminus \{v\}$, $C' = C$ et $D' = D \cup \{u, v\}$ forment une partition antisymétrique. Mais u n'a pas de voisin dans B et v n'a pas de voisin dans A , contredisant la première partie du Lemme. Donc, chaque $v \in B$ a un voisin dans C . \square

Un T -cutset⁶ est une partition antisymétrique avec $u \in C$ et $v \in D$ tel que chaque sommet de A est adjacent à u et à v .

Lemme III.7.15 (Hoàng, [89]). *Un graphe minimalement imparfait ne peut pas avoir de T -cutset.*

Démonstration. Dans le graphe complémentaire, u et v contredisent le Lemme III.7.14. \square

Un U -cutset⁶ est une partition antisymétrique avec $u, v \in C$ tel que chaque sommet de A est adjacent à u et chaque sommet de B est adjacent à v .

Lemme III.7.16. *Un graphe minimalement imparfait ne peut pas avoir de U -cutset.*

Démonstration. Dans le graphe complémentaire, u et v contredisent le Lemme III.7.14. \square

III.7.2 2-joint et la perfection

Dans cette section, nous donnons plusieurs résultats concernant les 2-joints en montrant leur utilité dans l'étude des graphes parfaits. Commençons par montrer que les 2-joints préservent la perfection (Cornuéjols et Cunningham [46] ; voir aussi Kapoor [99] chapitre 8). Plus tôt, Bixby [18] avait montré que la décomposition simple joint préserve la perfection.

Théorème III.7.17 (Cornuéjols et Cunningham, [46]). *Soit G un graphe qui a un 2-joint. Le graphe G est parfait si et seulement si ses blocs G_1 et G_2 sont parfaits.*

Démonstration. Par définition, G_1 et G_2 sont des sous-graphes induits de G . Il s'ensuit que si G est parfait, il en est de même pour G_1 et G_2 . Maintenant nous prouvons la réciproque : Si G_1 et G_2 sont parfaits, alors G l'est aussi. Soit G^* un sous-graphe induit de G . Nous devons montrer que

$$\omega(G^*) = \chi(G^*) \tag{III.3}$$

6. Ces termes ont probablement une bonne traduction, mais j'ai préféré garder ici les termes d'origines afin de permettre au lecteur averti de reconnaître immédiatement des concepts familiers.

Rappelons qu'on appelle 2-joint de G toute partition des sommets de G en deux ensembles V_1 et V_2 tels qu'il existe $A_i, B_i \subseteq V_i$ ($i = 1, 2$) vérifiant certaines conditions (voir page 75). Pour $i = 1, 2$, soit $V_i^* = V_i \cap V(G^*)$. La preuve de III.3 est basée sur un argument de coloration, combinant une $\omega(G^*)$ -colorations des graphes parfaits $G[V_1^*]$ et $G[V_2^*]$ (Lemme III.7.19) en une $\omega(G^*)$ -coloration de G^* (Lemme III.7.20). \square

Pour prouver le Lemme III.7.19, nous utiliserons le Lemme de Duplication de Lovász III.7.8 et le lemme suivant.

Lemme III.7.18. *Soit Γ un graphe et $\{u, v\}$ une arête de Γ tel que les sommets u et v n'ont pas de voisin en commun. Soit Γ' le graphe obtenu à partir de Γ en dupliquant le sommet v en v' . Soit H le graphe obtenu à partir de Γ' en supprimant l'arête $\{u, v'\}$. Alors G est parfait si et seulement si H est parfait.*

Démonstration. Si H est parfait, alors Γ l'est aussi puisque Γ est un sous-graphe induit de H .

Inversement, supposons que Γ soit parfait et H ne l'est pas. Soit H^* un sous-graphe minimalement imparfait de H . Soit Γ^* le sous-graphe de Γ' induit par les sommets de H^* . Comme Γ^* est parfait mais H^* ne l'est pas, $V(H^*)$ doit contenir les sommets u et v' . Aussi $\chi(\Gamma^*) = \chi(H^*)$ et $\omega(\Gamma^*) = \omega(H^*) + 1$. $\{u, v, v'\}$ est l'unique clique maximum dans Γ^* et $\omega(H^*) = 2$. Le seul voisin de v' dans H^* est v car sinon v, v' pourrait être dans une clique de cardinalité trois dans H^* . Ainsi v' est un sommet de degré 1 dans H^* , une contradiction avec l'hypothèse H^* est minimalement imparfait. Cela prouve ce lemme. \square

Pour $i = 1, 2$, soit $A_i^* = A_i \cap V(G^*)$, $B_i^* = B_i \cap V(G^*)$, $a_i = \omega(A_i^*)$ et $b_i = \omega(B_i^*)$. Soit $G_i^* = G_i - (V_i \setminus V_i^*)$ et $\omega \geq \omega(G_i^*)$. Dans une ω -coloration de G_i^* , soit $C(A_i^*)$ et $C(B_i^*)$ indiquent les ensembles de couleurs dans A_i^* et B_i^* respectivement.

Lemme III.7.19. *Il existe une ω -coloration de V_i^* tel que $|C(A_i^*)| = a_i$ et $|C(B_i^*)| = b_i$. De plus, si G_i contient un chemin P_i (joignant A_i et B_i)⁷ et*

- (i) *si P_i a un nombre impair d'arêtes, alors $|C(A_i^*) \cap C(B_i^*)| = \max(0, a_i + b_i - \omega)$,*
- (ii) *Si P_i a un nombre pair d'arêtes, alors $|C(A_i^*) \cap C(B_i^*)| = \min(a_i, b_i)$.*

Démonstration. Supposons d'abord que le bloc G_i est induit par $V_i \cup \{p_i, q_i\}$. Dans G_i^* , dupliquons p_i $\omega - a_i$ fois et q_i $\omega - b_i$ fois. Par le Lemme de Duplication III.7.8, ce nouveau graphe H est parfait et $\omega(H) = \omega$. Par conséquent, il existe une ω -coloration de H . Cette coloration induit une ω -coloration de V_i^* tel que $|C(A_i^*)| = a_i$ et $|C(B_i^*)| = b_i$. Supposons maintenant que G_i contienne le chemin P_i . Nous considérons deux cas.

7. voir la définition des blocs G_i à la page 75

(i) P_i a un nombre impair d'arêtes.

Soit $P_i = x_1, \dots, x_{2k}$. Dans G_i^* , dupliquons le sommet x_{2k} en x'_{2k} et supprimons l'arête $x_{2k-1}x'_{2k}$. Selon le Lemme III.7.18, le nouveau graphe est parfait. Pour i impair, $1 \leq i < 2k$, dupliquons le sommet x_i $\omega - a_i$ fois. Pour i pair, $1 < i \leq 2k - 2$, dupliquons le sommet x_i a_i fois.

▷ Si $a_i + b_i < \omega$, dupliquons x_{2k} a_i fois et x'_{2k} $\omega - a_i - b_i$ fois. Par le Lemme de Duplication, ce nouveau graphe H est parfait. Puisque $\omega(H) = \omega$, H a une ω -coloration. Notez que $|C(A_i^*)| = a_i$ et $|C(B_i^*)| = b_i$ et chaque sommet de P_i appartient à deux cliques de taille ω . Donc, les couleurs qui apparaissent dans les copies de x_{2k} sont précisément $C(A_i^*)$. Donc B_i^* est coloré avec des couleurs qui n'apparaissent pas dans $C(A_i^*)$. Ainsi $|C(A_i^*) \cap C(B_i^*)| = 0$.

▷ Si $a_i + b_i \geq \omega$, dupliquons x_{2k} $\omega - b_i$ fois, et supprimons x'_{2k} . Le nouveau graphe H est parfait et $\omega(H) = \omega$. Donc H a une ω -coloration. Encore une fois $|C(A_i^*)| = a_i$ et $|C(B_i^*)| = b_i$, et les $\omega - b_i$ couleurs qui apparaissent sur les copies de x_{2k} appartiennent à $C(A_i^*)$. Puisque ces couleurs ne peuvent pas apparaître en $C(B_i^*)$, le nombre de couleurs communes dans $C(A_i^*)$ et $C(B_i^*)$ est $a_i + b_i - \omega$.

(ii) P_i a un nombre pair d'arêtes.

Supposons sans perte de généralité que $a_i \leq b_i$. Soit $P_i = x_1, \dots, x_{2k+1}$. Dans G_i^* , dupliquons le sommet x_i $\omega - a_i$ fois pour i impair, $1 \leq i \leq 2k - 1$, et a_i fois pour i pair, $1 < i \leq 2k$. Enfin, dupliquons x_{2k+1} $\omega - b_i$ fois. Par le Lemme de Duplication, le nouveau graphe H est parfait et $\omega(H) = \omega$. Dans une ω -coloration de H , $|C(A_i^*)| = a_i$ et $|C(B_i^*)| = b_i$ et les couleurs qui apparaissent dans les copies de x_{2k} sont précisément $C(A_i^*)$. Mais alors ces couleurs n'apparaissent pas dans les copies de x_{2k+1} et par conséquent elles doivent apparaître dans $C(B_i^*)$. Ainsi $|C(A_i^*) \cap C(B_i^*)| = \min(a_i, b_i)$. \square

Lemme III.7.20. G^* a une $\omega(G^*)$ -coloration.

Démonstration. Soit $\omega = \omega(G^*)$. Clairement, $\omega \geq a_1 + a_2$ et $\omega \geq b_1 + b_2$. Pour prouver ce lemme, nous allons combiner ω -colorations de V_1^* et V_2^* .

Si au moins un des ensembles $A_1^*, A_2^*, B_1^*, B_2^*$ est vide, on peut facilement construire la ω -coloration désirée de G^* . Nous supposons donc que ces ensembles ne sont pas vides. Cela implique que $\omega \geq \omega(G_1^*)$ et $\omega(G_2^*)$. Selon le Lemme III.7.19, il existe ω -colorations de V_i^* tel que $|C(A_i^*)| = a_i$ et $|C(B_i^*)| = b_i$. Ainsi, si A_2^* et B_2^* sont dans des composantes connexes différents de $G[V_2^*]$, une ω -coloration de V_1^* peut être combiné avec ω -colorations des composantes connexes de $G[V_2^*]$ en une ω -coloration de G^* . Nous pouvons donc supposer que les deux P_1 et P_2 existent. Comme G_1 ne contient aucun trou impair, chaque chemin sans corde de A_1 à B_1 a la même parité que P_1 . Il résulte de la définition des 2-joints que P_1 et P_2 ont la même parité.

(i) P_1 et P_2 ont tous les deux un nombre impair d'arêtes.

Alors, selon le Lemme III.7.19(i), il existe une ω -coloration de V_i^* avec $|C(A_i^*) \cap C(B_i^*)| = \max(0, a_i + b_i - \omega)$. Dans la coloration de V_1^* , étiquetons de 1 jusqu'à a_1 les couleurs qui apparaissent dans A_1^* et de ω jusqu'à $\omega - b_1 + 1$ les couleurs qui apparaissent en B_1^* . Dans la coloration de V_2^* , étiquetons par ω jusqu'à $\omega - a_2 + 1$ les couleurs qui apparaissent dans A_2^* et par 1 jusqu'à b_2 les couleurs qui apparaissent en B_2^* . Si ce n'est pas une ω -coloration de G^* , il doit exister une couleur commune dans A_1^* et A_2^* ou dans B_1^* et B_2^* . Mais alors soit $a_1 \geq \omega - a_2 + 1$ ou $b_2 \geq \omega - b_1 + 1$, une contradiction.

(ii) P_1 et P_2 ont tous les deux un nombre pair d'arêtes.

