كلية العلوم و التقنيات فاس
ⵜⴰⵖⵎⵉⵔⵜ ⵏ ⵜⵙⴰⵏⵙⵉⵏ ⴷ ⵜⴻⵜⵉⴽⵏⵉⵢⵉⵏ
Faculté des Sciences et Techniques de Fès

جامعة سيدي محمد بن عبد الله
ⵜⴰⵙⴷⴰⵡⵉⵜ ⵙⵉⴷⵉ ⵎⵓⵃⵎⵎⴷ ⴱⵏ ⵄⴱⴷⵍⵍⴰⵀ
Université Sidi Mohamed Ben Abdellah

Master Mathématique et Application au Calcul Scientifique

(MACS)

MEMOIRE DE FIN D'ETUDES

Pour l'obtention du Diplôme de Master Sciences et Techniques (MST)

Les anneaux et modules gradués

Réalisé par : Mariam LAMRANI
Sous la direction de: Pr. Najib MAHDOU

Soutenu le : 13/06/2018

Devant le jury composé de:

Pr. Anisse OUADGHIRI	*Faculté des Sciences et Techniques de Fès..*	*Président*
Pr. Abdelmajid HILALI	*Faculté des Sciences et Techniques de Fès.*	*Examinateur*
Pr. Aziza RAHMOUNI HASSANI	*Faculté des Sciences et Techniques de Fès.*	*Examinatrice*
Pr. Najib MAHDOU	*Faculté des Sciences et Techniques de Fès.*	*Encadrant*

Année Universitaire 2017 / 2018

FACULTE DES SCIENCES ET TECHNIQUES FES – SAISS
B.P. 2202 – Route d'Imouzzer – FES
☎ 212 (0)5 35 61 16 86 – Fax: 212 (0)5 35 60 82 14
Site web: http://www.fst-usmba.ac.ma

REMERCIEMENTS

Au terme de ce travail, je voudrais exprimer mes remerciements et ma profonde reconnaissance à tout ce qui ont contribué de prêt ou de loin à sa réalisation.

Je tiens tout d'abord à remercier ALLAH le tout puissant et miséricordieux, qui m'a donné la force et la patience d'accomplir ce Modeste travail.

Je tiens à exprimer mes remerciements et ma profonde gratitude à mon professeur encadrant, Mr `Najib MAHDOU`*, qui n'a épargné aucun effort pour que ce travail prenne forme. Je le remercie pour l'attention particulière qu'il a porté à ce travail et de la confiance qu'il m'a accordé tout au long de ce parcours.*

Je tiens également à exprimer toute ma gratitude et tout mon sentiment de reconnaissance aux professeurs Anisse OUADGHIRI, Abdelmajid Hillali, et Aziza RAHMOUNI HASSANI pour l'honneur qu'ils me font d'accepter d'être membres de jury de ce mémoire.

J'adresse mes sincères remerciements et ma grande reconnaissance à tous mes professeurs du cycle Master Mathématiques et Applications aux calculs scientifiques.

J'exprime ma gratitude à tous mes collègues du cycle Master Mathématiques et Applications aux calculs scientifiques pour leur soutien amical durant ces deux années d'étude.

TABLE DES MATIÈRES

Introduction :

Le présent travail a pour but d'étudier quelques propriétés des anneaux et modules gradués dans le cas commutatif, et leurs dimension, et de présenter une comparaison entre $dimgrA$, $KdimA$ et $Kdim(1+A_{+})^{-1}A$ proposer par **Lionel Ducos** qui utilise des notions récentes telles que les idéaux et monoïdes bords.
Ainsi, ce mémoire est divisé en quatre chapitres.

Le premier chapitre :

Le long de ce chapitre, on va rappeler certaines définitions et propriétés concernant les modules et les anneaux classiques. Les résultats sont exposés sans démonstration mais avec des références précises.

Le deuxième chapitre :

Ce chapitre est consacré aux définitions des anneaux et modules gradués et leurs propriétés. En premier lieu, on va traiter quelques définitions de base des anneaux et modules gradués comme : anneau gradué, module gradué, idéal homogène, sous module homogène et homomorphisme homogène. Ensuite, on va aborder les propriétés de ses anneaux et modules gradués tels que, anneau gradué Noethérien (resp.Artinian), module simple, anneau gradué de type fini, ainsi les propriétés de l'anneau $A^{(d)}$ avec A est un anneau commutatif gradué.

Le troisième chapitre :

Ce chapitre est consacré à la dimension des anneaux gradués et leurs propriétés. Premièrement, on vas traiter la dimension des anneaux gradués de degrés positive et leurs propriétés. deuxièmement, on va présenter l'article de Lionel Ducos nommé "**Sur les dimensions des anneaux gradués**", dont lequel il s'agit d'une étude de la dimension de Krull des anneaux commutatifs $\mathbb{N}$-gradués, noethériens ou pas. Dans un premier temps, ils donnent les liens entre les définitions classique et constructive de la dimension graduée : la définition classique utilise les chaînes d'idéaux premiers gradués, celle constructive fait appel à des idéaux bords et monoïdes bords d'éléments homogènes. ils fixent Comme but d'établir des relations dimensionnelles classiques, et comparant la dimension de Krull et la dimension graduée, de l'anneau gradué.

Le quatrième chapitre :

Dans ce chapitre on va citer la définition de la catégorie des anneaux gradués, ces dernières sont considérés associatifs et admet une identité. Ensuite on va définir la catégorie des modules gradués noté R-gr, et leurs propriétés.

Les sections de ce chapitre sont situé dans le livre de Constantin Nastasescu et Freddy Van Oystaeyen, nommé *"Methods of Graded Rings"*.

CHAPITRE 1

PRÉLIMINAIRE

Durant tout ce mémoire, tous les anneaux sont considérés commutatifs avec élément unité et nous noterons toujours 1 cette unité (il pourra nous arriver d'écrire 1_R pour préciser qu'il s'agit de l'élément unité de l'anneau R), sauf mention du contraire.

1.1 Rappels sur les idéaux

Définition 1.1.1
Un ensemble I d'un anneau (A,+,.) est dit un idéal si on a :
- *(I,+) est un groupe.*
- *Pour tous $x \in I$ et $y \in A$, on a $xy \in I$.*

Définition 1.1.2
Soient A un anneau et P un idéal de A.

1. *On dit que P est premier si $P(\neq A)$ et $\forall x, y \in A$ on a :*
   $xy \in P \Longrightarrow x \in P$ *ou* $y \in P$.
2. *P est dit un idéal maximal si P est maximal pour l'inclusion (P est supposé différent de A), c'est-à-dire que si P' est un idéal de A tel que $P \subseteq P'$, alors $P' = P$ ou $P' = A$.*

Définitions 1.1.3

Soient A un anneau, I et J deux idéaux de A, l'idéal quotient de I par J on a :

$$[I : J] = \{x \in J | xJ \subseteq I\}$$

l'idéal $[I : J]$ *est appelé l'idéal transporteur de J dans I. l'idéal* $[(0) : J]$ *est appelé l'annulateur de I noté par Ann(I) :*

$$Ann(I) := \{x \in A | xI = (0)\}$$

Soient A un anneau, et I un idéal de A le radical I de A est définit comme suit :

$$\sqrt{I} = \{a \in A,\ il\ existen \geq 1,\ a^n \in I\}$$

Définition 1.1.4

Soit A un anneau et soit I un idéal de A distinct de A. On dit que I est un idéal primaire s'il vérifie la condition suivante : soit a et b dans A tels que $ab \in I$ *et* $a \notin I$*, alors il existe* $n \geq 1$ *tel que* $b^n \in I$*.*
Si I est un idéal primaire de radical p, on dira aussi que I est p-primaire.

Définition 1.1.5

Un idéal premier p est considéré comme un idéal premier minimal sur un idéal I s'il est minimal parmi tous les idéaux premiers contenant I.

Définition 1.1.6

Soit A un anneau. On dit qu'un idéal premier p de A est minimal si A n'a pas d'idéal premier strictement contenu dans p.

Définition 1.1.7 (la hauteur d'un idéal)

Soient A un anneau et P un idéal de A. Si P est un idéal premier on définit sa hauteur, notée ht(P), comme étant la borne supérieure des entiers naturels n tels qu'il existe une chaîne strictement croissante de n+1 idéaux premiers contenus dans P :

$$P_0 \subsetneq P_1 \subsetneq ... \subsetneq P_n = P$$

Pour tout idéal propre I, sa hauteur ht(I) est la plus petite des hauteurs des idéaux premiers qui le contiennent.

1.2 Rappel sur les modules

1.2.1 Définitions :

Définition 1.2.1
1) *Soit A un anneau. Un A-module est un ensemble M muni d'une loi de groupe abélien $(M.+)$ et d'une application (modulation) de $A \times M \longrightarrow M$ telles que*

$$\begin{cases} a(x+y) = ax + ay & \\ (ab)x = a(bx) & \forall x, y \in M \\ (a+b)x = ax + bx & \forall a, b \in A \\ 1_A x = x & \end{cases}$$

2) *Soit M un A-module. Une partie N de M est un sous-module de M si $(N, +)$ est un groupe abélien et $ax \in N$ pour tout $x \in N$ et $a \in A$.*

Définition 1.2.2
Soient R un anneau et M un R-module. Un sous module N de M a appelé un sous module premier de M, si pour chaque $r \in R$ et $m \in M$, la condition $rm \in N$ implique $m \in N$ ou $rM \subseteq N$.

Définition 1.2.3
Soit M un A-module. On définit l'annulateur de M par :

$$Ann(M) = \{a \in A | aM = 0\}$$

Définition 1.2.4
Soient M un A-module et Q un sous-module propre de M (c'est-à-dire un sous-module de M différent de M). On dit que Q est p-primaire dans M si la condition suivante est satisfaite : si $a \in A$ et $m \in M$ sont tels que $am \in Q$ et $m \notin Q$, alors $a \in p$, où p est l'idéal premier $\sqrt{Ann(M/Q)}$.

Définition 1.2.5
Soient M un module et N un sous-module de M. On dit que N admet une décomposition primaire dans M si N peut s'écrire comme une intersection finie de sous-modules primaires dans M :

$$N = Q_1 \cap Q_2 \cap ... \cap Q_r$$

Définition 1.2.6
Soit A un anneau. La longueur d'un A-module M est la borne supérieure de l'ensemble des entiers n tels qu'il existe une suite $M_0 \subsetneq M_1 ... \subsetneq M_n$ strictement croissante de sous-A-modules de M.

Définition 1.2.7

1) *Une suite exacte de A-module et d'homomorphismes*

$$...M_{i-1} \xrightarrow{u_{i-1}} M_i \xrightarrow{u_i} M_{i+1} \xrightarrow{u_{i+1}} ...$$

est dite suite exacte en M_i si $Keru_i = Imu_{i-1}$. Cette suite exacte si elle est exacte en chaque M_i.

2) *Une suite exacte courte est une suite exacte de la forme*

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{u} M \xrightarrow{v} M" \longrightarrow 0$$

c'est à dire que u est injectif, v est surjectif.

Définition 1.2.8

Soient A un anneau et $f : M \longrightarrow N$ un homomorphisme de A-modules. Le A-module quotient $N/f(M)$ est appelé conoyau de f. On le note Coker f.

Lemme 1.2.9 (Lemme de serpent)

Considérons un diagramme d'homomorphismes de A-modules :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & N \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"'] & M \arrow[r, "p"] \arrow[d, "g"'] & P \arrow[r] \arrow[d, "h"] & 0 \\
0 \arrow[r] & N' \arrow[r, "i'"] & M' \arrow[r, "p'"] & P' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

dans le quelles deux lignes sont supposées exactes et les deux carrés commutatifs : $i' \circ f = g \circ i$ et $p' \circ g = h \circ p$.

Définition 1.2.10

1) *Un module M est de type fini s'il existe une partie fini $\{x_1, ..., x_n\}$ de M telle que $\langle x_1, ..., x_n\rangle = M$. On a dans ce cas : $M = \sum_{i=1}^{n} Rx_i$.*

2) *Un module M est dit cyclique s'il existe $x \in M$ tel que $M = \langle x\rangle$; **i.e** $M = Rx$.*

Théoréme 1.2.11 ([17],théorème 1.12.4)

Soit M un A-module. Les assertions suivantes sont équivalentes :
1) *M est de type fini.*
2) *Il existe $n \geq 1$ tel que M est isomorphe à un quotient d'un module libre de type fini A^n.*

Théoréme 1.2.12 ([17] lemme de Nakayama)

Soient I un idéal de R et $J(R)$ le radical de Jacobson de l'anneau R. Les assertions suivantes sont équivalentes : ***i.*** *$I \subseteq J(R)$.*
ii. *Pour tout module de type fini M tel que $IM = M$, on a $M = 0$.*
iii. *Pour tout module M de type fini et tout sous module N de M tel que $M = IM + N$, on a $M = N$.*
iv *Pour tout module M tel que $M/IM =< \bar{x_1}, ..., \bar{x_n} >$, on a $M =< x_1, ..., x_n >$.*

1.2.2 Modules libres

Définition 1.2.13
Soit M un A-module. M est dit libre s'il est somme directe de copies de A. Si $Aa_i \cong A$ et $M = \oplus_{i\in I} Aa_i$, où I est un ensemble d'indexation,l'ensemble $\{a_i \setminus i \in I\}$ est appelé alors une base de M.
Un module libre est dit de rang n s'il admet une base de cardinal n.

Théoréme 1.2.14 ([25], Corollaire 3.7)
Soient R un anneau et E un R-module libre de rang n. Si $\{a_1, \dots, a_n\}$ engendre E, alors c'est une base de E.

Définition 1.2.15
Soit M un A-module.

1) *Une résolution libre de M est une suite exacte*

$$... \longrightarrow L_n \longrightarrow L_{n-1} \longrightarrow ... \longrightarrow L_1 \longrightarrow L_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

où L_n est un A-module libre pour tout $n \geq 0$.

2) *Une présentation de M (de longueur 1) est une suite exacte*

$$L_1 \longrightarrow L_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

où L_0 et L_1 sont des modules libres. Notamment, tout module admet une présentation.

3) *Un module M est dit de présentation fini, s'il admet une présentation :*

$$L_1 \longrightarrow L_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

avec L_0 et L_1 sont libres de base finie.

1.2.3 Modules projectifs

Définition 1.2.16
Un module P est dit projectif si pour tout diagramme de modules :

$$\begin{tikzcd} P \arrow[d, "\alpha"'] \arrow[dr, "f"] & & \\ B \arrow[r, "g"] & A \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

où la ligne est exacte, il existe $\alpha \in Hom(P, B)$ tel que le diagramme est commutatif. c'est à dire que $g \circ \alpha = f$.

Proposition 1.2.17

1) *Tout module libre est projectif.*
2) *Tout module M admet une résolution projectif, c'est à dire qu'il existe une suite exacte :*

$$... \longrightarrow P_n \longrightarrow ... \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

où tous les P_i sont projectifs.

Théoréme 1.2.18
Soit P un module. Les assertions suivantes sont équivalentes :
1) *P est projectif;*
2) *Toute suite exacte $0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow P \longrightarrow 0$ est scindé.*
3) *P est un facteur direct d'un module libre.*
4) *$Hom(P, .)$ est un foncteur exact.*

Théoréme 1.2.19 (Lemme de Shanuel)
Soient $0 \longrightarrow K \longrightarrow P \longrightarrow M \longrightarrow 0$ et $0 \longrightarrow K' \longrightarrow P' \longrightarrow M \longrightarrow 0$ deux suites exactes, où P et P' sont projectif. Alors on a :

$$K \oplus P' \cong K' \oplus P$$

Théoréme 1.2.20
Soit R un anneau intègre. Alors tout idéal projectif de R est de type fini.

1.3 Anneaux et modules des fractions

1.3.1 Anneaux des fractions

Définition 1.3.1
Soit R un anneau.

1. *On dit que R est local s'il admet un seul idéal maximal $\mathcal{M}$ et on le note $(R, \mathcal{M})$.*
2. *On dit que R est semi-local s'il admet un nombre fini d'idéaux maximaux.*

Définition 1.3.2
Soient A un anneau et S une partie non vide de A. On dit que S est une partie multiplicative de A si :
1) *$1 \in S$ et $0 \notin S$.*
2) *$\forall a, b \in S, ab \in S$.*

Soit A un anneau commutatif et S une partie multiplicative de A. On définit une relation de $A \times S$ par :

$$(a, s) \sim (a', s') \Longleftrightarrow (as' - a's)t = 0 \text{ pour un certain } t \in S.$$

$\sim$ est bien une relation d'équivalence.
On note par a/s la classe d'équivalence de (a, s) qu'on appelle fraction. Sur l'ensemble de ces fractions noté $S^{-1}A$, on définit l'addition et la multiplication par :

$$(a/s) + (a'/s') = (as' + sa')/(ss')$$

et

$$(a/s) \times (a'/s') = (aa'/ss')$$

On vérifie facilement que $+$ et $\times$ sont bien définit et font de $S^{-1}A$ un anneau commutatif unitaire d'élément nul $0/1$ et d'élément unité $1/1$.

Définition 1.3.3
L'anneau $S^{-1}A$ est appelé anneau des fractions de A par rapport à S.

Remarques 1.3.4
1) *Si A est intègre et $S = A \setminus \{0\}$, alors $S^{-1}A$ est le corps des fractions de A.*
2) *Si S est le semi groupe des éléments non diviseurs de zéro, alors $S^{-1}A$ s'appelle l'anneau total des fractions de A.*

Exemple 1.3.5 (Localisation)
Soit P un idéal premier de A. On a $S = A \setminus P$ est une partie multiplicative de A. Dans ce cas on note $S^{-1}A$ par A_P. Les éléments de a/s où $a \in P$ et $s \in S$ forment un idéal de M de A_P. Si $a/s \notin M$ alors $a \notin P$ et par suite $1/a \in A_P$ et donc $s/a \in A_P$. Donc $a/s \in U(A_P)$ de sorte que M est l'unique idéal maximal de A_P. Ainsi on a :

$$M = PA_P = \{a/s \setminus a \in P, s \in S\}$$

A_P est appelé anneau local en P ou localisation de A en P.

1.3.2 Modules des fractions

On peut de manière analogue appliquer la construction de $S^{-1}A$ à un A-module M pour construire le module des fractions.
Soient M un A-module et S une partie multiplicative de A. On définit sur $M \times A$ la relation d'équivalence :

$$(m, s) \sim (m', s') \Leftrightarrow \exists t \in S / t(ms' - sm') = 0$$

On désigne par m/s la classe de (m, s) qu'on appelle fraction. L'ensemble de ces fraction noté $S^{-1}M$.
En définissant de manière naturelle l'addition et de la modulation par :

$$(m/s) + (m'/s') = (s'm + sm')/ss'$$

et

$$(a/t)(m/s) = (am/st)$$

où $a/t \in S^{-1}A$, $S^{-1}M$ ainsi un $S^{-1}A$-module (et aussi un A-module).

Définition 1.3.6
Soit M un A-module, la familles des idéaux premiers p de A tels que $M_p \neq 0$, est appelée le support de module M. Elle est notée par ***Supp(M)****.*

Théoréme 1.3.7 ([17].théorème 6.2.1)
Soient S une partie multiplicative d'un anneau R et M un R-module. Alors :

1) *Si M est un R-module de type fini, alors $S^{-1}M$ est un $S^{-1}R$-module de type fini.*

2) *Si M est un R-module libre, alors $S^{-1}M$ est un $S^{-1}R$-module libre.*

3) *Si M est un R-module de présentation finie, alors $S^{-1}M$ est un $S^{-1}R$-module de présentation finie.*

1.4 Anneaux réduits

Définition 1.4.1
Un anneau A est dit réduit si A n'admet pas d'éléments nilpotents autre que zéro, c'est à dire que si $x^n = 0$ pour un certain entier naturel non nul n et $x \in A$, alors $x = 0$.

Théoréme 1.4.2
Soient A un anneau réduit et S une partie multiplicative de R. Alors $S^{-1}A$ est réduit.

Corollaire 1.4.3
Soient R un anneau et K son anneau total des fractions. Alors, R est réduit si et seulement si K est réduit.

Théoréme 1.4.4
Soit R un anneau. Alors R est réduit si et seulement si R_P est réduit pour tout idéal premier P de R.

