كلية العلوم و التقنيات فاس
ⵜⴰⵖⵉⵡⴰⵏⵜ ⵏ ⵜⵎⴰⵙⵙⴰⵏⵉⵏ ⴷ ⵜⵙⵏⵉⵜⵉⵏ
Faculté des Sciences et Techniques de Fès

جامعة سيدي محمد بن عبد الله
ⵜⴰⵙⴷⴰⵡⵉⵜ ⵙⵉⴷⵉ ⵎⵓⵃⵎⵎⴰⴷ ⴱⵏ ⵄⴱⴷⵍⵍⴰⵀ
Université Sidi Mohamed Ben Abdellah

UNIVERSITÉ SIDI MOHAMED BEN ABDELLAH FACULTÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE FES
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

MÉMOIRE DE FIN D'ÉTUDES

Pour l'obtention du diplôme de
MASTER MATHÉMATIQUES ET APPLICATIONS AUX CALCULS SCIENTIFIQUES

Equipe de recherche : Algèbre Commutative et Aspect Homologique

Présenté par
KAIBA Khalid

Sous la direction de :

Pr. MAHDOU Najib	**Encadrant**
Pr. CHHITI Mohamed	**Co-encadrant**

Thème :

Les conditions de Prüfer dans certaines extensions d'anneaux commutatifs

Soutenu le 12 juin 2018
Devant le Jury :

CHHITI Mohamed	FSJES Fès.	Co-encadrant
ELHILALI ALAOUI Ahmed	FST Fès	Président
HILALI Abdelmajid	FST Fès	Examinateur
MAHDOU Najib	FST Fès	Encadrant
RAHMOUNI HASSANI Aziza	FST Fès	Examinatrice

RESUMÉ

Dans ce mémoire, on étudie les extensions de la notion d'un domaine de Prüfer aux anneaux contenant des diviseurs de zéro, qu'on appelle les conditions de Prüfer incluant : les anneaux semi-héréditaires, les anneaux de dimension globale faible inférieur ou égal à 1, les anneaux arithmétiques, les anneaux Gaussiens, et les anneaux de Prüfer. Ensuite nous étudions, leur transfert dans différent modèles de constructions, à citer : les extensions triviales, la duplication amalgamée d'un anneau le long d'un idéal, l'amalgamation d'anneaux le long d'un idéal en respectant un homomorphisme et enfin la bi-amalgamation d'anneaux.

Mots clés :

Domaine de Prüfer, idéal régulier, anneau semi-héréditaire, anneau de dimension globale faible inférieur ou égal à 1, anneau arithmétique, anneau Gaussien, anneau de Prüfer, anneau de valuation, anneau total des fractions, extension triviale, duplication amalgamée, l'amalgamation d'anneaux et la bi-amalgamation d'anneaux.

Dédicace

Je dédie ce modeste travail :

À mes chers parents qui m'ont donné la vie, la tendresse, le courage et m'ont offert leur amour pour pouvoir réussir dans mon éducation et ma scolarisation.

À mes sœurs Fatna et Najia et mes frères Abderrahim, Driss, Said, Mahjoub, Abdelkarim et Ahmed pour leur support et soutien durant toute ma vie.

À Madame DOHMI Btissam pour son support durant la réalisation de ce travail.

À mes tantes Kenza et Souad.

À la famille ENKHILI : Mohammed, Badr et Majda.

À mes amis : ECH-CHYKRY Ismail, ECH-CHYKRY Hamid, GARTANI Mohammed et HANINI Yassine.

Remerciements

C'est avec un grand plaisir que je tiens à exprimer mes sincères remerciements et mon immense reconnaissance à tous ceux qui m'ont aidé, de près ou de loin, à l'achèvement de ce travail.

Tout d'abord, toute ma reconnaissance et ma gratitude à mon encadrant Monsieur MAHDOU Najib, professeur à la Faculté des Sciences et Techniques de Fès qui m'a honoré de m'avoir choisi pour pouvoir réaliser ce travail et m'a initié dans le domaine de recherche. Ses conseils et sa confiance m'ont guidés à avoir plus de confiance pour réaliser ce modeste travail.

Je tiens à remercier également Monsieur CHHITI Mohammed, professeur à la Faculté des Sciences Juridiques, Économiques et Sociales de Fès, pour l'expérience enrichissante et pleine d'intérêt qu'elles m'a fait vivre durant cette période de recherche, pour son accueil et la confiance qu'il m'a accordé dès notre première rencontre.

Je profite aussi de cette occasion pour exprimer mes remerciements aux membres du jury qui ont sacrifié par leur temps afin d'examiner mon travail.

Je remercie vivement tous les membres de l'équipe de recherche Algèbre Commutative et Aspect Homologique de la faculté des sciences et techniques de Fès. Précisément EL-KHALFI Abdelhaq, MOUSSAOUI Sanae, OMARI Mohammed et également EL KHALFAOUI Rachida et ZAHIR Youssef.

Mes remerciements sont adressés à Monsieur IJJAALI Mustapha le Doyen et mes enseignants de la FST de Fès, qui m'ont accompagné durant mon parcours universitaire.

Table des matières

1 Notions de base **3**
1.1 Résultats sur les modules 3
1.1.1 Module libre 3
1.1.2 Module projectif 4
1.1.3 Module injectif 5
1.1.4 Module plat 7
1.1.5 Modules n-présentés 8
1.1.6 Modules cohérents 9
1.2 Anneaux classiques 12
1.2.1 Anneaux des fractions 12
1.2.2 Anneaux Noethériens 13
1.2.3 Anneaux cohérents 13
1.2.4 Domaine de valuation 14
1.2.5 Anneaux semi-simples 15
1.2.6 Anneaux réguliers au sens de von neumann 15
1.2.7 Anneaux héréditaires - Domaines de Dedekind 16
1.2.8 Anneaux semi-héréditaires - Domaines de Prüfer 17

2 Extensions d'anneaux **20**
2.1 Produit fibré 20
2.1.1 Couples d'anneaux partageant un idéal 24
2.2 Extension triviale 24
2.2.1 Idéaux et éléments distingués de $R \propto M$ 25
2.2.2 Constructions d'anneaux et propriétés de $R \propto M$ 27
2.3 L'amalgamation d'anneaux 28
2.3.1 Définition et exemples 28
2.3.2 Produit fibré et Amalgamation d'anneaux 30
2.3.3 L'anneau $A \bowtie^f J$: quelques propriétés algébriques 32
2.3.4 Les idéaux premiers et maximaux de l'anneau $A \bowtie^f J$ 36

2.3.5 L'extension des idéaux de A à $A \bowtie^f J$ 38
2.4 La bi-amalgamation le long d'un idéal 39
2.4.1 La bi-amalgamation 39
2.4.2 Produit fibré et bi-amalgamation 40
2.4.3 Les propriétés de base de la bi-amalgamation 42
2.4.4 La structure des idéaux premiers de la bi-amalgamation 44

3 Extensions triviales définies par des conditions de Prüfer 49
3.1 Extensions de domaines 49
3.2 Une classe d'anneaux total des fractions 53
3.3 Conjecture de Kaplansky-Tsang-Glaz-Vasconcelos 55

4 Les conditions de Prüfer dans La duplication amalgamée d'un anneau le long d'un idéal 59
4.1 Définitions et notations 59
4.2 Transfert de la condition anneau de Prüfer 60
4.3 Transfert des conditions arithmétique, Gaussien, et fqp 64
4.4 Dimension globale faible et transfert de la condition semi-héréditaire 68

5 Les conditions de Prüfer dans l'amalgamation algébrique le long d'un idéal 71
5.1 Définitions et Notations 71
5.2 Résultats au cas où le conducteur de l'extension d'anneau $A \bowtie^f J \subset A \times B$ est régulier 73
5.3 Resultats dans le cas générale 75

6 transfert de la propriété arithmétique à la bi-amalgamation 82
6.1 Résultats 82
6.2 Exemples 88

Bibliographie 92

Introduction :

Tous les anneaux considérés sont commutatifs et unitaires.

L'objectif principal de ce mémoire est de présenter les conditions de Prüfer et traiter leur transfert aux différents modèles de constructions qui sont les localisations, les extensions triviales, la duplication amalgamée d'un anneau le long d'un idéal, et l'amalgamation d'anneau le long d'un idéal en respectant un homomorphisme. Ainsi, ce mémoire est divisé en six chapitres :

Le premier chapitre :

Dans ce chapitre nous avons présenté les notions de base concernant les modules et anneaux classiques avant de faciliter le rappel aux lecteurs.

Le deuxième chapitre :

Ce chapitre est réservé pour traiter le produit fibré, l'extension triviale, la duplication amalgamée, l'amalgamation d'anneaux et la bi-amalgamation. Ainsi la localisation et la structure des idéaux premiers et maximaux afin de les utiliser dans l'étude des conditions de Prüfer.

Le troisième chapitre :

Basé sur l'article de C. Bakkari, S. Kabbaj, N. Mahdou intitulé **"Trivial extensions defined by Prüfer conditions"**. Le but est de traiter le transfert des conditions de Prüfer aux extensions triviales afin de générer une nouvelle classe d'anneaux avec diviseurs de zéro soumis aux différentes conditions de Prüfer.

Le quatrième chapitre :

Consacré à l'article de M. Chhiti, M. Jarrar, S. Kabbaj, N.Mahdou **"Prüfer Conditions in an Amalgamated Duplication of a Ring Along an Ideal "**, qui examine les extensions idéales-théorétiques aussi bien qu'homologique du concept de domaine de Prüfer aux anneaux commutatifs contenant des diviseurs de zéro dans une duplication amalgamée d'un anneau le long d'un idéal. Les nouveaux résultats rapportent une nouvelle famille originale d'exemples publiés de duplications amalgamées soumises aux conditions de Prüfer diverses.

Le cinquième chapitre :

Il s'agit de l'article de C. A. Finocchiaro ; **"Prüfer-Like Conditions on an Amalgamated Algebra Along an Ideal"** qui traite les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'amalgamation d'anneau soit de Prüfer ainsi localement Prüfer, il enrichie la littérature avec des nouveaux exemples.

Le dernier chapitre :

Ce chapitre concerne l'article de S.Kabbaj, N. Mahdou and M. A. S. Moutui ; **"bi-amalgamations subject to the arithmetical property "** qui traite les conditions nécessaires et suffisantes pour que la bi-amalgamation soit arithmétique ainsi, il enrichie la littérature avec des nouveaux exemples.

Perspectives :

Nous terminons ce travail, par quelques perspectives de recherche que nous souhaiterons aborder prochainement.

Chapitre 1

Notions de base

1.1 Résultats sur les modules

1.1.1 Module libre

***Définition* 1.1.1**
Un R-module E est dit libre s'il est somme directe de copies de R. Si $Ra_i \cong R$ et $E = \oplus_{i \in I} Ra_i$ où I est un ensemble d'indexation, l'ensemble $\{a_i/i \in I\}$ est appelé alors une base de E.
Un module libre est dit de rang n s'il admet une base de cardinal n.