Alors, selon le Lemme III.7.19(ii), il existe une ω -coloration de V_i^* avec $|C(A_i^*) \cap C(B_i^*)| = \min(a_i, b_i)$. Dans la coloration de V_1^* , étiquetons de 1 jusqu'à a_1 les couleurs qui apparaissent dans A_1^* et de 1 jusqu'à b_1 les couleurs qui apparaissent en B_1^* . Dans la coloration de V_2^* , étiquetons par ω jusqu'à $\omega - a_2 + 1$ les couleurs qui apparaissent dans A_2^* et par ω jusqu'à $\omega - b_2 + 1$ les couleurs qui apparaissent en B_2^* . Si ce n'est pas une ω -coloration de G^* , il doit exister une couleur commune dans A_1^* et A_2^* ou dans B_1^* et B_2^* . Mais alors soit $a_1 \geq \omega - a_2 + 1$ ou $b_1 \geq \omega - b_2 + 1$, une contradiction. \square

Notez que le Théorème III.7.17 ne se généralise pas à i -amalgames Φ_{ik} pour $i \geq 3$. Par exemple la Figure III.8 montre que le 3-joint $\Phi_{3,0}$ de deux graphes parfaits peut contenir un trou impair de longueur 7.

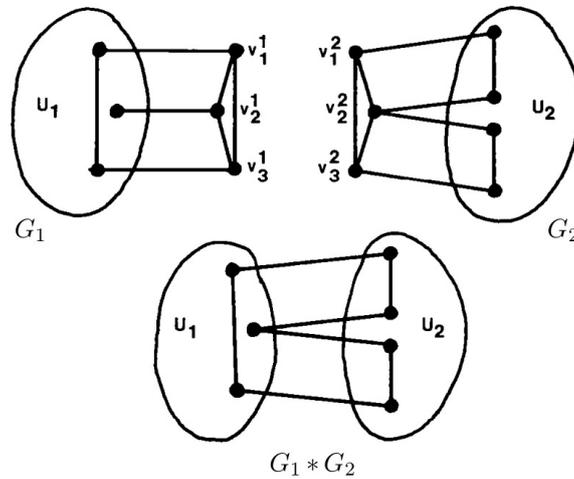


FIGURE III.8 – La composition 3-joint ne préserve pas la perfection.

Les 2-joints sont en un certain sens interdits dans les graphes minimalement imparfaits. Plus précisément, ils sont interdits dans les contre-exemple minimaux à la conjecture forte des graphes parfaits. Notons que ce théorème est valable pour toutes les définitions du 2-joints.

Théorème III.7.21 (Cornuéjols et Cunningham, [46]). *Soit G un graphe minimalement imparfaits. Si G possède un 2-joint, alors G est un trou impair.*

Démonstration. Puisque G n'est pas parfait, le Théorème de Décomposition par 2-joint III.7.17 implique que le bloc G_1 ou G_2 n'est pas parfait ; prenons le cas G_1 . Puisque G_1 est un sous-graphe induit de G et que G est minimalement imparfait, il en découle que $G = G_1$. Puisque $|V_2| \geq 3$, ces sommets forment un chemin induit de G et par conséquent G est un graphe minimalement imparfait avec un sommet de degré deux. Un tel graphe est un trou impair [133]. \square

III.7.3 Paire homogène

Chvátal et Sbihi [38] ont introduit la paire homogène en travaillant sur la perfection de graphes de Berge sans taureau. L'utilité de cette décomposition provient entre autre du théorème suivant :

Théorème III.7.22 (Théorème de Paire Homogène (Chvátal et Sbihi, [38])).
Un graphe minimalement imparfait ne peut pas avoir de paire homogène.

Les exigences techniques :

$$(a) |A_1| + |A_2| \geq 3$$

$$(b) |B| \geq 2$$

dans la définition d'une paire homogène sont cruciales pour la validité de ce lemme. Si (a) a été remplacé par l'exigence que A_1 et A_2 ne soient pas vides, alors chaque graphe avec au moins quatre sommets aurait une paire homogène : prendre deux singletons quelconques. Si le "2" dans (b) était relâché à "1" alors chaque graphe avec au moins quatre sommets aurait une paire homogène (A_1, A_2) avec $A_1 \neq \emptyset$ et $A_2 \neq \emptyset$: si un sommet v a au moins un voisin et au moins un non-voisin, alors A_1 est composé de tous les voisins de v et A_2 est composé de tous les non-voisins de v , sinon le graphe ou son complémentaire est une clique, et donc tout A_1, A_2 satisfait (**) page 76.

La preuve du Théorème de Paire Homogène repose sur un résultat de Stephan Olariu appelé *Antitwin Lemma*. Les sommets x et y sont dits *anti-jumeaux* si chaque sommet distinct de x et y est adjacent à l'un d'entre eux, mais pas à tous les deux. Olariu [130] prouve, à l'aide des résultats de Lovász [112] et Padberg [133] que :

Lemme III.7.23 (Antitwin Lemma (Olariu [130])). *Un graphe minimalement imparfait n'admet pas d'anti-jumeaux.*

Notons que le théorème de paire homogène généralise le Antitwin Lemma : si un graphe d'au moins cinq sommets contient des anti-jumeaux x_1, x_2 alors il contient une paire homogène avec A_i constitué de tous les voisins de x_i distincts de x_1 et x_2 .

III.7.4 Décompositions des graphes de Berge

En 2001, Gérard Cornuéjols, Michelangelo Conforti et Kristina Vušković ont formulé une conjecture qui, si l'on admet que les graphes minimalement imparfaits n'ont pas de partition antisymétrique, implique la Conjecture Forte des Graphes Parfaits :

Conjecture III.7.24 (Conforti, Cornuéjols, Vušković [43]). *Soit G un graphe de Berge. Alors ou bien G est basique, ou bien l'un de G, \overline{G} possède un 2-joint, ou bien G possède une partition antisymétrique.*

Cette conjecture apparaît aujourd'hui comme l'idée décisive conduisant à la preuve du Théorème Fort des Graphes parfaits. Ses trois auteurs ont pu la démontrer dans des cas particuliers, ou en relaxant quelque peu la conclusion. Dans le théorème suivant, les 2-joints doivent seulement vérifier les conditions 1 à 4, 7 et 8.

Théorème III.7.25 (Conforti, Cornuéjols, Vušković [43]). *Soit G de Berge sans C_4 . Alors ou bien G est basique, ou bien G possède un 2-joint ou bien G possède une étoile d'articulation. En conséquence G est parfait.*

On appelle *étoile double* tout graphe G réduit à un sommet ou possédant une arête e telle que chaque sommet de G est adjacent à au moins l'une des extrémités de e . Dans le théorème suivant, les 2-joints doivent seulement vérifier les conditions 1 à 4, 7 et 9.

Théorème III.7.26 (Conforti, Cornuéjols, Vušković [42]). *Soit G sans trou impair. Alors ou bien G est basique, ou bien G possède un 2-joint ou bien G possède une étoile double d'articulation.*

Les antitrous impairs d'au moins 7 sommets possèdent des étoiles doubles d'articulation. Il est donc impossible de montrer que les graphes minimalement imparfaits n'ont pas d'étoile double d'articulation. On pourrait en déduire un peu vite que le théorème de décomposition des graphes sans trou impair est totalement inutile pour prouver le Théorème Fort des Graphes Parfaits. Cela n'est pas tout à fait exact : on sait aujourd'hui que la conjecture ci-dessus est vraie – c'est une conséquence du Théorème Fort des Graphes Parfaits. Une preuve directe (dont nous n'avons pas la moindre idée) fournirait une alternative à l'article de Chudnovsky *et al.* [31] :

Conjecture III.7.27. *Soit G un graphe minimalement imparfait. Alors l'un de G et \overline{G} ne possède pas d'étoile d'articulation.*

Voici comment on montre le Théorème Fort des Graphes Parfaits III.4.1 en admettant la conjecture ci-dessus : soit G un contre-exemple minimal au Théorème Fort des Graphes Parfaits. Notons que G est de Berge. Donc G et \overline{G} sont sans trou impair. D'après le Théorème III.3.1, \overline{G} est aussi un contre-exemple minimal. Appliquons le Théorème III.7.26 à G et \overline{G} . Si l'un de G, \overline{G} est basique, on contredit la perfection des graphes basiques ; si l'un de G, \overline{G} possède un 2-joint, on contredit le Théorème III.7.21 ; donc G et \overline{G} possèdent une étoile double d'articulation, ce qui contredit la Conjecture III.7.27.

III.8 Le Théorème Fort des Graphes Parfaits

Maria Chudnovsky, Neil Robertson, Paul Seymour et Robin Thomas sont parvenus à prouver des versions légèrement plus faibles, mais suffisantes, des Conjectures III.7.4 et III.7.24, prouvant ainsi le Théorème Fort des Graphes Parfaits et répondant à l'une des grandes questions ouvertes de la théorie des graphes. Leur preuve est longue (le premier manuscrit diffusé, daté du 28 octobre 2002, comporte 148 pages) et technique. Nous en présentons très brièvement les étapes principales.

Nous allons maintenant énoncer un certain nombre de théorèmes démontrés par Chudnovsky, Robertson, Seymour et Thomas dans [31]. Nous donnons en références le numéro du théorème et la page à laquelle on peut le trouver dans [31]. Le théorème suivant est une version affaiblie de la conjecture de Chvátal (Conjecture III.7.4) :

Théorème III.8.1 ([31], n° 1.5, page 55). *Soit G un graphe minimalement imparfait. Alors G ne possède pas de partition antisymétrique paire.*

Nous devons maintenant définir une nouvelle classe de graphes. On appelle *bicographe* (*double split graph*) tout graphe G tel que $V(G)$ peut se partitionner en quatre ensembles de taille au moins 2 : $\{a_1, \dots, a_m\}$, $\{b_1, \dots, b_m\}$, $\{c_1, \dots, c_n\}$, $\{d_1, \dots, d_n\}$, tels que :

- Pour tout $1 \leq i \leq m$, a_i voit b_i et pour tout $1 \leq j \leq n$, c_j manque d_j .
- Pour tout $1 \leq i < i' \leq m$, il n'y a aucune arête entre $\{a_i, b_i\}$ et $\{a_{i'}, b_{i'}\}$. Pour tout $1 \leq j < j' \leq n$, il y a toutes les arêtes possibles entre $\{c_j, d_j\}$ et $\{c_{j'}, d_{j'}\}$.
- Pour tout $1 \leq i \leq m$ et tout $1 \leq j \leq n$, il y a exactement deux arêtes entre $\{a_i, b_i\}$ et $\{c_j, d_j\}$, et ces deux arêtes sont non incidentes.

Quels sont les plus petits bicographes ? Les plus petits bicographes ont 8 sommets : $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2, d_1, d_2$. L'ensemble $\{c_1, c_2, d_1, d_2\}$ induit un C_4 . Le sommet a_1 voit une arête de ce C_4 , et b_1 voit l'arête opposée. De même, a_2 voit une arête du C_4 et b_2 voit l'arête opposée. À isomorphisme près, il n'y a donc que 2 cas : a_1, a_2 voient la même arête du C_4 ou a_1, a_2 voient des arêtes incidentes du C_4 . Dans le premier cas, on obtient un double-diamant (Figure II.22), et dans le deuxième, $L(K_{3,3} \setminus e)$ (Figure II.26). Le théorème suivant est facile :

Théorème III.8.2 ([31], page 52). *Soit G un bicographe. Alors G est parfait*

La preuve du théorème de structure des graphes de Berge utilise une technique classique, d'ailleurs déjà mise en œuvre par Conforti, Cornuéjols et Vušković pour prouver le cas sans carré. On part d'un graphe de Berge G , et on suppose que G contient un certain sous-graphe G' d'une certaine classe \mathcal{C} . On montre alors que tout le graphe s'organise autour de G' , et qu'il possède la décomposition souhaitée. On recommence alors avec les graphes

ne contenant aucun sous-graphe de la classe \mathcal{C} . . . Voyons cela plus en détails avec la suite de théorèmes ci-dessous :

Théorème III.8.3 ([31], n° 9.7, page 118). *Soit G un graphe de Berge. Si G contient le graphes des lignes d'une subdivision bipartie de K_4 , alors ou bien l'un de G, \overline{G} est un graphe des lignes de biparti, ou bien G est un bicographe, ou bien l'un de G, \overline{G} possède un 2-joint, ou bien G possède une partition antisymétrique paire.*