1.5 Anneaux classiques

Proposition 1.5.1 ([17], Théorème 7.1.1)
Soit A un anneau. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1) *Tout ensemble non vide d'idéaux de A admet un élément maximal.*

2) *Toute suite croissante d'idéaux de A est stationnaire.*

3) *Tout idéal de A est de type fini.*

Définition 1.5.2
Un anneau A est dit Noethérien s'il vérifie l'un des conditions équivalentes de la proposition 1.5.1.

Proposition 1.5.3 ([17], Corollaire 7.1.11)
Soient A un anneau Noethérien et $\phi : A \longrightarrow B$ un morphisme d'anneaux surjectif. Alors B est Noethérien.

Proposition 1.5.4
Soient A un anneau Noethérien et M un A-module. Alors M est Noethérien si et seulement si M est de type fini.

Proposition 1.5.5 ([17], Proposition 7.1.12)
Soient A un anneau Noethérien et S une partie multiplicative de A. Alors $S^{-1}A$ est Noethérien.

Théoréme 1.5.6 ([16], Exercice 24, Page 65)
Un anneau A est Noethérien si et seulement si tout idéal premier de A est de type fini.

Théoréme 1.5.7 (Théorème de Hilbert)
Soient A un anneau Noethérien et X une indéterminée sur A. Alors $A[X]$ est Noethérien.

Corollaire 1.5.8 ([17], Corollaire 7.1.15)
Soient A un anneau Noethérien et $X_1, X_2, ...X_n$ des indéterminées sur A. Alors $A[X_1, ...X_n]$ est un anneau Noethérien.

Corollaire 1.5.9 ([17], Corollaire 7.1.16)
Soient A un anneau Noethérien et B une A-algèbre de type fini. Alors B est un anneau Noethérien.

Définition 1.5.10
Soit A un anneau et soit M un module. On dit que M est Artinien si toute suite décroissante de sous-A-modules de M est stationnaire.
On dit que A est Artinien si c'est un A-module Artinien.

Théoréme 1.5.11 ([2], théorème 12.2.4)
Soit A un anneau. Un A-module M est de longueur finie si et seulement si il est Artinien et Noethérien.

Définition 1.5.12
Soient A un anneau et M un A-module.

1. *M est dit simple si $M \neq 0$ et si M ne contient pas de sous modules propres.*
2. *M est dit semi-simple si M est produit fini de modules simples.*

*3. Un anneau A est dit **semi-simple** s'il est un module semi-simple.*

Proposition 1.5.13 ([2], proposition 12.1.3)
Soient A un anneau et M un A-module simple. Alors, l'annulateur de M est un idéal maximal de A et $M \simeq A/Ann(M)$.

Algèbre sur un anneau

Définition 1.5.14
Une algèbre sur un anneau commutatif R est une structure algébrique qui se définit comme suit : $(E, R, +, ., \times)$ est une algèbre sur R, ou une R-algèbre, si :
- *$(E, +, .)$ est un module sur R ;*
- *La loi de composition interne $\times$, de $E \times E$ dans E, est bilinéaire.*

Remarque
Dans le cas où R est un corps, on aura $(E, +, .)$ un espace vectoriel sur R.

Extension triviale

Définition 1.5.15
Soient A un anneau, E un A-module et $R := A \propto E$ l'ensemble des couples (a, e) muni de l'addition composante par composante et de la multiplication définie par : $(a, e)(b, f) = (ab, af + be)$. R est dit l'anneau extension triviale, ou simplement extension triviale, de A par E.

Dimension d'un anneau

Définition 1.5.16
Soit A un anneau. On appelle dimension de A la borne supérieure des longueurs des chaîne strictement croissantes :

$$P_0 \subsetneq P_1 \subsetneq ... \subsetneq P_n$$

d'idéaux premiers de A.

CHAPITRE 2

ANNEAUX ET MODULES GRADUÉS

2.1 Anneau gradué

Définition 2.1.1
Soit G un groupe abélien additif. Alors l'anneau R est un anneau commutatif G-gradué s'il existe une famille $\{ R_n \}_{n \in G}$ de sous groupes abéliens de R tels que :

1. $R = \bigoplus_{n \in G} R_n$ *(comme des groupes abéliens).*
2. $R_n R_m \subseteq R_{n+m}$ *pour tous n et m de G.*

Lorsqu'on parle d'anneau gradué sans préciser de quel type, il est sous-entendu qu'il s'agit de graduation de type $\mathbb{Z}$, sauf mention du contraire.
On dit aussi qu'un anneau gradué de type $\mathbb{N}$ est un anneau gradué à degrés positifs.

Remarques 2.1.2
- *Un élément non nul $x \in R_n$ est appelé un élément homogène de degré n et on écrit $deg\ x = n$.*
- *Un élément r de R a une décomposition unique comme $r = \sum_n r_n$ avec $r_n \in R_n$ pour tout n, mais la somme étant une somme finie, c'est-à-dire presque tout r_n sont nuls. Les éléments r_n sont appelés les éléments homogènes de r.*

Remarque 2.1.3
Si $R = \bigoplus_n R_n$ est un anneau gradué, alors R_0 est un sous-anneau de R, $1 \in R_0$ et R_n est un R_0-module pour tout n.

Preuve
Comme $R_0.R_0 \subseteq R_0$, est un anneau gradué par un groupe abélien G c'est-à-dire que R_0 stable par multiplication alors il est bien un sous-anneau de R. pour montrer que $1_A \in R_0$, on prend $1 = \sum_n x_n$ avec $x_n \in R_n$ pour tout n. Alors pour tout i :

$$x_i = 1 \times x_i = \sum_n x_n x_i$$

avec $x_n \in R_n$ et $x_i \in R_i$ donc $x_n x_i \in R_{n+i}$ et on a $x_i \in R_i$ donc $x_i = x_i x_0$ pour tout i (par comparaison de degré et de l'unicité de décomposition) donc :

$$x_0 = 1.x_0 = \sum_n x_n x_0 = \sum_n x_n = 1$$

d'où $1 = x_0 \in R_0$, et aussi R_n est un R_0-module car $R_0.R_n \subseteq R_n$ pour toutes n.

Exemple 2.1.4 (*L'anneau de polynôme*)
Soient R un anneau et $x_1, x_2, ..., x_n$ des indéterminées de R. Pour $m = (m_1, m_2, ..., m_d) \in \mathbb{N}^d$ soit $x^m = x_1^{m_1} x_2^{m_2} ... x_d^{m_d}$ les monômes de polynôme alors l'anneau de polynôme $S = R[x_1, x_2, ...x_d]$ est un anneau $\mathbb{Z}$-graduée avec :

$$S_n = \{\textstyle\sum_{m \in \mathbb{N}^d} r_m x^m / r_m \in R \text{ et } m_1 + m_2 + ... + m_d = n\}$$

est appelé la graduation standard d'anneau de polynôme $S = R[x_1, x_2, ..., x_d]$ avec $S_0 = R$ et deg $x_i = 1$ pour tout i.

Il y'a d'autre graduation qui peut être mis sur S. Soit $(\alpha_1, \alpha_2, .., \alpha_d) \in \mathbb{Z}^d$, alors les sous groupes où :

$$S_n = \{\textstyle\sum_{m \in \mathbb{N}^d} r_m x^m / r_m \in R \text{ et } \alpha_1 m_1 + \alpha_2 m_2 + ... + \alpha_d m_d = n\}$$

définit une graduation dans S, ici $R \subseteq S$ et le deg $x_i = \alpha_i$ pour tout i.
Un exemple particulier, soit $S = K[x, y, z]$ (ou K est un corps)et $f = x^3 + yz$, sous la notation standard de S, les composantes homogènes de f sont x^3 et yz, si nous donnons a S la graduation induite par la définitions en fixant deg(x)=3, deg(y)=4, deg(z)=5, alors f est homogène de degrés 9.

Exemple 2.1.5 (Laurent polynomial ring)
Si A est un anneau, soit $R = A[X, X^{-1}]$ l'anneau des polynômes de Laurent avec le X indéterminé. Un élément de R est de la forme $\sum_{i \geq m} a_i X_i$ avec $m \in \mathbb{Z}$ et, la somme est fini c'est-à-dire presque tout les a_i sont nuls, alors R a la standard $\mathbb{Z}$-graduation $R_n = AX^n$, $n \in \mathbb{Z}$

Exemple 2.1.6
Soient R un anneau commutatif et M un R-module. $R \propto M$ est un anneau $\mathbb{Z}$-gradué avec
$(R \propto M)_0 = R \oplus 0$
$(R \propto M)_1 = 0 \oplus M$ et $(R \propto M)_n = 0$ pour $n \neq 0, 1$.

Exemple 2.1.7
Soient R un anneau gradué et S une partie multiplicative des éléments homogènes de R, alors R_S est un anneau gradué où :

$$(R_S)_n = \{\frac{r}{s} \in R_S | r \text{ et } s \text{ sont homogènes et } deg(r) - deg(s) = n\}$$

2.2 Sous anneau gradué

Définition 2.2.1
Soit $R = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} R_n$ un anneau commutatif gradué. Soit $S \subseteq R$ un sous anneau. Alors S est un sous-anneau gradué de R si $S = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} S_n$ avec $S_n = S \cap R_n$, c'est-à-dire pour tout élément $f \in S$ toutes les composantes homogènes de f (comme un élément de R) sont dans S.

Remarque 2.2.2
Soient R un anneau gradué, $S \subseteq R$ un sous anneau et $S_0 = S \cap R_0$ un anneau. Alors S est un sous-anneau gradué si seulement si S est engendré sur S_0 par des éléments homogènes de R .

Preuve
Pour l'implication directe supposons que $S = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} S_n$ où $S_n = S \cap R_n$ comme $1_R \in S$ et $1_R \in R_0$, donc $1_R \in S_0$. Il est clair de voir que $S = \sum_{s\in S_n; n\in\mathbb{Z}} S_0 s$.

Pour l'implication inverse, soit T une famille engendrée par des éléments homogènes et $S_n = \sum_{s\in T\cap R_n} S_0 s$. il est clair que $S_n = S \cap R_n$ et $S = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} S_n$.

On particulier, si $f_1, ..., f_n$ sont des éléments homogènes de R alors $R_0[f_1...f_n]$ est un sous-anneau gradué de R.

Exemples 2.2.3
- $K[x^2, xy, y^2]$ *est un sous-anneau gradué de K[x,y].*
- $K[t^3, t^4, t^5]$ *est un sous-anneau gradué de K[t].*
- $\mathbb{Z}[u^3, u^2 + v^3]$ *est un sous-anneau gradué de $\mathbb{Z}[u, v]$, ou deg $u = 3$ et deg $v = 2$.*

2.3 Anneau gradué associé à une filtration

Définition 2.3.1
Soient R un anneau et $\mathcal{I} = \{I_n\}_{n=0}^{\infty}$ une chaine d'idéaux de R. $\mathcal{I}$ est appelée une filtration de R si :

1) $I_0 = R$.

2) $I_n \supseteq I_{n+1}$ *pour toute n.*

3) $I_n.I_m \subseteq I_{m+n}$ *pour toute n et m.*

Exemples 2.3.2

— *Soit I est un idéal de R, alors la famille $\{I^n\}$ est une filtration de R.*

— *Soit I est un idéal de R, alors $\overline{\{I^n\}}$ est une filtration de R avec $\overline{I^n}$ est la clôture intégrale de I^n.*

Exemples 2.3.3

1. *Soit $\mathcal{I} = \{I_n\}_{n=0}^{\infty}$ une filtration d'un anneau R, On définit le Ress-algèbre $R(\mathcal{I})$ par :*

$$R(\mathcal{I}) = \oplus_n I_n = R \oplus I_1 \oplus I_2 \oplus ...$$

où la somme directe est comme un R-module et la multiplication est déterminée par $I_n I_m \subseteq I_{n+m}$. Une autre manière pour définir le Ress-algèbre de $\mathcal{I}$ est de le décrire comme un sous-anneau de l'anneau gradué $R[t]$ (où t est de degré 1) comme suit :

$$R(\mathcal{I}) = \{a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + ... + a_n t^n \in R[t] \mid a_i \in I_i \ \forall \ i\}$$

Alors $R(\mathcal{I})$ est le sous-anneau gradué de $R[t]$ avec $(R(\mathcal{I}))_n = \{at^n | a \in I_n\}$. l'avantage de cette approche est que l'exposant de la variable t identifie les degrés des composantes homogènes d'un élément particulier de $R(\mathcal{I})$.

2. *Soit $\mathcal{I} = \{I_n\}_{n=0}^{\infty}$ une filtration d'un anneau R. On définit un nouveau anneau gradué appelé l'anneau gradué associe à $\mathcal{I}$, noté par $G(\mathcal{I})$, qui est défini comme un R-module :*

$$G(\mathcal{I}) = \oplus_n I_n / I_{n+1} = R/I_1 \oplus I_1/I_2 \oplus I_2/I_3 \oplus ..$$

<u>Définir la multiplication dans $G(\mathcal{I})$</u> : soit n et m deux entier non négative et suppose $x_n + I_{n+1}$ et $x_m + I_{m+1}$ sont des éléments de $(G(\mathcal{I}))_n$ et $(G(\mathcal{I}))_m$ respectivement, on définit le produit comme suit :

$$(x_n + I_{n+1})(x_m + I_{m+1}) = x_n x_m + I_{n+m+1}$$

2.4 Idéal homogène ou gradué

Définition 2.4.1

Soient R un anneau gradué et I un idéal de R. les deux conditions suivantes sont équivalentes :

1) *I est engendré par une famille des éléments homogènes.*

2) *Les composantes homogènes de tout élément de I appartiennent à I.*

Si I satisfait l'une de ces conditions, on l'appelle un idéal homogène ou gradué.

Exemple 2.4.2

Soit $R = K[x, y, z]$ un anneau $\mathbb{Z}$-gradué, alors $I_1 = (x^2yx + z^4 - x^2z^2, xy + y^2)$ est un idéal homogène, par contre $I_2 = (x^2 + y)$ est un idéal non homogène car $y \notin I_2$ mai y est une composante homogène de $x^2 + y \in I_2$.

Proposition 2.4.3 ([9], proposition 15)
Si I et J sont deux idéaux homogènes, alors IJ, $I \cap J$, $I+J$ sont aussi homogènes.

Preuve
Soit $x \in IJ$, x s'écrit $x = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$, avec $a_i \in I$ et $b_i \in J$. On décompose $a_i = \sum_d a_i^d$ et $b_i = \sum_d b_i^d$. Les a_i^d et les b_i^d sont respectivement dans I et dans J. Alors $x = \sum_{i,d,d'} a_i^d b_i^{d'}$. On voit sur cette écriture que la partie homogène de degré d de x est alors bien dans IJ. Il est clair que si I et J sont deux idéaux homogènes alors $I \cap J$ l'est aussi. De même pour $I+J$ car la somme de deux éléments homogène de même degré et aussi homogène.

Remarque 2.4.4
Soit R un anneau gradué. Si $I \subset R$ est un idéal homogène de R, alors R/I est un anneau gradué où :

$$(R/I)_n = \{r + I | r \in R_n\}$$

Proposition 2.4.5 ([18], exercise 2.8)
Soient R un anneau gradué et M un idéal homogène maximal de R. Alors :

$$M = .. \oplus R_{-2} \oplus R_{-1} \oplus m \oplus R_1 \oplus R_2 \oplus ....$$

où m est un idéal maximal de R_0.

Proposition 2.4.6 ([6], proposition 4)
Soient R un anneau gradué et p un idéal gradué de R, pour que p soit premier, il faut et il suffit que si $x \in R_m$, $y \in R_n$ sont tels que $x \notin p$ et $y \notin p$ on ait $xy \notin p$.

Preuve
La condition est évidemment nécessaire. Inversement, si elle est remplie, alors, dans l'anneau gradué $A/p = \oplus_n A_n/p_n$, le produit de deux éléments homogènes $\neq 0$ est $\neq 0$, donc A/p est intègre .

2.5 Module gradué

Définition 2.5.1
Soient R un anneau gradué et M un R-module. On dit que M est un R-module gradué s'il existe une famille de sous-groupes abéliens $\{M_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ de M tels que :

1. $M = \bigoplus_n M_n$.
2. $R_n M_m \subseteq M_{n+m}$ *pour tout n et m.*

Remarques 2.5.2
- *Chaque $m \in M$ peut être représenter de manière unique sous la forme d'une somme $m = \sum_{n \in \mathbb{Z}} m_n$, avec $m_n \in M_n$, et la somme est fini, c'est-à-dire presque tout m_n sont nuls.*

- *Les éléments non nuls m_n dans cette somme ont appelé les composantes homogènes de m.*

Il existe de nombreux exemples de modules gradués. Comme pour les modules arbitraires, la plupart des modules gradués sont construits en les considérant des sous-modules, des sommes directes, des quotients et des localisations d'autres modules gradués.

Remarque 2.5.3
Comme $R_0 M_n \subseteq M_n$, on remarque que M_n est un R_0-module, et aussi R est un R-module gradué.

Exemples 2.5.4
- *Si $\{M_i\}_{i\in I}$ est une famille des R-modules gradués, alors $\bigoplus_{i\in I} M_i$ et $\prod_{i\in I} M_i$ sont aussi des R-modules gradués.*
  Cas particulier $R \oplus R$ est un R-module gradué et R^n est un R-module gradué .
- *Soient R un anneau gradué, M un R-module gradué et S une partie multiplicative des éléments homogènes de R, alors M_S est un R-module gradué et aussi est un R_S-module gradué.*

Définition 2.5.5
Soit M un R-module gradué. On définit M "twisted by n" par M(n)=M est un R-module gradué, pour $k \in \mathbb{Z}$, $M(n)_k = M_{n+k}$, alors $M(n) = \oplus_k M(n)_k$.

Comme exemple, Soit $R = K[x]$ avec K est un corps et deg x=1, alors $K[x] = K \oplus Kx \oplus Kx^2 \oplus ...$ tel que $K[x]_0 = K$ mais $K[x](2)_0 = Kx^2$.

2.6 Sous module homogène ou gradué

Définition 2.6.1
Soient $M = \bigoplus_n M_n$ un R-module gradué et N un sous-module de M. Pour chaque $n \in \mathbb{Z}$, soit $N_n = N \cap M_n$. Si $N = \bigoplus_n N_n$, on dit que N est un sous-module gradué ou homogène de M.

Proposition 2.6.2 ([18], proposition 2.1)
Soient R un anneau, M un R-module gradué et N un sous module de M. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1) $N = \sum_n N \cap M_n$.

2) *Pour toute $u \in N$, toutes les composantes homogènes de u sont dans N.*

3) *N est engendré par une famille des éléments homogènes .*

Si l'une de ces assertions est satisfait, N a appelé sous-module gradué ou sous-module homogène de M.

Preuve
(1)⇒ (2) : Soit $f \in M$. Écrivez $f = f_{n_1} + ... + f_{n_k}$, avec $f_{n_i} \in M_{n_i}$. Si $f \in N$, alors $f = \sum_n f_n^{'}$ où $f_n^{'} \in N \cap M_n$. Par unicité de la décomposition de f, $f_n^{'} = f_n$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Ainsi $f_n \in N$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. L'autre implication est claire.

(2)⇒ (1) : similaire.

(2)⇒ (3) : Soit $S = \{f \in N \ / \ f$ un élément homogène $\}$. Par (2) S engendre N .On notera que lorsque N est de type fini alors on peut montrer qu'il existe une famille des éléments homogènes finis.

(3)⇒ (2) : Soit S une famille des éléments homogènes engendrent N. Soit $f \in M$, on suppose que $f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f_n \in N$, maintenant $f = \sum_{i=1}^{k} r_i s_i$ ou $s_i \in S$ est homogène et $r_i \in R$. Soit deg $s_i = n_i$ et $r_i = \sum_{n\in\mathbb{Z}} r_{i,n}$. Alors $f = \sum_{i,n} r_{i,n} s_i$. Pour $h \in \mathbb{Z}$,$f_h = \sum_i r_{i,h-n_i} s_i \in N$ comme $s_i \in N$.

Propositions 2.6.3
Soient R un anneau gradué et M un R-module gradué.