***Théorème* 1.1.1**
Soient R un anneau et E un R-module libre de rang n. Si $\{a_1, \ldots, a_n\}$ engendre E, alors c'est une base de E.

Rappel

1. Une suite de R-modules et d'homomorphismes
$$\cdots M_{i-1} \xrightarrow{U_{i-1}} M_i \xrightarrow{U_i} M_{i+1} \xrightarrow{U_{i+1}} \cdots$$
est dite suite exacte en M_i si $Ker(u_i) = Im(u_{i-1})$. Cette suite est dite exacte si elle est exacte en chaque M_i.
2. Une suite exacte courte est une suite exacte de la forme
$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{u} M \xrightarrow{v} M'' \longrightarrow 0;$$
c'est à dire que u est injectif, v est surjectif, et $Im(u) = Ker(v)$.

3. Une présentation d'un module M (de longueur 1) est une suite exacte :
$$L_0 \longrightarrow L_1 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$
où L_0 et L_1 sont des modules libres. Notamment, tout module admet une présentation.
4. Un module M est dit de présentation finie s'il existe une suite exacte de R-modules
$$L_0 \longrightarrow L_1 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$
avec L_0 et L_1 sont libres de base finie.

***Théorème* 1.1.2**

1. Tout module de présentation finie est de type finie.

2. Un module est de présentation finie si et seulement si il est isomorphe au quotient d'un module libre de base finie par un sous-module de type fini.

***Théorème* 1.1.3**

Soit M un R-module de type fini. Les assertions suivantes sont équivalentes :

i. M est de présentation finie.

ii. Pour tout suite exacte : $0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow M \longrightarrow 0$, si B est de type fini alors A est de type fini.

1.1.2 Module projectif

***Théorème* 1.1.4**

Soit P un module. Les assertions suivantes sont équivalentes :

i. Pour tout diagramme de modules :

$$\begin{tikzcd} P \arrow[d, "\alpha"] \arrow[dr, "f"] & & \\ B \arrow[r, "g"] & A \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

où la ligne est exacte (i.e. g est surjectif), il existe $\alpha \in Hom(P, B)$ tel que le diagramme est commutatif; c'est à dire $go\alpha = f$.

ii. Toute suite exacte $A \longrightarrow B \longrightarrow P \longrightarrow 0$ est scindée (c'est à dire $B \cong A \oplus P$).

iii. P est un facteur directe d'un module libre.

iv. Le foncteur $Hom(P, .)$ est exact (i.e. pour tout suite exacte $A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$, la suite $Hom(P, A) \longrightarrow Hom(P, B) \longrightarrow Hom(P, C) \longrightarrow 0$ est exacte).

***Définition* 1.1.2**

On dit qu'un module P est projectif s'il vérifie les conditions équivalentes du Théorème 1.2.4.

***Théorème* 1.1.5**
Soit R un anneau intègre. Alors tout idéal projectif de R est de type fini.

***Définition* 1.1.3**
Soient R un anneau intègre, I un idéal de R et $I^{-1} = (R : I) = \{x \in Frac(R)/xI \subseteq R\}$. L'idéal I est dit inversible si $II^{-1} = R$.

***Théorème* 1.1.6**
Soit I un idéal de R. Alors on a :

1. *$II^{-1} \subseteq R$.*
2. *Supposons que l'anneau R est intègre. Alors I est projectif si et seulement si I est inversible.*

1.1.3 Module injectif

***Définition* 1.1.4**
Un module E est dit injectif si pour tout diagramme de modules :

$$\begin{tikzcd} & E & \\ 0 \arrow[r] & A \arrow[u, "f"] \arrow[r, "g"] & B \arrow[ul, "\alpha"'] \end{tikzcd}$$

Où la ligne est exacte, il existe $\alpha \in Hom(B; E)$ tel que le diagramme est commutatif ; c'est à dire que $\alpha o g = f$.
Autrement dit, E est injectif si pour tout sous module A de B, tout morphisme $f : A \to E$ peut être prolongé à B. C'est le concept dual de la notion de module projectif.

***Théorème* 1.1.7**
Soit E un module. Les assertions suivantes sont équivalentes :
1. E est injectif ;
2. Toute suite exacte $0 \to E \to B \to C \to 0$ est scindée ;
3. $Hom(., E)$ est exacte.

***Proposition* 1.1.1**
Soit $(E_i)_{i \in I}$ une famille de modules. Alors on a :
1. $\Pi_{i \in I} E_i$ est injectif si et seulement si E_i est injectif pour tout $i \in I$.
2. $\oplus_{fini} E_i$ est injectif si et seulement si E_i est injectif pour tout i.

***Théorème* 1.1.8 (Critère de Baer)**
Un R-module E est injectif si et seulement si tout morphisme : $f : I \to E$; où I est un idéal de R, peut être prolongé à R.

Définition **1.1.5**

1. *Soient M un R-Module,* $m \in M$ *et* $\lambda \in R$*. On dit que m est divisible par* λ *s'il existe* $m' \in M$ *tel que* $m = \lambda m'$*.*

2. *On dit que M est divisible si tout* $m \in M$ *est divisible par tout non diviseur de zéro* $\lambda \in R$*.*

Exemple **1.1.1**
$\mathbb{Q}$ est un $\mathbb{Z}$ module divisible.

Théorème **1.1.9**
Tout module injectif est divisible.

Un R-module est dit sans torsion si pour tous $r \in R$ et $x \in M$ on a rx=0 implique que r=0 ou x=0
Maintenant, on donne une caractérisation de l'injectivité si le module est sans torsion.

Théorème **1.1.10**
Soient R un anneau intègre et M un R-module sans torsion.
Les assertions suivant sont équivalentes :
1. M divisible ;
2. M est injectif.

Proposition **1.1.2**
Soit R un anneau intègre et K=Frac(R). Alors k est un R- module injectif.

Dans les domaines principaux, l'injectivité et la divisibilité coïncident comme le montre le résultat suivante.

Théorème **1.1.11**
soient R un domaine principal et M un R-module. Les assertions suivantes sont équivalentes :
1. M est injectif ;
2. M est divisible.

Corollaire **1.1.1**
Tout $\mathbb{Z}$*-module divisible est injectif (car* $\mathbb{Z}$ *est principale).*

Théorème **1.1.12**
Tout module M admet une résolution injective ; c'est à dire qu'il existe une suite exacte :

$$0 \to M \to E^0 \to E^1 \to ...$$

Où E^i *est injectif pour tout i.*

1.1.4 Module plat

***Définition* 1.1.6**
Un R-module E est dit plat si le foncteur $E \otimes_R$ *est exacte ; c'est à dire, pour toute suite exacte de R-module* $0 \longrightarrow M \xrightarrow{u} N$ *, la suite*

$$0 \longrightarrow E \otimes_R M \xrightarrow{Id_E \otimes u} E \otimes_R N$$

est exacte.

***Corollaire* 1.1.2**
Soient R un anneau intègre et K son corps des fractions. Alors K est un R-module plat.

***Théorème* 1.1.13**
Soit P un module. Les assertions suivantes sont équivalentes :

i. P est projectif de type fini ;

ii. P est plat de présentation finie.

► ***Localisation*** On peut d'une manière analogue appliquer la construction de $S^{-1}R$, où R est un anneau, à un R-module M pour obtenir le module des fractions $S^{-1}M$. Soient M un R-module et S une partie multiplicative de R. On définit une relation d'équivalence de $M \times S$ par :

$$(m, s) \sim (m', s') \Leftrightarrow (ms' - m's)t = 0 \text{ pour un certain } t \in S.$$

On note m/s la classe d'équivalence de (m, s) qu'on appelle fraction. Sur l'ensemble de ces fractions noté $S^{-1}M$, on définit l'addition et la modulation par :

$$(m/s) + (m'/s') = (s'm + sm')/(ss')$$

et

$$(a/t)(m/s) = (am)/(st).$$

où $a/t \in S^{-1}R$. $S^{-1}M$ devient ainsi un $S^{-1}R$-module (et aussi un R-module).
Pour $S = R \setminus P$ où P est un idéal premier de R, on note $S^{-1}M$ par M_P.

***Théorème* 1.1.14**
Soient S une partie multiplicative de R et M un R-module. Alors :

1. *Si M est un R-module de type fini, alors* $S^{-1}M$ *est un* $S^{-1}R$*-module de type fini.*
2. *Si M est un R-module libre, alors* $S^{-1}M$ *est un* $S^{-1}R$*-module libre.*
3. *Si M est un R-module de présentation finie, alors* $S^{-1}M$ *est un* $S^{-1}R$*-module de présentation finie.*

4. *Si M est un R-module projectif, alors $S^{-1}M$ est un $S^{-1}R$-module projectif.*
5. *Si M est un R-module plat, alors $S^{-1}M$ est un $S^{-1}R$-module plat.*

1.1.5 Modules n-présentés

***Définition* 1.1.7**
Un R-module E est dit n-présenté, où n est un entier naturel, s'il existe une suit exacte de la forme :

$$F_n \to F_{n-1} \to ... \to F_0 \to E \to 0$$

où les F_i sont des R-modules libres de type fini pour tout i=0,...,n
Si n=0, nous disons que E est de type fini.
Si n=1, nous disons que E est de présentation finie.

***Définition* 1.1.8**
Soient R un anneau et E un R-module.
Si E est de type fini, nous définissons la quantité $\lambda_R(E)$, ou simplement $\lambda(E)$ par :
λ(E)=sup{n/ E est n-présenté}.
Si E n'est pas de type fini, nous posons : $\lambda(E) = -1$.
Clairement, nous avons :
-E est de type fini si seulement si $\lambda(E) \geqslant 0$.
-E est de présentation finie si et seulement si $\lambda(E) \geqslant 1$.

***Théorème* 1.1.15**
Soient R un anneau et $0 \to P \to N \to M \to 0$ une suite exacte de R-module. Alors :
1. $\lambda(N) \geqslant inf\{\lambda(P), \lambda(M)\}$.
2. $\lambda(M) \geqslant inf\{\lambda(P)+1, \lambda(N)\}$.
3. $\lambda(P) \geqslant inf\{\lambda(N), \lambda(M)-1\}$.
4. *Si $N = M \bigoplus P$, alors $\lambda(N) = inf\{\lambda(M), \lambda(P)\}$.*

En particulier, si $N = M \bigoplus P$, N est un R-module de présentation finie si et seulement si M et P sont des R-modules de présentation finie.

***Lemme* 1.1.1**
Un R-module M est n-présenté si et seulement si, pour tout (n-1)-présenté de M :

$$F_{n-1} \overset{u_{n-1}}{\to} ...F_0 \overset{u_0}{\to} M \to 0$$

$Ker(u_{n-1})$ *est de type fini.*

***Corollaire* 1.1.3**
Soit R un anneau et soit N_1 et N_2 deux sous R-modules de présentation finie d'un R-module M. Alors, $N_1 + N_2$ est de présentation finie si et seulement si $N_1 \cap N_2$ est de type fini.

▶ Nous donnons ci-dessous quelques résultats concernant le changement d'anneau.