Théorème III.8.4 ([31], n° 10.6, page 124). *Soit G un graphe de Berge ne contenant aucun graphe des lignes de subdivision bipartie de K_4 . Si G contient un prisme pair, alors ou bien G est un prisme pair avec 9 sommets, ou bien G possède un 2-joint, ou bien G possède une partition antisymétrique paire.*

Théorème III.8.5 ([31], n° 13.4, page 152). *Soit G un graphe de Berge tel que ni G ni \overline{G} ne contient de graphe des lignes de subdivision bipartie de K_4 . Si G contient un prisme impaire long, alors ou bien l'un de G, \overline{G} possède un 2-joint, ou bien G possède une partition antisymétrique paire, ou bien G possède une paire homogène.*

Théorème III.8.6 ([31], n° 14.3, page 160). *Soit G un graphe de Berge tel que ni G ni \overline{G} ne contient de graphe des lignes de subdivision bipartie de K_4 ou de prisme long. Si G contient un double-diamant, alors ou bien l'un de G, \overline{G} possède un 2-joint, ou bien G possède une partition antisymétrique paire.*

Théorème III.8.7 ([31], n° 16.3, 18.7, 23.2, 23.4 et 23.5). *Soit G un graphe de Berge tel que ni G ni \overline{G} ne contient de graphe des lignes de subdivision bipartie de K_4 , de prisme long ou de double-diamant. Alors ou bien G possède une partition antisymétrique paire, ou bien G ne contient aucun antitrou long, ou bien \overline{G} ne contient aucun antitrou long.*

Théorème III.8.8 ([31], n° 16.3, 18.7, 23.2, 23.4, 23.5 et 24.1). *Soit G un graphe de Berge sans antitrou long et tel qui ni G ni \overline{G} ne contient de graphe des lignes de subdivision bipartie de K_4 , de prisme long ou de double-diamant. Alors ou bien G possède une partition antisymétrique paire, ou bien G est une clique ou bien G est biparti.*

De cette liste de théorèmes, on déduit facilement le théorème de décomposition des graphes de Berge :

Théorème III.8.9. *Soit G un graphe de Berge. Alors ou bien G est basique, ou bien G est un bicographe, ou bien l'un de G, \overline{G} possède un 2-joint, ou bien G possède une partition antisymétrique paire, ou bien G possède une paire homogène.*

En admettant tous les théorèmes de ce chapitre, il est facile de démontrer le Théorème Fort des Graphes Parfaits : Soit G un contre-exemple de taille minimum au Théorème Fort des Graphes Parfaits. Notons que G est de Berge. D'après le Théorème III.3.1, \overline{G} est aussi un contre-exemple de

taille minimum. Appliquons le Théorème III.8.9 à G . Si G est basique, on contredit la perfection des graphes basiques, si G est un bicographe, on contredit le Théorème III.8.2, si G ou \overline{G} possède un 2-joint, on contredit le Théorème III.7.21, si G possède une paire homogène, on contredit le Théorème III.7.22 et si G possède une partition antisymétrique paire, on contredit le Théorème III.8.1. Dans tous les cas, on a une contradiction.

III.8.1 Trigraphe

La thèse de Maria Chudnovsky [27] est consacré à la preuve de la Conjecture III.7.24 proprement dite, qui, notons le, n'est pas démontrée dans [31]. Le premier problème à résoudre est trivial : tous les bicographes ont une partition antisymétrique (pas forcément paire), et on peut donc facilement les éliminer du théorème de décomposition (Théorème III.8.9). Reste l'élimination des paires homogènes qui semble être un détail, puisqu'elles sont très peu utilisées dans la preuve du Théorème III.8.9 : elles n'apparaissent que dans le Théorème III.8.5. Toutefois leur élimination semble être un problème difficile.

Un trigraphe⁸ est dit de *Berge* si toutes ses réalisations sont des graphes de Berge. Notons qu'un graphe de Berge peut être vu comme un trigraphe de Berge ne comportant aucune arête optionnelle, et n'ayant donc pour seule réalisation que lui-même. Maria Chudnovsky démontre alors un théorème de structure pour les trigraphe de Berge, qui, appliqué au cas particulier d'un graphe de Berge, donne exactement la Conjecture III.7.24. Formellement, le théorème de structure des trigraphe est plus difficile à prouver que le théorème de structure des graphes, mais, comme il arrive parfois, démontrer quelque chose de plus difficile permet de disposer d'hypothèses d'induction plus forte, et s'avère finalement plus facile. Au total, la preuve en passant par les trigraphe est aussi longue et complexe que celle par les graphes, mais elle donne un résultat un peu plus fort :

Théorème III.8.10 (Chudnovsky, [27, 28]). *Soit G un graphe de Berge. Alors ou bien G est basique, ou bien l'un de G , \overline{G} possède un 2-joint, ou bien G possède une partition antisymétrique.*

À la fin de l'année 2002, la principale question ouverte sur les graphes parfaits restait celle de leur reconnaissance en temps polynomial. Ce problème a été finalement résolu par Maria Chudnovsky, Gérard Cornuéjols, Xinming Liu, Paul Seymour et Kristina Vušković [29, 33, 48]. La section suivante consiste à donner quelques détails sur leurs méthodes.

8. Voir la définition I.1.2.11.

III.9 Reconnaissance des graphes de Berge

Comme on l'a dit plus haut, le problème de la reconnaissance des graphes parfaits est resté ouvert jusqu'en 2002. Puis, Maria Chudnovsky, Paul Seymour, Gérard Cornuéjols, Xinming Liu et Kristina Vušković ont simultanément proposé deux algorithmes de reconnaissance des graphes de Berge en temps polynomial [29, 33, 48]. Ce problème semble après coup moins difficile que la preuve de conjecture forte des graphes parfaits, et il a pourtant été résolu postérieurement et sans que le théorème de structure des graphes de Berge n'apporte aucune aide (voir Chapitre V pour des détails sur ce point). Il faut noter que les deux algorithmes reconnaissent les graphes *de Berge*, et ne reconnaissent donc les graphes parfaits que dans la mesure où le Théorème Fort des Graphes Parfaits est vrai. Il faut également noter que le problème de la reconnaissance des graphes sans trou impair est encore ouvert.

Pour fournir un aperçu des méthodes employées, il nous faut deux définitions. Soient G un graphe et C un trou de G . On dit qu'un sommet v de G est *majeur* sur C si l'ensemble de ses voisins sur C n'est inclus dans aucun P_3 de C . On appelle *raquette* pour C un sommet majeur sur C qui voit exactement trois sommets de C . On remarquera que si v est une raquette pour un trou impair C de G de taille minimale, alors l'ensemble $V(C) \cup \{v\}$ induit une pyramide.

Les deux algorithmes reposent sur une première phase commune dite de *nettoyage* du graphe [29]. Cette première phase permet soit de conclure en temps polynomial que le graphe n'est pas de Berge, soit de fournir une liste d'au plus $O(n^8)$ sous-ensembles de $V(G)$ avec la propriété suivante : si C est un trou impair de taille minimale de G , et si C est sans raquette, alors l'un des ensembles est disjoint de C et contient tous les sommets majeurs de C . On dit alors que le trou C est *nettoyé* (de ses voisins majeurs), et on dit que le graphe G est *nettoyé*.

La phase de nettoyage permet donc de ramener la reconnaissance des graphes de Berge à deux problèmes plus simples : la détection des trous impairs possédant une raquette, puis la détection des trous impairs nettoyés de taille minimale. Ces problèmes ont été résolus de deux manières différentes. D'une part, Chudnovsky et Seymour ont proposé un algorithme direct de recherche de pyramides dans un graphe quelconque, puis de trou impair dans un graphe nettoyé [33]. Cet article a été la source d'inspiration principale pour un véritable travail de Nicolas Trotignon [152] autour les algorithmes de détection de sous-graphes (prismes, pyramides, prismes pairs, graphe des lignes de subdivisions de K_4 et prismes impairs). D'autre part, Cornuéjols, Liu et Vušković [48] ont proposé un algorithme de reconnaissance fondé sur leur théorème de décomposition des graphes sans trou impair (Théorème III.7.26 page 112).

Nous mentionnons pour mémoire l’algorithme suivant qui utilise des techniques de plus court chemins.

Algorithme III.4 (Chudnovsky et Seymour [33]).

ENTRÉE : Un graphe G .

SORTIE : Si G est sans pyramide, l’algorithme retourne “Pas de pyramide”. Sinon, il retourne une pyramide de G de taille minimale.

COMPLEXITÉ : $O(n^9)$.

Enfin nous citons le principal résultat sur la reconnaissance des graphes de Berge :

Algorithme III.5 (Chudnovsky, Seymour & Cornuéjols, Liu, Vušković [29, 33]).

ENTRÉE : Un graphe G .

SORTIE : Si G est de Berge, l’algorithme retourne “BERGE”. Sinon, il retourne “NON BERGE”.

COMPLEXITÉ : $O(n^9)$.

III.10 Conclusion

Nous avons vu que la classe des graphes parfaits était une classe de graphes importantes, en particulier parce qu’elle contient de nombreuses autres classes usuelles, dont les graphes d’intervalles, les graphes de comparabilité ou les graphes triangulés.

Finalement, les *trois grands problèmes* sur les graphes parfaits, à savoir la conjecture forte, le problème de la coloration et celui de la reconnaissance des graphes parfaits, sont aujourd’hui résolus. De nombreuses questions demeurent cependant ouvertes, l’existence d’algorithmes de coloration plus rapide que celui utilisant la méthode de l’ellipsoïde notamment. On souhaiterait également des algorithmes qui tirent parti de propriétés combinatoires des graphes de Berge. On considère donc que la recherche d’un algorithme “combinatoire” de coloration des graphes parfaits est une question ouverte. Notons que la notion d’algorithme “combinatoire” n’a pas de définitions formelles.

Nous avons présenté dans ce chapitre un certain nombre de résultats sur les graphes parfaits, parfois assez anciens. Notre choix est subjectif et ne prétend pas à l’exhaustivité. Outre notre ignorance, le critère retenu est celui de la pertinence des résultats au vu de la résolution des trois problèmes, et notamment de la preuve du Théorème Fort des Graphes Parfaits par Chudnovsky *et al.*

IV

Le lemme de Roussel et Rubio

*“Once you eliminate the impossible,
whatever remains, no matter how
improbable, must be the truth.”*

Sherlock Holmes

Dans un article consacré aux partitions antisymétriques [144], Florian Roussel et Philippe Rubio ont présenté un lemme d’apparence assez anodine. Ce lemme montre que d’un certain point de vue, les ensembles anticonnexes des graphes de Berge se comportent comme de simples sommets. Peu de temps après, ce lemme a été redécouvert indépendamment par l’équipe de Paul Seymour (en collaboration avec Carsten Thomassen), qui l’a rebaptisé le *wonderful lemma*¹ en raison des applications multiples qu’ils lui ont trouvées dans la preuve du théorème fort des graphes parfaits (ils n’ont pas publié leur preuve du lemme). Nous nous étendrons un peu sur différentes manières de prouver ce lemme important. Nous terminons par des corollaires de ce lemme.

IV.1 Différentes preuves

Si T est un ensemble de sommets d’un graphe G , on dit qu’un sommet x est T -complet si x voit tous les sommets de T . On appelle T -arête de G toute arête dont les deux extrémités sont T -complètes. Il est trivial que, dans un graphe de Berge, si un sommet t voit les extrémités d’un chemin P de longueur impaire (au moins 3), alors ce sommet doit voir au moins un sommet de P^* . En fait, si on appelle *intervalle* de P les sous-chemins de P dont les extrémités voient t et dont les sommets intérieurs manquent t , on voit que P se partitionne en intervalles (au sens des arêtes), que les intervalles sont de longueur paire ou de longueur 1, et donc que P possède un nombre impair de $\{t\}$ -arêtes. Le fameux lemme de Roussel et Rubio est une généralisation de ce fait : le sommet t est remplacé par un ensemble anticonnexe T . On donne une preuve simplifiée par rapport à la preuve originale qui séparait déjà les cas “ $G[T]$ stable” et “ $G[T]$ non stable”. La première simplification provient d’un reformulation de la conclusion (b) du lemme : là où Roussel et Rubio écrivaient

1. En français : le lemme merveilleux.

rappelons que P^*
désigne l’intérieur de P

“Le chemin P possède un sommet T -complet” on écrit l’assertion plus forte : “Le chemin P comporte un nombre impair de T -arêtes”. Ce renforcement, qui n’avait évidemment pas échappé au groupe de Seymour, permet de disposer d’une hypothèse de récurrence formellement plus forte, ce qui débarrasse la preuve de détails fastidieux, notamment pour le cas où $G[T]$ n’est pas stable.