1) *Soit $\{N_\lambda\}_{\lambda\in I}$ une famille de sous-modules gradués de M alors $\cap N_\lambda$ et $\sum N_\lambda$ sont aussi gradués [[18], exercice 2.2].*

2) *Si I est un idéal gradué et N est un sous-module gradué, alors IN est un sous-module gradué de N.*

2) *Si $N \subseteq M$ est un sous-module gradué et $I \subseteq R$ est un idéal homogène, alors $(N :_M I) = \{m \in M/IM \subseteq N\}$ est un sous-module gradué de M.*

Preuve

1) claire.

2) I est un idéal gradué, alors $\exists r_1, r_2, ...$ tel que $I = (r_1, r_2, ...)$ tel que r_i sont des éléments homogènes, aussi on a N est un sous-module gradué, alors il est engendré par une famille homogène $S = \{f_i\}_i$.
Alors $\{r_i f_i\}$ est une famille des éléments homogènes engendrent IN comme $rf \in IN$ on remarque que $rf = (\sum_i a_i r_i)(\sum_j b_j fj) = \sum_{i,j} a_i r_i b_j f_j$ d'où IN est gradué.

3) Soit $m \in (N :_R I)$, comme M est gradué on peut écrire $m = \sum_i m_i$ où $m_i \in M_i$ un élément homogène .
Soit T une famille des éléments homogènes engendrent I. Alors $Tm \in N \ \forall t \in T$, on note que $tm = \sum_i m_i t$ qui est une décomposition homogène d'un élément de N, donc $tm_i \in N \ \forall i$ car N est gradué.

Proposition 2.6.4 ([18], exercise 2.4)
Soient $N_1, N_2 \subseteq M$ deux sous-modules gradués, alors

$$(N_1 :_R N_2) = \{r \in R | rN_2 \subseteq N_1\}$$

est un idéal homogène de R .

Preuve
Soit $f \in (N_1 :_R N_2)$ tel que $f = \sum_n f_n$ (car $f \in R$). Soit T une famille des éléments homogènes engendrent N_2, on a $f \in (N_1 :_R N_2)$ si seulement si $ft \in N_1$ $\forall t \in T$ ainsi $(\sum f_n)t \in N_1$, et $(\sum f_n)t = \sum_n f_n t$ est une décomposition homogène de ft, donc puisque N_1 est homogène, alors $f_n t \in N_1$ $\forall n$, donc $f_n \in (N_1 :_R N_2)$ $\forall n$.

Exemples 2.6.5
Les exemples suivants sont des cas particuliers de la proposition 2.6.4 :

- *Si M est R-module gradué, alors $Ann_R M = (0 :_R M)$ est un idéal homogène .*
- *Si $x \in M$ un élément homogène, alors $(0 :_R x) = (0 :_R Rx)$ est un idéal homogène.*
- *Si I est un idéal homogène et x est un élément homogène, alors $(I :_R x)$ est un idéal homogène.*

Proposition 2.6.6 ([18], proposition 2.2)
Soient R un anneau gradué, M un R-module gradué et N un sous-module gradué de M. Alors M/N est un R-module gradué, avec :

$$(M/N)_n = (M_n + N)/N = \{m + N | m \in M_n\}$$

Preuve
il est clair que $\{(M/N)_n\}_n$ est une famille de sous-groupes de M/N et $R_k(M/N)_n = R_k(M_n + N)/N \subseteq (M_{n+k} + N)/N = (M/N)_{n+k}$. Ici, si $u \in M$ et $u = \sum_n u_n$ où $u_n \in M_n$ pour chaque n, alors $u + N = \sum_n (u_n + N)$. Ainsi $M/N = \sum_n (M/N)_n$, finalement suppose $\sum_n (u_n + N) = 0 + N$ dans M/N où $u_n \in M_n$ pour chaque n, alors $\sum_n u_n \in N$ est depuis N est un sous-module gradué, $u_n \in N$ pour chaque n. Par conséquent $u_n + N = 0 + N$ pour chaque n. Donc $M/N = \sum_n (M/N)_n$ est un somme direct interne.

2.7 Homomorphisme gradué

Définition 2.7.1
Soient R un anneau gradué et M, N deux R-modules gradués. Soit $f : M \longrightarrow N$ un R-module homomorphisme. Alors f est dit gradué ou homogène de degré d si $f(M_n) \subseteq N_{n+d}$ pour tout n.

Exemples 2.7.2

1) *Soient M un R-module gradué et $r \in R_d$, on va définir $\mu_r : M \longrightarrow M$ par $\mu_r(m) = rm$ pour tout m dans M. Alors μ_r est un homomorphisme gradué de degré d.*

2) *Si $f : M \longrightarrow N$ est un homomorphisme gradué de R-modules gradués. Alors le $ker(f)$ est un sous module gradué de M et $im(f)$ est un sous module gradué de N.*

Définition 2.7.3
Soient R, S deux anneaux gradués et $f : R \longrightarrow S$ un homomorphisme d'anneau. On dit que f est un homomorphisme d'anneau gradué ou homogène si $f(R_n) \subseteq S_n$ pour tout n.

Exemple 2.7.4
Soit $R = K[x, y]$ un anneau (muni d'une graduation standard où K est un corps). Alors l'homomorphisme d'anneau $f : R \longrightarrow R$ déterminé par $f(x) = x + y$ et $f(y) = x$ (ie. $f(g(x, y)) = g(x + y, x)$) est un homomorphisme d'anneau gradué mais l'homomorphisme d'anneau $h : R \longrightarrow R$ défini par $h(x) = x^2$ et $h(y) = xy$ est non gradué, comme $h(y) \subset R_{2n}$. Cependant, nous pouvons rendre h un homomorphisme gradué comme suit : soit $S = k[x, y]$ où $deg(x) = deg(y) = 2$. Alors $h : S \longrightarrow R$ comme il a défini ci-dessus est maintenant gradué.
Dans un autre exemple, définissez un homomorphisme d'anneau : $f : K[x, y, t] \longrightarrow K[t^3, t^4, t^5]$ par $f(x) = t^3$, $f(y) = t^4$, $f(z) = t^5$. Si on note $deg\ t = 1$, $deg\ x = 3$, $deg\ y = 4$, et $deg\ z = 5$ alors f est homogène.

Définition 2.7.5
Soit R un anneau gradué.
On dit que deux R-module M et N sont isomorphe comme modules gradués s'il existe un isomorphisme de degré 0 de M à N. De même, deux anneaux gradué R et S sont dit isomorphe comme anneaux gradués s'il existe un isomorphisme d'anneau homogène entre les deux anneaux.

2.8 Décompositions primaires de sous-module gradué

Définition 2.8.1
Soient M un R-module gradué et N un sous-R-module de M. On note par N^* le sous-R-module de M engendré par tous les éléments homogènes contenus dans N. Il est clair que N^* est le plus grand sous-module homogène de M contenu dans N.

Lemme 2.8.2 ([18], exercise 3.1, exercise 3.2)

1) *Soient M un R-module gradué et $\{N_\lambda\}_\lambda$ une famille des sous modules de M. Alors $\cap N_\lambda^* = (\cap N_\lambda)^*$.*

2) *Soient R un anneau gradué, M un R-module gradué et N un sous-module de M. Alors $\sqrt{Ann_R M/N^*} = (\sqrt{Ann_R M/N})^*$.*

Théoréme 2.8.3 ([18], Théorème 3.1)
Soient R un anneau gradué et M un R-module gradué. Alors on a les deux assertions suivantes :

1) *Si p est un idéal premier de R, alors p^* est aussi premier.*

2) *Si N est un p-primaire sous-module de M, alors N^* est aussi p^*-primaire.*

Preuve
Nous montrons que si N est primaire, alors N^* l'est aussi. En passant au module M/N^*, on peut supposer $N^* = 0$. Supposons donc que $r \in R$ est un diviseur de zéro sur M. Nous devons montrer que r est nilpotent sur M. Soit n le nombre de (différent de zéro) composants homogènes de r. Par récurrence sur n on va montrer que $r \in \sqrt{Ann_R M}$. Si $n = 0$ alors $r = 0$ et il n'y a rien à montrer. Supposons que $n > 0$. Soit $x \in M\backslash 0$ tel que $rx = 0$ et soient r_k et x_t les composantes homogènes de r et x (respectivement) de degré le plus élevé. Alors $r_k x_t = 0$ et puisque $N^* = 0$, $x_t \notin N$. Ainsi, r_k est un diviseur de zéro sur M/N. Comme N est primaire, r_k est nilpotent sur M/N et donc $r_k^e M \subseteq N$ pour un entier $n \geq 0$. Mais puisque $r_k^e M_n \subseteq N$ pour chaque n et $N^* = 0$, nous conclurons que $r_k^e M = 0$. Ainsi, $r_k \subset \sqrt{Ann_R M}$.
Maintenant, choisissez m tel que $r_k^m x = 0$ mais $r_k^{m-1} x \neq 0$. Soit $x' = r_k^{m-1} x$ et $r' = r$-r_k. Alors $r'x' = rx'$-$r_k x' = 0$ et donc r' est un diviseur de zéro sur M avec une composante homogène moins que r. Par récurrence, $r' \in \sqrt{Ann_R M}$ et donc $r = r' + r_k \sqrt{Ann_R M}$. Ceci prouve que N^* est primaire. De plus, si N est primaire à $p = \sqrt{Ann_R M/N}$ alors, en utilisant le lemme 2.8.2(2), N^* est primaire à $\sqrt{Ann_R M/N^*} = p^*$. Ceci complète la preuve de (2). Pour prouver (1), appliquer la partie (2) à $M = R$ et $N = p$ et utiliser le faite que le radical d'un idéal primaire est premier.

Corollaire 2.8.4 ([18], Corollaire 3.1)
Soient R un anneau gradué et I un idéal homogène de R. Alors, chaque idéal premier minimal sur I est homogène. En particulier, chaque idéal premier minimal de l'anneau R est homogène.

Preuve
Si $P \supseteq I$ alors $P^* \supseteq I$, alors si P est minimal sur I alors $P = P*$.

Corollaire 2.8.5 ([18], Corollaire 3.2)
Soient M un R-module gradué et N un sous-module gradué de M. Si N a une décomposition primaire, alors tous les composants primaires de N peuvent être choisies pour être homogènes.

Preuve
Soit $N = Q_1 \cap Q_2 \cap ... \cap Q_k$ une décomposition primaire de N.Alors :

$$N = N^* = (Q_1 \cap Q_2 \cap ... \cap Q_k)^* = Q_1^* \cap Q_2^* \cap ... \cap Q_k^*$$

est une décomposition primaire de N avec des sous-modules primaires homogènes.

2.9 Les propriétés des anneaux gradués

2.9.1 Critère de finitude pour les anneaux gradués

Si A (resp. M) est un anneau gradué (resp. un module gradué), on note A_i (resp.M_i) l'ensemble des éléments homogènes de degré i de A (resp. M).

Si $A_i = \{0\}$ (resp. $M_i = \{0\}$) pour i < 0, on dira, pour abréger, que A (resp. M) est un anneau (resp. un module) gradué à degrés positifs.

Proposition 2.9.1 ([6], Proposition 1)
Soient $A = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} A_i$ un anneau commutatif gradué à degrés positifs, $\boldsymbol{m}$ l'idéal gradué $\bigoplus_{i\geq 1} A_i$, $(x_\lambda)_{\lambda\in L}$ une famille d'éléments homogènes de A, de degrés $i \geq 1$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

1) *l'idéal de A engendré par la famille (x_λ) est égal à m.*

2) *La famille (x_λ) est un système de générateurs de la A_0-algèbre A.*

3) *Pour tout $i \geq 1$, le A_0-module A_i est engendré par les éléments de la forme $\prod_\lambda x_\lambda^{n_\lambda}$ qui sont de degré i dans A.*

Preuve
Il est clair que les condition 2) et 3) sot équivalentes. Si elles sont vérifiées, tout éléments de **m** est de la forme $f((x_\lambda))$ où f est un polynôme de $A_0[X_\lambda]_{\lambda\in L}$ sans terme constant on a donc $m = \sum_{\lambda\in L} Ax_\lambda$, ce qui entraine 1).

Inversement supposons vérifiée la condition 1) . Soit $A' = A_0[x_\lambda]_{\lambda\in L}$ la sous-A_0-Algèbre de A engendrée par la famille (x_λ), et montrons que $A' = A$. Pour cela il suffit de montrer que $A_i \subset A'$pour tout $i \geq 0$. Procédons par récurrence sur i, la propriété étant évidente pour i = 0. Soit donc $y \in A_i$ avec $i \geq 1$. Puisque $y \in m$, il existe une famille $(a_\lambda)_{\lambda\in L}$ d'éléments de A, de support fini, telle que $y = \sum_\lambda a_\lambda x_\lambda$, et on peut supposer chacun des a_λ homogène et de degrés $(i - deg(x_\lambda))$(en le remplaçant au besoin par sa composante homogène de ce degré), comme $\deg(x_\lambda) > 0$, l'hypothèse de récurrence montre que l'on a $a_\lambda \in A'$ pour tout $\lambda \in L$, d'où $y \in A'$ et $A_i \subset A'$, ce qui achève de prouver que 1) implique 2).

Corollaire 2.9.2
Soient $A = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} A_i$ un anneau commutatif gradué à degrés positifs et m l'idéal gradué $A = \bigoplus_{i\geq 1} A_i$.

i) *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- **a)** *L'idéal m est un A-module de type fini.*
- **b)** *L'anneau A est une A_0-algèbre de type fini.*

ii) *Supposons vérifiées les conditions de (i) et soit $M = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} M_i$ un A-module gradué de type fini. Alors, pour tout $i \in \mathbb{Z}$, M_i est un A_0-module de type fini, et il existe i_0 tel que $M_i = \{0\}$ pour $i < i_0$.*

Preuve

i) Si une famille (y_u) d'éléments de A est un système de générateurs du A-module m (resp. de la A_0-algèbre A), il en est de même de la famille formée des composantes homogènes des (y_u) ; l'équivalence des conditions a) et b) résulte donc de la proposition 2.9.1.

ii) On peut supposer A engendré (en tant que A_0-algèbre) par des éléments homogènes $a_i (1 \leq i \leq r)$ de degrés ≥ 1, et M engendré (en tant que A-module) par des éléments homogènes $x_j (1 \leq i \leq s)$, soit $h_i = deg(a_i)$, $k_j = deg(x_j)$. Il est clair que M_n est formé des combinaisons linéaires à coefficients dans A_0 des éléments $a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} ... a_r^{\alpha_r} x_j$ tels que les α_i soient des entiers ≥ 0 vérifiant la relation $k_j + \sum_{i=1}^{r} \alpha_i h_i = n$, pour chaque n il n'y a qu'un nombre fini de familles $(\alpha_i)_{1 \leq i \leq r}$ vérifiant ces conditions, puisque $h_i \geq 1$ pour tout i, on en conclut que M_n est un A_0-module de type fini, et en outre il est clair que $M_n = \{0\}$ lorsque $n < inf_j(k_j)$.

2.9.2 Propriétés de l'anneau $A^{(d)}$

Définition 2.9.3
Soient $A = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} A_i$ un anneau gradué, $M = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} M_i$ un A-module gradué, pour tout couple d'entiers (d, k) tel que $d \geq 1$, $0 \leq k \leq d-1$, posons :

$$A^{(d)} = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} A_{id} \qquad et \qquad M^{(d,k)} = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} M_{id+k}$$

Il est clair que $A^{(d)}$ est un sous-anneau gradué de A et $M^{(d,k)}$ un $A^{(d)}$-module gradué, en outre, si N est un sous-module gradué de M, $N^{(d,k)}$ est un sous-$A^{(d)}$-module gradué de $M^{(d,k)}$. On écrira $M^{(d)}$ au lieu de $M^{(d,0)}$, pour chaque $d \geq 1$, M est somme directe des $A^{(d)}$-modules $M^{(d,k)}$ $(0 \leq k \leq d-1)$.

Proposition 2.9.4 ([6], Proposition 2)
Soient $A = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} A_i$ un anneau commutatif gradué à degrés positifs, $M = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} M_i$ un A-module gradué. On suppose que A est une A_0-algèbre de type fini et M un A-module de type fini. Alors, pour tout couple (d, k) d'entiers tels que $d \geq 1$, $0 \leq k \leq d-1$:

i) *$A^{(d)}$ est une A_0-algèbre de type fini.*

ii) *$M^{(d,k)}$ est un $A^{(d)}$-module de type fini.*

Preuve
Montrons que A est un $A^{(d)}$-module de type fini. Soit $(\alpha_i)_{1 \leq i \leq s}$ un système de générateurs de la A_0-algèbre A formé d'éléments homogènes. Les éléments de A (en nombre fini) de la forme $a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} ... a_s^{\alpha_s}$ tels que $0 \leq \alpha_i < d$ pour $1 \leq i \leq s$ constituent un système de générateurs du $A^{(d)}$-module A, en effet, pour tout système d'entiers $n_i \geq 0$ $(1 \leq i \leq s)$, il y a des entiers positifs q_i, r_i tels que $n_i = q_i d + r_i$ avec $r_i < d$, $(1 \leq i \leq s)$; on a alors

$$a_1^{n_1} a_2^{n_2} ... a_s^{n_s} = (a_1^{q_1} a_2^{q_2} ... a_s^{q_s})^d (a_1^{r_1} a_2^{r_2} ... a_s^{r_s})$$

ce qui prouve notre assertion, car tout élément homogène $x \in A$ est tel que $x^{(d)} \in A^{(d)}$. Alors, si M est un A-module de type fini, c'est aussi un $A^{(d)}$-module de type fini, comme M est somme directe des $M^{(d,k)}$ $(0 \leq k \leq d-1)$ chacun des $M^{(d,k)}$ est un $A^{(d)}$- module de type fini, ce qui prouve (ii).

Appliquons ce qui précède au A-module gradué $m = \bigoplus_{i\geq 1} A_i$, qui est de type fini en vertu du corollaire 2.9.2. de la proposition 2.9.1 ; on voit que $m^{(d)}$ est un $A^{(d)}$-module de type fini, par suite (corollaire 2.9.2. de la proposition 2.9.1) $A^{(d)}$ est une A-algèbre de type fini.

2.9.3 Idéaux premiers gradués

Définition 2.9.5
Soient $A = \bigoplus_{i\geq 0} A_i$ un anneau commutatif gradué à degrés positifs, m l'idéal gradué $\bigoplus_{i\geq 1} A_i$; nous dirons que deux idéaux gradués $a = \bigoplus_{i\geq 0} A_i$, $b = \bigoplus_{i\geq 0} A_i$ de A sont équivalents s'il existe un entier n_0 tel que $a_n = b_n$ pour $n \geq n_0$ (il est clair que c'est bien une relation d'équivalence). On dit qu'un idéal gradué est essentiel s'il n'est pas équivalent à m.

Proposition 2.9.6 ([6], Proposition 4)
Soit $p = \bigoplus_{i\geq 0} p_i$ un idéal gradué de A , pour que p soit premier, il faut et il suffit que si $x \in A_m$, $y \in A_n$ sont tels que $x \notin p$ et $y \notin p$ on ait $xy \notin p$.

Preuve
La condition est évidemment nécessaire. Inversement, si elle est remplie, alors, dans l'anneau gradué $A/p = \bigoplus_{i\geq 0} A_i/p_i$,le produit de deux éléments homogènes $\neq 0$ et $\neq 0$ donc A/p est intègre.

Proposition 2.9.7 ([6], Proposition 5)
Soit $\boldsymbol{a} = \bigoplus_{i\geq 0} \boldsymbol{a}_i$ un idéal gradué de A, n_0 un entier > 0. Pour qu'il existe un idéal premier gradué $p = \bigoplus_{i\geq 0} p_i$ tel que $p_n = \boldsymbol{a}_n$ pour $n \geq n_0$, il faut et il suffit que, pour tout couple d'éléments homogènes x, y de degrés $\geq n_0$, la relation $xy \in \boldsymbol{a}$ entraine " $x \in \boldsymbol{a}$ ou $y \in \boldsymbol{a}$ ". S'il existe $n \geq n_0$ tel que $\boldsymbol{a}_n \neq A_n$, l'idéal premier gradué vérifiant les conditions précédentes est unique.