***Théorème* 1.1.16**
Soient $\phi : R \longrightarrow S$ un homomorphisme d'anneaux et M un S-module. alors :

1. *M est aussi un R-module à travers la modulation : $r.m = \phi(r)m$.*
2. *Si M est un R-module de type fini, alors M est un S-module de type fini.*
3. *Si M est S-module de type fini et S est R-module de type fini, alors M est R-module de type fini.*
4. *Si M est un R-module de présentation fini et S est R-module de type fini, alors M est S-module de présentation fini.*
5. *Si M est S-module de présentation fini et S est un R-module de présentation fini, alors M est R-module de présentation fini.*

***Théorème* 1.1.17**
soient R un anneau et I un idéal de R, alors :

1. *Si M est un R-module de présentation finie, alors $\frac{M}{IM}$ est un $\frac{R}{I}$-module de présentation finie.*
2. *Supposons que I est de type fini et M est un $\frac{R}{I}$-module, alors :*
   M est un R-module de présentation finie si et seulement si M est un $\frac{R}{I}$-module de présentation finie.

1.1.6 Modules cohérents

***Définition* 1.1.9**
Soit R un anneau. Un R-module M est dit cohérent s'il est de type fini et si tout sous module de type fini de M est de présentation finie.

***Remarques* 1.1.1**
1. Un sous module de type fini d'un R-module chérent est un R-module cohérent.
2. Sur un anneau Noethérien, tout module de type fini est cohérent.

***Théorème* 1.1.18**
Soient R un anneau et $0 \to P \overset{\alpha}{\to} N \overset{\beta}{\to} M \to 0$ une suit exacte de R-modules.
1. si N est un module cohérent et P est de type fini, alors M est cohérent.
2. Si M et P sont cohérents, alors N est cohérent.
3. Si M et N sont cohérents, alors P est aussi cohérent.

Preuve
pour la démonstration voir [[54] : théorème 2.1.3]

***Corollaire* 1.1.4**
Soient R un anneau et $\phi : M \longrightarrow N$ un morphisme de R-modules cohérents. Alors $Im(\phi)$, $Ker(\phi)$ et $Coker(\phi)$ sont cohérents.

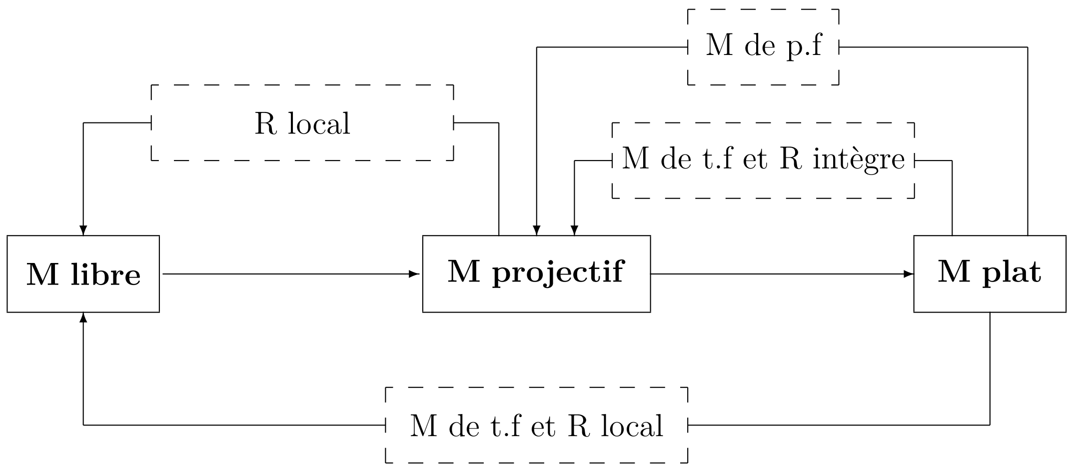
Preuve
Il suffit d'appliquer le Théorème précédent pour les suites exactes canoniques :
$0 \to Im(\phi) \to N \to Coker(\phi) \to 0$ et $0 \to Ker(\phi) \to M \to Im(\phi) \to 0$.

►De même, on obtient les deux résultats suivants :

***Corollaire* 1.1.5**
Toute somme directe finie de modules cohérents est un module cohérent.

***Corollaire* 1.1.6**
Soient R un anneau et M et N deux sous modules de type fini d'un module cohérent E. Alors M+N et $M \cap N$ sont deux Modules cohérents.

RELATIONS ENTRE MODULE lIBRE, PROJECTIF ET PLAT



Clé :
- Les flèches continues sont des implications.
- Les flèches coupées par des rectangles pointillés sont des implications sous les conditions placées dans ces rectangles.
- p.f désigne présentation finie, et t.f désigne type fini.

1.2 Anneaux classiques

1.2.1 Anneaux des fractions

***Définitions* 1.2.1**
Soit R un anneau.

1. *On dit que R est local s'il admet un seul idéal maximal $\mathcal{M}$ et on le note $(R, \mathcal{M})$.*
2. *On dit que R est semi-local s'il admet un nombre fini d'idéaux maximaux.*

Soient A un anneau et S une partie multiplicative de A (i.e. $S \subseteq A$, $1 \in S$, $0 \notin S$ et $\forall a, b \in S\ ab \in S$). On définit une relation d'équivalence de $A \times S$ par :

$$(a, s) \sim (a', s') \Leftrightarrow (as' - a's)t = 0 \text{ pour un certain } t \in S.$$

On note a/s la classe d'équivalence de (a, s) qu'on appelle fraction. Sur l'ensemble de de ces fraction noté $S^{-1}A$, on définit l'addition et la multiplication par :

$$(a/s) + (a'/s') = (as' + sa')/(ss')$$

et

$$(a/s) \times (a'/s') = (aa')/(ss').$$

***Définition* 1.2.1**
$S^{-1}A$ muni de l'addition et de la multiplication définies au dessus est un anneau commutatif unitaire d'élément nul $0/1$ et d'élément unité $1/1$ appelé anneau des fractions de A par rapport à S.

***Définitions* 1.2.2**
Soit R un anneau commutatif.

1. *Si R est intègre et $S = R \setminus \{0\}$ alors $S^{-1}R$ est le corps des fractions de R, noté $qf(R)$.*
2. *Si R n'est pas intègre et S l'ensemble des éléments réguliers de R (non diviseurs de zéro) alors $S^{-1}R$ est appelé l'anneau total des quotients de R, noté $T(R)$.*

► ***<u>Localisation</u>*** Soit P un idéal premier de R. On a $S = R \backslash P$ est une partie multiplicative de R. Dans ce cas $S^{-1}R$ noté R_P est un anneau local appelé la localisation de R en P.

1.2.2 Anneaux Noethériens

***Proposition* 1.2.1**
Soit R un anneau. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. *Tout ensemble non vide d'idéaux de R admet un élément maximal.*
2. *Toute suite croissante d'idéaux de R est stationnaire.*
3. *Tout idéal de R est de type fini.*

***Définition* 1.2.2**
On dit qu'un anneau R est Noethérien s'il vérifie les conditions équivalentes de la proposition 1.1.1.

***Proposition* 1.2.2**
Soient R un anneau Noethérien et $\Phi : R \to S$ un morphisme d'anneaux surjectif. Alors S est Noethérien.

***Corollaire* 1.2.1**
Soient $R \subseteq S$ une extension d'anneaux, où R est Noethérien et S est un R-module de type fini, alors S est Noethérien.

***Théorème* 1.2.1 (Théorème de Hilbert)**
Soient R un anneau Noethérien et X une indéterminée sur R. Alors $R[X]$ est Noethérien.

***Corollaire* 1.2.2**
Soient A un anneau Noethérien et $X_1, \cdots, X_n$ des indéterminées sur R. Alors $R[X_1, \cdots, Xn]$ est Noethérien.

1.2.3 Anneaux cohérents

***Définition* 1.2.3**
Un anneau R est dit cohérent s'il est cohérent comme R-module, c'est-à-dire que tout idéal de type fini est de présentation finie.

► maintenant on donne un théorème qui va caractériser les anneaux cohérents.

***Théorème* 1.2.2**
Soit R un anneau. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. *R est un anneau cohérent ;*
2. *Tout R-module 1-présenté est un module cohérent ;*
3. *Tout sous module de type fini d'un module libre est un module 1-présenté ;*
4. *Tout R-module R^S (S est un ensemble arbitraire) est plat ;*
5. *tout produit direct de R-modules plats est un module plat ;*

6. *(I :a) est un idéal de type fini pour tout idéal I de type fini et pour chaque a$\in$ R ;*
7. *(0 :a) est idéal de type fini pour tout a$\in$ R et l'intersection de deux idéaux de type fini est un idéal de type fini.*

Preuve
pour la démonstration voir [[54], Théorème 2.2.3]

***Remarque* 1.2.1**
L'assertion 3 du Théorème précédent peut-être énoncée autrement, en disant qu'un anneau R est cohérent si et seulement si tout R-module 1-présenté est 2-Présenté (donc infiniment présenté).

***Théorème* 1.2.3**

1. *Si R un anneau cohérent et I est un idéal de type fini de R, alors R/I est un anneau cohérent.*
2. *Si R/I est cohérent et I est un idéal de type fini, alors R est un anneau cohérent.*

Preuve
Utiliser le théorème 1.1.17 et remarquer qu'un $\frac{R}{I}$-module est de type fini si et seulement s'il est de type fini comme R-module.

***Théorème* 1.2.4**
Soient R un anneau cohérent et S une partie multiplicative de R. Alors $S^{-1}R$ est un anneau cohérent.
en cas particulier, tous les localisés R_m sont cohérents, avec $m \in Max(R)$.

***Théorème* 1.2.5**
Soient $(R_i)_{i=1}^n$ une famille d'anneau R et $R = \Pi_{i=1}^n R_i$. Alors R est cohérent si et seulement si R_i est cohérent pour tout $i = 1, \cdots, n$.

1.2.4 Domaine de valuation

***Définitions* 1.2.3**
Soit R un anneau. Alors :

1. *R est dit anneau de valuation si pour tout $a, b \in R$, on a :*
   $a \in Rb$ ou $b \in Ra$.
2. *On dit que R est un domaine de valuation si c'est un anneau de valuation intègre.*

***Théorème* 1.2.6**
Soient R un anneau intègre et K son corps des fractions, les assertions suivantes sont équivalentes :

1. *R est un domaine de valuation.*
2. *Pour tout $a, b \in R$, on a $Ra \subseteq Rb$ ou $Rb \subseteq Ra$.*
3. *Pour tout $x \in K$ on a $x \in R$ ou $x^{-1} \in R$.*

***Proposition* 1.2.3**
Soient R un domaine de valuation et K son corps des fractions. Alors on a :
1. *Tout domaine S tel que $R \subseteq S \subseteq K$ est un domaine de valuation.*
2. *R est un anneau local.*

***Corollaire* 1.2.3**
Soient R un domaine de valuation et S une partie multiplicative de R. Alors $S^{-1}R$ est un domaine de valuation.