On propose aussi deux nouvelles preuves pour le cas “ $G[T]$ stable”, plus simples que la preuve originale. La première est due à Ajai Kapoor, Kristina Vušković et Giacomo Zambelli [160]. Ce dernier a découvert l’argument astucieux de comptage par la formule du crible dans des brouillons non publiés de Kapoor et Vušković concernant des recherches sur le nettoyage des trous impairs, et s’est rendu compte que cet argument pouvait presque sans changement s’appliquer au cas “stable” du lemme de Roussel et Rubio. On présentera aussi la preuve due à Nicolas Trotignon [152] de ce cas “ $G[T]$ stable”.

Lemme IV.1.1 (Roussel et Rubio, [144]). *Soient G un graphe de Berge, T un ensemble de sommets de G et P un chemin de G tels que $G[T]$ est anticonnexe, T est disjoint de $V(P)$ et les extrémités de P sont T -complètes. Alors ou bien :*

- (a) P est de longueur paire et possède un nombre pair de T -arêtes.
- (b) P est de longueur impaire et possède un nombre impair de T -arêtes.
- (c) P est de longueur impaire, supérieure ou égale à 3, et si on le note $P = x - x' - \dots - y' - y$, alors il existe dans T deux sommets non adjacents u et v tels que $N(u) \cap V(P) = \{x, x', y\}$ et $N(v) \cap V(P) = \{x, y', y\}$.
- (d) P est de longueur 3 et ses deux sommets intérieurs sont les extrémités d’un antichemin de longueur impaire dont l’intérieur est dans T .

Démonstration. On démontre le lemme par récurrence sur $|V(P) \cup T|$. Si P est de longueur 0, 1 ou 2, l’une des conclusions (a) ou (b) est satisfaite, ce qui montre que le lemme est vrai si $|V(P) \cup T| \leq 4$. On peut donc supposer que P est de longueur au moins 3. On note $P = x - x' - \dots - y' - y$. Supposons qu’aucune des conclusions (c) et (d) ne soit satisfaite. Ces conclusions ne seront pas non plus satisfaites pour un sous-ensemble de T . Donc, par hypothèse de récurrence, on sait que pour tout U , sous-ensemble strict et anticonnexe de T , il y a un nombre de U -arêtes dans P qui a même parité que la longueur de P . On distingue deux cas :

Cas 1 : Il n’y a pas de sommet T -complet dans P^ .* Si P est de longueur paire, on a bien la conclusion (a). Donc on peut supposer que P est de longueur impaire. On distingue deux sous-cas qui conduisent tout deux à des contradictions :

Cas 1.1 : T induit un stable (preuve de Kapoor, Vušković et Zambelli). On marque les sommets de P qui ont au moins un voisin dans T . On appelle *intervalle* tout sous-chemin de P , de longueur au moins 1, dont les extrémités

sont marquées et dont les sommets intérieurs sont non marqués. Puisque x et y sont marqués, les intervalles de P forment une partition de P (au sens des arêtes).

On prétend que chaque intervalle de P est de longueur paire ou de longueur 1. Car supposons qu'il y ait un intervalle de longueur impaire (au moins 3) noté $P' = x'' - \dots - y''$ avec x'' du côté de x et y'' du côté de y . Soit u un voisin de x'' dans T et v un voisin de y'' dans T . Si $u = v$ alors $V(P') \cup \{u\}$ induit un trou impair. Donc $u \neq v$. Si $x'' \neq x'$ alors $V(P') \cup \{u, x, v\}$ induit un trou impair. Donc $x'' = x'$. De même, $y'' = y'$. Mais alors u et v permettent de satisfaire la conclusion (c) : une contradiction.

Puisque P est de longueur impaire, il y a un nombre impair d'intervalles, de longueur 1. De plus, pour chacun de ces intervalles $x'' - P - y''$, x'' et y'' ont un voisin commun dans T . Car sinon, soit $u \in T$, voisin de x'' manquant y'' , et $v \in T$, voisin de y'' manquant x'' . Si $x'' \neq x'$ alors $\{x, u, x'', y'', v\}$ induit un trou impair. Donc $x'' = x'$. De même, $y'' = y'$. Mais alors u et v permettent de satisfaire la conclusion (c) : une contradiction.

Pour tout $t \in T$ on note $f(t)$ l'ensemble des $\{t\}$ -arêtes de P . On note $t_1, t_2, \dots, t_\alpha$ les éléments de T . On sait d'après ce qui précède que $|f(t_1) \cup f(t_2) \cup \dots \cup f(t_\alpha)|$ est le nombre d'intervalles de longueur 1 de P . Ce nombre est impair et par la formule de crible on a :

$$\begin{aligned} |f(t_1) \cup f(t_2) \cup \dots \cup f(t_\alpha)| &= \sum_i |f(t_i)| \\ &\quad - \sum_{i \neq j} |f(t_i) \cap f(t_j)| \\ &\quad \vdots \\ &\quad + (-1)^{(k+1)} \sum_{I \subset T, |I|=k} \left| \bigcap_{i \in I} f(t_i) \right| \\ &\quad \vdots \\ &\quad + (-1)^{(\alpha+1)} |f(t_1) \cap f(t_2) \cap \dots \cap f(t_\alpha)| \end{aligned}$$

Par hypothèse de récurrence, on sait que pour tout $I \subsetneq T$ le nombre $|\bigcap_{i \in I} f(t_i)|$ est impair. De plus, le nombre de termes additionnés dans le membre droit de l'égalité ci-dessus est égal à $2^\alpha - 1$ (nombre de parties non vides d'un ensemble avec α éléments). Donc l'égalité ci-dessus peut être réécrite modulo 2 :

$$|f(t_1) \cup f(t_2) \cup \dots \cup f(t_\alpha)| \equiv 2^\alpha - 2 + (-1)^{(\alpha+1)} |f(t_1) \cap f(t_2) \cap \dots \cap f(t_\alpha)| \pmod{2}$$

Donc $|f(t_1) \cap f(t_2) \cap \dots \cap f(t_\alpha)|$ est impair ce qui veut dire que P possède un nombre impair de T -arêtes, et donc que P^* possède au moins un sommet T -complet : une contradiction.

Cas 1.1 : T induit un stable (preuve de Nicolas Trotignon). Si $|T| = 1$, alors $T \cup V(P)$ induit un trou impair. Donc $|T| \geq 2$. Soit t un sommet de T . On

prétend que $N(t) \cap V(P) = \{x, x', y\}$ ou $N(t) \cap V(P) = \{x, y', y\}$. Notons que, pour tout $t \in T$, les sommets $T \setminus \{t\}$ -complets de P^* manquent t . On appelle *intervalle* de P tout sous-chemin de P dont les extrémités voient t et dont les sommets intérieurs manquent t . Puisque x et y voient t , les intervalles de P forment une partition de P au sens des arêtes. D'autre part nous savons qu'il y a un nombre impaire de $T \setminus \{t\}$ -arêtes dans P . Donc il y a un intervalle de P noté $r - P - s$ qui possède un nombre impaire de $T \setminus \{t\}$ -arêtes. Supposons que x, r, s, y apparaissent dans cet ordre sur P . Notons que $r - P - s$ est de longueur au moins 2 car sinon, l'un au moins de r ou s serait un sommet T -complet de P^* . Donc $V(r - P - s) \cup \{t\}$ induit un trou pair et $r - P - s$ est de longueur paire. Soit r' le sommet $T \setminus \{t\}$ -complet de $r - P - s$ le plus proche de r , et s' le plus proche de s . Notons que $r' - P - s'$ contient toutes les $T \setminus \{t\}$ -arêtes de $r - P - s$ et que ces arêtes sont en nombre impair. Donc, par hypothèse de récurrence, $r' - P - s'$ est de longueur impaire. On en déduit qu'exactly l'un des chemins $r - P - r'$ et $s' - P - s$ est de longueur impaire. On suppose d'abord que $r - P - r'$ est de longueur impaire. En particulier, $r \neq r'$ et $x \neq r$.

Si r' manque y , alors $P_1 = r' - P - r - t - y$ est un chemin de G de longueur impaire dont les extrémités sont $T \setminus \{t\}$ -complètes. Or P_1 n'a pas de $T \setminus \{t\}$ -arête. Donc, par hypothèse de récurrence, l'une des conclusions (c) ou (d) est satisfaite pour P_1 et $T \setminus \{t\}$. Mais cela est impossible car t n'a pas de voisin dans $T \setminus \{t\}$. Donc r' doit voir y , ce qui implique $s' = s = y$ et $r' = y'$.

Si r manque x , alors $P_2 = r - P - r - t - x$ est un chemin de G de longueur impaire dont les extrémités sont $T \setminus \{t\}$ -complètes. Or P_2 n'a pas de $T \setminus \{t\}$ -arête. Donc, par hypothèse de récurrence, l'une des conclusions (c) ou (d) est satisfaite pour P_2 et $T \setminus \{t\}$. Mais cela est impossible car t n'a pas de voisin dans $T \setminus \{t\}$. Donc r doit voir x , ce qui implique $r = x'$. On a donc bien $N(t) \cap V(P) = \{x, x', y\}$. De même, si $s' - P - s$ est de longueur impaire, alors on montre $N(t) \cap V(P) = \{x, y', y\}$. On a bien montré que $N(t) \cap V(P) = \{x, x', y\}$ ou $N(t) \cap V(P) = \{x, y', y\}$.

Maintenant, puisque y' n'est pas T -complet, il y a un sommet $u \in T$ tel que $N(u) \cap V(P) = \{x, x', y\}$, et puisque x' n'est pas T -complet il y a un sommet $v \in T$ tel que $N(v) \cap V(P) = \{x, y', y\}$. Donc u et v permettent de satisfaire la conclusion (c) : une contradiction.

Cas 1.2 : T n'induit pas un stable (preuve de Roussel et Rubio un peu simplifiée). Soit $Q = \overline{u - \dots - v}$ un plus long antichemin de $G[T]$. Comme $G[T]$ est anticonnexe avec au moins une arête, Q est de longueur au moins 2. De plus, par le choix de Q , $G[T \setminus \{u\}]$ et $G[T \setminus \{v\}]$ sont anticonnexes. Donc on sait que P possède un nombre impair de $T \setminus \{u\}$ -arêtes et un nombre impair de $T \setminus \{v\}$ -arêtes. Notons qu'une $T \setminus \{u\}$ -arête et une $T \setminus \{v\}$ -arête n'ont pas de sommet commun car il y aurait alors un sommet T -complet dans P^* . En particulier, Les $T \setminus \{u\}$ -arêtes et les $T \setminus \{v\}$ -arêtes sont deux à deux distinctes.