Preuve
La condition de l'énoncé est évidemment nécessaire. Si l'on a $\mathbf{a}_0 = A_n$ pour tout $n \geq n_0$, il est clair que tout idéal premier contenant m est gradué et répond à la question, il peut donc y avoir plusieurs idéaux premiers gradués répondant à la question, toutefois, deux quelconques de ces idéaux sont évidemment équivalents. Supposons donc qu'il existe un élément homogène $a \in A_d$ (avec $d \geq n_0$) n'appartenant pas à $\mathbf{a}_d$. Soit p l'ensemble des $x \in A$ tels que $ax \in \mathbf{a}$. Il est clair que p est un idéal de A, comme les composantes homogènes de ax sont les produits par a de celles de x, et que $\mathbf{a}$ est un idéal gradué, p est un idéal gradué, en outre, on a $1 \notin p$, donc $p \neq A$. Pour prouver que p est premier, il

suffit de montrer que si $x \in A_m$, $y \in A_n$ sont tels que $x \notin p$ et $y \notin p$, alors on a $xy \notin p$ (proposition 2.9.8). On a alors $ax \notin \mathbf{a}_{m+d}$, $ay \notin \mathbf{a}_{n+d}$, d'où par hypothèse $a^2xy \notin \mathbf{a}_{m+n+2d}$, on en conclut que $axy \notin \mathbf{a}_{m+n+d}$ puisque $xy \notin p$. Enfin, si $n \geq n_0$ et $x \in A_n$, les conditions $x \in \mathbf{a}_n$ et $ax \in \mathbf{a}_{n+d}$ sont équivalentes par hypothèse, donc $p \cap A_n = \mathbf{a}_n$, ce qui achève de prouver l'existence de l'idéal premier gradué p répondant à la question. Si en outre p' est un second idéal premier gradué de A tel que $p' \cap A_n = \mathbf{a}_n$ pour $n \geq n_0$, on a $a \notin p'$ et $ax \notin p'$ pour tout $x \in p$, d'où $p \subset p'$ puisque p' est premier. D'autre part, si x est un élément homogène de degré $n \geq 0$ de p', ax est homogène de degré $n+d \geq n_0$ et appartient par suite à $p' \cap A_{n+d} = \mathbf{a}_{n+d}$, d'où par définition $x \in p$ ce qui montre que $p' \cap p$, et finalement $p' = p$.

Proposition 2.9.8 ([6], Proposition 6)
Soit d un entier ≥ 1.

- **(i)** *Pour tout idéal premier gradué essentiel p de A, $p \cap A^{(d)}$ est un idéal premier gradué essentiel de $A^{(d)}$.*
- **(ii)** *Inversement, pour tout idéal premier gradué essentielle p' de $A^{(d)}$, il existe un ideal premier gradué (nécessairement essentiel) p de A, et un seul, tel que $p \cap A^{(d)} = p'$.*

Preuve

- **(i)** Si $a \in A_k$ n'appartient pas à p_k, a^{kd} n'appartient pas à p_{kd} donc $p \cap A^{(d)}$ est essentiel.
- **(ii)** Pour tout $n \geq 0$ l'ensemble $p \cap A_n$ doit être égal à l'ensemble a_n des $x \in A_n$ tel que $x^d \in p'$. Montrons que $a = \bigoplus_{n \geq 0} a_n$ est un idéal premier gradué, comme $a_n = p'_n$ lorsque n est multiple de d, puisque p' est premier, cela prouvera l'existence et l'unicité de p. Or, si $x \in a_n$, $y \in a_n$, $(x\text{-}y)^{2d}$ est somme de termes dont chacun est produit de x^d ou de y^d par un élément homogène de degré nd, donc $(x\text{-}y)^{2d} \in p'$, et puisque p' est premier, $(x\text{-}y)^d \in p'$, donc a_n est un sous-groupe de A. Comme p' est un idéal de A^d, a est un idéal gradué de A, enfin, la relation $(xy)^d \in p'$ entraîne $x^d \in p'$ ou $y^d \in p'$ ce qui achève la démonstration en vertu de la proposition 2.9.8.

Définition 2.9.9
Soit A un anneau commutatif gradué à degrés positifs, p un idéal premier gradué essentiel de A. L'ensemble S des éléments homogènes de A n'appartenant pas à p est multiplicatif, et l'anneau de fractions $S^{-1}A$ est donc gradué de façon canonique (on notera qu'il y aura en général des éléments homogènes $\neq 0$ de degré négatif pour cette graduation). Nous désignerons par $A_{(p)}$ le sous-anneau de $S^{-1}A$ formé des éléments homogènes de degré 0, autrement dit l'ensemble des fractions x/s où x et s sont homogènes de même degré dans A et $s \notin p$. De même, pour tout A-module gradué M, $S^{-1}M$ est gradué de façon canonique et nous désignerons par $M_{(p)}$ le sous-groupe des éléments homogènes de degré 0, qui est évidemment un $A_{(p)}$-module.

Proposition 2.9.10 ([6], Proposition 7)
Soient p un idéal premier gradué de A, d un entier ≥ 1, p' l'idéal premier gradué $p \cap A^{(d)}$

de $A^{(d)}$, pour tout A-module gradué M, l'homomorphisme $(M^{(d)})_{p'} \longrightarrow M_{(p)}$ déduit de l'injection canonique $M^{(d)} \longrightarrow M$ est bijectif.

Preuve
Si S est l'ensemble des éléments homogènes de A n'appartenant pas à p, et $S' = S \cap A^{(p)}$, l'homomorphisme canonique $\varphi : S'^{-1}M^{(d)} \longrightarrow S^{-1}M$ est un homomorphisme homogène de degré 0, et il est injectif, car si $x \in M_{nd}$ est tel que $sx = 0$ pour $s \in A_m$, $s \notin p$, on a aussi $s^d x = 0$, et $s^d \in A_{md}$, $s^d \notin p'$. Reste à voir que l'image par φ de $(M^{(d)})_{(p')}$ et $(M)_{(p)}$ tout entier, mais si $x \in M_n$, $s \in A_n$ et $s \notin p$, on a aussi $x/s = (xs^{d-1})/s^d$ avec $xs^{d-1} \in A_{nd}$, $s^d \in A_{nd}$ et $s^d \notin p'$, d'où notre assertion.

2.9.4 Anneau Noethérien gradué

Lemme 2.9.11 ([26], Lemme(2.1))
Soient B un anneau commutatif et I un idéal de sous anneau A de B.
Supposons que A est somme directe de B comme un A-module, alors I est de type fini si seulement si l'idéal IB de B est de type fini.

Preuve
Choisissez les éléments $x_1, x_2, ..., x_r$ de I, alors soit $IB = (x_1, x_2, ..., x_r)B$. Soit $a \in I$, on écrit $a = \sum_{i=1}^{r} x_i b_i$ avec $b_i \in B$. Soit $f : B \longrightarrow A$ une application linéaire tel que $f(a) = a$ $\forall a \in A$ alors on a a et $x_i \in A$, on obtient $f(a) = f(\sum_{i=1}^{r} x_i b_i)$ ce qui donne $f(a) = \sum_{i=1}^{r} x_i f(b_i)$ dans A, d'où $a \in (x_1, x_2, ..., x_r)A$, ainsi $I = (x_1, x_2, ..., x_r)A$.

Lemme 2.9.12 ([26], Lemme(2.2))
Soient H un groupe abélien, A un anneau H-gradué et $h \in H$. On suppose que l'idéal $A_h A$ de A est de type fini , alors le A_0-module A_h est de type fini.

Preuve
Choisissez $(x_1, x_2, ..., x_r)$ des éléments de A_h alors $A_h A = (x_1, x_2, ..., x_r)A$ soit $x \in A_h$ et écrit $a = \sum_{i=1}^{r} x_i y_i$ avec $y_i \in A$, on note par y_{i0} pour tout $1 \leq i \leq r$, la composante homogène de y_i de degré 0, puisque, $x_i \in A_h$ on obtient $x = \sum_{i=1}^{r} x_i y_{i0}$ donc $x \in \sum_{i=1}^{r} x_i A_0$, d'où $A_h = \sum_{i=1}^{r} x_i A_0$.

Lemme 2.9.13 ([26], Lemme(2.3))
Soit $B = \oplus_{s \in \mathbb{Z}} B_s$ un anneau $\mathbb{Z}$-gradué, on pose $B_+ = \oplus_{s>0} B_s$ et $B_- = \oplus_{s<0} B_s$, on a les assertions suivantes :

1. *Suppose que chaque idéal de B est engendré par des éléments de B_0 est de type fini, alors l'anneau B_0 est Noethérien.*
2. *Suppose que tous les idéaux B_+B, B_-B et B_sB $(s \in \mathbb{Z})$ de B sont de type fini, alors le B_0-algèbre B est de type fini .*

Preuve

1. Soit I un idéal de B_0, par supposition l'idéal IB de B est de type fini, donc d'après le lemme (2.9.11), I est aussi de type fini. Donc B_0 est Noethérien.
2. Soit $(f_1, f_2, .., f_r)$ (resp. $g_1, g_2, .., g_t$)des éléments homogènes de B de degrés positive (resp. négative)tel que $B_+B = (f_1, f_2, .., f_r)B$ (resp.$B_-B = (g_1, g_2, .., g_t)B$). Soit $d = max\{deg(f_i)|1 \leq i \leq r\}$ et $e = min\{deg(g_i)|1 \leq i \leq t\}$. On pose $C = B_0[B_s|e \leq s \leq d]$.
Montrer que $C = B$.
Il est clair que $C \subset B$.
Premièrement, remarquons que $B_s \subset C$ $(\forall 0 \leq s \leq d)$. Soit $k > d$ un entier et supposons que $B_s \subset C$ pour tout $0 \leq s < k$. Soit $x \in B_k$, alors comme $x \in B_+$ on peut écrire x comme suit $x = \sum_{i=1}^{r} f_i x_i$ avec $x_i \in B_{k-degf_i}$. Rappelons que $k > k - degf_i \geq 0$ et on obtient d'après la supposition qu'on a fait $x_i \in C$ pour tout $1 \leq i \leq r$ et comme $x_i \in C$ et $f_i \in C$ alors $x \in C$, ainsi $B_+ \subset C$, la même chose pour B_- on obtient $B_- \subset C$, d'où $C = B$ est montré.
Depuis tous les B_0-module B_s $(e \leq s \leq d)$ sont par le lemme 2.9.11 de type fini, on conclure que le B_0-algèbre $B = B_0[B_s|e \leq s \leq d]$ est de type fini ceci complète la preuve de lemme.

Théoréme 2.9.14 ([26], théorème (1.1))
Soient H un groupe abélien et A un anneau H-gradué, supposons que H est de type fini, alors les assertions suivantes sont équivalentes :

1) *A et un anneau Noethérien.*

2) *L'anneau A_0 est Noethérien et le A_0-algèbre A est de type fini.*

3) *Chaque idéal gradué de A est de type fini.*

Preuve
Il suffit de montrer que (3)$\Longrightarrow$(2).
- Le premier cas : $H = \mathbb{Z}^n$ nous allons le prouver par récurrence sur n. Si n=0 il n'y a rien à dire. Pour n=1 voir le lemme 2.9.13. Supposons que $n \geq 2$ et l'implication est vraie pour n-1. Soit :

$$B_s = \sum_{h \in \mathbb{Z}^n tel\ que |h| = s} A_h$$

pour tout $s \in \mathbb{Z}$, où $|h| = \sum_{i=0}^{n} h_i$ pour $h = (h_1, h_2, ..., h_n)) \in \mathbb{Z}^n$. Alors la famille $\{B_s\}_{n \in \mathbb{Z}}$ définie une $\mathbb{Z}$-graduation dans A, et on note A par B lorsque on considére A est un anneau $\mathbb{Z}$-gradué par la graduation $\{B_s\}_{n \in \mathbb{Z}}$.

Maintenant remarquons que tous les idéaux B_+B, B_-B, B_sB $(s \in \mathbb{Z})$ de B sont de types finis, comme il ont aussi gradués par la graduation H dans A. Alors B est par, le lemme 2.9.13 est un B_0-algèbre de type fini.

Soit $\Phi : \mathbb{Z}^{n-1} \to \mathbb{Z}^n$ est l'homomorphisme de groupe défini par $\Phi(h) = (h, \ -\sum_{i=1}^{n-1})$ pour tout $h = (h_1, h_2, ..., h_{n-1}) \in \mathbb{Z}^{n-1}$. On pose $C_h = A_{\phi(h)}$ $(h \in \mathbb{Z}^{n-1})$. Alors il est facile de voir que la famille $\{C_h\}_{h \in \mathbb{Z}^{n-1}}$ définie une $\mathbb{Z}^{n-1}$-graduation dans B_0. On note par C

l'anneau B_0 est considéré comme $\mathbb{Z}^{n-1}$-gradué avec la graduation $\{C_h\}_{h\in\mathbb{Z}^{n-1}}$.
Rappelons que chaque élément homogène de C est aussi homogène dans A. Alors on trouve par (3), que l'idéal IA de A est de type fini pour chaque idéal gradué I de C. Par conséquent, chaque idéal gradué I de C est, par le lemme 2.9.11, est de type fini, d'où nous obtenons, par récurrence, que l'anneau $C_0 = A_0$ est Noethérien et C est un C_0-algèbre de type fini. Alors on obtient l'assertion (2), parce que le C-algèbre A est de type fini, comme nous avons remarqué plus haut.
- Le cas générale : Soit T la partie de torsion de H. Alors comme H est de type fini on peut écrire $H = \mathbb{Z}^n \oplus T$, où $n = rang_{\mathbb{Z}}H$. On pose :

$$D_t = \bigoplus_{h\in\mathbb{Z}} A_{h+t}$$

pour tout $t \in T$. Remarquons que $\{D_t\}_{t\in T}$ est une T-graduation sur A. On note A par D lorsque on considère A comme un anneau T-gradué par cette graduation. Alors tous les D_0-modules D_t $(t \in T)$ sont par le lemme 2.9.12, de type fini, depuis les idéaux D_tD de D sont de type fini par (3)(rappelons que $D_tD = \sum_{h\in\mathbb{Z}^n} A_{h+t}A$ sont aussi gradués dans A). Donc l'anneau D est extension module-fini de D_0, puisque $D = \oplus_{t\in T}D_t$ et T est une famille fini.
Maintenant on considère l'anneau $\mathbb{Z}^n$-gradué $D_0 = \oplus_{h\in\mathbb{Z}^n}$, et on remarquons par le lemme 2.9.11 *et* (3) que chaque idéal gradué de D_0 est de type fini. Donc par le cas 1, l'anneau $A_0 = [D_0]_0$ est Noethérien et le D_0 est un A_0-algèbre de type fini. Alors on a l'assertion (2), parce que l'anneau $A = D$ est un extension module-fini de D_0 comme il est indiqué ci-dessus. Ceci termine la preuve du théorème .

2.9.5 Module gradué simple

Lemme 2.9.15
Soient R un anneau gradué et M un R-module gradué. Alors M est simple comme un R-module si et seulement si M est simple comme un R_0-module.

Preuve
Supposons que M est simple comme un R-module. Alors $M \cong R/n$ pour un idéal maximal homogène n. Par proposition 2.4.5, $n = ..\oplus R_{-2}\oplus R_{-1}\oplus m\oplus R_1\oplus R_2\oplus...$ pour un maximum idéal m de R_0. Donc $M \cong R/n \cong R_0/m$ et donc M est simple comme un R_0-module. L'inverse est trivial.

Si M est un R-module, on note la longueur de M comme un R-module par $\lambda_R(M)$ (ou simplement par $\lambda(M)$ s'il n'y a pas d'ambiguïté sur l'anneau sous-jacent).

Lemme 2.9.16
Soient R un anneau gradué et M un R-module gradué tel que $\lambda_R(M) = n$. Alors il existe une chaîne de sous-modules de M tel que :

$$M = M_0 \supset M_1 \supset ... \supset M_{n\text{-}1} \supset M_n = (0)$$

tel que M_i/M_{i+1} est simple et M_i est gradué pour tout i.

Preuve
Si $n = 0, 1$ le résultat est trivial, alors supposons $n > 1$. Par récurrence, il suffit de montrer qu'il existe un sous-module gradué propre non nul de M. Soit $x \in M$ un élément homogène non nul. Si $Rx \neq M$ nous avons fini, donc supposons $Rx = M$. Alors $M \cong R/I$ (en tant que R-modules gradués), où $I = (0 :_R x$. Ainsi, $\lambda_R(R/I) = n$ et donc R/I est Artinien. Ainsi, tous les idéaux maximaux de R/I sont homogènes (puisqu'ils sont minimaux). Si le seul idéal maximal de R/I est (0), alors $n = \lambda(R/I) = 1$, une contradiction. Ainsi, il existe un élément homogène non nul $r \in R\ I$ tel que $r + I$ n'est pas inversible dans R/I. Soit $y = rx$ et $N = R_y$. Alors N est un sous-module gradué propre non nul de M.

Théoréme 2.9.17 ([18], Théorème 4.2)
Soient R un anneau gradué et M un R-module gradué. Alors :

$$\begin{aligned}\lambda_R(M) &= \lambda_{R_0}(M)\\ &= \textstyle\sum_n \lambda_{R_0}(M_n).\end{aligned}$$

Preuve
Si $\lambda_R(M) = \infty$ le $\lambda_{R_0}(M) = \infty$, supposons que $\lambda_R(M) = n$. Donc d'après le lemme 2.9.16 il existe une chaine des sous-modules tel que :

$$M = M_0 \supset M_1 \supset ... \supset M_{n\text{-}1} \supset M_n = (0)$$

où Mi/M_{i+1} sont des R-modules gradués pour tout i. Par le lemme 2.9.15, ces modules sont aussi des R_0-modules simples. Par conséquent, $\lambda_{R_0}(M) = n$.

Corollaire 2.9.18 ([18], Corollaire 4.1)
Soient R un anneau gradué et M un R-module gradué. Alors M a une longueur finie en tant que R-module si et seulement si chaque M_n a une longueur finie en tant que R_0-module et $M_n = 0$ pour tout n sauf pour une famille finie.

Preuve
Immédiatement à partir du théorème 2.9.17.

Corollaire 2.9.19 ([18], Corollaire 4.2)
Un anneau gradué R est Artinien si et seulement si R_n est un R_0-module Artinien pour tout n et $R_n = 0$ pour tout n sauf pour une famille fini .

Preuve
Un anneau Artinien si et seulement si elle a une longueur finie.

2.9.6 Anneau gradué local

Définition 2.9.20
Soit A un anneau gradué, alors A est un anneau local si seulement si A a un unique idéal maximal homogène.

Proposition 2.9.21 ([24], Proposition 1.1.31)
Soit A un anneau gradué, alors A est un anneau gradué local si seulement si A_0 est un anneau local.

2.10 Résolution libre graduée

Tout au long de cette section, R désignera un anneau Noethérien gradué non négatif tel que R_0 est local. On note m l'idéal maximal homogène de R.

Proposition 2.10.1 (Graded version of Nakayama's Lemma)
Soit M un R-module gradué de type fini. Alors $\mu_R(M) = dim_{R/m}(M/mM)$. De plus, il existe $\mu_R(M)$ éléments homogènes qui engendrent M.

Preuve
Choisissez des éléments homogènes $x_1, ..., x_k \in M$ tels que leurs images dans M/mM forme une R/m-base. Il suffit de montrer que $x_1, ...x_k$ engendrent M. Soit N le sous-module engendré par $x_1, ...x_k$. Alors $M = N + mM$ et donc $M/N = m(M/N)$. Si $M \neq N$, alors M/N est un R-module non-nulle gradué de type fini. Soit s le plus petit entier tel que $(M/N)_s \neq 0$. Alors $(M/N)_s = n(M/N)_s$ où n est un maximal de R_0. Ceci contredit la version locale du lemme de Nakayama. Par conséquent $M = N$.

Corollaire 2.10.2 ([18], Corollaire 9.1)
Soit F un R-module libre gradué de type fini. Alors, il existe un ensemble unique des entiers $\{n_1, ..., n_k\}$ tel que $F \cong \oplus_i R(-n_i)$ (comme des modules gradués).

Preuve
Soit $k = rk\ F = \mu_(F)$. Alors il existe des éléments homogènes $x_1, ..., x_k$ qui engendrent F et forment donc une base pour F. On pose que $n_i = deg\ x_i$, on remarque que $F \cong \oplus_i R(-n_i)$.

Définition 2.10.3
Soit M un R-module gradué de type fini. Une suite exacte :

$$...F_{i+1} \xrightarrow{\partial_i} F_i \longrightarrow ... \longrightarrow F_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

est appelée une résolution libre graduée de M si chaque F_i est libre et tous les homomorphismes sont de degré 0. La résolution est appelée minimale si $Ker(\partial_i) \subset mF_{i+1}$ pour tout

$i \geq 0$, de manière équivalente, $rang F_i = \mu(Ker(\partial_{i-1}))$.