1.2.5 Anneaux semi-simples

***Définition* 1.2.4**
Soient R un anneau et M un R-module.
1. *M est dit simple si $M \neq 0$ et si M ne contient pas de sous modules propres.*
2. *M est dit semi-simple si M est produit fini de modules simples.*
3. *un anneau R est dit semi-simple s'il est un module semi-simple.*

***Théorème* 1.2.7**
Les assertions suivantes sont équivalentes :
1. *R est semi-simple ;*
2. *Tout R-module est semi-simple ;*
3. *Tout R-module est injectif ;*
4. *Tout suite exacte courte de R-modules est scindée ;*
5. *Tout R-modules est projectif ;*

Dans les anneaux commutatifs, on a la caractérisation suivante :

***Théorème* 1.2.8**
Soit R un anneau commutatif. R est semi-simple si et seulement si R est un produit fini de corps.

1.2.6 Anneaux réguliers au sens de von neumann

On a les caractérisations suivantes du fait que tout R-module est plat :

***Théorème* 1.2.9**
Soit R un anneau commutatif. les assertions suivantes sont équivalentes :

1. *Pour tout $a \in R$, il existe $a' \in R$ tel que $a'a^2 = a$;*
2. *Pour tout $x \in R$, il existe $e \in R$ tel que $e^2 = e$ et $Rx = Re$;*
3. *Pour tout idéal de type fini de R est principale engendré par un idempotent ; c'est à dire engendré par un élément e tel que $e^2 = e$;*
4. *Tout idéal se type fini est un facteur direct de R ;*
5. *Tout R-module est plat.*

***Définition* 1.2.5**
Un anneau R est dit régulier au sens de Von Neumann s'il vérifie l'une des assertions du théorème précédent.
On l'appelle aussi un anneau absolument plat.

***Proposition* 1.2.4**
Soit R un anneau régulier au sens de Von Neumann. On a :

1. *Si S est une partie multiplicative de R, alors $S^{-1}R$ est régulier au sens de Von Neumann.*
2. *R est intègre si et seulement si R est un corps.*

Le théorème suivant donne des caractérisations des anneaux réguliers au sens de Von Neumann via les localisation :

***Théorème* 1.2.10**
Soit R un anneau. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. *R régulier au sens de Von Neumann ;*
2. *R_p est un corps pour tout $P \in Spec(R)$;*
3. *R_M est un corps pour tout $M \in Max(R)$;*

On a aussi la caractérisation des anneaux réguliers au sens de Von Neumann :

***Théorème* 1.2.11**
Un anneau R est régulier au sens de Von Neumann si et seulement si tout module de présentation finie est projectif.

1.2.7 Anneaux héréditaires - Domaines de Dedekind

***Définition* 1.2.6**
Un anneau R est dit héréditaire si tout idéal de R est Projectif.
Si l'anneau est intègre, on parle de domaine de Dedekind.

▶ Notamment, tout domaine de Dedekind est Noethérien puisque tout idéal projectif est de type fini dans un domaine. Par contre, un anneau héréditaire n'est pas forcément Noethérien (voir [[53],Exemple 7.4.7, P :133]).
▶ Dans un anneau héréditaire on a le résultat suivant :

***Théorème* 1.2.12 (I. kaplansky)**
Soit R un anneau héréditaires. Alors tout sous module libre est somme directe d'idéaux.

***Corollaire* 1.2.4**
Soit R un anneau. Alors R est héréditaire si et seulement si tout sous module d'un module projectif est projectif.

***Corollaire* 1.2.5**
Soit R un domaine principal. Alors on a :

1. *Tout sous module A d'un module libre F est libre et on a* $rang(A) \leqslant rang(F)$.
2. *Tout sous module d'un module de type fini* $B =< b_1, ..., b_n >$ *est de type fini et peut être engendré au maximum par n éléments.*
3. *Tout module projectif est libre.*

▶ Dans les anneaux Noethériens, on a les caractérisations suivantes des anneaux héréditaires :

***Théorème* 1.2.13**
Soit R un anneau Noethéréien. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. *R est héréditaire.*
2. R_p *est un domaine de valuation discrète, pour tout* $P \in$ *Spec(R) ;*
3. R_M *est un domaine de valuation discrète, pour tout* $M \in$ *Max(R) ;*
4. *Tout idéal de R est plat.*

1.2.8 Anneaux semi-héréditaires - Domaines de Prüfer

***Définition* 1.2.7**
Un anneau est dit semi-héréditaire si tout idéal de type fini est projectif. Un anneau semi-héréditaire intègre est dit un domaine de prüfer.

***Exemples* 1.2.1**
1. Tout anneau héréditaire est semi-héréditaire. si de plus l'anneau est Noethérien, alors on a l'équivalence.

2. R est un domaine de Dedekind si et seulement si R est un domaine de Prüfer Noethérien.

Un anneau est dit **cohérent** si tout idéal de type fini est de présentation fini (voir la section 1.1.7)

Notamment, un anneau semi-héréditaire est cohérent puisque tout idéal de type fini projectif est de présentation finie.

► Maintenant, on va donner une caractérisation des anneaux semi-héréditaires dans le cas des anneaux intègres et celui des anneaux cohérents.

***Théorème* 1.2.14**
Si R semi-héréditaire, alors tout sous module de type fini d'un module libre est somme directe d'idéaux de type fini.

***Proposition* 1.2.5**
soit R un anneau. Considérons les assertions suivantes :

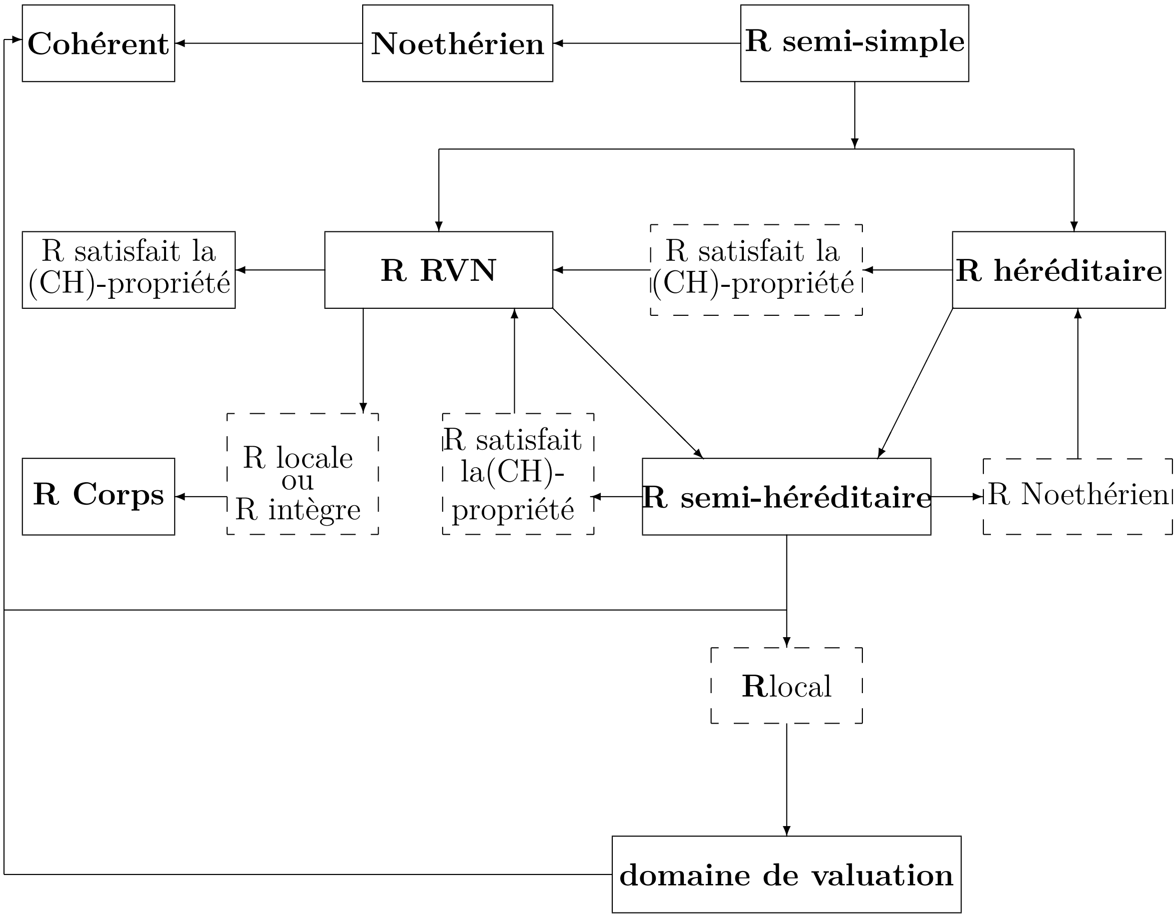
1. *R est semi-héréditaire.*
2. *R_p est un domaine de valuation, pour tout $P \in Spec(R)$;*
3. *R_M est un domaine de valuation, pour tout $M \in Max(R)$;*
4. *Tout idéal de type fini est plat.*

On a $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 4$. Et si R est cohérent ou intègre, alors on a l'équivalence entre les quatre assertions

***Corollaire* 1.2.6**
Soit A un anneau. alors A est semi-héréditaire si et seulement si tout sous module de type fini d'un module projectif est un module projectif.

RELATIONS ENTRE LES ANNEAUX

Soit R un anneau



Un anneau R est dit satisfait la (CH)-propriété si tout idéal propre de type fini admet un annulateur non nul.

Clé :
- Les flèches continues sont des implications.
- Les flèches coupées par des rectangles pointillés sont des implications sous les conditions placées dans ces rectangles.
- RVN désigne régulier au sens de Von-Neumann.

Chapitre 2

Extensions d'anneaux

2.1 Produit fibré

S. Glaz; Commutative coherent rings, Springer-Verlag, Lecture Notes in Mathematics, 1371 (1989).

P. J. Cahen; Couples d'anneaux partageant un idéal, Arch. Math. Vol. 51, 505-514 (1988).

Introduction Dans ce chapitre, on étudie certaines propriétés de la construction du carré cartésien dit aussi produit fibré.
On commence avec des anneaux R, S, T et W et un carré commutatif d'homomorphismes d'anneaux.

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, "j_1"] & S \arrow[d, "j_2"] \\ T \arrow[r, "i_2"] & W \end{tikzcd}$$

On suppose que i_1 et i_2 sont injectifs et que j_1 et j_2 sont surjectifs. Dans ce cas on peut faire les identifications suivantes : $W \cong T \otimes S$; $Q = Ker(j_1) \cong Ker(j_2)$; ce qui fait que Q est un idéal commun de R et S et on exprime cela en disant que Q est un idéal de R qui satisfait $QS = Q$; $T \cong R/Q$ et $W \cong S/QS \cong S/Q$. Avec ces identifications notre carré cartésien assume l'apparence suivante :

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, "j_1"] & S \arrow[d, "j_2"] \\ R/Q \arrow[r, "i_2"] & S/Q \end{tikzcd}$$

Cette construction s'appelle produit fibré ou pullback ou encore, on dit que (R, S) est un couple d'anneaux partageant un idéal Q.
La forme décrite au-dessus du carré cartésien sera appelée la forme générale".