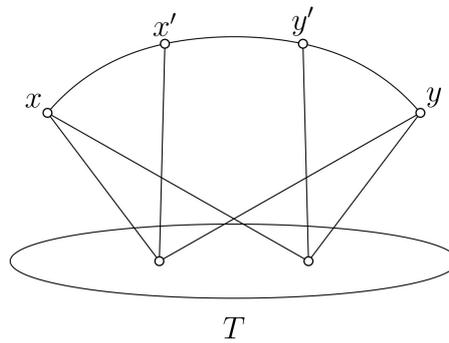
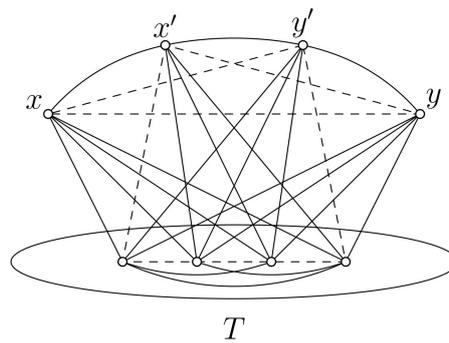
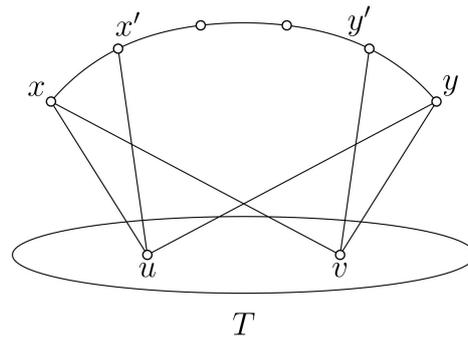
Supposons que Q soit de longueur paire. Soit $x_u x'_u$ une $T \setminus \{u\}$ -arête de P et $y'_v y_v$ une $T \setminus \{v\}$ -arête de P telles que, sans perte de généralité,

$x, x_u, x'_u, y'_v, y_v, y$ apparaissent dans cet ordre sur P . Si x'_u manque y'_v alors $\{x'_u, y'_v\} \cup V(Q)$ induit un antitrou impair. Si $x \neq x_u$ alors $\{x_u, y'_v\} \cup V(Q)$ induit un antitrou impair. Si $y_v \neq y$ alors $\{x'_u, y_v\} \cup V(Q)$ induit un antitrou impair. Donc $P = x_u - x'_u - y'_v - y_v$, et $V(P) \cup V(Q)$ induit un antitrou impair. Donc Q est de longueur impaire (au moins 3).

Supposons que $G[T \setminus \{u, v\}]$ ne soit pas anticonnexe. Puisque $G[T]$ est anticonnexe, il existe un sommet w dans une composante connexe de $\overline{G}[T \setminus \{u, v\}]$ qui ne contient pas Q^* et tel que w voit dans \overline{G} au moins l'un de u et v . Mais alors $V(Q) \cup \{w\}$ induit dans $\overline{G}[T]$ un chemin plus long que Q ou un trou impair : une contradiction. Donc $G[T \setminus \{u, v\}]$ est anticonnexe.

Nous savons qu'il y a un nombre impair de $T \setminus \{u, v\}$ -arêtes dans P . Rappelons que P possède un nombre impair de $T \setminus \{u\}$ -arêtes, et une nombre impair de $T \setminus \{v\}$ -arêtes, qui sont différentes, et qui totalisent un nombre pair de $T \setminus \{u, v\}$ -arêtes. Donc P possède au moins une $T \setminus \{u, v\}$ -arête $x''y''$ qui n'est ni une $T \setminus \{u\}$ -arête ni une $T \setminus \{v\}$ -arête. On suppose sans perte de généralité que x, x'', y'', y apparaissent dans cet ordre sur P et que $y'' \in P^*$. Donc y'' manque u ou v , par exemple v . Alors y'' voit u , car sinon $V(Q) \cup \{y''\}$ induirait un antitrou impair ; et x'' manque u , car sinon, $x''y''$ serait une $T \setminus \{v\}$ -arête, et x'' voit v , car sinon $V(Q) \cup \{x''\}$ induirait antitrou impair ; et $x'' = x'$ car sinon $V(Q) \cup \{x'', y'', x\}$ induirait un antitrou impair, et de même $y'' = y'$. Donc $P = x - x'' - y'' - y$ et $V(Q) \cup \{x'', y''\}$ est un antichemin de longueur impaire de G : la conclusion (d) est satisfaite, une contradiction.

Cas 2 : Il y a un sommet T -complet dans P^ .* Soit z un tel sommet. Par hypothèse de récurrence, on applique le lemme au chemin $x - P - z$ et à T . Si on obtient la conclusion (d), alors $x - P - z$ est de longueur impaire, au moins 3, on le note $x - x' - P - z' - z$ et il existe deux sommets $u \in T$ et $v \in T$ tels que $N(u) \cap V(P) = \{x, x', z\}$ et $N(v) \cap V(P) = \{x, z', z\}$. Mais alors $V(x' - P - z') \cup \{u, v, y\}$ induit un trou impair. Si on obtient la conclusion (c) alors $x - P - z$ est de longueur 3 et ses deux sommets intérieurs sont les extrémités d'un antichemin Q de G dont l'intérieur est dans T . Mais alors $V(Q) \cup \{y\}$ induit un antitrou impair. Donc on obtient l'une des conclusions (a) ou (b), et le nombre de T -arêtes dans $x - P - z$ et la longueur de $x - P - z$ sont de même parité. On obtient une conclusion similaire pour $z - P - y$. Au total, le nombre de T -arêtes dans P et la longueur de P sont de même parité et l'une des conclusions (a) ou (b) est satisfaite. \square



Nous avons représenté trois graphes de Berge où le lemme de Roussel et Rubio s'applique :

- Dans le premier, on a la conclusion (c) et le graphe entier est un prisme impair avec 8 sommets.
- Dans le deuxième, on a la conclusion (d) et le graphe entier est un antitrou avec 8 sommets.
- Dans le troisième graphe, on a simultanément la conclusion (c) et la conclusion (d). Le graphe entier est un $\overline{C_6}$.

FIGURE IV.1 – Lemme de Roussel et Rubio : différents cas.

Nous donnons maintenant deux variantes du lemme de Roussel et Rubio. La première montre que si T est stable alors on peut étendre le lemme aux graphes sans trou impair et abandonner la conclusion (d) :

Lemme IV.1.2. *Soient G un graphe sans trou impair, T un ensemble de sommets de G et P un chemin de G tels que $G[T]$ est stable, T est disjoint de $V(P)$ et les extrémités de P sont T -complètes. Alors ou bien :*

- (a) P est de longueur paire et possède un nombre pair de T -arêtes.
- (b) P est de longueur impaire et possède un nombre impair de T -arêtes.
- (c) P est de longueur impaire, supérieure ou égale à 3, et si on le note $P = x-x'-\dots-y'-y$, alors il existe dans T deux sommets non adjacents u et v tels que $N(u) \cap V(P) = \{x, x', y\}$ et $N(v) \cap V(P) = \{x, y', y\}$.

Démonstration. Il suffit de reprendre la preuve du lemme principal en se restreignant au cas “ T stable”. \square

La deuxième variante que nous présentons ci-dessous est celle de l'article original. Elle donne une conclusion moins forte mais présente l'avantage d'être plus symétrique et de bien montrer la similitude qui ne saute pas aux yeux entre les conclusions (c) et (d) de la version principale.

Lemme IV.1.3 (Roussel et Rubio, [144]). *Soient G un graphe de Berge, T un ensemble de sommets de G et P un chemin de G tels que $G[T]$ est anticonnexe, T est disjoint de $V(P)$ et les extrémités de P sont T -complètes. Alors ou bien :*

- (a) P est de longueur paire et possède un nombre pair de T -arêtes.
- (b) P est de longueur impaire et possède un nombre impair de T -arêtes.
- (c) Il existe un chemin de longueur impaire (au moins 3) dont les extrémités sont dans T et dont l'intérieur est dans $V(P)$.
- (d) Il existe un antichemin de longueur impaire (au moins 3) dont les extrémités sont dans $V(P)$ et dont l'intérieur est dans T .

Cette version est une conséquence directe de la version principale. Réciproquement, il est assez facile de prouver la version principale en supposant connue la version ci-dessus.

IV.2 Corollaires et variantes utiles

Ici, nous présentons des corollaires et des variantes du lemme de Roussel et Rubio qui ont révélé leur utilité à la preuve du théorème fort des graphes parfaits. Ces corollaires sont tous énoncés explicitement (et bien sûr démontrés) dans l'article de Chudnovsky *et al.* [31]. Nous donnons en référence le numéro du corollaire et la page à laquelle on peut le trouver dans le manuscrit publié en 2006 [31].

Nous avons besoin de quelques notions supplémentaires. Soient G un graphe et soit P un chemin de G de longueur au moins 2. Soient p_1, \dots, p_n les sommets de P et supposons qu'ils apparaissent dans cet ordre sur P . Un $leap^2$ pour P (dans G) est une paire de sommets non adjacents a, b de G tels qu'il y a exactement six arêtes de G entre a, b et $V(P)$, à savoir $ap_1, ap_2, ap_n, bp_1, bp_{n-1}, bp_n$.

Le lemme de Roussel et Rubio (légèrement reformulé pour plus de commodité) est le suivant :

Lemme IV.2.1 ([31], n° 2.1, page 60). *Soient G un graphe de Berge, T un ensemble de sommets de G et P un chemin de G de longueur impaire tels que $G[T]$ est anticonnexe, T est disjoint de $V(P)$ et les extrémités de P sont T -complètes. Alors ou bien :*

- (a) *Le chemin P possède une T -arête.*
- (b) *Le chemin P est de longueur supérieure ou égale à 5, et $G[T]$ contient un $leap$ pour P .*
- (c) *Le chemin P est de longueur 3 et il existe un antichemin de longueur impaire, dont l'intérieur est dans T , rejoignant les sommets internes de P .*

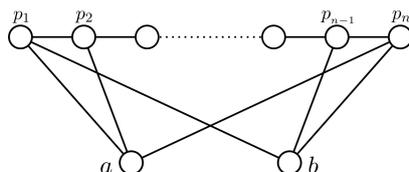


FIGURE IV.2 – Une illustration d'un leap.

On dit qu'un sommet v peut-être lié à un triangle $\{a_1, a_2, a_3\}$ (par les chemins P_1, P_2, P_3) si :

- ▷ Les trois chemins P_1, P_2, P_3 sont deux-à-deux disjoints,
- ▷ Pour $i = 1, 2, 3$ a_i est une extrémité de P_i ,
- ▷ Pour $1 \leq i < j \leq 3$, $a_i a_j$ est l'unique arête de G ente $V(P_i)$ et $V(P_j)$,
- ▷ Le sommet v a un voisin dans chacun des P_1, P_2 et P_3 .

Le corollaire suivant est bien connu et très utile

Corollaire IV.2.2 ([31], n° 2.4, page 61). *Soit G un graphe de Berge, et supposons que v peut-être lié à un triangle $\{a_1, a_2, a_3\}$. Alors v est adjacent à au moins deux de a_1, a_2, a_3 .*

Démonstration. Soit v un sommet lié par les chemins P_1, P_2, P_3 . Pour $1 \leq i \leq 3$, v a un voisin dans P_i ; soit Q_i le chemin reliant v à a_i dont l'intérieur est dans $V(Q_i)$. Au moins deux de Q_1, Q_2, Q_3 ont des longueurs de la même parité, par exemple Q_1, Q_2 ; Puisque $G[(V(Q_1) \cup V(Q_2))]$ n'est pas un trou impair, alors c'est un cycle de longueur 3. \square

2. Ces termes ont probablement une bonne traduction, mais j'ai préféré garder ici les termes d'origines afin de permettre au lecteur averti de reconnaître immédiatement des concepts familiers.

Maintenant, On a besoin d'une version de IV.2.1 pour les trous. Soit C un trou dans G , et soit $e = uv$ une arête de C . Un *leap* pour C (dans G , à uv) est un *leap* pour le chemin $C \setminus e$ dans $G - e$. Un *hat* pour C (dans G , à uv) est un sommet de G adjacent à u et à v et à aucun autre sommet de C .

Corollaire IV.2.3 ([31], n° 2.10, page 65). *Soient G un graphe de Berge, T un ensemble de sommets de G , C un trou de G de longueur supérieure ou égale à 5 et $e = uv$ une arête de C tels que $G[T]$ est anticonnexe, T est disjoint de $V(C)$. Supposons que u, v sont T -complets et qu'aucun autre sommet de C est T -complet. Alors ou bien $G[T]$ contient un *hat* pour C à uv , ou $G[T]$ contient un *leap* pour C à uv .*

Une autre classe d'application de IV.2.1 est la situation où un long chemin ou un trou rencontre un long antichemin ou antitrou. Dans la suite on présente une collection de lemmes utiles dans ce cas. On commence par une application surprenante du lemme de Roussel et Rubio IV.2.1.