Remarque 2.10.4
Par la version graduée du lemme de Nakayama, il est clair que tout R-module gradué de type fini possède une résolution libre graduée minimale.

Lemme 2.10.5
On va Considérer le diagramme suivant des R-module gradué de type fini et des homomorphismes de degré 0 :

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & K \arrow[r, "\alpha"] & F \arrow[r, "\beta"] & M \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & L \arrow[r, "\gamma"] & G \arrow[r, "\delta"] & N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Supposons que les lignes sont exactes, F et G sont libres et f est un isomorphisme. Supposons que $\alpha(K) \subset mF$ et $\gamma(L) \subset mG$. Alors il existe des isomorphismes de degré 0, $g : K \longrightarrow L$ et $h : F \longrightarrow G$ qui rendent le diagramme commutatif.

Preuve
Puisque F est libre, on voit facilement qu'il existe des isomorphismes de degré 0, h et g tel que le diagramme est commutatif. Si nous montrons que h est un isomorphisme, alors g doit être un isomorphisme par le lemme de serpent. Mais si on tensorise le diagramme avec R/m, on voit par la minimalité que $\beta \otimes 1$ and $\delta \otimes 1$ sont isomorphisme. Par conséquent, $h \otimes 1$ est un isomorphisme. Ainsi, si $C = coker(h)$ alors $C/nC = 0$ et donc $C = 0$ par Nakayama (graduée). Alors, h est surjective. Puisque G est libre, h est inversible et ainsi le $ker(h)/mker(h) = 0$. Donc $ker(h) = 0$ et h est un isomorphisme.

Théoréme 2.10.6 ([18],Théorème 9.1)
Soient $F_.$ et $G_.$ deux résolutions libres minimales graduées de R-module gradué M de type fini, alors il existe une chaine des homomorphismes $f_. : F_. \longrightarrow G_.$ tel que pour chaque i, $f_i : F_i \longrightarrow G_i$ est un isomorphisme de degré 0.

Preuve
On définit l'application $f_i : F_i \longrightarrow G_i$ par récurrence sur i. Pour commencer, soit $f_{-1} : M \longrightarrow M$ l'application identité. Supposons que nous avons défini f_i pour $i \leq p$. Soit $\partial_.$ le différentiel pour la résolution $F_.$ et $\partial'_.$ est le différentiel pour $G_.$. On définit $K_i = \ker(\partial_{i-1})$ et $L_i = \ker(\partial'_{i-1})$ pour chaque $i \geq 0$. Nous incluons également dans notre hypothèse de récurrence qu'il existe des isomorphismes $h_i : K_i \longrightarrow L_i$ pour chaque $i \leq p$ (c'est vide pour $p = -1$). Alors considérons le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & K_{p+1} \arrow[r] & F_{p+1} \arrow[r] & K_p \arrow[r] \arrow[d, "h_p"'] & 0 \\ 0 \arrow[r] & L_{p+1} \arrow[r] & G_{p+1} \arrow[r] & L_p \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Par le lemme précédent, il existe des isomorphismes de degré 0 $f_{p+1} : F_{p+1} \longrightarrow G_{p+1}$ et $h_{p+1} : K_{p+1} \longrightarrow L_{p+1}$ qui rendent le diagramme commutatif.

CHAPITRE 3

SUR LA DIMENSION DES ANNEAUX GRADUÉS

3.1 La hauteur et la dimension dans les anneaux gradués

Lemme 3.1.1 ([18], exercice 5.1)
Soit R un anneau gradué réduit où R_0 est un corps et soit $u \in R_n \setminus \{0\}$ avec $(n \neq 0)$. Alors u est transcendant sur R_0.

Lemme 3.1.2 ([18], lemme 5.1)
Soit R un anneau gradué qui n'est pas un corps et supposons que les seuls idéaux homogènes de R sont (0) et R. Alors $R = K[t^{-1}, t]$ où $K = R_0$ est un corps et t est un élément homogène de R transcendant sur K.

Preuve
Puisque tout élément homogène non nul de R est inversible, tous les éléments non nuls de R_0 sont inversibles et donc R_0 est un corps. Comme R n'est pas un corps, il existe $t \in R_n$ $(n \neq 0)$ tel que $(t \neq 0)$. Puisque t est inversible, $t^{-1} \in R_{-n}$ et donc sans perte de généralité, on peut supposer que n est le plus petit entier positif tel que $(R_n \neq 0)$, par le lemme 3.1.1 on sait que t est transcendant sur R_0. On va montrer que tout élément homogène dans R_m est de la forme ct^i pour certains i. Ceci est trivialement vrai quand $0 \leq m < n$. On suppose $m \geq n$ et soit $u \in R_m$. Alors $t^{-1}u \in R_{m-n}$ et $0 \leq m - n < m$, donc par récurrence $t^{-1}u = ct^i$ pour certains i. En multipliant les deux côtés par t, et on

a fini. Un argument similaire fonctionne pour les éléments homogènes de degrés négatifs. Ainsi $R = R_0[t^{-1}, t]$.

Lemme 3.1.3 ([18], lemme 5.2)
Soient R un anneau gradué et P un idéal premier non homogène de R. Alors il n'y a pas d'idéaux premiers propres entre P et P^*.

Preuve
Par le passage à R/P^* on peut supposer que R est un domaine et que $P^* = 0$. Soit W l'ensemble de tous les éléments homogènes non nuls de R. Puisque $P \cap W = \emptyset$, PR_W est un idéal premier non nul de R_W. Puisque tout élément homogène non nul de R_W est inversible, nous avons par le lemme 3.1.2 que $R_W = k[t^{-1}, t]$. Puisque $dim\ k[t^{-1}, t] = 1$ il n'y a pas d'idéal premier propre entre (0) et PR_W. Par conséquent, il n'y a pas d'idéal premier propre de R entre (0) et P.

Théoréme 3.1.4 (Matijevic-Roberts)
Soient R un anneau gradué et P un idéal premier non homogène de R. Alors $ht(P) = ht(P^*) + 1$.

Preuve
Si $ht(P^*) = \infty$ alors le résultat est trivial, donc on suppose que $ht(P^*) < \infty$. Par récurrence sur $n = ht(P^*)$. Si $n = 0$ on a fini par le lemme 3.1.3. Supposons que $n > 0$ et que Q est un idéal premier propre contenu dans P. Il suffit de montrer que $ht(Q) \leq n$. Maintenant $Q^* \subseteq P^*$. Si $Q^* = P^*$ alors $Q = P^*$ (par le lemme 3.1.3) et nous avons terminé. Si $Q^* \neq P^*$ alors $ht(Q^*) \leq n - 1$. D'où $ht(Q) \leq n$ par récurrence.

Corollaire 3.1.5 ([18], Corollaire 5.1)
Soient R un anneau gradué et M un R-module gradué de type fini. Soit $p \in Supp(M)$ où P est non homogène. Alors $dimM_p = dimM_{P^*} + 1$.

Preuve
Par le passage à $R/Ann_R M$ on peut supposer que $Ann_R M = 0$. Ainsi, $dimM_p = dimR_P = ht(P)$ pour tout $p \in Supp(M)$. Le résultat découle maintenant du théorème 3.1.4.

Corollaire 3.1.6 ([18], Corollaire 5.2)
Soit R un anneau gradué à degrés positifs. Alors :

$$dim\ R = max\{ht(M) \mid M \ un\ idéal\ maximal\ homogène\}$$

Preuve
Soit N un idéal maximal de R. Alors $ht(N^*) = ht(N^*) - 1$ par le théorème 3.1.4. Puisque N^* est homogène et R est un anneau gradué non négatif, N^* est contenu dans un idéal maximal homogène M. Puisque $M \neq N^*$, alors $ht(M) \geq ht(N^*) + 1 = ht(N)$.

Proposition 3.1.7 ([18], Proposition 5.1)
Soient R un anneau gradué Noethérien et P un idéal premier homogène de hauteur n.

Alors, il existe une chaîne d'idéaux premiers homogènes distincts :

$$P_0 \subset P_1 \subset P_2 ... \subset P_n = P$$

Preuve

Le résultat est trivialement vrai si n=0 donc on suppose n>0. soit Q un idéal premier contenu dans P tel que $ht(Q) = n - 1$. Si Q est homogène nous avons fini par récurrence, donc supposons que Q n'est pas homogène. Alors $ht(Q^*) = n - 2$. Par le passage à R/Q^* on peut supposer que R est un domaine gradué et P est un idéal premier homogène de hauteur deux. Il suffit de montrer qu'il existe un idéal premier homogène de hauteur 1 contenu dans P. Soit $f \in P$ un élément homogène non nul de P. Alors P n'est pas minimal sur (f) par ***KPIT**, donc soit P_1 un idéal premier contenu dans P qui contient (f). Alors P_1 est minimal sur (f) (comme $ht(P) = 2$) et donc homogène.

***KPIT** (*Krull's principal ideal throreme*) : *Si R est un anneau Noethérien, et I est un idéal propre principal de R alors I a un hauteur au plus égale à 1.*

Corollaire 3.1.8 ([18], Corollaire 5.2)

Soit R un anneau Noethérien gradué à degrés positifs. Alors :

$$dimR = sup\{n \text{ tels que } P_0 \subset P_1 \subset .. \subset P_n | P_0, P_1, .., P_n \text{ sont des idéaux premiers homogènes de } R\}$$

Preuve

Cela résulte du corollaire 3.1.6 et de la proposition 3.1.7.

Proposition 3.1.9 ([18], Proposition 5.2)

Soient R un anneau gradué et I un idéal homogène engendré par des éléments homogènes de degrés positifs. Supposons que $P_1, P_2..., P_n$ des idéaux premiers homogènes, dont aucun ne contient I. Alors il existe un élément homogène $x \in I$ avec $x \notin P_i$ pour tous i.

Preuve

Sans perte de généralité, nous pouvons supposer qu'il n'y a pas de relations d'inclusion entre les idéaux $P_1, P_2..., P_n$, Ainsi pour chaque i, P_i ne contient pas l'idéal homogène $P_1 \cap ...\widehat{P_i}.. \cap P_n$. Par conséquent, il existe un élément homogène $u_i \notin P_i$ tel que $u_i \in P_j$ pour tout $i \neq j$. Aussi, pour chaque i, il existe un élément homogène $w_i \in I \backslash P_i$ de degré positif. En remplaçant w_i par une puissance suffisamment grande de w_i, on peut supposer que deg $u_i w_i > 0$. Soit $y_i = u_i w_i$. Alors $y_i \notin P_i$ mais $y_i \in I \cap P_1 \cap ...\widehat{P_i}..\cap P_n$. En prenant des puissances de y_i, si c'est nécessaire, nous pouvons supposer que deg y_i =deg y_j pour tous i, j. Maintenant, soit $x = y_1 + y_2 + .. + y_n$. Alors x est homogène, $x \in I$ et $x \notin P_i$ pour tout i.

Remarque 3.1.10

Nous notons que la proposition 3.1.9 *est fausse sans l'hypothèse que I est engendré par des éléments de degrés positifs. Par exemple, soit $S = \mathbb{Z}_{(2)}$ et $R = S[x]$ où deg $x = 1$. Soit*

$I = (2, x)R$, $P_1 = (2)R$ et $P_2 = (x)R$. Alors il n'existe pas d'élément homogène $x \in I$ tel que $x \notin P_1 \cup P_2$.

Lemme 3.1.11
Soit (R, m) un anneau local tel que R/m est infini. Soient M un R-module et $Q, N_1, N_2, .., N_s$ des sous-modules de M tel que Q ne soit pas contenu dans aucun N_i. Alors il existe $x \in Q$ tel que $x \notin N_i$ pour $i = 1, ..., s$.

Preuve
Supposons la contradiction que $Q \subseteq \cup_i N_i$. Pour chaque $i = 1, ..., s$ soit $x_i \in Q \backslash N_i$. En remplaçant Q par $Rx_1 + ... + Rx_s$ et N_i avec $N_i \cap Q$ on peut supposer que Q est de type fini et $Q = \cup_i N_i$. Alors :

$$Q/mQ = \cup_i (N_i + mQ)/mQ$$

Comme un espace vectoriel sur un corps infini n'est pas l'union d'un nombre fini de sous-espaces propres, il faut que $Q/mQ = (N_i + mQ)/mQ$ pour certains i. Par le lemme de Nakayama on a $Q = N_i$, une contradiction.

Le corollaire suivant nous permet dans certaines situations d'éviter des idéaux qui ne sont même pas premiers ou homogènes :

Corollaire 3.1.12 ([18], Corollaire 5.3)
Soit R un anneau gradué tel que R_0 est local avec un corps de résidu infini. Soit I un idéal de R engendré par des éléments homogènes de même degré s. Supposons que $J_1, ..., J_n$ des idéaux de R, dont aucun ne contient I. Alors il existe un élément homogène $x \in I$ de degré s tel que $x \notin J_j$ pour tout j.

Preuve
Il est clair que $I \cap R_s$ n'est pas contenu dans $J_i \cap R_s$ pour tout i, sinon $I \subset J_i$. On applique le lemme 3.1.11, il existe $x \in I \cap R_s$ tel que $x \notin J_i$ pour tout i.

Théoréme 3.1.13 ([18], Théorème 5.2)
Soient R un anneau gradué Noethérien et P un idéal premier homogène de hauteur n. Supposons que :

- **(a)** *P est engendré par des éléments de degrés positifs, ou*
- **(b)** *R_0 est local avec un corps de résidu infini et P est engendré par des éléments de même degré s.*

Il existe alors des éléments homogènes $w_1, ..., w_n \in P$ tels que P est minimal sur $(w_1, ..., w_n)R$. De plus, dans le cas (b), nous pouvons choisir $w_1, ..., w_n$ en degré s.

Preuve
Si $n = 0$, le résultat est trivial, donc on peut supposer que $n > 0$. Soit $Q_1, ..., Q_n$ les premiers minimaux de R. Puisque P n'est pas contenu dans aucun Q_i, il existe un élément homogène $w_i \in P$ (de degré s dans le cas (b)) tel que $w_i \notin Q_i$ pour tout i. Alors $ht(P/(w_1)) = n - 1$. Le résultat suit maintenant par récurrence.

Corollaire 3.1.14 ([18], Corollaire 5.4)
Soit R un anneau gradué Noethérien à degré positif avec R_0 Artinian et local. Soit M un idéal maximal homogène et $d = dim\ R = ht(M)$. Alors il existe des éléments homogènes $w_1, ..., w_d \in R_+$ tels que $M = \sqrt{(w_1, ..., w_d)}$. Si de plus $R = R_0[R_1]$ et le corps de résidu de R_0 est infini on peut choisir $w_1, ..., w_d$ dans R_1.

Preuve
Soit m un idéal maximal de R_0. Puisque mR est nilpotent, on peut passer à l'anneau R/mR et supposer que R_0 est un corps .i.e. $M = R_+$ par le théorème 3.1.13, il existe des éléments homogènes $w_1, ..., w_d$ dans R_+ (ou dans R_1 si l'hypothèse supplémentaire est satisfait), tel que M est minimal sur $(w_1, ..., w_d)$, comme chaque idéal premier minimal sur $(w_1, ..., w_d)$ est homogène et donc contenu dans M, M est le seul idéal contient $(w_1, ..., w_d)$. Ainsi $M = \sqrt{(w_1, ..., w_d)}$.

3.2 Comparaison entre la dimension de Krull et la dimension graduée

Lionel Ducos, Sur les dimensions des anneaux gradués, Année 2009, 1-10, 18-22.

Dans ce chapitre, on va présenter quelques notions récentes (idéaux et monoïdes bords) proposer par Lionel Ducos pour revisiter quelques résultats classiques de base sur la dimension de Krull des anneaux commutatifs N-gradués et donner le lien entre la dimension gradué et l'idéaux et monoïdes bords. L'objectif principal de ce chapitre est de comparer *dimgr A*, *Kdim A* et *Kdim* $(1 + A_+)^{-1}A$, où A désigne un anneau gradué (Noethérien ou pas).

3.2.1 Caractérisations de $Kdim$ $\boldsymbol{A}$ et $dimgr$ $\boldsymbol{A}$

Monoïdes et idéaux bords en terrain commutatif

Définition 3.2.1
Pour une suite $x_0, ..., x_l$ d'éléments d'un anneau commutatif A, on définit de manière récursive le monoïde bord $\mathcal{S}(x_0, ..., x_l)$ par :

$$\mathcal{S}() = \{1\} \qquad et \qquad \mathcal{S}(x_0, ..., x_l) = (\mathcal{S}(x_1, ..., x_l) + Ax_0)x_0^{\mathbb{N}}$$

d'où, par exemple :

$$\mathcal{S}(x_0, x_1) = ((1 + Ax_1)x_1^{\mathbb{N}} + Ax_0)x_0^{\mathbb{N}}$$
$$\mathcal{S}(x_0, x_1, x_2) = (((1 + Ax_2)x_2^{\mathbb{N}} + Ax_1)x_1^{\mathbb{N}} + Ax_0)x_0^{\mathbb{N}}$$

La suite $x_0, ..., x_l$ est dite pseudo-singulière lorsque $0 \in \mathcal{S}(x_0, ..., x_l)$. Sinon, la suite est dite pseudo-régulière.

Définition 3.2.2
Pour tout idéal $I \subset A$ et tout élément $x \in A$, on note $(I : x)$ l'idéal transporteur de x dans I et $(I : x^\infty)$ l'union croissante des idéaux transporteurs $\cup_{n\in\mathbb{N}}(I : x^n)$.

On définit également l'idéal bord $\mathcal{N}(x_0, ..., x_l)$ par :

$$\mathcal{N}() = \{0\} \qquad \text{et} \qquad \mathcal{N}(x_0, ..., x_l) = (\mathcal{N}(x_0, ..., x_{l-1}) : x_l^\infty) + Ax_l$$

d'où, par exemple :

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(x_0, x_1) &= (((0 : x_0^\infty) + Ax_0) : x_1^\infty) + Ax_1 \\ &= \{y \in A \mid 0 \in ((y + Ax_1)x_1^{\mathbb{N}} + Ax_0)x_0^{\mathbb{N}}\} \\ &= \cup_{n\in\mathbb{N}}(\langle x_0^{n+1}, x_0^n x_1^{n+1}\rangle : (x_0x_1)^n) \\ N(x_0, x_1, x_2) &= \cup_{n\in\mathbb{N}}(\langle x_0^{n+1}, x_0^n x_1^{n+1}, x_0^n x_1^n x_2^{n+1}\rangle : (x_0x_1x_2)^n) \end{aligned}$$

On pourra remarquer que l'idéal bord $\mathcal{N}(a, b...)$ ne dépend précisément que des idéaux $< a >$,$< b >$,... .

Théoréme 3.2.3 (dimension de Krull)
Dans un anneau commutatif A, il y a équivalence entre :

1) *(formulation classique) La longueur de toute chaîne strictement croissante d'idéaux premiers est inférieure ou égale à d.*

2) *(formulation liée aux bords) Toute suite d'éléments $x_0, ..., x_d$ de A est pseudo-singulière, c'est-à-dire :*

$$0 \in \mathcal{S}(x_0, ..., x_d) = ((...(1 + Ax_d)x_d^{\mathbb{N}} ... + Ax_1)x_1^{\mathbb{N}} + Ax_0)x_0^{\mathbb{N}}$$

ou encore :

$$1 \in \mathcal{N}(x_0, ..., x_d) = ((...(0 : x_0^\infty) + Ax_0...) : x_d^\infty) + Ax_d$$

3) *(formulation déployée) Pour tous $x_0, ..., x_d \in A$, il existe $a_0, ..., a_d \in A$ vérifiant :*

$$\begin{cases} a_0x_0 \in \sqrt{(0)} \\ a_1x_1 \in \sqrt{\langle a_0, x_0\rangle} \\ a_2x_1 \in \sqrt{\langle a_1, x_1\rangle} \\ \qquad \vdots \\ a_dx_d \in \sqrt{\langle a_{d-1}, x_{d-1}\rangle} \\ \quad 1 \in \sqrt{\langle a_d, x_d\rangle} \end{cases}$$

Lorsque ces assertions équivalentes sont réalisées, on note $Kdim\ A \leq d$.
Dans le cas contraire, lorsqu'il existe une suite $x_0, ..., x_d$ pseudo-régulière ou une chaîne d'idéaux premiers de longueur $d + 1$, on note $Kdim\ A \geq d + 1$.