***Exemple* 2.1.1**
Soient T un anneau et M un idéal de T. Notons par π la surjection canonique $\pi : T \longrightarrow T/M$. Soit D un sous anneau de T/M. Alors, $R := \pi^{-1}(D)$ est un sous anneau de T et M est un idéal commun de R et T, tel que $D = R/M$. R est le produit fibré associé au diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} R := \pi^{-1}(D) & \stackrel{\pi/R}{\longrightarrow} & D = R/M \\ i\downarrow & & \downarrow j \\ T & \stackrel{\pi}{\longrightarrow} & T/M \end{array}$$

Où i et j sont les injections canoniques.
En particulier, pour la construction $D + M$, lorsque l'anneau T est de la forme $K + M$, où K est un corps, M est un idéal maximal de T, R devient de la forme $D + M$.

On commence par quelques notations.
Notations
Soit A un anneau. On note par :
Max(A) :={L'ensemble des idéaux maximaux de A},
Spec(A) :={L'ensemble des idéaux premiers de A},
Nilp(A) :={L'ensemble des éléments nilpotents de A},
J(A) :=$\cap Max(A)$= *le radicale de Jacobson de A.*
On considère *Spec(A)* muni de la topologie de Zariski, i.e. la topologie dont les fermés sont les parties de *Spec(A)* de la forme $V(J)$= $\{I \in$ *Spec(A)* $\mid J \subseteq I\}$ pour tout idéal J de A.
Soit $f : A \longrightarrow B$ un homomorphisme d'anneaux. On note par f^* : *Spec(B)* $\longrightarrow$ *Spec(A)*, la fonction canonique continue associée à f définie par $f^*(P) = f^{-1}(P)$, pour tout $P \in$ *Spec(B)*.
Puisque dans tout ce travail, on ne traite que le cas des anneaux commutatifs unitaires, on a la définition suivante :

***Définition* 2.1.1**
Soient $\alpha : A \longrightarrow C$ et $\beta : B \longrightarrow C$ deux homomorphismes d'anneaux, alors le sous-anneau $D := \alpha \times_c \beta = \{(a, b) \in A \times B \mid \alpha(a) = \beta(b)\}$ de $A \times B$ s'appelle le produit fibré de α et β.

On commence a rassembler quelques propriétés pour que le produit fibré soit un anneau réduit.

***Proposition* 2.1.1**
1. *Si $D(:= \alpha \times_c \beta)$ est réduit, alors :*

$$Nilp(A) \cap Ker(\alpha) = \{0\} \text{ et } Nilp(B) \cap Ker(\beta) = \{0\}.$$

2. Si au moins une des assertions suivantes est vérifiée

(a) A est réduit et $Nilp(B) \cap Ker(\beta) = \{0\}$,

(b) B est réduit et $Nilp(A) \cap Ker(\alpha) = \{0\}$,

alors D est réduit.

Preuve
1. Supposons que D est réduit. Par symétrie, il suffit de montrer que $Nilp(A) \cap Ker(\alpha) = \{0\}$. Si $a \in Nilp(A) \cap Ker(\alpha)$, alors $(a, 0)$ est un élément nilpotent de D, et ainsi $a = 0$ (puisque D est réduit).
2. De la symétrie des conditions (a) et (b), il suffit de montrer que si (a) est vérifiée alors D est réduit. Soit (a, b) un élément nilpotent de D. Alors $a = 0$ puisque $a \in Nilp(A)$ et A est réduit. Ainsi on a $(a, b) = (0, b) \in Nilp(D)$, par conséquent $b \in Nilp(B) \cap Ker(\beta)$.

***Remarque* 2.1.1**
Soit $p_A : D \longrightarrow A$ la surjection canonique. $p_A(D)$ est muni de la structure de D-module induite par p_A.
Clairement $Ker(p_A) = \{0\} \times Ker(\beta)$, et ainsi on a la suite exacte de D-modules

$$0 \longrightarrow Ker(\beta) \xrightarrow{i} D \xrightarrow{p_A} p_A(D) \longrightarrow 0;$$

où $i : x \longrightarrow (0, x)$ pour tout $x \in Ker(\beta)$.
Les D-sous-modules de $p_A(D)$ sont exactement les idéaux de l'anneau $p_A(D)$.

Maintenant, on va voir quand l'anneau produit fibré est Noethérien.

***Proposition* 2.1.2**
Les conditions suivantes sont équivalentes :

i. $D(:= \alpha \times_c \beta)$ est un anneau Noethérien.

ii. $Ker(\beta)$ est un D-module Noethérien (avec la structure de D-module induite par p_B) et $p_A(D)$ est un anneau Noethérien.

Le résultat suivant dû à M. Fontana, donne une description complète des idéaux premiers du produit fibré.

***Théorème* 2.1.1**
Soient $X = Spec(A)$, $Y = Spec(B)$, $Z = Spec(C)$, et $W = Spec(D)$. On suppose que β est surjectif. Alors on a :

1. Si $P \in W \setminus V(Ker(p_A))$. Alors il existe un unique idéal premier Q de B tel que $p_B^{-1}(Q) = P$. De plus, $Q \in Y \setminus V(Ker(\beta))$ et $D_P \cong B_Q$, sous l'homomorphisme canonique induit par p_B.

2. *L'homomorphisme continu est fermé de X vers W. Ainsi X est homéomorphe à son image $V(Ker(p_A))$ sous p_A^*.*
3. *La restriction de l'homomorphisme continue p_B^* à $Y \setminus V(Ker(\beta))$ est un homéomorphisme de $Y \setminus V(Ker(\beta))$ à $W \setminus V(Ker(p_A))$ (en particulier, c'est un isomorphisme des parties partiellement ordonnées).*

En particulier, les idéaux premiers de D sont du type $p_A^{-1}(J)$ ou $p_B^{-1}(Q)$, où J est n'importe quel idéal premier de A et Q un idéal premier de B, tel que $Q \nsupseteq Ker(\beta)$.
Un résultat sur les idéaux maximaux du produit fibré.

***Corollaire* 2.1.1**
On suppose que β est surjectif. Soit P un idéal premier de $D(:= \alpha \times_c \beta)$. On a les propriétés suivantes :

1. *Supposons que P contient $Ker(p_A)$. Soit J le seul idéal premier de A tel que $P = p_A^*(J)$ (Théorème 2.1.1 (2)). Alors, P est un idéal maximal de D si et seulement si J est un idéal maximal de A.*
2. *Supposons que P contient $Ker(p_A)$. Soit Q le seul idéal premier de B ($Q \notin V(Ker(\beta))$) tel que $P = p_B^*(Q)$ (Théorème 2.2.1(1)). Alors, P est un idéal maximal de D si et seulement si Q est un idéal maximal de B.*

Preuve
L'assertion 1. est une conséquence du fait que p_A^* est une injection fermée.
2. Supposons que Q est un idéal maximal de B qui ne contient pas $Ker(\beta)$, et soit I un idéal de D tel que $P = p_B^*(Q) \subsetneq I$. Ainsi, on peut trouver un élément $(a, b) \in I \setminus P$, où $a \in A$, $b \in B$ et $\alpha(a) = \beta(b)$. Du choix de (a, b), on a $b \notin Q$; ainsi il existe $k_1 \in B$ et $q_1 \in Q$ tels que $k_1 b + q_1 = 1$, dû au fait que Q est maximal. De plus, puisque $Q \nsupseteq Ker(\beta)$, on peut prendre un élément $x \in Ker(\beta) \setminus Q$ et encore une fois du fait que Q est maximal, on peut trouver $k_2 \in B$ et $q_2 \in Q$ tels que $k_2 x + q_2 = 1$. Donc, on a $kbx + q = 1$, pour certains $k \in B$ et $q \in Q$, ainsi $(1, q) \in P \subset I$. Et puisque $(0, kx) \in D$ on a $(0, kbx) = (0, kx)(a, b) \in I$, et finalement $(0, kbx) + (1, q) = (1, 1) \in I$. Cela prouve que P est un idéal maximal de D.
Inversement, supposons que P est un idéal maximal de D qui ne contient pas $Ker(p_A)$, et soit Q l'unique idéal premier de B tel que $P = p_B^*(Q)$ (Théorème 2.2.1(1)). Si Q n'est pas un idéal maximal de B, on peut trouver un idéal premier Q' de B tel que $Q \subset Q'$. Puisque $p_B^*(Q')$ est un idéal propre de D qui contient l'idéal maximal P, on a $P = p_B^*(Q')$. Contradiction puisque $Q \neq Q'$. ∎

***Corollaire* 2.1.2**
On suppose que β est surjectif. Alors $D(:= \alpha \times_c \beta)$ est un anneau local si et seulement si A est un anneau local et $Ker(\beta) \subseteq J(B)$. En particulier, si A et B sont deux anneaux locaux alors D est un anneau local. De plus, si D est un anneau local et M est le seul idéal maximal de A, alors $\{p_A^{-1}(M)\} = Max(D)$.

Preuve
Il suffit d'appliquer le Corollaire 2.1.1. ∎

2.1.1 Couples d'anneaux partageant un idéal

Dans toute cette partie, (A, B) désigne un couple propre d'anneaux ($A \neq B$), tel que A soit inclus dans B et ayant un idéal I commun non trivial ($I \neq (0)$).
De façon générale, pour définir un couple d'anneaux (A, B) partageant un idéal I, il suffit de se donner un anneau B, un idéal I de B et un sous anneau D du quotient B/I : on définit l'anneau A comme l'ensemble des éléments de B dont la classe modulo I est dans D. On dira alors que A est **l'anneau de la construction** B, I, D ; dans ces conditions, D est isomorphe au quotient A/I et on a un carré cartésien,

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[d] \\ D \arrow[r] & B/I \end{tikzcd}$$

Dans l'étude du couple (A, B) on peut noter, avant toute chose, un résultat tout à fait immédiat.

***Proposition* 2.1.3**
Pour toute partie multiplicative S de A, le couple $(S^{-1}A, S^{-1}B)$ partage l'idéal $S^{-1}I$; en outre, si S rencontre l'idéal I, alors les localisés $S^{-1}A$ et $S^{-1}B$ sont égaux.
En particulier, si B est intègre, alors A et B ont même corps des fractions.

2.2 Extension triviale

`D.D. Anderson, M. Winders; Idealization of a module. J. Commut. Algebra 1 (1):3-56, 2009.`

***Définition* 2.2.1**
Soient A un anneau, E un A-module et $R := A \propto E$ l'ensemble des couples (a, e) muni de l'addition composante par composante et de la multiplication définie par : $(a, e)(b, f) = (ab, af + be)$. R est dit l'anneau extension triviale, ou simplement extension triviale, de A par E.

Notons qu'avec un contre exemple, S. Kabbaj et N. Mahdou ont montré que [[44], Théorème 25.1.(1)] n'est pas toujours vraie ; autrement dit, qu'un idéal quelconque de R n'est pas forcément de la forme $I \propto E$ où I est un idéal de A ; à savoir que pour tout idéal

I de A, $I \propto E$ est un idéal de R (voir [[47], Exemple 2.5]). Un travail considérable de cette notion se trouve dans le livre de S.Glaz [35] et le livre de Huckaba (où R est appelé idéalisation de E par A) [44].