Lemme IV.2.4 ([31], n° 3.1, page 66). *Soit G un graphe de Berge, C un trou de G et D un antitrou de G , les deux de longueur supérieure ou égale à 8. Alors $|V(C) \cap V(D)| \leq 3$.*

Démonstration. On voit facilement que $|V(C) \cap V(D)| \leq 4$, sans utiliser le fait que G est de Berge. Supposons que $|V(C) \cap V(D)| = 4$; donc $V(C) \cap V(D)$ est l'ensemble de sommets d'un chemin à 3 arêtes. Soient p_1, \dots, p_m les sommets de C et supposons qu'ils apparaissent dans cet ordre sur C et soient q_1, \dots, q_n les sommets de D et supposons qu'ils apparaissent dans cet ordre sur D , où $m, n \geq 8$ et $p_1 = q_2, p_2 = q_4, p_3 = q_1, p_4 = q_3$. Soit P le chemin $p_4 - p_5 - \dots - p_m - p_1$, et Q l'antichemin $q_4 - q_5 - \dots - q_n - q_1$. Soit X l'ensemble des sommets intérieurs de Q . Alors p_1 et p_4 sont X -complets (car D est un antitrou), et P est un chemin de longueur impair supérieure ou égale à 5 reliant ces deux sommets. Si un sommet p_i dit à l'intérieur de P est X -complet, alors puisque p_i est non adjacent à p_2 et à p_3 on peut compléter Q à un antitrou impair par $q_1 - p_i - q_4$: une contradiction. Donc par IV.2.1, X contient un *leap* pour P ; donc ils existent i avec $5 \leq i < n$ et un chemin P' joignant q_i et q_{i+1} avec le même intérieur que P . Puisque $n \geq 8$, soit $i > 5$ ou $i + 1 < n$ et par symétrie on peut supposer le premier. Mais alors P' peut être complété à un trou impair par $q_{i+1} - p_2 - q_i$: une contradiction. \square

Les deux lemmes suivants sont des résultats du même genre :

Lemme IV.2.5 ([31], n° 3.2, page 66). *Soit $p_1 - \dots - p_m$ un chemin dans un graphe G de Berge. Soient $2 \leq s \leq m - 2$, et $p_s - q_1 - \dots - q_n - p_{s+1}$ un antichemin, où $n \geq 2$ est impair. Supposons que chacun de q_1, \dots, q_n a un voisin dans $\{p_1, \dots, p_{s-1}\}$ et un voisin dans $\{p_{s+2}, \dots, p_m\}$. Alors ou bien :*

- (a) $s \geq 3$ et les seuls non-arêtes entre $\{p_{s-2}, p_{s-1}, p_s, p_{s+1}, p_{s+2}\}$ et $\{q_1, \dots, q_n\}$ sont $p_{s-1}q_n, p_sq_1, p_{s+1}q_n$, or
- (b) $s \leq m - 3$ et les seuls non-arêtes entre $\{p_{s-1}, p_s, p_{s+1}, p_{s+2}, p_{s+3}\}$ et $\{q_1, \dots, q_n\}$ sont $p_sq_1, p_{s+1}q_n, p_{s+2}q_1$.

Lemme IV.2.6 ([31], n° 3.3, page 67). *Soient G un graphe de Berge, C un trou dans G de longueur ≥ 6 , avec les sommets p_1, \dots, p_m qui apparaissent dans cet ordre sur C , et Q un antichemin de longueur paire supérieure ou égale à 4 avec les sommets $p_1, q_1, \dots, q_n, p_2$. Soit $z \in V(G)$, $V(Q)$ -complet et sans voisin parmi p_3, \dots, p_m . Il y a au plus un sommet dans $\{p_3, \dots, p_m\}$ qui soit $(\{q_1, \dots, q_{n-1}\})$ -complet ou $(\{q_2, \dots, q_n\})$ -complet, et un tel sommet est l'un des p_3, p_m .*

Terminons cette section par ce résultat qui n'est pas vrai pour les graphes de Berge en général. On appelle *roue* dans un graphe G toute paire (C, Y) satisfait :

- ▶ C est un trou de longueur ≥ 6 .
- ▶ Y est ensemble non-null anticonnexe disjoint de C .
- ▶ Il existe deux Y -arêtes disjointes de C .

Une roue (C, Y) est dite *impaire* si un chemin maximal dont les sommets sont tous Y -complets a une longueur impaire.

Lemme IV.2.7 ([31], n° 17.5, page 178). *Soit G un graphe de Berge tel que ni G ni \overline{G} ne contient de graphe des lignes de subdivision bipartie de K_4 ou de prisme long ou de double-diamant ou de roue impaire. Soit P un chemin de longueur impaire > 1 , et avec les sommets p_1, \dots, p_n qui apparaissent dans cet ordre sur P . Soient X, Y des ensembles de sommets de G tels que X, Y sont disjoints de $V(P)$, $G[X], G[Y]$ et $G[X \cup Y]$ sont anticonnexes, p_1 est X -complet et p_n est l'unique sommet de P qui est Y -complet. (Notons que X, Y ne nécessite pas d'être disjoints.) Soit $z \in V(G) \setminus (X \cup Y \cup V(P))$, $(X \cup Y)$ -complet et sans voisin dans P . Alors un nombre impaire d'arêtes de P sont des X -arêtes.*

V

Problèmes Ouverts

“... and it is probably that there is some secret here which remains to be discovered.”

Charles Sanders Peirce

V.1 Décomposition des graphes de Berge

Comme on l’a déjà dit, de nombreuses questions concernant les graphes parfaits sont encore ouvertes, la plus importante étant peut-être la recherche d’un algorithme combinatoire de coloration. Mais le problème de la décomposition des graphes de Berge est en un sens encore ouvert.

En effet, on attend en général d’un théorème de décompositions qu’il permette de démontrer des théorèmes par induction. En ce sens, les Théorèmes III.8.9 et III.8.10 remplissent leur mission. Mais on attend aussi que les décompositions fournissent des algorithmes en temps polynomial fonctionnant sur le modèle suivant : on donne un graphe G , on vérifie s’il est basique. S’il ne l’est pas, on cherche une décomposition qui permette de “casser” le graphe, puis on réapplique l’algorithme récursivement sur les “morceaux”. Pour autant qu’on sache, le Théorème III.8.10 ne permet pas de mettre en œuvre cette stratégie en temps polynomial. Pour s’en convaincre, on va essayer de résoudre le problème de la reconnaissance des graphes de Berge :

On nous donne un graphe G . Il est facile de tester si G est basique — en utilisant entre autre l’algorithme de reconnaissance des graphes des lignes (Algorithme III.3). S’il ne l’est pas, on recherche un 2-joint dans G . Cela est possible en temps polynomial grâce à un algorithme de Cornuéjols et Cunningham [46]. S’il y a un 2-joint (X, Y) , on parvient à “casser” le graphe en deux morceaux et les choses se passent bien (voir [48] par exemple pour des détails). S’il n’y a pas de 2-joint, on recherche une partition antisymétrique. Il existe pour cela un algorithme en temps polynomial dû à C. de Figueiredo, S. Klein, Y. Kohayakawa et B. Reed [61].

L'ensemble $V(G)$ est donc partitionné en deux ensembles X et Y , où $G[X]$ n'est pas connexe et $G[Y]$ n'est pas anticonnexe. On choisit A , composante connexe de $G[X]$ et on pose $B = X \setminus A$. On choisit C , composante anticonnexe de $G[Y]$, et on pose $D = Y \setminus C$. Il n'y a aucune arête entre A et B , mais toutes les arêtes possibles entre C et D . Il se peut très bien que G contienne un trou impair alors que $G[A]$, $G[B]$, $G[C]$, $G[D]$, $G[X]$ et $G[Y]$ sont de Berge. Donc, pour reconnaître les graphes de Berge, il est inutile de relancer récursivement l'algorithme sur A, B, C, D, X, Y . Par contre, il est facile de vérifier que G est de Berge si et seulement si $G[A \cup B \cup C]$, $G[A \cup B \cup D]$, $G[A \cup C \cup D]$ et $G[B \cup C \cup D]$ sont de Berge. Donc on peut relancer l'algorithme récursivement sur ces quatre graphes. Finalement dans le cas extrême où trois des ensembles A, B, C, D sont de taille 1, on voit que si on donne à l'algorithme un graphe avec n sommets, il risque de lancer 3 appels récursifs sur des graphes de taille $n - 1$. Au pire, il risque d'y avoir 3^{n-3} appels, ce qui donne une complexité exponentielle.

Comme on le voit, la partition antisymétrique n'est pas une véritable décomposition, au sens algorithmique et pour le problème de la reconnaissance des graphes de Berge tout du moins. Pour autant que nous le sachions, nul n'a la moindre idée aujourd'hui de ce que pourrait être un théorème de décompositions des graphes de Berge ayant de bonnes propriétés algorithmiques.

V.2 Trigraphe de Berge

Dans sa thèse, Maria Chudnovsky a introduit la notion de trigraphe de Berge que nous avons déjà évoquée page 115. On peut naturellement s'interroger sur la reconnaissance des trigraphe de Berge, problème qu'on soupçonne \mathcal{NP} -difficile, sans avoir pu le prouver.

On a trouvé deux articles ([62] et [26]) portant sur des questions similaires, appelées par leur auteurs (Maria Cerioli, Hazel Everett, Celina de Figueiredo, Sulamita Klein et Kristina Vušković) "problèmes de sandwichs". Reformulé dans le vocabulaire des trigraphe, un problème de sandwich consiste à se demander, étant donné un trigraphe G et un graphe H , si l'une au moins des réalisations de G contient H . Reconnaître les trigraphe de Berge, c'est donc se poser le problème du sandwich pour les trous impairs et les antitrous impairs.

V.3 Lecture algorithmique de la preuve de SPGC

Dans la thèse de Nicolas Trotignon [152], Les algorithmes de détection de sous-graphes présentés dans le chapitre 6 étaient à l'origine motivés par la reconnaissance des graphes d'Artémis. Par une curieuse coïncidence, ils conduisent à détecter la majorité des sous-graphes utilisés dans la preuve de

la conjecture forte des graphes parfaits (SPGC¹). Il est légitime donc de se demander s'il est possible de lire cette preuve comme un algorithme en temps polynomial qui étant donné un graphe de Berge montre qu'il est basique, ou alors le décompose. Répondre à cette question nécessiterait probablement des vérifications fastidieuses pour un résultat assez maigre, puisqu'on sait directement détecter les 2-joints et les partitions antisymétriques dans n'importe quel graphe. Mentionnons toutefois qu'un tel travail permettrait peut-être de résoudre (pour les graphes de Berge) une question ouverte pour autant que nous le sachions :

Question V.1. *Existe-t-il un algorithme en temps polynomial qui décide si un graphe possède une partition antisymétrique paire ?*

1. Strong Perfect Graphs Conjecture.

Bibliographie

- [1] M. AGRAWAL & N. KAYAL & N. SAXENA, *PRIMES is in \mathcal{P}* , Ann. of Math. (2) **160**, 781-793, (2004).
- [2] H. AÏT HADDADÈNE & F. MAFFRAY, *Coloring perfect degenerate graphs*, Discrete Math. **163**, 211-215, (1997).
- [3] L.W. BEINEKE, *Characterisation of derived graphs*, Journal of Combinatorial Theory **9**, 129-135, (1970).
- [4] L.W. BEINEKE, *Characterisation of derived complements*, In Lecture Notes in Math. (Proc. Conf., New York), 15-24, Springer, (1971).
- [5] C. BERGE, *Théorie des graphes et ses applications*, Dunod, Paris, (1958).
- [6] C. BERGE, *Färbung von Graphen, deren sämtliche bzw. deren ungerade Kreise starr sind (Zusammenfassung)*, Technical report, Wiss. Z. Martin Luther Univ. Math.-Natur. Reihe (Halle-Wittenberg), (1961).
- [7] C. BERGE, *Some classes of Perfect graphs*, In Six Papers in Graph Theory, 1-21, Indian Statistical Institute, Calcutta, (1963).
- [8] C. BERGE, *Some classes of perfect graphs*, In Graph Theory and Theoretical Physics (F. Hardy, ed.) Academic Press, London, 155-165, (1967).
- [9] C. BERGE, *Graphs and Hypergraphs*, North-Holland Mathematical Library, Vol. 6, North-Holland, Amsterdam. Translated by Edward Minieka, (1973).
- [10] C. BERGE & V. CHVÁTAL, editors. *Topics on perfect graphs*, volume **21** of Ann. Discrete Math. North Holland, Amsterdam, (1984).
- [11] C. BERGE & P. DUCHET, *Strongly perfect graphs*, volume **21** of Ann. Discrete Math. North Holland, Amsterdam, 57-61, (1984).
- [12] C. BERGE, *Graphs*, North-Holland Mathematical Library, Vol. **6**, North-Holland, Amsterdam. Second revised edition of part 1 of the 1973 English version, (1985).
- [13] C. BERGE, *Who killed the Duke of Densmore ?*, Bibliothèque Oulipienne, Vol. 67, OuLiPo, Paris, (1995).
- [14] C. BERGE & J.L. RAMÍREZ ALFONSÍN, *Origins and Genesis*, In Ramírez Alfonsín and Reed [140], 1-12, (2001).