Ce théorème est principalement prouvé à l'aide des lemmes suivants :

Lemme 3.2.4
Soit une suite pseudo-régulière $x_0, ..., x_d$ *dans un anneau commutatif* A*, i.e.* $0 \notin \mathcal{S}(x_0, ..., x_d)$*, ou encore* $1 \notin \mathcal{N}(x_0, ..., x_d)$*. Alors il existe des idéaux premiers* $P_0 \subsetneq P_1 \subsetneq ... \subsetneq P_{d+1}$ *tels que* $x_i \in p_{i+1} \backslash p_i$ *pour* $0 \leq i \leq d$*.*

Lemme 3.2.5
Dans un anneau commutatif A *, si on considère des idéaux premiers* $P_0 \subsetneq P_1 \subsetneq ... \subsetneq P_{d+1}$*, alors pour des éléments* $(x_0, ..., x_d) \in A$ *tels que* $x_i \in p_{i+1} \backslash p_i$ *pour* $0 \leq i \leq d$*, on a* $\mathcal{S}(x_0, ..., x_d) \cap P_0 = \emptyset$ *et* $\mathcal{N}(x_0, ..., x_d) \subset p_{d+1}$*.*
En particulier, $0 \notin \mathcal{S}(x_0, ..., x_d)$ *et* $1 \notin \mathcal{N}(x_0, ..., x_d)$*.*

3.2.2 Dimension graduée d'un anneau gradué

Notation

Dans tout ce chapitre, les anneaux gradués sont commutatifs et ont une graduation de type $\mathbb{N}$. Soit A un anneau gradué. On note :

- A_i l'ensemble des éléments homogènes de degré i, i.e.$A = \oplus_{i \geq 0} A_i$
- H la partie multiplicative constituée des éléments homogènes de A i.e. $H = \cup_{i \geq 0} A_i$.
- A_+ l'idéal l'augmentation, i.e. $A_+ = \oplus_{i \geq 1} A_i$.
- S le monoïde $1 + A_+$ (formé d'éléments réguliers).
- I^{gr} l'idéal gradué engendré par $I \cap H$ (lorsque I est un idéal de A).

Voici quelques rappels classiques :

Lemme 3.2.6
Soit A *un anneau gradué. Tout élément maximal de l'ensemble des idéaux gradués propres de* A *est un idéal maximal de* A *(et contient obligatoirement* A_+*).*

Nous allons maintenant adapter les résultats de la sous section précédente à la notion de dimension graduée (le supremum des longueurs des chaînes d'idéaux premiers gradués).

Lemme 3.2.7
Soit une suite pseudo-régulière $x_0, ..., x_d$ *d'éléments homogènes dans un anneau gradué* A *, i.e.* $0 \notin \mathcal{S}(x_0, ..., x_d)$ *. Alors il existe des idéaux premiers gradués* $q_0 \subsetneq q_1 \subsetneq ... \subsetneq q_{d+1}$ *tels que* $x_i \in q_{i+1} \backslash q_i$ *pour* $0 \leq i \leq d$ *.*

Preuve
le lemme 3.2.4 prouve l'existence d'idéaux premiers $p_0 \subsetneq p_1 \subsetneq ... \subsetneq p_{d+1}$ tels que $x_i \in p_{i+1} \backslash p_i$ pour $0 \leq i \leq d$. Il suffit maintenant de prendre la partie graduée de chaque idéal premier, i.e. $q_i := p_i^{gr}$ pour tout i, pour obtenir une chaîne d'idéaux premiers $q_0 \subsetneq q_1 \subsetneq$

$... \subsetneq q_{d+1}$ tels que $x_i \in q_{i+1} \backslash q_i$ pour $0 \leq i \leq d$ car les x_i sont homogènes.

Lemme 3.2.8
Soit des idéaux premiers gradués $p_0 \subsetneq p_1 \subsetneq ... \subsetneq p_{d+1}$ d'un anneau gradué A . Alors il existe des éléments homogènes $x_0, ..., x_d \in H$ tels que $x_i \in p_{i+1} \backslash p_i$ pour $0 \leq i \leq d$. Pour une telle suite $\mathcal{S}(x_0, ..., x_d) \cap p_0 = \emptyset$ et $\mathcal{N}(x_0, ..., x_d) \subset p_{d+1}$.
En particulier, $0 \notin \mathcal{S}(x_0, ..., x_d)$ et $1 \notin \mathcal{S}(x_0, ..., x_d)$.

Preuve
Comme les p_i sont gradués et distincts, l'existence d'une suite "séparante" d'éléments homogènes $x_0, ..., x_d \in H$ est évidente. Le reste de l'énoncé est une conséquence directe du lemme 3.2.5.

Lemme 3.2.9
Soit A un anneau gradué et $I \subset A$ un idéal gradué. Si $x \in H$ un élément homogène, alors les idéaux $(I : x^\infty)$ et $(I : x^\infty) + xA$ sont gradués. En conséquence, si $x_0, ..., x_n$ sont des éléments homogènes alors l'idéal $\mathcal{N}(x_0, ..., x_n)$ est gradué.

Preuve
Pour $a \in (I : x^\infty)$, décomposons $a = a_0 + a_1 + ... + a_n$ où $a_i \in H$ est homogène de degré i pour tout i. Il existe $d \in \mathbb{N}$ tel que $ax^d \in I$. Or I est gradué, donc il contient les composantes homogènes de ax^d : celles-ci sont $a_i x^d$ puisque x est homogène. On a donc $a_i \in (I : x^\infty)$ pour tout i, ce qui prouve que $(I : x^\infty)$ est gradué. Par suite, $\langle x \rangle + (I : x^\infty)$ est gradué puisque x est homogène.

Théoréme 3.2.10 (Dimension graduée)
Dans un anneau gradué A, il y a équivalence entre :

1) *(formulation classique) La longueur de toute chaîne strictement croissante d'idéaux premiers gradués est inférieure ou égale à d.*

2) *(formulation avec bords) Toute suite d'éléments homogènes $x_0, ..., x_d \in H$ est pseudo-singulière, c'est-à-dire :*
$$0 \in \mathcal{S}(x_0, ..., x_d) = ((...(1 + Ax_d)x_d^{\mathbb{N}} ... + Ax_1)x_1^{\mathbb{N}} + Ax_0)x_0^{\mathbb{N}}$$
ou encore :
$$1 \in \mathcal{N}(x_0, ..., x_d) = ((...(0 : x_0^\infty) + Ax_0 ...) : x_d^\infty) + Ax_d$$

3) *(formulation déployée) Pour tous $x_0, ..., x_d \in H$, il existe $a_0, ..., a_d \in H$:*
$$\begin{cases} a_0 x_0 \in \sqrt{(0)} \\ a_1 x_1 \in \sqrt{\langle a_0, x_0 \rangle} \\ a_2 x_2 \in \sqrt{\langle a_1, x_1 \rangle} \\ \quad \vdots \\ a_d x_d \in \sqrt{\langle a_{d-1}, x_{d-1} \rangle} \\ \quad 1 \in \sqrt{\langle a_d, x_d \rangle} \end{cases}$$

Lorsque ces assertions équivalentes sont réalisées, on note dimgr $A \leq d$.
Dans le cas contraire, lorsqu'il existe une suite $x_0, ..., x_d$ pseudo-régulière d'éléments homogènes ou une chaîne d'idéaux premiers gradués de longueur $d+1$, on note dimgr $A \geq d+1$.

Preuve
1) $\Leftrightarrow$ **2)** :D'après lemme 6.2.2 et le lemme 6.2.3.
2) $\Leftarrow$ **3)** : On a successivement :

$a_0 \in \sqrt{(0)} : x_0$
$a_1 \in \sqrt{(\langle a_0, x_0\rangle)} : x_1 \subset \sqrt{(\mathcal{N}(x_0))} : x_1 = \sqrt{(\mathcal{N}(x_0) : x_1^\infty)}$
$a_2 \in \sqrt{(\langle a_1, x_1\rangle)} : x_2 \subset \sqrt{(\mathcal{N}(x_0) : x_1^\infty + \mathcal{N}x_1)} : x_2 = \sqrt{(\mathcal{N}(x_0, x_1) : x_2^\infty)}$
$\vdots$
$a_d \in \sqrt{(\langle a_{d-1}, x_{d-1}\rangle)} : x_d \subset ... \subset \sqrt{(\mathcal{N}(x_0, ..., x_{d-1}) : x_d^\infty)}$
$1 \in \sqrt{(\langle a_d, x_d\rangle)} \subset \sqrt{(\mathcal{N}(x_0, ..., x_{d-1}) : x_d^\infty + Ax_d)} = \sqrt{(\mathcal{N}(x_0, ..., x_d))}$
D'où finalement $1 \in \mathcal{N}(x_0, ..., x_d)$.
2) $\Rightarrow$ **3)** : par récurrence : l'élément homogène 1 appartient à $\mathcal{N}(x_0, ..., x_d)$. Comme $(\mathcal{N}(x_0, ..., x_{d-1}) : x_d^\infty)$ et $\langle x_d\rangle$ sont des idéaux gradués , il existe un élément homogène $a_d \in (\mathcal{N}(x_0, ..., x_{d-1}) : x_d^\infty)$ tel que $1 \in a_d + \langle x_d\rangle$.
Maintenant, pour un entier $i \leq d$, considérons un élément homogène $a_i \in (\mathcal{N}(x_0, ..., x_{i-1}) : x_i^\infty)$. Pour un certain entier $k \in \mathbb{N}$ l'elements homogène $a_i x_i^k$ appartient à $\mathcal{N}(x_0, ..., x_{i-1})$ .Comme $(\mathcal{N}(x_0, ..., x_{i-2}) : x_{i-2}^\infty)$ et $\langle x_{i-2}\rangle$ sont des idéaux gradués, il existe un élément homogène $a_{i-1} \in (\mathcal{N}(x_0, ..., x_{i-2}) : x_{i-1}^\infty)$ tel que $a_i x_i^k \in a_{i-1} + \langle x_{i-1}\rangle$ d'où $a_i x_i \in \sqrt{\langle a_{i-1}, x_{i-1}\rangle}$.
Une récurrence décroissante sur l'entier i (allant de d à 1) prouve la formulation déployée en fournissant des éléments homogènes $a_{d-1}, ..., a_0$.

3.2.3 Exemples d'applications

Proposition 3.2.11
On considère un anneau gradué A de dimension graduée finie. Si I est un idéal gradué, radicalement de type fini, inclus dans A_+, alors I est radicalement engendré par $1+$dimgr A éléments homogènes.

Preuve
Comme I est gradué, on peut supposer qu'il est radicalement engendré par un nombre fini d'éléments homogènes. La preuve consiste à montrer comment, en considérant $d+2$ éléments homogènes ($d \geq dimgr\ A$) engendrant radicalement I, on peut construire $d+1$ éléments homogènes engendrant radicalement I également. Afin alléger les écritures qui suivent, pour des éléments $a, b, c, ... \in A$, on pose $D(a, b, c, ..) = \sqrt{\langle a, b, c, ...\rangle}$.
Écrivons $I = D(a, x_0, ..., x_d) \subset A_+$ où $a, x_0, ..., x_d$ sont homogènes. Comme $d \geq dimgr\ A$,

la formulation déployée du théorème 3.2.10 montre qu'il existe une suite d'éléments homogène $a_0, ..., a_d \in A$ vérifiant :

$$a_0x_0 \in D(0) \ \cdots \ a_dx_d \in D(a_{d-1}, x_{d-1}) \ , \ 1 \in D(a_d, x_d)$$

On multiplie ces appartenances par a et on utilise $aD(a_i, x_i) \subset D(aa_i, x_i)$:

$$aa_0x_0 \in D(0) \ \cdots \ aa_dx_d \in D(aa_{d-1}, x_{d-1}) \ , \ a \in D(aa_d, x_d)$$

Pour tout $j \geq d$, quitte à remplacer les éléments homogènes aa_j et x_j (appartenant à A_+) par une de leur puissance (on travaille à radical près), on peut supposer que aa_j et x_j sont de même degré, de sorte que $aa_j + x_j$ est homogène. En utilisant $D(aa_i, x_i) = D(aa_i + x_i, aa_ix_i)$, il vient :

$$\begin{array}{lll}
aa_1x_1 \in D(aa_0 + x_0, aa_0x_0) & \subset D(aa_0 + x_0, 0) \\
aa_2x_2 \in D(aa_1 + x_1, aa_1x_1) & \subset D(aa_1 + x_1, aa_0 + x_0) \\
\quad \vdots & \quad \vdots \\
aa_dx_d \in D(aa_{d-1} + x_{d-1}, aa_{d-1}x_{d-1}) & \subset D(aa_{d-1} + x_{d-1}, ..., aa_0 + x_0)
\end{array}$$

De $a \in D(aa_d + x_d, ..., aa_0 + x_0)$,il s'ensuit $x_d, ..., x_0 \in D(aa_d + x_d, ..., aa_0 + x_0)$ et donc que $I = D(a, x_d, ..., x_0) = D(aa_d + x_d, ..., aa_0 + x_0)$. L'idéal I est donc radicalement engendré par $d + 1$ éléments homogènes.

Un autre résultat en liaison avec le précédent.

Proposition 3.2.12
Soit A un anneau gradué de dimension graduée finie. On suppose que A_0 est un corps. Si l'idéal A_+ est radicalement de type fini, alors il est radicalement engendré par dimgr A éléments homogènes.

Preuve
Afin alléger les écritures qui suivent, pour des éléments $a, b, c, ... \in A$, on pose $D(a, b, c, ...) = \sqrt{\langle a, b, c, ...\rangle}$.
On peut supposer que A_+ (gradué) est radicalement engendré par $d + 1$ éléments homogènes : $A_+ = D(x_0, ..., x_d)$. La preuve consiste à montrer comment, sous l'hypothèse $d > dimgr\ A$, on peut construire d éléments homogènes engendrant radicalement A_+. La formulation déployée du théorème 3.2.10 montre qu'il existe une suite d'éléments homogènes $a_0, ..., a_d$ vérifiant :

$$a_0x_0 \in D(0) \qquad \cdots \qquad a_{i+1}x_{i+1} \in D(a_i, x_i) \qquad \cdots \qquad 1 \in D(a_d, x_d)$$

On constate que a_d est inversible puisque $1 \in D(a_d, x_d)$ et $x_d \in A_+$. Soit $i \geq$ -1 le plus petit entier tel que a_{i+1} soit inversible. En particulier $a_0, ..., a_i \in A_+$ car A_0 est un corps. Maintenant, seules les appartenances suivantes nous intéressent :

$$a_0x_0 \in D(0) \qquad \cdots \qquad a_{i+1}x_{i+1} \in D(a_i, x_i)$$

Pour tout entier $j \leq i$, quitte à remplacer a_j et x_j (appartenant à A_+) par une de leur puissance (on travaille à radical près), on peut supposer que a_j et x_j sont de même degré, de sorte que $a_j + x_j \in A_+$ est homogène. En utilisant $x_j \in D(a_j, x_j) = D(a_j + x_j, a_j x_j)$, il vient :

$$\begin{array}{rcccl} x_0, a_1x_1 & \in & D(a_0 + x_0, a_0x_0) & \subset & D(a_0 + x_0, 0) \\ x_1, a_2x_2 & \in & D(a_1 + x_1, a_1x_1) & \subset & D(a_1 + x_1, a_0 + x_0) \\ x_2, a_3x_3 & \in & D(a_2 + x_2, a_2x_2) & \subset & D(a_2 + x_2, a_1 + x_1, a_0 + x_0) \\ & \vdots & & & \vdots \\ x_i, a_{i+1}x_{i+1} & \in & D(a_i + x_i, a_ix_i) & \subset & D(a_i + x_i, ..., a_0 + x_0) \end{array}$$

Comme a_{i+1} est inversible, il s'ensuit :

$$x_0, ..., x_i, x_{i+1} \quad \in \quad D(a_i + x_i, ..., a_0 + x_0) \quad \subset \quad A_+$$

et enfin $A_+ = D(x_0, ..., x_d) \subset D(a_i + x_i, ..., a_0 + x_0, x_{i+2}, ..., x_d) \subset A_+$.
L'idéal A_+ est donc radicalement engendré par d éléments.

3.2.4 inégalités $dimgr\ \boldsymbol{A} \leq Kdim\ S^{-1}\boldsymbol{A} \leq Kdim\boldsymbol{A}$

Cette section explicite des preuves utilisent les idéaux et monoïdes bords pour retrouver quelques inégalités élémentaires.

Lemme 3.2.13
- *Soit deux entiers $n, m \in \mathbb{N}$ quelconques.*
Si A est un anneau commutatif, alors pour tous éléments $x, y \in A$:

$$KdimA/\mathcal{N}(x^n y^m) \leq max(KdimA/\mathcal{N}(x), KdimA/\mathcal{N}(y))$$

- *Si A est un anneau gradué, alors pour tous éléments homogènes $x, y \in H$:*

$$dimgrA/\mathcal{N}(x^n y^m) \leq max(dimgrA/\mathcal{N}(x), dimgrA/\mathcal{N}(y))$$

Preuve
Pour la démonstration voir la section 3, le lemme 3.6 de [13].

Lemme 3.2.14
*Soit **A** un anneau commutatif, un idéal $I \subset A$ et un monoïde $S \subset A$:*
- *On a $Kdim\ B/I \leq n$ si seulement si, pour tous $x_0, ..., x_n \in A$, l'idéal I rencontre le monoïde bord $\mathcal{S}(x_0, ..., x_n)$.*
- *On a $S^{-1}B \leq n$ si seulement si, pour tous $x_0, ..., x_n \in A$, le monoïde S rencontre l'idéal bord $\mathcal{N}(x_0, ..., x_n)$.*

Lemme 3.2.15
Pour tout anneau gradué A, on a :

$$Kdim\ A_0 \leq dimgr\ A \leq Kdim\ S^{-1}A \leq Kdim\ A$$

Preuve
- La première inégalité se montre ainsi : soit $n \geq dimgr\ A$ et $x_0, ..., x_n \in A_0$. Comme les x_i sont homogènes (de degré 0), on a $0 \in \mathcal{S}_A(x_0, ..., x_n) = ((1 + Ax_n)x_n^{\mathbb{N}} ... + Ax_0)x_0^{\mathbb{N}}$. On prend alors la composante homogène de degré 0 il vient $0 \in (1 + A_0 x_n)x_n^{\mathbb{N}} ... + A_0 x_0)x_0^{\mathbb{N}} = \mathcal{S}_{A_0}(x_0, ..., x_n)$, ce qui preuve $n \geq Kdim\ A_0$.
-Prouvons la seconde inégalité. Si $n \geq Kdim\ S^{-1}A$, alors pour tous $x_0, ..., x_n \in A$, l'idéal bord $\mathcal{N}(x_0, ..., x_n)$ rencontre S. Or $S = 1 + A_+$ donc on a $1 \in \mathcal{N}(x_0, ..., x_n) + A_+$. En supposant de plus les x_i homogènes, l'idéal $\mathcal{N}(x_0, ..., x_n)$ est gradué, donc il contient 1. Ainsi $dimgr\ A \leq n$.
- La troisième inégalité est immédiate : si $n \geq Kdim\ A$ alors pour tous $x_0, ..., x_n \in A$, on a $1 \in \mathcal{N}(x_0, ..., x_n)$ donc S rencontre $\mathcal{N}(x_0, ..., x_n)$, d'où $n \geq Kdim\ S^{-1}A$.

Exemple 3.2.16
Soit A un anneau commutatif et $B := A[X]$ l'anneau de polynômes canoniquement gradué. Alors $dimgr\ B = 1 + Kdim\ B_0 = 1 + Kdim\ A$.