2.2.1 Idéaux et éléments distingués de $R \propto M$

Tout au long de cette section, R est un anneau commutatif unitaire et M un R-module. On détermine les idéaux maximaux, premiers et les idéaux radicaux de $R \propto M$, Ainsi que les éléments unités, idempotents, diviseurs de zéros, et nilpotents de $R \propto M$. On commence par le résultat suivant.

***Théorème* 2.2.1**
Soient R un anneau, I un idéal de R, M un R-module et N un sous module de M. Alors $I \propto N$ est un idéal de $R \propto M$ si et seulement si $IM \subseteq N$. Lorsque $I \propto N$ est un idéal, M/N est un R/I-module et $(R \propto M)/(I \propto N) \cong (R/I) \propto (M/N)$. En particulier, $(R \propto M)/(0 \propto N) \cong R \propto (M/N)$ d'où $(R \propto M)/(0 \propto M) \cong R$. Donc les idéaux de $R \propto M$ contenant $0 \propto M$ sont de la forme $J \propto M$ où J est un idéal de R.

Preuve
Si $I \propto N$ est un idéal, $(R \propto M)(I \propto N) = I \propto (IM + N)$ ce qui donne $IM \subseteq N$. Inversement, si $IM \subseteq N$, M/N est un R/I-module et l'application $f : R \propto M \to (R/I) \propto (M/N)$ définie par $f((r, m)) = (r + I, m + N)$ est un épimorphisme avec $Kerf = I \propto N$. Donc $I \propto N$ est un idéal de $R \propto M$ et $(R \propto M)/(I \propto N) \cong (R/I) \propto (M/N)$.

***Remarque* 2.2.1**
Un idéal quelconque de $R \propto M$ n'est pas forcement de la forme $I \propto M$ où I est un idéal de R, sachant que pour tout idéal I de R, $I \propto M$ est un idéal de $R \propto M$.

***Théorème* 2.2.2**
Soient R un anneau commutatif et M un R-module.

1. *Les idéaux maximaux de $R \propto M$ sont de la forme $\mathcal{M} \propto M$ où $\mathcal{M}$ est un idéal maximal de R. Le radical de Jacobson de $R \propto M$ est $J(R \propto M) = J(R) \propto M$.*
2. *Les idéaux premiers de $R \propto M$ sont de la forme $P \propto M$ où P est un idéal premier de R.*
3. *Les idéaux radicaux de $R \propto M$ sont de la forme $I \propto M$ où I est idéal radical de R ($I = \sqrt{I}$). Si J est un idéal de $R \propto M$, alors $\sqrt{J} = \sqrt{I} \propto M$ où $I = \{r \in R \mid (r, b) \in J$ pour un certain $b \in M\}$ est un idéal de R.*

En particulier, si I est un idéal de R et N un sous-module de M, alors $\sqrt{I \propto N} = \sqrt{I} \propto M$. Par conséquent $Nilp(R \propto M) = Nilp(R) \propto M$.

Preuve
Soit A un idéal radical de $R \propto M$. Alors, $(0 \propto M)^2 = 0 \subseteq A$ par conséquent $0 \propto M \subseteq A$. D'après le Théorème 2.2.1 $A = I \propto M$ pour un certain idéal I de R. De plus $(R \propto M)/(I \propto M) \cong (R/I)$ donne que I est un idéal radical (respectivement idéal premier, idéal maximal) si et seulement si $I \propto M$ l'est. On a $J(R \propto M) = \cap\{\mathcal{M} \propto M \mid \mathcal{M}$ est un idéal maximal de R$\} = (\cap\{\mathcal{M} \mid \mathcal{M}$ est un idéal maximal de R$\}) \propto M = J(R) \propto M$ d'où les résultats de 1. et 2..
3. Soit J un idéal de $R \propto M$. Alors $\sqrt{J} = K \propto M$ pour un certain idéal radical K de R. Soit $I = \{r \in R \mid (r, b) \in J$ pour un certain $b \in M\}$, il est claire que I est un idéal de R. Soit $x \in \sqrt{I}$, alors pour un certain entier n on a $x^n \in I$; d'où $(x^n, b) \in J$. Alors $(x^n, b) \in \sqrt{J} = K \propto M$ $(J \subseteq \sqrt{J})$, par conséquent $x^n \in K$, d'où $x \in K$ puisque K est un idéal radical de R. D'où $\sqrt{I} \propto M \subseteq K \propto M = \sqrt{J}$. Pour l'inclusion inverse, soit $x \in K$. Alors $(x, 0) \in \sqrt{J}$; donc pour un certain entier n on a $(x^n, 0) \in J$, ce qui implique que $x^n \in I$ et par conséquent $x \in \sqrt{I}$.D'où $K \propto M \subseteq \sqrt{I} \propto M$. les résultats restants sont immédiats.

***Remarques* 2.2.1**

1. Soient M un R-module et $\{m_\alpha\} \subseteq M$. Il est claire que $\langle\{m_\alpha\}\rangle = M$ si et seulement si $\langle\{(0, m_\alpha)\}\rangle = 0 \propto M$. Donc, M est de type fini si et seulement si $0 \propto M$ est un idéal de type fini. Si I est un idéal de R, $I(R \propto M) = I \propto IM$. Ainsi, si I est de type fini, $I \propto IM$ l'est aussi. En tout cas, $I \propto IM$ peut être de type fini sans que IM le soit.

2. Posons $A = R \propto M$. Soient n un entier positif, U un sous module de R^n et N un sous module de M^n tels que $UM \subseteq N$; alors $U \propto N$ est un sous module du A-module libre de type fini A^n qui s'identifie à $R^n \propto M^n$.

***Théorème* 2.2.3**
Soient R un anneau commutatif et M un R-module. Alors les unités de $R \propto M$ sont $U(R \propto M) = U(R) \propto M$, et les éléments idempotents de $R \propto M$ sont $Idem(R \propto M) = Idem(R) \propto 0$.

Preuve
Supposons que $(r, m) \in U(R \propto M)$. Donc il existe (s, n) avec $(r, m)(s, n) = (1, 0)$. Par conséquent $rs = 1$, donc $r \in U(R)$. Inversement, supposons que $r \in R$ est une unité, implique qu'il existe $s \in R$ tel que $rs = 1$. Alors $(r, 0)(s, 0) = (1, 0)$ donc $(r, 0)$ est une unité. Pour tout $m \in M$, $(0, m)$ est nilpotent et par conséquent $(r, m) = (r, 0) + (0, m)$ est une unité.
Certainement, si $e \in R$ est idempotent, $(e, 0)$ est idempotent. Inversement, supposons que $(r, m) \in R \propto M$ est idempotent. Alors $(r, m) = (r, m)^2 = (r^2, 2rm)$. Donc $r = r^2$ est idempotent. De plus, $m = 2rm$, donc $rm = 2r^2m = 2rm$ et par conséquent $rm = 0$ d'où $m = 2rm = 0$.
Maintenant on va déterminer les diviseurs de zéro de $R \propto M$.

***Théorème* 2.2.4**
Soient R un anneau commutatif et M un R-module. Alors $Z(R \propto M) = \{(r, m) \mid r \in (Z(R) \cup Z(M)),\ m \in M\}$. Par conséquent $S \propto M$, où $S = R - (Z(R) \cup Z(M))$, est l'ensemble des éléments réguliers (non diviseurs de zéro) de $R \propto M$.

Preuve
Soit $r \in (Z(R) \cup Z(M))$. Si $r \in Z(R)$, il existe $s \in R$ non nul tel que $rs = 0$, donc $(r, 0)(s, 0) = (0, 0)$ et par conséquent $(r, 0) \in Z(R \propto M)$. Si $r \in Z(M)$, il existe $n \in M$ non nul tel que $rn = 0$, donc $(r, 0)(0, n) = (0, 0)$ et par conséquent $(r, 0) \in Z(R \propto M)$. On a, pour tout $m \in M$, $(0, m) \in Nilp(R \propto M)$, donc $(r, m) = (r, 0) + (0, m) \in Z(R \propto M)$ (puisque $Z(R \propto M)$ est l'union d'idéaux premier et $nil(R \propto M)$ est contenu dans tout idéal premier). Inversement, supposons que $(r, m) \in Z(R \propto M)$. Alors $(0, 0) = (r, m)(s, n)$ pour un certain $(s, n) \neq (0, 0)$. Si $s \neq 0$, alors $rs = 0$ et donc $r \in Z(R)$, et si $s = 0$, alors $n \neq 0$ et $rn = 0$, donc $r \in Z(M)$. Dans les deux cas $r \in (Z(R) \cup Z(M))$.

2.2.2 Constructions d'anneaux et propriétés de $R \propto M$

► ***<u>Localisation</u>***

***Théorème* 2.2.5**
Soient R un anneau commutatif et M un R-module.

1. *Soient S une partie multiplicative de R, et N un sous-module de M. Alors $(R \propto M)_{S \propto N}$ est isomorphe à $R_S \propto M_S$. Dans le cas où $N = 0$, l'isomorphisme est simplement $(r, m)/(s, 0) \to (r/s, m/s)$.*
2. *Soit P un idéal premier de R. Alors $(R \propto M)_{P \propto M} \cong R_P \propto M_P$.*
3. *L'anneau total des quotients $T(R \propto M)$ de $R \propto M$ est isomorphe à $R_S \propto M_S$ où $S = R - (Z(R) \cup Z(M))$.*

Preuve

1. L'application $f : (R \propto M)_{S \propto N} \to R_S \propto M_S$ définie par $f((r, m)/(s, n)) = (r/s, (sm - rn)/s^2)$ est l'isomorphisme désiré. (Pour comprendre pourquoi cette application est définie ainsi, il suffit de voir que $(r, m)/(s, n) = (s, -n)(r, m)/(s, -n)/(s, n) = (sr, sm - rn)/(s^2, 0)$).
2. Découle de 1. avec $S = R - P$ et $N = M$.
3. Si $S = R - (Z(R) \cup Z(M))$, $S \propto M$ est l'ensemble des éléments réguliers de $R \propto M$, (théorème 2.1.4). Donc L'anneau total des quotients de $R \propto M$ est $(R \propto M)_{S \propto M}$. Le résultat est induit de 1..

***Théorème* 2.2.6**
Soient R_1 et R_2 deux anneaux commutatifs, et soit M_i un R_i-module, $i = 1, 2$. Alors $(R_1 \times R_2) \propto (M_1 \times M_2) \cong (R_1 \propto M_1) \times (R_2 \propto M_2)$.

Preuve
Il est facile de vérifier que l'application $((r_1, r_2), (m_1, m_2)) \to ((r_1, m_1), (r_2, m_2))$ est un isomorphisme.
▶ Le théorème suivant permet de déterminer quand $R \propto M$ est Noethérien.

***Théorème* 2.2.7**
Soient R un anneau commutatif et M un R-module. Alors $R \propto M$ est Noethérien, si et seulement si R est Noethérien, et M de type fini.