- [15] M.E. BERTSCHI, *Perfectly contractile graphs*, J. Combin. Theory Ser. B **50**, 222-230, (1990).
- [16] N. BIGGS, *Algebraic Graph Theory*, 2nd Edition, Cambridge Math. Library, (1993).
- [17] G.D BIRKHOFF, *A determinant formula for the number of ways of coloring a map*, Ann. of Math. (2) **14**, 42-46, (1912/13).
- [18] R.E. BIXBY, *A composition of perfect graphs*, In Topics on Perfect Graphs, Ann. Discrete Math. **21** (C. Berge, V. Chvátal, eds.), North-Holland, 221-224, (1984).
- [19] R.G. BLAND & H.C. HUANG & L.E. TROTTER JR., *Graphical properties related to minimal imperfection*, Discrete Math. **27**, 11-22, (1979).
- [20] J.A. BONDY & U.S.R. MURTY, *Graph Theory with Applications*, American Elsevier, New York, (1976).
- [21] J.A. BONDY & U.S.R. MURTY, *Graph Theory*, 2nd Edition, (Traduction française par F. Havet), (2008).
- [22] R.L. BROOKS, *On colouring the nodes of a network*, Proc. Cambridge Philos. Soc. **37**, 194-197, (1941).
- [23] M. BURLET & J. FONLUPT, *Polynomial algorithm to recognize a Meyniel graph*, In Topics on Perfect Graphs, Math. Stud **88** (C. Berge, V. Chvátal, eds.), 225-252, (1984).
- [24] M. BURLET & J.P. UHRY, *Parity graphs*, Ann. Discrete Math. **21**, 253-277, (1984).
- [25] O.M. CARDUCCI, *The strong perfect graph conjecture holds for diamonded odd cycle-free graphs*, Discrete Math. **110**, 17-34, (1992).
- [26] M. CERIOLI & H. EVERETT, C.M.H. FIGUEIREDO & S. KLEIN, *The homogeneous set sandwich problem*, Inf. Process. Lett. **67** : **1**, 31-35, (1998).
- [27] M. CHUDNOVSKY, *Berge trigraphs and their applications*, PhD thesis, Princeton University, (2003).
- [28] M. CHUDNOVSKY, *Berge trigraphs*, Manuscript, (2004).
- [29] M. CHUDNOVSKY & G. CORNUÉJOLS & X. LIU & P. SEYMOUR & K. VUŠKOVIĆ, *Cleaning for Bergenness*, Manuscript, (2003).
- [30] M. CHUDNOVSKY & N. ROBERTSON & P. SEYMOUR & R. THOMAS, *Workshop on Graph Colouring and Decomposition*, exposé oral, Princeton, septembre (2001).
- [31] M. CHUDNOVSKY & N. ROBERTSON & P. SEYMOUR & R. THOMAS, *The strong perfect graph theorem*, Annals of Mathematics **164**, 51-229, (2006).
- [32] M. CHUDNOVSKY & P. SEYMOUR, communication personnelle, janvier (2002).

- [33] M. CHUDNOVSKY & P. SEYMOUR, *Recognizing Berge Graphs*, Manuscript, (2002).
- [34] V. CHVÁTAL, *Perfectly ordered graphs*, Ann. Discrete Math. **21**, 63-65, (1984).
- [35] V. CHVÁTAL, *Star-cutsets and perfect graphs*, J. Combin. Theory Ser. B **39**, no. 3, 189-199, (1985).
- [36] V. CHVÁTAL & C.T. HOÀNG, *On the P_4 -structure of perfect graphs I : Even decompositions*, J. Combin. Theory Ser. B **39**, 209-219, (1985).
- [37] V. CHVÁTAL, *On the P_4 -structure of perfect graphs III : Partner decompositions*, J. Combin. Theory Ser. B **43**, 349-353, (1987).
- [38] V. CHVÁTAL & N. SBIHI, *Bull-free Berge Graphs Are perfect*, Graphs and Combinatorics **3**, no. 2, 127-139, (1987).
- [39] V. CHVÁTAL & N. SBIHI, *Recognizing claw-free perfect graphs*, J. Combin. Theory Ser. B **44**, 154-176, (1988).
- [40] V. CHVÁTAL, *Problems concerning perfect graphs*, DIMACS workshop on perfect graphs, Princeton University, (1993).
- [41] A. COBHAM, *The intrinsic computational difficulty of function*, In Proc. 1964 International Congress for Logic Methodology and Philosophy of Science, Vol. 10, North-Holland, 24-30, (1964).
- [42] M. CONFORTI & G. CORNUÉJOLS & K. VUŠKOVIĆ, *Decomposition of Berge graphs by double star cutsets and 2-joints*, Manuscript, March (2001).
- [43] M. CONFORTI & G. CORNUÉJOLS & K. VUŠKOVIĆ, *Square-free perfect graphs*, J. Combin. Theory Ser. B **90**, 257-307, (2004).
- [44] S.A. COOK, *The complexity of theorem-proving procedures*, In Proceedings of the Third Annual ACM Symposium on Theory of Computing, 151-158, New York, (1971).
- [45] D.G. CORNEIL & S. OLARIU & L. STEWART, *Asteroidal triple-free graphs*, SIAM J. Discrete Math. **10 :3**, 399-430, (1997).
- [46] G. CORNUÉJOLS & W.H. CUNINGHAM, *Compositions for perfect graphs*, Discrete Math. **55**, 245-254, (1985).
- [47] G. CORNUÉJOLS & B. REED, *Complete multipartite cutsets in minimal imperfect graphs*, J. Combin. Theory Ser. B **59**, 191-198, (1993).
- [48] G. CORNUÉJOLS & X. LIU & K. VUŠKOVIĆ, *A polynomial algorithm for recognizing perfect graphs*, Manuscript, (2002).
- [49] H.S.M. COXETER, *Self-dual configurations and regular graphs*, Bull. Amer. Math. Soc. **56**, 413-455, (1950).
- [50] W.H. CUNINGHAM, *Decomposition of directed graphs*, SIAM J. Alg. Discrete Methods **3**, 214-228, (1982).
- [51] R. DESCOMBES, *Les carrés magiques*, Vuibert, (2000).

- [52] R. DIESTEL, *Graph Theory*, 2nd edition, Springer, New York, (2000).
- [53] R.P. DILWORTH, *A decomposition theorem for partially ordered sets*, Ann. Math. **51**, 161-166, (1950).
- [54] G.A. DIRAC, *Note on the colouring of graphs*, Math. Z. **54**, 347-353, (1951).
- [55] G.A. DIRAC, *On rigid circuit graphs*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **25**, 71-76, (1961).
- [56] B. DUSHNIK & E.W. MILLER, *Partially ordered sets*, American Journal of Mathematics **63**, 600-610, (1941).
- [57] J. EDMONDS, *Minimum partition of a matroid into independent subsets*, J. Res. Nat. Bur. Standards Sect. B **69B**, 67-72, (1965).
- [58] J. EDMONDS, *Paths, tree and flowers*, Canad. J. Math. **17**, 449-467, (1965).
- [59] P. ERDŐS, *Graph theory and probability*, II. Canad. J. Math. **13**, 346-352, (1961).
- [60] A. FARRUGIA, *Self-complementary graphs and generalisations : a comprehensive reference manual*, Master's thesis, University of Malta, (1999).
- [61] C.M.H. FIGUEIREDO & S. KLEIN & Y. KOHAYAKAMA & B. REED, *Finding skew partitions efficiently*, J. Algorithms **37**, 505-521, (2000).
- [62] C.M.H. FIGUEIREDO & S. KLEIN & K. VUŠKOVIĆ, *The graph sandwich problem for 1-join composition is NP-complete*, Discrete Applied Math. **121**, 73-82, (2002).
- [63] D.R. FULKERSON, *On the perfect graph theorem*, In Mathematical programming (Madison 1972), Math. Res. Center Publ., vol. **30**, Academic Press, New York, 69-76, (1973).
- [64] T. GALLAI, *Graphen mit triangulierbaren ungeraden Vielecken*, Magyar Tud. Akad. Mat. Kutató Int. Közl. **7**, 3-36, (1962).
- [65] G.S. GASPARIAN, *Minimal imperfect graphs : a simple approach*, Combinatorica **16**, 209-212, (1996).
- [66] F. GAVRIL, *Algorithms on clique separable graphs*, Discrete Math. **19**, 159-165, (1977).
- [67] M.R. GAREY & D.S. JOHNSON, *Computer and Intractability : A Guide to the Theory of NP-completeness*, W.H. Freeman, San Francisco, (1979).
- [68] A. GHOUILA-HOURI, *Sur une conjecture de Berge (mimeo)*, (1960).
- [69] P.C. GILMORE & A.J. HOFFMAN, *A characterization of comparability graphs and of interval graphs*, Canad. J. Math. **16**, 539-548, (1964).
- [70] C. GODSIL & G. ROYLE, *Algebraic Graph Theory*, Graduate Texts in Mathematics, Vol. 207, Springer, New York. (2001).

- [71] M.C. GOLUMBIC, *Trivially perfect graphs*, Discrete Math. **24**, 105-107, (1978).
- [72] C. GRINSTEAD, *The perfect Graph Conjecture for toroidal graphs*, J. Combin. Theory Ser. B **30**, 70-74, (1981).
- [73] M. GRÖTSCHEL & L. LOVÁSZ & A. SCHRIJVER, *Geometric algorithms and combinatorial optimization*, Springer Verlag, (1988).
- [74] H. GRÖTZSCH, *Zur Theorie der diskreten Gebilde*, VII. Ein Dreifarben-satz für dreikreisfreie Netze auf der Kugel, Wiss. Z. Martin-Luther-Univ. Halle-Wittenberg. Math.-Nat. Reihe **8**, 109-120, (1958/1959).
- [75] R.P. GUPTA, *The chromatic index and the degree of a graph*, Notices Amer. Math. Soc. **13**. Abstract 66T-429, (1966).
- [76] A. HAJNAL & J. SURÁNYI, *Über die Auflösung von Graphen in vollständige Teil-graphen*, Ann. Univ. Sci. Budapest, Eötvös Sect. Math. **1**, 113-121, (1958).
- [77] A. HAJNAL & E. SZEMERÉDI, *Proof of a conjecture of P. Erdős*, Combinatorial Theory and its Applications, II (Proc. Colloq., Balatonfüred, 1969), 601-623, North-Holland, (1970).
- [78] P.L. HAMMER & F. MAFFRAY, *Preperfect graphs*, Combinatorica **13**, 199-208, (1993).
- [79] F. HARARY & C. HOLZMANN, *Line graphs of bipartite graphs*, Rev. Soc. Mat. Chile **1**, 19-22, (1974).
- [80] R.B. HAYWARD, *Weakly triangulated graphs*, J. Combin. Theory Ser. B **39**, 200-209, (1985).
- [81] R.B. HAYWARD, *Murky graphs*, J. Combin. Theory Ser. B **49**, 200-235, (1990).
- [82] A. HERTZ, *Slim graphs*, Graphs Combin. **5**, 149-157, (1989).
- [83] A. HERTZ, *Slender graphs*, J. Combin. Theory Ser. B **47**, 231-236, (1989).
- [84] A. HERTZ, *Skelted graphs - a new class of perfect graphs*, Discrete Math. **78**, 291-296, (1989).
- [85] C.T. HOÀNG, *Perfect Graphs*, PhD Thesis, McGill University, Montreal, Canada (1985).
- [86] C.T. HOÀNG, *On the P_4 -structure of perfect graphs II : Odd decompositions*, J. Combin. Theory Ser. B **39**, 220-232, (1985).
- [87] C.T. HOÀNG, *Alternating orientation and alternating colouration of perfect graphs*, J. Combin. Theory Ser. B **42**, 264-273, (1987).
- [88] C.T. HOÀNG & N. KHOUZAM, *On brittle graphs*, J. Graph Theory **12**, 391-404, (1988).
- [89] C.T. HOÀNG, *Some properties of minimal imperfect graphs*, Disc. Math. **160**, 165-175, (1996).