Preuve
- Montrons $1 + Kdim\ A \leq dimgr\ B$. Soit $d \geq dimgr\ B$ et $x_1, ..., x_d \in B_0 = A$. On a alors :

$$0 \in \mathcal{S}_B(X, x_1, ..., x_d) = (\mathcal{S}_B(x_1, ..., x_d) + XB)X^{\mathbb{N}}$$

Comme X est régulier, il vient $0 \in \mathcal{S}_B(x_1, ..., x_d) + XB$. Maintenant, on évalue X en 0, et alors $0 \in \mathcal{S}_A(x_1, ..., x_d)$. Ceci étant vrai pour tous $x_1, ..., x_d \in A$, on vient de prouver $Kdim\ A \leq d - 1$.
- Montrons $dimgr\ B \leq 1 + Kdim\ A$ par récurrence sur $Kdim\ A$.
Le résultat étant trivial pour l'anneau nul, supposons $Kdim\ A \leq d$. Pour tout $a \in A$, on a $Kdim\ A/\mathcal{N}_A(a) \leq d - 1$, si bien que l'hypothèse de récurrence s'applique : $(dimgr A/\mathcal{N}_A(a))[X] \leq d$. Or $\mathcal{N}_A(a)[X] = \mathcal{N}_B(a)$ donc :

$$dimgr B/\mathcal{N}_B(a) \leq d$$

Par ailleurs $B/\mathcal{N}_B(X) = B/XB = A$, donc :

$$dimgr B/\mathcal{N}_B(X) = Kdim\ A \leq d$$

Via le lemme 3.2.13, on obtient $dimgr\ B/\mathcal{N}_B(aX^k) \leq max(d, d) = d$. Comme ceci est vrai pour tout élément homogène aX^k de B, on conclut que $dimgr\ B \leq d + 1$.

3.2.5 L'égalité $dimgr\ \boldsymbol{A} = Kdim\ S^{-1}\boldsymbol{A}$ en terrain Noethérien

De manière générale, il existe des anneaux A tels que $dimgr\ A < Kdim\ S^{-1}A$: Mais dans le cadre noethérien, légalité est toujours vraie comme nous allons le voir.

Lemme 3.2.17
Soit A un anneau gradué. Si $dimgr\ A \leq 0$ alors $Kdim\ A \leq 0$.

Lemme 3.2.18 ([12], corollaire 8.5 appliqué d fois)
Soit x un élément d'un anneau A noethérien et $\underline{t}$, $\underline{u}$ deux suites finies d'éléments de A.

$$\forall y \in A,\ 0 \in \boldsymbol{S}\ (\underline{t}\ , x, y,\ \underline{u}) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall y \in A,\ 0 \in \boldsymbol{S}\ (\underline{t}\ , y, x,\ \underline{u})$$

ou encore :

$$\forall y \in A,\ 1 \in \mathcal{N}\ (\underline{t}\ , x, y,\ \underline{u}) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall y \in A,\ 1 \in \mathcal{N}\ (\underline{t}\ , y, x,\ \underline{u})$$

Lemme 3.2.19
Dans un anneau gradué A, on considère un élément x décomposé en $x_0 + ... + x_n$ où les x_i sont homogènes de degré i.

- *Si $\mathcal{N}(x) \subset I$ où I est un idéal gradué alors $\prod_{i=1}^{n} \mathcal{N}(x_i) \subset I$.*
- *Pour toute suite finie $\underline{z}$ d'éléments de A , on a $\prod_{i=1}^{n} \mathcal{N}(\underline{z}, x_i) \subset \mathcal{N}(\underline{z}, x) + A_+$*

Théoréme 3.2.20
Soit A un anneau gradué noethérien. Alors $dimgr\ A = KdimS^{-1}A$.

Preuve
Nous allons démontrer l'implication $dimgr\ A \leq d \Rightarrow Kdim\ S^{-1}A \leq d$ par récurrence sur $d \in \mathbb{N}$. Admettons que le résultat soit établi pour un certain entier $d \in \mathbb{N}$ (comme c'est le cas pour $d = 0$, cf lemme 3.2.17). Supposons maintenant $dimgr\ A \leq d + 1$.
Soit $h \in H$. Alors dans A l'idéal bord $\mathcal{N}(h)$ est un idéal gradué, si bien que le quotient $A/\mathcal{N}(h)$ est gradué également. De plus $dimgr\ A/\mathcal{N}(h) \leq d$ donc l'hypothèse de récurrence s'applique : $Kdim\ T^{-1}A/\mathcal{N}(h) \leq d$ où $T = 1 + (A/\mathcal{N}(h))_+$, c'est-à-dire $T = S\ mod\ \mathcal{N}(h)$. Ainsi dans $T^{-1}(A/\mathcal{N}(h)) \cong S^{-1}A/\mathcal{N}(h)$, on a :

$$\forall\ x_0, ..., x_d \in S^{-1}A/\mathcal{N}(h), \qquad 1 \in \mathcal{N}_{S^{-1}A/\mathcal{N}(h)}(x_0, ..., x_d)$$

ce qui se traduit dans $S^{-1}A$ par :

$$\forall\ x_0, ..., x_d \in S^{-1}A, \qquad 1 \in \mathcal{N}_{S^{-1}A}(h, x_0, ..., x_d)$$

Comme A est noethérien, le localisé $S^{-1}A$,aussi. On sait d'après le corollaire 3.2.18 appliqué d fois que cela implique :

$$\forall\ x_0, ..., x_d \in S^{-1}A, \qquad 1 \in \mathcal{N}_{S^{-1}A}(x_0, ..., x_d, h)$$

Nous obtenons ainsi, pour tout élément homogène $h \in H$:

$$\forall x_0, ..., x_d \in A, \qquad S \cap N_A(x_0, ..., x_d, h) \neq \emptyset$$

Soit $x_{d+1} \in A$ décomposé en composantes homogènes $x_{d+1} = h_0 + ... + h_n$. On utilise la second résultat du lemme 3.2.19 :

$$\mathcal{N}_A(x_0, ..., x_d, h_0)...\mathcal{N}_A(x_0, ..., x_d, h_n) \subset \mathcal{N}_A(x_0, ..., x_d, x_{d+1}) + A_+$$

Mais S étant un monoïde rencontrant chaque $\mathcal{N}_A(x_0, ..., x_d, h_i)$, il rencontre donc la somme $\mathcal{N}_A(x_0, ..., x_d, x_{d+1}) + A_+$. Enfin, $S = 1 + A_+$ donc pour tous $x_0, ..., x_d, x_{d+1} \in A$, le monoïde S rencontre $N_A(x_0, ..., x_d, x_{d+1})$, autrement dit $Kdim\ S_A^{-1} \leq d + 1$. L'hérédité est démontrée.

Théoréme 3.2.21
Pour tout idéal premier gradué p d'un anneau gradué noethérien, on a $ht(p) = htgr(p)$. Autrement dit, pour tout $n \leq ht(p)$, il existe une suite pseudo-régulière d'éléments homogènes $x_1, ..., x_n \in H$ telle que $\mathcal{N}(x_1, ..., x_n) \subset p$.

Preuve
Par récurrence sur n : admettons la propriété pour un certain entier $n \geq 0$ (le cas n = 0 étant trivial). Soit p un idéal premier de hauteur supérieure à $n + 1$: écrivons $q_0 \subsetneq ... \subsetneq q_n \subsetneq q_{n+1} := p$. On considère alors une suite pseudo-régulière $z_0, ..., z_n \in A$ telle que $z_i \in q_{i+1} \setminus q_i$ (lemme 3.2.5). Comme p est homogène, on peut prendre $z_n \in H$ homogène.
On a alors $\mathcal{N}_{A_p}(z_0, ..., z_n) \subset p$, ce qui se traduit dans le localisé A_p par $1 \neq \mathcal{N}_{A_p}(z_0, ..., z_n)$. On applique n fois le corollaire 3.2.18 dans l'anneau Noethérien A_p : il existe des éléments $y_1, ..., y_n \in A$ tels que $1 \neq \mathcal{N}_{A_p}(z_n, y_1, ..., y_n)$. On peut traduire cela dans l'anneau A par $1 \neq \mathcal{N}_{A_p}(z_n, y_1, ..., y_n) \subset p$..
Maintenant, dans l'anneau gradué Noethérien $B := A/N(z_n)$, l'idéal premier pB est de hauteur supérieure à n car $\mathcal{N}_B(y_1, ..., y_n) \subset pB$. L'hypothèse de récurrence prouve l'existence d'une suite pseudo-régulière homogène $x_1, ..., x_n \in H$ telle que $\mathcal{N}_B \subset pB$. Cela se traduit dans A par $\mathcal{N}_A(z_n, x_1, ..., x_n) \subset p$, ce qui prouve la propriété au rang n + 1.

3.2.6 Les relations $Kdim\ S^{-1}\boldsymbol{A} = Kdim\ \boldsymbol{A} \leq 2dimgr\ \boldsymbol{A}$

Le passage le plus délicat dans une transcription idéaux premiers/idéaux bords porte finalement sur ces relations l'objectif de cette section est de savoir analyser les preuves classiques utilisant les idéaux premiers pour obtenir des énoncés et des démonstrations avec des idéaux bords.

Lemme 3.2.22
Soit A un anneau gradué. Si p est un idéal premier tel que $ht(p) \geq 1$ alors il existe un idéal premier gradué q tel que $ht(q) \geq 1$.

Preuve
[par contraposition] Si tout idéal premier gradué de A est de hauteur nulle alors $Kdim\ S^{-1}A \leq 0$ (les idéaux maximaux de $S^{-1}A$ sont en correspondance avec les idéaux maximaux gradués $m_0 + A_+$ de A) et le lemme 6.5.1 donne $Kdim\ A \leq 0$, donc tout idéal premier de A est de hauteur nulle.

Lemme 3.2.23 ([7],lemme.4. n.8, chap.5)
Soient $A = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} A_i$ un anneau gradué intègre, S l'ensemble des éléments homogènes $\neq 0$ de A.

(i) *Tout élément homogène $\neq 0$ de $S^{-1}A$ est inversible, l'anneau $K_0 = (S^{-1}A)_0$ est un corps et l'ensemble des $i \in \mathbb{Z}$ tels que $(S^{-1}A)_i \neq 0$ est un sous-groupe $q\mathbb{Z}$ de $\mathbb{Z}$ (avec $q \geq 0$).*

(ii) *Supposons que $q \geq 1$ et soit t un élément non nul de $(S^{-1}A)_q$. Alors le K_0-homomorphisme f de l'anneau de polynôme $K_0[X]$ dans $S^{-1}A$ qui transforme X en t se prolonge en un isomorphisme de $K_0[X, X^{-1}]$ sur $S^{-1}A$, et $S^{-1}A$ est intégralement clos.*

Le lemme suivant est une conséquence directe du lemme 3.2.23.

Lemme 3.2.24
Soit A un anneau gradué intègre et H_* le monoïde des éléments homogènes réguliers. Alors l'anneau localisé $\mathsf{H}_*^{-1}\mathsf{A}$ est soit un corps K, soit isomorphe à $\mathsf{K}[t, t^{-1}]$ où t est une indéterminée sur le corps K.

En particulier $Kdim\ \mathsf{H}_*^{-1}\mathsf{A} \leq 1$, et donc tout idéal premier de A de hauteur supérieur ou égale à 2 contient un élément homogène régulier.

Lemme 3.2.25
Dans un anneau gradué, si deux idéaux premiers p_i, p_{i+1} sont tels que $p_i^{gr} \subsetneq p_i \subsetneq p_{i+1}$, alors $p_i^{gr} \subsetneq p_{i+1}^{gr}$.

Preuve
Dans l'anneau intègre gradué A/p_i^{gr}, l'idéal p_{i+1} est de hauteur au moins 2 , donc il contient un élément homogène régulier (lemme 3.2.24) et cet élément certifie $p_i^{gr} \neq p_{i+1}^{gr}$.

Lemme 3.2.26
Soit A un anneau gradué. S'il existe une chaîne formée de n idéaux premiers non gradués alors $dimgr\ \mathsf{A} \geq n$.

Preuve
Considérons $p_1 \subsetneq ... \subsetneq p_n$ où les p_i sont des idéaux premiers non gradués. On applique le lemme 3.2.25 pour tous les $i \in 1, ..., n-1$:
$p_i^{gr} \subsetneq p_i \subsetneq p_{i+1}$ donc $p_i^{gr} \subsetneq p_{i+1}^{gr}$. De plus le lemme 3.2.22 appliqué a l'idéal p_n/p_n^{gr} du quotient A/p_n^{gr} montre l'existence d'un idéal premier gradué q contenant strictement p_n^{gr}, Nous venons de construire la chaîne d'idéaux gradués $p_1^{gr} \subsetneq ... \subsetneq p_n^{gr} \subsetneq q$ d'où le résultat.

Corollaire 3.2.27
Soit A un anneau gradué. Alors $Kdim\ \mathsf{A} \leq 2dimgr\ \mathsf{A}$.

Preuve
Soit $n \leq Kdim\ \mathsf{A}$. Considérons une chaîne d'idéaux premiers $p_0 \subsetneq ... \subsetneq p_n$ de A. Dans cette chaîne, disons qu'il y a g idéaux premiers non gradués et $n+1-g$ idéaux premiers

gradués. Par définition de la dimension graduée, on a $n - g \leq dimgr$ A et par le lemme 3.2.26 on a $g \leq dimgr$ A. En additionnant on obtient $n \leq 2dimgr$ A, d'où le résultat.

Remarque 3.2.28
L'inégalité générale $Kdim$ A $\leq 2dimgr$ A est-elle « optimale » ? Voici quelques éléments d'une réponse partielle.
Les anneaux gradués A de dimension de Krull nulle vérifient l'égalité $Kdim\ A = 0 = 2dimgr\ A$. D'après [[5], page 84, exercice 7], quels que soient deux entiers h, d vérifiant $h + 1 \leq d \leq 2h + 1$, il existe un anneau commutatif B tels que $h = Kdim\ B$ et $d = Kdim\ B[X]$. Comme $1 + Kdim\ B = dimgr\ B[X]$ (cf. exemple 3.2.16), on a $dimgr\ B[X] \leq d \leq 2dimgr\ B[X] - 1$. Ainsi on vérifie que $Kdim\ A$ peut varier librement entre $dimgr\ A$ et $2dimgr\ A - 1$ lorsque A est un anneau de polynômes. Cela étant, une question se pose (et l'auteur n'en connaît pas la réponse) : pour un entier n arbitraire, existe-t-il un exemple d'anneau gradué A (nécessairement non noethérien) tel que $n = Kdim\ A = 2dimgr\ A$?

Théoréme 3.2.29
Soit A un anneau gradué. Pour tout idéal premier p, il existe un idéal premier gradué q tel que $ht(q) \geq ht(p)$.

Preuve
Soit $n \leq ht(p)$ et cherchons un idéal premier gradué q tel que $ht(q) \geq n$. Considérons une chaîne d'idéaux premiers du type :

$$p_0 \subsetneq p_1 \subsetneq ... \subsetneq p_j \subsetneq p_{j+1} \subsetneq ... \subsetneq p_{n-1} \subsetneq p_n := p \qquad \forall\ j,\ ht(p_j) \geq j$$

Dans cette chaîne, on peut supposer p_0 gradué. Il existe alors un plus grand indice $j \geq 0$ tel que p_j soit gradué. On applique alors le lemme 3.2.26 dans l'anneau gradué A/p_j avec la chaîne d'idéaux premiers non gradués $p_{j+1} \subsetneq ... \subsetneq p_n$: on a donc $dimgr\ \mathsf{A}/p_j \geq n - j$. Ainsi il existe un idéal premier gradué $q \supset p_j$ tel que $ht(q) \geq n - j + ht(p_j) \geq n$.

Corollaire 3.2.30
Si A un anneau gradué alors $Kdim$ A $= Kdim\ S^{-1}$A.

Preuve
On sait qu'un élément maximal d'une chaîne d'idéaux premiers de A possède une hauteur inférieure à celle d'un idéal premier gradué bien choisi. Cela montre qu'on peut se restreindre à l'étude des idéaux maximaux gradués pour cerner la dimension de A. Or un idéal maximal gradué est de la forme $m_0 + A_+$ (avec $m_0$idéal maximal dans A_0), c'est donc un idéal maximal de S^{-1}A. Ainsi on arrive à $Kdim$ A $\leq Kdim\ S^{-1}$A.

Exemple 3.2.31
Pour tout anneau Noethérien de polynômes $\mathsf{A}[X]$, on a $Kdim\ \mathsf{A}[X] = 1 + Kdim$ A.

Preuve
On a successivement $Kdim\ \mathsf{A}[X] = dimgr\ \mathsf{A}[X]$ (puisque $\mathsf{A}[X]$ est Noethérien) et $dimgr\ \mathsf{A}[X] =$

$1 + Kdim\ \mathsf{A}$.

CHAPITRE 4

CATÉGORIE DES ANNEAUX ET MODULES GRADUÉS

Constantin Nastasescu, Freddy Van Oystaeyen, "Methods of Graded Rings", 2004

Dans cette section, tous les anneaux sont supposés des anneaux associatifs et tout anneau R a une identité $1 \in R$ (pas forcement commutatif).

Définition 4.0.1
Considérons un groupe G multiplicativement écrit avec un élément d'identité $e \in G$, R un anneau gradué d'une graduation de type G ou un anneau G-gradué, c'est à dire il existe une famille $\{R_n, n \in G\}$ des sous-groupe additive R_n de R tel que $R = \bigoplus\limits_{n \in G} R_n$ et $R_n R_m \subset R_{nm}$ pour tout n et m de G.
Pour un anneau G-gradué R tel que $R_n R_m = R_{nm}$ pour tout $n,\ m \in G$, on dit que R est fortement gradué par G.

4.1 Catégorie des anneaux gradués :

La catégorie de tous les anneaux est désignée par *RING*, Si G est un groupe, la catégorie des anneaux G-gradués, notée $G - RING$, est obtenue en prenant les anneaux G-gradués pour les objets et pour les morphismes entre les anneaux G-gradués R et S on prend les morphismes d'anneau $\varphi : R \longrightarrow S$ tel que $\varphi(R_n) \subseteq S_n$ pour tout $n \in G$. Notez que pour $G = \{1\}$ on a $G - RING = RING$. Si R est un anneau G-gradué, et X est un sous-ensemble non vide de G, on note $R_X = \bigoplus_{x \in X} R_x$. On particulier, si $H \leq G$ est un sous groupe, $R_H = \bigoplus_{h \in H} R_h$ est un sous anneau de R. En réalité R_H est un anneau H-gradué. Si $H = \{e\}$, alors $R_H = R_e$. Clairement la relation $R \longrightarrow R_H$ définit un foncteur $(-)_H : G - RING \longrightarrow H - RING$.

Proposition 4.1.1
le foncteur $(-)_H$ a un adjoint à gauche.

Preuve
Soit $S \in H - RING$, $S = \bigoplus_{h \in H} S_h$. On définit l'anneau G-gradué $\bar{S}$ comme suit : $\bar{S} = S$ comme anneau, et $\bar{S_n} = S_n$ si $n \in H$, et $\bar{S_n} = 0$ autre part. Alors la relation $S \longrightarrow \bar{S}$ définit un foncteur qui est un adjoint à gauche de $(-)_H$

On note que si $S \in RING = H\text{-}RING$ pour $H = \{1\}$ alors l'anneau G-gradué $\bar{S}$ a une G-graduation trivial. Soit $H \trianglelefteq G$ un sous-groupe normal. Ensuite, nous pouvons considérer le groupe de facteurs G/H. Si $R \in G\text{-}RING$, alors pour toute classe $C \in G/H$ considérons l'ensemble $R_C = \bigoplus_{x \in C} R_x$. Clairement $R = \bigoplus_{C \in G/H} R_C$, et $R_C R_{C'} \subseteq R_{CC'}$ pour tout $C, C' \in G/H$. Donc R a une G/H-graduation naturel, et on peut définir un foncteur $U_{G/H} : G\text{-}RING \longrightarrow G/H\text{-}RING$, associer à l'anneau G-gradué R le même anneau avec le G/H-graduation décrit ci-dessus. Si $H = G$, alors $G/G\text{-}RING = RING$, et le foncteur $U_{G/G}$ est exactement le foncteur oubli (the forgetful functor) $U : G\text{-}RING \longrightarrow RING$ qui associe à l'anneau G-gradué R l'anneau sous-jacent R.

Proposition 4.1.2
Le foncteur $U_{G/H} : G\text{-}RING \longrightarrow G/H\text{-}RING$ a un adjoint à droite.