Preuve
Supposons que $R \propto M$ est Noethérien. Alors R est Noethérien (car R est une image de $R \propto M$ par un homomorphisme). Et on a $0 \propto M$ est un idéal de type fini de $R \propto M$ puisque $R \propto M$ est Noethérien. Remarquons que $(0, m_1), \cdots, (0, m_n)$ est une famille génératrice de $0 \propto M$ si et seulement si $m_1, \cdots, m_n$ est une famille génératrice de M. Par conséquent M est un R-module de type fini.
Inversement, supposons que R est Noethérien et M est de type fini. Les idéaux premiers de $R \propto M$ sont de la forme $P \propto M$, qui sont de type fini, d'où $R \propto M$ est Noethérien.

2.3 L'amalgamation d'anneaux

M. D'Anna, C.A. Finocchiaro, M. Fontana, ***Amalgamated algebras along an ideal***, in: Commutative Algebra and Applications, Proceedings of the Fifth International Fez Conference on Commutative Algebra and Applications, Fez, Morocco, W. de Gruyter Publisher, Berlin, 2009, pp. 155-172.

2.3.1 Définition et exemples

***Définition* 2.3.1**
Soient A et B deux anneaux commutatifs et unitaires, soit J un idéal de B, et soit $f : A \longrightarrow B$ un homomorphisme d'anneaux. On appelle l'amalgamation de A et B suivant J et respectant f le sous anneau de $A \times B$ défini par :

$$A \bowtie^f J = \{(a, f(a) + j) |\ a \in A, j \in J\}$$

Soient A un anneau commutatif unitaire et R un A-module. l'anneau $A\dot{\oplus}R$ est l'ensemble des couple dans $A \times B$ muni de l'addition composante par composante et de la multiplication définie par $(a, x)(a', x') = (aa', ax' + a'x + xx')$, pour tout $a, a' \in A$ et $x, x' \in R$.
Soit $f : A \longrightarrow B$ un homomorphisme d'anneaux, et soit J un idéal de B. Noter que f induit sur J une structure naturelle de A-module définie par $a.j := f(a)j$, pour tout $a \in A$ et $j \in J$. Donc on peut considérer $A\dot{\oplus}J$.

***Lemme* 2.3.1**
1) *$A\dot{\oplus}J$ est un anneau.*
2) *L'application $f^{\bowtie} : A\dot{\oplus}J \longrightarrow A \times B$ défini par $(a, j) \longrightarrow (a, f(a) + j)$ pour tout $a \in A$ et $j \in J$, est un homomorphisme injectif d'anneaux.*
3) *L'application $\iota_A : A \longrightarrow A\dot{\oplus}J$ (respectivement $\iota_J : J \longrightarrow A\dot{\oplus}J$), défini par $a \longrightarrow (a, 0)$ pour tout $a \in A$ (respectivement, par $j \longrightarrow (0, j)$ pour tout $j \in J$), est un homomorphisme injectif d'anneaux (respectivement, est un homomorphisme injectif de A-module).*
4) *Soit $p_A : A\dot{\oplus}J \longrightarrow A$ la projection canonique définie par $(a, j) \longrightarrow a$ pour tout $a \in A$ et $j \in J$. On a la suite exacte suivante :*

$$0 \longrightarrow J \xrightarrow{\iota_J} A\dot{\oplus}J \xrightarrow{p_A} A \longrightarrow 0$$

On a $A \bowtie^f J := f^{\bowtie}(A\dot{\oplus}J)$ et on pose $\Gamma(f) = \{(a, f(a))|a \in A\}$. Clairement, $\Gamma(f) \subseteq A \bowtie^f J$ et $A \bowtie^f J \cong A\dot{\oplus}J$.

***Exemple* 2.3.1**
Un cas particulier de la construction de l'amalgamation est **la duplication amalgamé d'un anneau** ([19],[24],[25]). Soit A un anneau et E un sous A-module de l'anneau total des fractions de A noté $T(A)$ tel que $E.E \subseteq E$. La duplication amalgamé de A le long d'un sous A-module E, noté $A \bowtie E$, est le sous anneau de $A \times T(A)$ défini par

$$R \bowtie E = \{(a, a + e)|a \in A \text{ et } e \in E\}$$

Dans ce cas, on a E est un idéal du sous anneau $B = (E : E) = (\{z \in T(A) \mid zE \subseteq E\}$ de $T(A)$. Si $\iota : A \longrightarrow B$ est l'injection canonique, alors $A \bowtie^{\iota} E$ coïncide avec $A \bowtie E$, la duplication amalgamé de A le long de E.
En particulier, si $E = I$ un idéal de A, Dans ce cas on prend $B = A$ et on considère l'application identité $id := id_A : A \longrightarrow A$. Par conséquence, on obtient $A \bowtie I$, la duplication amalgamé le long de I, coïncide avec $A \bowtie^{id} I$.

***Exemple* 2.3.2**
Soient $A \subset B$ deux anneaux et $X := \{X_1, X_2, ...X_n\}$ des indéterminées sur B.
On a $A + XB[X] := \{h \in B[X]/h(0) \in A\}$ est un sous anneau de B.

Soient $J = XB[X]$ un idéal de $B[X]$, et $\sigma : A \hookrightarrow B[X]$ l'injection canonique. Alors on a :

$$A \bowtie^{\sigma} J \cong A + XB[X].$$

Dans la suite nous étudierons quelques propriétés algébriques de l'anneau $A \bowtie^f J$ en relation avec A, B, et f.

2.3.2 Produit fibré et Amalgamation d'anneaux

***Définition* 2.3.2**
Soient $\alpha : A \longrightarrow C$, $\beta : B \longrightarrow C$ des homomorphisme d'anneaux. Alors $D = \alpha \times_C \beta = \{(a,b) \in A \times B \mid \alpha(a) = \beta(b)\}$ est un sous-anneau de $A \times B$ appelé le produit fibré de α et β.
Dans ce qui suit, nous désignerons par p_A (Respectivement, p_B) la restriction à $\alpha \times_C \beta$ de la projection de $A \times B$ sur A (respectivement B).

***Proposition* 2.3.1**
Soient $f : A \longrightarrow B$ un homomorphisme d'anneau et J un idéal de B. Si $\pi : B \longrightarrow B/J$ est la projection canonique et $\check{f} = \pi o f$, alors $A \bowtie^f J = \check{f} \times_{B/J} \pi$.

Preuve
un résultat direct de la définition.

***Proposition* 2.3.2**
Soient A, B, C, α, β comme dans la définition 2.3.2, et soit $f : A \longrightarrow B$ un homomorphisme d'anneaux. Les conditions suivantes sont équivalente :
1) *Il existe un J idéal de B tel que $A \bowtie^f J$ est le produit fibré de α et β.*
2) *α est la composition $\beta \circ f$.*

Preuve
Supposons que la condition (1) est vérifié, et soit a un élément de A. Donc, $(a, f(a)) \in A \bowtie^f J$ et, par hypothèse, on a $\alpha(a) = \beta(f(a))$. D'où on obtient la condition (2).
Inversement, supposons que $\alpha = \beta \circ f$. On veut montrer que l'anneau $A \bowtie^f ker(\beta)$ est le produit fibré de α et β. L'inclusion $A \bowtie^f ker(\beta) \subseteq \alpha \times_C \beta$ est claire. D'autre part, soit $(a,b) \in \alpha \times_C \beta$. Par hypothèse, on a $\beta(b) = \alpha(a) = \beta(f(a))$. Ce qui implique que $b - f(a) \in ker(\beta)$, et d'où $(a,b) = (a, f(a) + k)$, pour un certain $k \in ker(\beta)$. Par conséquent, $A \bowtie^f ker(\beta) = \alpha \times_C \beta$, et donc la condition (1) est vraie.
Maintenant, rappelons qu'un homomorphisme d'anneau $r : B \longrightarrow A$ est appelé une rétraction d'anneau s'il existe un homomorphisme d'anneaux $\iota : A \longrightarrow B$ tel que $r \circ \iota = id_A$. Dans cette situation, ι est nécessairement injectif, r est nécessairement surjectif, et A est dit une rétracte de B.

***Exemple* 2.3.3**
Si $r : B \longrightarrow A$ un rétraction d'anneaux et $\iota : A \hookrightarrow B$ un injection d'anneaux tel que $r \circ \iota = id_A$, alors B est naturellement isomorphe à $A \bowtie^f ker(\beta)$. En effet, il est facile de vérifie, que $B = \iota(A) + ker(r)$ et que $\iota^{-1}(ker(r) = \{0\}$

***Remarque* 2.3.1**
Soient $f : A \longrightarrow B$ un homomorphisme d'anneaux et J un idéal de B. Alors A est une rétracte de $A \bowtie^f J$ et l'application $\pi_A : A \bowtie^f J \longrightarrow A$, défini par $(a, f(a) + j) \longrightarrow a$, est une rétraction d'anneaux, car l'application $\iota : A \longrightarrow A \bowtie^f J$, $a \longrightarrow (a, f(a))$, est un

homomorphisme injectif tel que $\pi_A \circ \iota = id_A$.

***Proposition* 2.3.3**
Soient A, B, C, α, β,p_A,p_B comme dans la définition 2.3.2. Alors, les assertions suivantes équivalentes :
***1)** p_A : $\alpha \times_C \beta \longrightarrow A$ est une rétraction d'anneau.*
***2)** Il existe un idéal J de B et il existe un homomorphisme d'anneaux f : $A \longrightarrow B$ tels que $\alpha \times_C \beta = A \bowtie^f J$.*

Preuve
Soit $D = \alpha \times_C \beta$. Supposons que la condition (1) est vraie et soit $\iota : A \hookrightarrow D$ une injection d'anneaux tel que $p_A \circ \iota = id_A$. Si on considère l'homomorphisme d'anneaux $f = p_B \circ \iota$, alors par la définition du produit fibré, on a $\beta \circ f = \beta \circ p_B \circ \iota = \alpha \circ p_A \circ \iota = \alpha \circ id_A = \alpha$. D'où on obtient la condition (2) en appliquant la proposition 2.3.2. Inversement, soit f : $A \longrightarrow B$ un homomorphisme d'anneaux tel que $D = A \bowtie^f J$, pour un certain idéal J de B. Par la remarque 2.3.1 la projection de $A \bowtie^f J$ dans A est un rétraction d'anneaux.■

***Remarque* 2.3.2**
Soient f, g : $A \longrightarrow B$ deux homomorphismes d'anneaux et J un idéal de B. On peut trouver $A \bowtie^f J = A \bowtie^g J$, avec $g \neq f$. En faite, il facile de vérifier que $A \bowtie^f J = A \bowtie^g J$ si et seulement si $f(a) - g(a) \in J$, pour tout $a \in A$.

***Proposition* 2.3.4**
Avec les notations de la définition 2.3.2, On a :
***1)** si $D = \alpha \times_C \beta$ est réduit alors,*
$Nilp(A) \cap ker(\alpha) = \{0\}$ et $Nilp(B) \cap ker(\beta) = \{0\}$.
***2)** Si l'une des conditions suivante est vérifiée :*
***(a)** A est réduit et $Nilp(B) \cap ker(\beta) = \{0\}$.*
***(b)** B est réduit et $Nilp(A) \cap ker(\alpha) = \{0\}$.*
Alors D est réduit.