- [90] C.T. HOÀNG & V.B. LE, *On P_4 -transversals of perfect graphs*, Discrete Math. **216**, 195-210, (2000).
- [91] C.T. HOÀNG & V.B. LE, *Recognizing perfect 2-split graphs*, SIAM J. Discrete Math. **13** :1, 48-55, (2000).
- [92] I. HOLYER, *The NP-completeness of edge-coloring*, SIAM J. Comput. **10**, 718-720, (1981).
- [93] S. HOUGARDY, *Classes of Perfect Graphs*, In Discrete Mathematics **306**, 2529-2571, (2006).
- [94] W.-L. HSU, *Decomposition of perfect graphs*, J. Combin. Theory Ser. B **43**, 70-94, (1987).
- [95] M. HUJTER & Z. TUZA, *Precoloring extensions III : Classes of perfect graphs*, Combin. Probab. Comput. **5**, 35-56, (1996).
- [96] W. IMRICH & S. KLAVŽAR, *Product Graphs : Structure and Recognition*, J. Wiley & Sons, New York, (2000).
- [97] B. JAMISON & S. OLARIU, *P_4 -reducible graphs - a class of uniquely tree-representable graphs*, Studies in Appl. Math. **81**, 79-87, (1989).
- [98] B. JAMISON & S. OLARIU, *A new class of brittle graphs*, Studies in Appl. Math. **81**, 89-92, (1989).
- [99] A. KAPOOR, *On the structure of balanced matrices and perfect graphs*, PhD Thesis, Carnegie Mellon University (1994).
- [100] R. KARP, *Reducibility among combinatorial problems*, In R. E. Miller and J. W. Thatcher, editors, Complexity of Computer Computations, 85-103, Plenum Press, (1972).
- [101] H.A. KIERSTEAD & A.V. KOSTOCHKA, *A short proof of the Hajnal-Szemerédi theorem on equitable colouring*, Combin. Probab. Comput. **17**, 265-270, (2008).
- [102] D. KÖNIG, *Über Graphen und ihre Anwendung auf Determinantentheorie und Mengenlehre*, Math. Ann. **77**, 453-465, (1916).
- [103] D. KÖNIG, *Gráfok és alkalmazásuk a determinánsok és halmazok elméletében*, Mat. Természettud. Értesítő **34**, 104-119, (1916).
- [104] D. KÖNIG, *Graphen und Matrizen*, Mat. Fiz. Lapok **38**, 116-119, (1931).
- [105] D. KÖNIG, *Theory of Finite and Infinite Graphs*, Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, vi+426pp, (1990).
- [106] V.B. LE, *A good characterization of cograph contractions*, J. Graph Theory **30**, 309-318, (1999).
- [107] P.G.H. LEHOT, *An optimal algorithm to detect a line graph and output its root graph*, J. of the Association for Computing Machinery **21**(4), 569-575, (1974).
- [108] C.G. LEKKERKERKER & J.C. BOLAND, *Representation of a finite graph by a set of intervals on the real line*, Fund. Math. **51**, 45-64, (1962).

- [109] D. LEVEN & Z. GALIL, *NP-completeness of finding the chromatic index of regular graphs*, J. Algorithms **4**, 35-44, (1983).
- [110] L.A. LEVIN, *Universal search problems*, Problemy Peredači Informacii **9**, 265-266, (1973).e
- [111] L. LOVÁSZ, *On chromatic number of finite set-systems*, Acta Math. Acad. Sci. Hungar. **19**, 59-67, (1968).
- [112] L. LOVÁSZ, *A characterization of perfect graphs*, J. Combin. Theory Ser. B **13**, 95-98, (1972).
- [113] L. LOVÁSZ, *Normal hypergraphs and the perfect graphs conjecture*, Discrete Mathematics **2**, 253-267, (1972).
- [114] L. LOVÁSZ, *On the Shannon capacity of a graph*, IEEE Trans. Inform. Theory **25**, 1-7, (1979).
- [115] L. LOVÁSZ, *Perfect graphs*, In L.W. Beineke and R.L. Wilson, editors, Selected Topics in Graph Theory, 55-87, Academic Press, (1983).
- [116] E.M. LUKS, *Isomorphism of graphs of bounded valence can be tested in polynomial time*, J. Comput. System Sci. **25**, 42-65, (1982).
- [117] F. MAFFRAY & M. PREISSMANN, *Perfect Graphs with no P_5 and no K_5* , Graphs Combin. **10**, 179-184, (1994).
- [118] F. MAFFRAY & M. PREISSMANN, *Split-neighbourhood graphs and the Strong Perfect Graph Conjecture*, J. Combin. Theory Ser. B **63**, 294-309, (1995).
- [119] F. MAFFRAY & B.A. REED, *A Description of Claw-Free Perfect Graphs*, J. Combin. Theory Ser. B **75**, 134-156, (1999).
- [120] F. MAIRE, *Slightly triangulated graphs are perfect*, Graphs Combin. **10**, 263-268, (1994).
- [121] S.E. MARKOSIAN & I.A. KARAPETIAN, *Perfect graphs*, Akad. Nauk Armjan. SSR Dokl. **63**, 292-296, (1976).
- [122] H. MEYNIEL, *On the Perfect Graph Conjecture*, Discrete Math. **16**, 339-342, (1976).
- [123] H. MEYNIEL, *The graphs whose odd cycles have at least two chords*, Ann. Discrete Math. **21**, 115-119, (1984).
- [124] H. MEYNIEL, *A new property of critical imperfect graphs and some consequences*, European J. Combin. **8**, 313-316, (1987).
- [125] E.F. MOORE, *The shortest path through a maze*, In Proceedings of an International Symposium on the Theory of Switching, 2-5 april 1957, Baton Rouge, 285-292, (1959).
- [126] E. MUNARINI & C.P. CIPPO & A. SCAGLIOLA & N.Z. SALVI, *Doubles graphs*, Discrete Mathematics **308**, 242-254, (2008).
- [127] J. MYCIELSKI, *Sur le coloriage des graphes*, Colloq. Math. **3**, 161-162, (1955).

- [128] J. NEŠETŘIL & V. RÖDL, *A short proof of the existence of highly chromatic hypergraphs without short cycles*, J. Combin. Theory Ser. B **27**, 225-227, (1979).
- [129] S. OLARIU, *All variations on perfectly orderable graphs*, J. Combin. Theory Ser. B **45**, 150-159, (1988).
- [130] S. OLARIU, *No Antitwins in Minimal Imperfect Graphs*, J. Combin. Theory Ser. B **45**, 255-257, (1988).
- [131] S. OLARIU, *Paw-free graphs*, Inform. Process. Lett. **28**, 53-54, (1988).
- [132] E. OLARU, *Über die Überdeckung von Graphen mit Cliques*, Wiss. Z. Tech. Hochsch. Ilmenau **15**, 115-121, (1969).
- [133] M.W. PADBERG, *Perfect zero-one matrices*, Math. Programming **6**, 180-196, (1974).
- [134] M.W. PADBERG, *Almost integral polyhedra related to certain combinatorial optimization problems*, Linear Algebra and its Applications **15**, 69-88, (1976).
- [135] C.H. PAPADIMITRIOU, *Computational complexity*, Addison-Wesley, Reading, (1994).
- [136] K.R. PARTHASARATHY & G. RAVINDRA, *The Strong Perfect-Graph Conjecture is true for $K_{1,3}$ -free graphs*, J. Combin. Theory Ser. B **21**, 212-223, (1976).
- [137] K.R. PARTHASARATHY & G. RAVINDRA, *The validity of the Strong Perfect-Graph Conjecture for $(K_4 - e)$ -free graphs*, J. Combin. Theory Ser. B **26**, 98-100, (1979).
- [138] M. PREISSMANN, *Locally perfect graphs*, J. Combin. Theory Ser. B **50**, 22-40, (1990).
- [139] M. PREISSMANN & A. SEBŐ, *Some aspects of minimal imperfect graphs*, In Ramírez Alfonsín and Reed [140], 185-214, (2001).
- [140] J.L. RAMÍREZ ALFONSÍN & B.A. REED, editors. *Perfect graphs*, Series in Discrete Mathematics and Optimization, Wiley-Interscience, (2001).
- [141] R.C. READ, *An introduction to chromatic polynomials*, J. Combin. Theory **4**, 25-71, (1968).
- [142] B. REED, *From conjecture to theorem*, In Ramírez Alfonsín and Reed [140], 13-24, (2001).
- [143] B. REED, *A gentle introduction to semi-definite programming*, In Ramírez Alfonsín and Reed [140], 233-259, (2001).
- [144] F. ROUSSEL & P. RUBIO, *About skew partitions in minimal imperfect graphs*, J. Combin. Theory Ser. B **83**, 171-190, (2001).
- [145] N.D. ROUSSOPOULOS, *A $\max \{m, n\}$ algorithm for determining the graph H from its line graph G* , Information Processing Letters **2**, 108-112, (1973).

- [146] I. RUSU, *Cutsets in perfect and minimal imperfect graphs*, In Ramírez Alfonsín and Reed [140], 167-183, (2001).
- [147] A. SASSANO, *Chair-free Berge graphs are perfect*, Graphs Combin. **13**, 369-395, (1997).
- [148] A. SCHRIJVER, *Combinatorial Optimization, Polyhedra and Efficiency*, Vol. A, Springer, (2003).
- [149] D. SEINSCHE, *On a property of the class of n -colorable graphs*, J. Combin. Theory Ser. B **16**, 191-193, (1974).
- [150] C.E. SHANNON, *The zero error capacity of a noisy channel*, IRE Trans. Inf. Theory **IT-2**, 8-19, (1956).
- [151] L. SUN, *Two classes of perfect graphs*, J. Combin. Theory Ser. B **53**, 273-292, (1991).
- [152] N. TROTIGNON, *Graphes parfaits : structure et algorithmes*, PhD Thesis, Université Joseph-Fourier, Grenoble I, (2004).
- [153] L.E. TROTTER JR., *Line perfect graphs*, Math. Programming **12**, 255-259, (1977).
- [154] A. TUCKER, *The Strong Perfect Graph Conjecture for planar graphs*, Canad. J. Math. Vol. XXV, No. 1, 103-114, (1973).
- [155] A. TUCKER, *The validity of the Perfect Graph Conjecture for K_4 -free graphs*, Ann. Discrete Math. **21**, 149-157, (1984).
- [156] A. TUCKER, *Coloring perfect $(K_4 - e)$ -free graphs*, J. Combin. Theory Ser. B **42**, 313-318, (1987).
- [157] P. UNGAR & B. DESCARTES, *Advanced Problems and Solutions : Solutions : 4526*, Amer. Math. Monthly **61**, 352-353, (1954).
- [158] V.G. VIZING, *On an estimate of the chromatic class of a p -graph*, Diskret. Analiz No. **3**, 25-30, (1964).
- [159] H. WHITNEY, *Congruent graphs and the connectivity of graphs*, Amer. J. Math. **54**, 150-168, (1932).
- [160] G. ZAMBELLI, *On Perfect Graphs and Balanced Matrices*, PhD thesis, Carnegie Mellon University, (2004).