Preuve
Soit $S \in G/H - RING$. Nous considérons le groupe d'anneau $S[G]$, qui est un anneau G-gradué avec la graduation naturelle $S[G]_g = Sg$ pour toute $g \in G$. Puisque $S = \bigoplus_{C \in G/H} S_C$, on définit le sous ensemble A de $S[G]$ par $A = \bigoplus_{C \in G/H} S_C[C]$. Si $g \in G$ il existe un unique $C \in G/H$ tel que $g \in C$, définie $A_g = S_C g$. Il est clair que les A_g définissent une G-graduation sur A, de sorte que A devient un sous-anneau G-gradué de $S[G]$. Nous avons défini un foncteur $F : G/H - RING \longrightarrow G - RING$ associer à S l'anneau G-gradué A. Ce foncteur est un adjoint droit du facteur $U_{G/H}$. En effet, si $R \in G - RING$ et $S \in G/H - RING$ on définit l'application :

$$\varphi : Hom_{G/H-RING}(U_{G/H}(R), S) \longrightarrow Hom_{G-RING}(R, F(S))$$

de la manière suivante : si $u \in Hom_{G/H-RING}(U_{G/H}(R), S)$, alors $\varphi(u)(r_g) = u(r_g)g$ pour tout $r_g \in R_g$. Alors φ est une bijection naturelle, son inverse est défini par $\varphi^{-1}(v) = \varepsilon \circ i \circ v$ pour toute $v \in Hom_{G-RING}(R, A)$ où $i : A \longrightarrow S[G]$ est la fonction d'inclusion, et $\varepsilon : S[G] \longrightarrow S$ est la fonction d'augmentation, i.e $\varepsilon(\sum_{g \in G} s_g g) = \sum_{g \in G} s_g$.

Remarque 4.1.3
- *La catégorie $G - RING$ a des produits directs arbitraires. En effet, si $(R_i)_{i \in I}$ est une*

famille d'anneaux G-gradés, alors $R = \oplus_{n\in G}(\prod_i (R_i)_n)$ *est un anneau G-gradué, qui est le produit de la famille* $(R_i)_{i\in I}$ *dans la catégorie* $G - RING$*. Notez que R est un sous-anneau de* $\prod_{i\in I} R_i$ *le produit de la famille dans la catégorie RING. L'anneau R est noté par* $\prod_{i\in I}^{gr} R_i$*. Si G est fini ou I est un ensemble fini, nous avons* $\prod_{i\in I}^{gr} R_i = \prod_{i\in I} R_i$*.*
-*Soit* $R = \oplus_{n\in G} R_n$ *un anneau G-gradué. On note par* R^0 *l'anneau opposé de R, i.e* R^0 *a le même groupe additif sous-jacent comme R, et la multiplication est définit par* $r \circ r' = r'r$ *pour* $r, r' \in R$*. L'affectation* $(R^0)_n = (R)_{n^{-1}}$ *fait de R un anneau G-gradué. L'association* $R \longrightarrow R_o$ *définit un isomorphisme entre les catégories* $G - RING$ *et* $G - RING$*.*

4.2 Catégorie des modules gradués

Définition 4.2.1
Lorsque l'anneau R est gradué par le groupe G, on considère la catégorie $G - R$*-gr, simplement écrite R-gr si aucune ambiguïté ne peut survenir, définie comme suit. Pour les objets de R-gr on prend les R-modules gradués (à gauche) et pour les R-modules gradués M et N il ont définit les morphismes dans la catégorie graduée comme :*

$$Hom_{R-gr}(M, N) = \{f \in Hom_R(M, N),\ f(M_n) \subset N_n,\ pour\ tout\ n \in G\}$$

De la définition, il est clair que $Hom_{R-gr}(M, N)$ *est un sous-groupe additif de* $Hom_R(M, N)$*.*

Remarque 4.2.2
-*La catégorie R-gr a des coproduits et des produits. En effet, pour une famille des modules noté* $\{M_i, i \in J\}$ *un coproduit* $S_J = \oplus_{n\in G} S_n$ *peut être donné en prenant* $S_n = \oplus_{i\in J}(M_i)_n$ *et un produit* P_J *peut être obtenu en prenant* $P_n = \prod_{i\in J}(M_i)_n$ *,*$P_J = \oplus_{n\in G} \prod_{i\in J}(M_i)_n$*.*
-*Puisque pour tout* $f \in Hom_{R-gr}(M, N)$ *nous avons un noyau,* $Ker\ f$*, et un objet image,* $Im\ f$*, qui sont dans R-gr et tels que :* $M/Ker\ f \cong Im\ f$ *sont naturellement isomorphes dans cette catégorie.*
- *La catégorie R-gr est une catégorie abélienne.*
-*Un morphisme gradué f est un monomorphisme si seulement si f est injective.*
-*Un morphisme gradué f est un épimorphisme si seulement si f est surjective.*

Lemme 4.2.3 ([19].lemme 20)
Pour tout anneau gradué R commutatif (une graduation de type $\mathbb{N}$*) , les énoncés suivants sont valables pour un morphisme* $f : M \longrightarrow N$ *de R-gr :*
(i) f *est un monomorphisme* $\Longleftrightarrow$ f *est injective* $\Longleftrightarrow$ $f_n : M_n \longrightarrow N_n$ *est injective pour tout* $n \in \mathbb{Z}$*.*
(ii) f *est un épimorphisme* $\Longleftrightarrow$ f *est surjective* $\Longleftrightarrow$ $f_n : M_n \longrightarrow N_n$ *est surjective pour tout* $n \in \mathbb{Z}$*.*
(iii) *La famille* $K = \{m | f(m) = 0\}$ *est un sous anneau gradué de* M *, et* $K \longrightarrow M$ *est le noyau de* f*.*
(iv) *Le morphisme* $N \longrightarrow N/f(M)$ *est le conoyau de* f*.*

(v) *Le morphisme $f(M) \longrightarrow N$ est l'image de f.*

Preuve
(i) Il est clair qu'une injection est un monomorphisme. Inversement, supposons $f : M \longrightarrow N$ est un monomorphisme de G-modules gradués et que $f(x) = f(y)$ pour $x, y \in M$. Il s'ensuit que $f(x_n) = f(y_n)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, ainsi nous pouvons réduire au cas où x, y sont homogènes de degré commun n. Soit $x', y' : S(-n) \longrightarrow M$ est les morphismes correspondant à x, y respectivement. Alors $fx' = fy'$ implique $x' = y'$ et ainsi $x = y$. Par conséquent f est injective . Il est clair que f est injectif si seulement si f_n est injectif pour chaque n.
(ii) Il est clair qu'une surjection est un épimorphisme. Inversement, supposons $f : M \longrightarrow N$ est un épimorphisme . L'image de f est un sous-module gradué de N, donc nous pouvons former le module gradué $N/f(M)$. Soit $g, h : N \longrightarrow N/f(M)$ est la projection et le morphisme zéro respectivement. Alors $gf = hf$ implique que $g = h$, donc $f(M) = N$ et donc f est surjectif. Il est clair que f est surjectif si seulement f_n est surjectif pour chaque n.
(iii) et **(iv)** sont facilement vérifiés.

Définition 4.2.4
Pour $M \in R - gr$ et $\sigma \in G$, nous définissons la σ-suspension $M(\sigma)$ de M comme étant le R-module gradué obtenu à partir de M en mettant $M(\sigma)_\tau = M_{\tau\sigma}$ pour tout $\tau \in G$. Ceci définit un foncteur $T_\sigma : R - gr \longrightarrow R - gr$ en mettant $T_\sigma(M) = M(\sigma)$. La famille des foncteurs $\{T_\sigma, \sigma \in G\}$ satisfait :

1. *$T_\sigma \circ T_\tau = T_{\sigma\tau}$ pour tout $\sigma,\ \tau \in G$.*
2. *$T_\sigma \circ T_{\sigma-1} = T_{\sigma-1} \circ T_\sigma = Id$,pour tout $\sigma \in G$.*

Pour un $M \in R - gr$ donné, nous définissons $G(M) = \{\sigma \in G, M \cong M(\sigma)\}$. Il est facile d'établir que $G(M)$ est un sous-groupe de G. Ce dernier sous-groupe est appelé le stabilisateur (ou groupe d'inertie) de M. Dans le cas $G(M) = G$, nous disons que M est G-invariant. Le sous-groupe $G(M)$ est relié à $sup(M)$.

Proposition 4.2.5
Avec la notation comme précédemment, si $\{\sigma_i, i \in I\}$ est une transversale gauche de $G(M)$ dans G alors il y a un $J \subset I$ tel que : $sup(M) = \cup_{i\in J}\sigma_i G(M)$. Notez que $J = \emptyset$ peut être autorisé. De plus, la cardinalité de J ne dépend pas de $\{\sigma_i, i \in J\}$.

Preuve
Si $\tau \in G(M)$ alors $M \cong M(\tau)$ dans R-gr. Prenons $J \subset I$ tel que $\sigma_i \in sup(M)$ pour tout $i \in J$. Alors : $M(\tau)_{\sigma_i} \cong M_{\sigma_i} \neq 0$, donc aussi $M_{\sigma_i\tau} \neq 0$ et $\cup_{i\in J}\sigma_i G(M) = sup(M)$. Inversement, si $\sigma \in sup(M)$ alors il résulte de $G = \cup_{i\in I}\sigma_i G(M)$ que $\sigma \in \sigma_i G(M)$ pour un certain $i \in I$. Donc $\sigma = \sigma_i\tau$ pour un certain $\tau \in G(M)$. A partir de $M_\sigma = M_{\sigma_i\tau} = M(\tau)_{\sigma_i} \cong M_{\sigma_i}$ et $M_\sigma \neq 0$, on déduit que $\sigma_i \in sup(M)$ et donc $i \in J$, ou $sup(M) = \cup_{i\in J}\sigma_i G(M)$. La

dernière partie de la déclaration est claire.

Au vu de la proposition précédente, nous pouvons mettre $|J| = [sup(M) : G(M)]$.

Proposition 4.2.6
Pour $M \in R - gr$ et tout $\sigma \in G$ on obtient : $G(M(\sigma)) = \sigma G(M)\sigma^{-1}$. Aussi $sup(M(\sigma)) = sup(M)\sigma^{-1}$.

Preuve
Si $\lambda \in G(M(\sigma))$, alors $M(\sigma) \cong M(\sigma)(\lambda) = M(\lambda\sigma)$ pour tout $\sigma \in G$. Donc $M \cong M(\lambda\sigma)(\sigma^{-1}) = M(\sigma^{-1}\lambda\sigma)$ et $\sigma^{-1}\lambda\sigma \in G(M)$ *ou* $\lambda \in \sigma G(M)\sigma^{-1}$. Ceci prouve que l'inclusion $G(M(\sigma)) \subset \sigma G(M)\sigma^{-1}$ et l'inclusion inverse peut être établie formellement de la même manière. La dernière partie de la proposition est claire.

4.3 Propriétés élémentaires de la catégorie R-gr

Dans cette section, nous nous intéressons à quelques propriétés élémentaires de la catégorie des R-modules gradués pour un anneau G-gradué arbitraire.

Proposition 4.3.1
Considérons M,N, P dans R-gr avec les application linéaires suivantes : $f : M \longrightarrow P, h : M \longrightarrow N, g : N \longrightarrow P$, tel que $f = g \circ h$ et f est un morphisme dans R-gr. Si g, (resp.h) est un morphisme dans la catégorie R-gr, alors il existe un morphisme $h' : M \longrightarrow N$, (resp. $g' : N \longrightarrow P$), dans R-gr tel que $f = g \circ h'$, (resp. $f = g' \circ h$).

Preuve
Prouvons le cas où g est un morphisme en R-gr. On choisi $m \in M_\sigma$ homogène pour certains $\sigma \in G$. On décompose $h(m)$ comme $h(m) = \sum_{\tau \in G} h(m)_\tau$. L'hypothèse $f = g \circ h$ implique que $f(m) = \sum_{\tau \in G} g(h(m)_\tau)$ avec $g(h(m)_\tau) \in P_\tau$. Puisque $f(m) \in P_\sigma$ nous pouvons définir le morphisme (en R-gr) h' en mettant $h'(m) = h(m)_\sigma$. Alors il est facile à voir que $f = g \circ h$.

Corollaire 4.3.2
Si $M \in R - gr$ est projectif (resp. injectif), considéré comme un module non-gradué alors M est aussi projectif,(resp. injectif) dans la catégorie $R - gr$.

Preuve
Prouvons la déclaration concernant la projectivitée, la version pour l'injectivité est dual. Considérons un épimorphisme $u : N \longrightarrow N'$ dans $R - gr$ et le morphisme $f : M \longrightarrow N'$ dans $R - gr$. Puisque u est aussi surjectif comme morphisme dans $R - mod$, il existe un R-linéaire $g : M \longrightarrow N$ tel que $f = u \circ g$. L'application de la proposition précédente donne l'existence d'un morphisme g' tel que $f = u \circ g'$ et cela établit la projectivitée de M dans $R - gr$.

Corollaire 4.3.3 (la version gradué de théorème de Maschke)
Considérons un sous-module N gradué du module gradué M. Alors N est une somme direct gradué de M (c'est-à-dire un somme direct en tant qu'objet $R-gr$) si et seulement si N est une somme direct de M considérée comme R-modules non-gradué.

Preuve
Si N est une somme direct de M en tant que R-module alors il y a un R-linéaire $f : M \longrightarrow N$ tel que $f \circ i = 1_N$, où i est l'inclusion canonique $N \longrightarrow M$. Au vu de la Proposition 4.3.1 on peut trouver un morphisme gradué $f : M \longrightarrow N$ tel que $f \circ i = 1_N$. Mais cela montre exactement que i est inversible comme un morphisme dans $R - gr$ et donc $M = N \oplus N'$, où $N' = \ker(f')$, en $R - gr$. L'autre implication est assez triviale, de sorte que les propriétés de déclaration sont en effet équivalentes.

Définition 4.3.4
Rappelons que dans toute catégorie $\underline{\mathcal{C}}$ on dit qu'un sous-objet $N \subset M$ est un sous-objet essentiel si pour tout autre sous-objet non nul $L \subset M$ on a $L \cap N \neq 0$ (nous supposons que $\underline{\mathcal{C}}$ a un objet initial approprié 0). En particulier pour la catégorie $R - gr$ un sous-module gradué N de M est gr-essentiel s'il s'agit d'un sous-objet essentiel dans le sens ci-dessus pour la catégorie $R - gr$, cela équivaut évidemment à : pour tout élément homogène non nul $m \in M$ on a $N \cap Rm \neq 0$, en autrement dit il existe un $a \in h(R)$ tel que $am \neq 0$ (tel que $h(R)$ la famille des éléments homogènes de R).

Proposition 4.3.5
Soit $N \subset M$ dans $R - gr$. Alors N est gr-essentiel dans M si et seulement si N est essentiel dans M dans R-mod. De plus, dans ce cas, nous avons que pour tout $m \in M$ il y a un $a_\tau \in R_\tau$ homogène tel que $a_\tau m \in N$ et $a_\tau m \neq 0$.

Preuve
Premièrement il est clair qu'un sous-module essentiel N de M dans R-mod est certainement gr-essentiel (N et M comme dans l'énoncé). Inversement, supposons que $N \subset M$ est essentiel dans $R - gr$. Choisissez $m \neq 0$ dans M, écrivez $supp(m) = \{\sigma_1, ..., \sigma_n\}$, $m = m_{\sigma_1} + ... + m_{\sigma_n}$ avec $0 \neq m_{\sigma_i} \in M_{\sigma_i}$, $i = 1, ..., n$. Par induction sur n, on peut établir que $Rm \cap N \neq 0$ en fait, nous établissons qu'il y a un $a \in h(R)$ tel que : $am \in N, am \neq 0$. Dans le cas $n = 1$ cela découle de gr-essentialité de N en M. En général, en appliquant l'hypothèse d'induction, on choisit $b \in h(R)$ de telle sorte que $b(m - m_{\sigma_1}) \neq 0 inN$. Si x$b(m - m_{\sigma_1}) \neq 0$ in N alors $bm = b(m - m_{\sigma_1}) = 0$ in N et nous avons terminé, donc supposons que $bm_{\sigma_1} \neq 0$. Prenons $c \in h(R)$ tel que $cbm_{\sigma_1} \neq 0$ dans N et regardons $cbm = cbm_{\sigma_1} + ... + cbm_{\sigma_n}$, puisque $cb \in h(R)$ ce dernier est la décomposition homogène decbm et comme $cbm_{\sigma_1} \neq 0$ nous devons avoir $cbm \neq 0$. Puisque $cbm \in N$ vient de $b(m_{\sigma_2} + ... + cbm_{\sigma_m}) \in N$ et $cbm_{\sigma_1} \in N$, la réclamation a été établie.

PERSPECTIVES

Étude quelques propriétés algébriques des anneaux dans le cadre gradué tels que :
Cohérent et **domaine de Bézout**.

BIBLIOGRAPHIE

[1] F. Anderson, et K. Fuller, *Rings and Categories of Modules*, Springer Verlag, New York, 1974.

[2] Antoine Chambert-Loir, *Algèbre commutatif*, Centre de Mathématiques, École polytechnique, Version du 24 août 2005.

[3] Bahturin, Yu. A, S. K. Sehgal, et M. V. Zaicev, *Group Gradings on Associative Algebras*, 15 juillet 2001, 677-698.

[4] M. Beattie, S. Dascalescu, *Categories of Modules Graded by G-sets.* Applications, J. Pure Appl. Algebra 107, 1996, 129-139.

[5] N. Bourbaki, *Algèbre commutative*, ch. 8, Dimension. Masson, 1983.

[6] N. Bourbaki, *Algèbre commutative*, chapitres 1-4, Masson, Paris, 1985.

[7] N. Bourbaki. *Algèbre commutative*, chapitres 5-7 Masson, Paris 1985.

[8] M. Cohen, H. L. Rowen, *Group Graded Rings*, Comm. Algebra 11, no. 11, 1983, 1253-1270.

[9] Colas Bardavid, *Anneaux, modules gradués et Proj*, vendredi 17 juin 2005.

[10] T. Coquand, L. Ducos, H. Lombardi, et C. Quitté, *Constructive Krull Dimension. I*, Integral Extensions, Journal of Algebra and Its Applications, 8 : 129–138, 2009.

[11] E. C. Dade, *Group Graded Rings and Modules*, Math. Zeitschrift 174, 3, 1980, 241-262.

[12] L. Ducos, *Sur la dimension de Krull des anneaux noethériens*, Journal of Algebra, 322(4) :1104–1128, 2009.

[13] L. Ducos , *Sur les dimensions des anneaux gradués*,Année 2009, 1-10,18-22.

[14] R. Fossum, et H. Foxby, *The Category of Graded Modules*, Math. Scand., Vol. 35, 1974, no. 2.

[15] P. Gabriel, *Des Categories Abeliennes*, Bull. Soc. Math. France 90, 1962, 323-448.

[16] P. Le Bihan, *Sur la cohérence des anneaux de dimension homologique 2*, C. R. Acad. Sc., Paris Sér. A 273 (1971) 342-345.

[17] N. Mahdou, *Introduction à l'algèbre homologique*, 2013.

[18] T. Marley, *Graded rings and modules*, Quelques notes basées sur un cours de cinq semaines , 1993.

[19] D. Murfet, *Graded Rings and Modules*, May 16, 2006.

[20] C. Nastasescu et F. Van Oystaeyen, *The Category of Graded Rings*, LNM 1836, pp. 1–18, 2004 , 3-6,19-24.

[21] C. Nastasescu, F. Van Oystaeyen, *Methods of Graded Rings* , 2004.

[22] C. Nastasescu, F. Van Oystaeyen, *Graded Ring Theory*, North-Holland Math. Library, Amsterdam, 1982.

[23] C. Nastasescu, F. Van Oystaeyen, *Graded and Filtered Rings and Modules*, 1979.

[24] Roozbeh Hazrat,*Graded Rings and Graded Grothendieck Groups*, (London Mathematical Society Lecture Note Series, pp. 227-231). Cambridge : Cambridge University Press, 28 juillet 2016.

[25] J. Rotman ; *An Introduction to Homological Algebra*, Academic press, Pure and Appl. Math., A Series of Monographs and Textbooks, 1979.

[26] Shiro Goto et Kikumichi Yamaghichi, *Finite generation of Noetherien graded ring*, volume 89, Number 1, American Mathematical Society, September 1983.

[27] O. Zariski and P. Samuel. *Commutative Algebra*, volume II. Springer-Verlag, 1960.