Preuve
1) Supposons que D est réduit. Par symétrie, il suffit de montrer que $Nilp(A) \cap ker(\alpha) = \{0\}$. Si $a \in Nilp(A) \cap ker(\alpha)$, alors $(a, 0)$ est un élément nilpotent de D, ce qui donne $a = 0$.
2) Par symétrie entre les deux conditions (a) et (b), il est suffisante de montrer que si la condition (a) est satisfaite alors D est réduit. En effet, Soit (a, b) un élément nilpotent de D. D'où $a = 0$ car $a \in nilp(A)$ et A est réduit. Donc on a $(a, b) = (0, b) \in nilp(D)$, ce qui implique que $b \in Nilp(B) \cap ker(\beta) = \{0\}$.

***Proposition* 2.3.5**
Avec les mêmes notations de la définition 2.3.2. Les conditions suivantes sont équivalentes :
***1)** $D = \alpha \times_C \beta$ est un anneau Noethérien.*

2) $ker(\beta)$ est un D-module Noethérien (avec la structure naturelle de D-module induit par p_B) et $p_A(D)$ est un anneau Noethérien.

Preuve
Il est facile de voir que $Ker(p_A) = 0 \times ker(\beta)$. D'où, On a la suite exacte courte suivante :

$$0 \longrightarrow ker(\beta) \xrightarrow{i} D \xrightarrow{p_A} p_A(D) \longrightarrow 0$$

où i est l'injection canonique de D-module (définie par $x \longrightarrow (x, 0)$ pour tout $x \in ker(\beta)$). Par [4, Proposition 6.3], D est un anneau Noethérien si et seulement si $ker(\beta)$ et $p_A(D)$ sont des D-modules Noethérien. Le résultat devient immédiate, car les sous D-modules de $p_A(D)$ sont exactement les idéaux de l'anneau $p_A(D)$.

***Remarque* 2.3.3**
Si β est surjectif, alors p_A est aussi surjectif et donc $p_A(D) = A$. Dans ce cas, la proposition 2.3.5 devient, D est Noethérien si et seulement si $ker(\beta)$ est un D-module Noethérien et A est un anneau Noethérien.

2.3.3 L'anneau $A \bowtie^f J$: quelques propriétés algébriques

On commence par quelques résultats immédiate de la définition de l'anneau
$A \bowtie^f J$:

***Proposition* 2.3.6**
Soient $f : A \longrightarrow B$ un homomorphisme d'anneaux, J un idéal de B et $A \bowtie^f J := \{(a, f(a) + j) \mid a \in A, j \in J\}$.

- **(1)** *Soit $\imath := \imath_{A,f,J} : A \longrightarrow A \bowtie^f J$ l'homomorphisme d'anneaux naturel défini par $\imath(a) := (a, f(a)), \forall a \in A,$ alors $\imath$ est un prolongement qui fait de $A \bowtie^f J$ une extension de A (avec $\Gamma(f) := \{(a, f(a)) \mid a \in A\}$ est un sous-anneau de $A \bowtie^f J$.)*
- **(2)** *Soient I un idéal de A et $I \bowtie^f J := \{(i, f(i) + j) \mid i \in I, j \in J\}$.Alors $I \bowtie^f J$ est un idéal de $A \bowtie^f J$, la composition des homomorphismes canoniques $A \hookrightarrow A \bowtie^f J \twoheadrightarrow \frac{A \bowtie^f J}{I \bowtie^f J}$ est un homomorphisme d'anneaux surjectif et son noyau coïncide avec I.*
  Par conséquent, nous avons l'isomorphisme canonique suivant :
  $$\frac{A \bowtie^f J}{I \bowtie^f J} \cong \frac{A}{I}.$$
- **(3)** *Soient $p_A : A \bowtie^f J \longrightarrow A$ et $p_B : A \bowtie^f J \longrightarrow B$ les projections naturelles de $A \bowtie^f J$ ($\subset A \times B$) respectivement dans A et dans B . Alors p_A est surjective et $Ker(p_A) = \{0\} \times J$.*
  De plus, $p_B(A \bowtie^f J) = f(A) + J$ et $Ker(p_B) = f^{-1}(J) \times \{0\}$. Nous avons alors les isomorphismes suivants :
  $$\frac{A \bowtie^f J}{\{0\} \times J} \cong A \text{ et } \frac{A \bowtie^f J}{f^{-1}(J) \times \{0\}} \cong f(A) + J$$

(4) *Soit* $\gamma : A \bowtie^f J \longrightarrow (f(A)+J)/J$ *l'homomorphisme d'anneaux naturel défini par* $(a, f(a)+j) \mapsto f(a)+J$. *Alors* γ *est surjective et* $Ker(\gamma) = f^{-1}(J) \times J$. *Ainsi,nous avons l'isomorphisme naturel suivant :*

$$\frac{A \bowtie^f J}{f^{-1}(J) \times J} \cong \frac{f(A)+J}{J}.$$

En particulier,lorsque f *est surjective,on a :*

$$\frac{A \bowtie^f J}{f^{-1}(J) \times J} \cong \frac{B}{J}.$$

L'anneau $B_\diamond$ (qui est un sous anneau de B) a un rôle très important dans la structure de $A \bowtie^f J$. Pour l'instant, si $f^{-1} = 0$, on a $B_\diamond = A \bowtie^f J$ (la proposition 2.3.6).

***Proposition* 2.3.7**
Avec les notations de la proposition 2.3.6, supposons que $J \neq \{0\}$. *Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

(1) $A \bowtie^f J$ *est un domaine.*

(2) $f(A) + J$ *est un domaine et* $f^{-1}(J) = 0$

En particulier, si B *est un domaine et* $f^{-1}(J) = 0$, *alors* $A \bowtie^f J$ *est un domaine.*

Preuve
(2) $\Rightarrow$ (1) est claire, car $f^{-1}(J) = 0$ implique que $A \bowtie^f J = f(A) + J$ (proposition 2.3.6(3)).
Supposons que la condition (1) est bien vérifié. Si il existe un élément $a \in A \setminus 0$ tel que $f(a) \in J$, alors $(a, 0) \in A \bowtie^f J \setminus (0, 0)$. D'où si j est un élément non nul de J, alors on a $(a, 0)(0, j) = (0, 0)$, une contradiction. Donc $f^{-1}(J) = 0$. Le résultat donc est immédiate car $A \bowtie^f J = f(A) + J$ (proposition 2.3.6(3)).

***Remarque* 2.3.4**
1) Notons que, Si $A \bowtie^f J$ est un domaine , alors A est un domaine aussi, par la proposition 2.3.6(1).
2) Soit $B = A$, $f = id_A$ et $J = I$ un idéal de A. Dans ce cas, $A \bowtie^{id_A} J$ coïncide avec la duplication amalgamé de A le long de I et il n'est jamais un domaine, sauf si $I = 0$ et A est domaine.

***Proposition* 2.3.8**
Avec les notations de la proposition 2.3.6. les conditions suivantes sont équivalentes :

(1) $A \bowtie^f J$ *est un anneau réduit.*

(2) A *est un anneau réduit et* $Nilp(B) \cap J = 0$

En particulier, si A *et* B *sont réduit, alors* $A \bowtie^f J$ *est réduit; inversement, si* J *est un idéal radical de* B *et* $A \bowtie^f J$ *est réduit, alors* A *et* B *sont réduit.*

Preuve
D'après la proposition 2.3.4(2 a), on déduit facilement avec les notations de la proposition 2.3.1 que (2) $\Rightarrow$ (1), car dans ce cas on a $ker(\pi) = J$.
(2) $\Rightarrow$ (1) par la proposition 2.3.4(1), il suffit de monter que si $A \bowtie^f J$ est réduit, alors A est l'est aussi. En effet, si $a \in Nilp(A)$, alors $(a, f(a)) \in Nilp(A \bowtie^f J)$. Le résultat est donc trivial.
La première partie de la dernière assertion est évident. Pour la deuxième partie, on a $\{0\} = Nilp(B) \cap J = Nilp(B)$ (car J est un idéal radical, et donc $Nilp(B) \subseteq J$). Par conséquent, B est un anneau réduit.

***Remarques* 2.3.1**

1) Notons que, Si $B = A$, $f = id_A$, et $J = I$ un idéal de A, on a $A \bowtie I$ est réduit si et seulement si A est réduit.

2) La dernière proposition implique que la propriété d'être réduit pour $A \bowtie^f J$ est indépendante de la nature de f.

3) Si A et $f(A) + J$ sont réduit, alors $A \bowtie^f J$ est anneau réduit, par la proposition 2.3.8. Mais le sens inverse n'est pas en général vrai. En effet, Soient $A = Z, B = Z \times (Z/4Z), f : A \longrightarrow B$ un homomorphisme d'anneaux tel que $f(n) = (n, [n]_4)$, pour tout $n \in Z$ (où $[n]_4$ désigne la classe de n modulo 4). Si on prend $J = Z \times \{[0]_4\}$, alors $J \cap Nilp(B) = \{0\}$, et d'où $A \bowtie^f J$ est un anneau réduit, mais $(0, [2]_4) = (2, [2]_4) + (-2, [0]_4)$ est un élément nilpotent non nul de $f(A) + J$.

***Proposition* 2.3.9**
Avec les notations de la proposition 2.3.6. Les conditions suivantes sont équivalentes :
1) *$A \bowtie^f J$ est un anneau Noethérien.*
2) *A et $f(A) + J$ sont des anneaux Noethérien.*

Preuve
(2) $\Rightarrow$ (1) Rappelons que $A \bowtie^f J$ est le produit fibré de l'homomorphisme d'anneau $\check{f} : A \longrightarrow B/J$ (défini par $a \longrightarrow f(a) + j$) et la projection canonique $\pi : B \longrightarrow B/J$. Comme la projection $p_A : A \bowtie^f J \longrightarrow A$ est surjective (proposition 2.3.6(3)), A est un anneau Noethérien d'après la proposition 2.3.5, il suffit de montrer que $J(= ker(\pi)$, avec la structure de $A \bowtie^f J$-module induit par p_B, est Noethérien. Mais ceci est facile, car tout sous $A \bowtie^f J$-module de J est un idéal de l'anneau Noethérien $f(A) + J$.
(1) $\Rightarrow$ (2) C'est une conséquence immédiate de la proposition 2.3.6(3).

***Remarque* 2.3.5**
Notons que, dans le cas où $B = A$, $f = id_A$, et $J = I$ un idéal de A, on a $A \bowtie I$ Noethérien si et seulement si A est Noethérien.

***Proposition* 2.3.10**
Avec les notations de la proposition 2.3.6, supposons que l'une des conditions suivantes est satisfaite :

a) *J est un A-module de type fini (par la structure naturelle induit par f).*
b) *J est un A-module Noethérien (par la structure naturelle induit par f).*
c) *$f(A) + J$ est un A-module Noethérien (par la structure naturelle induit par f)*
d) *f est un homomorphisme fini.*
Alors $A \bowtie^f J$ est un anneau Noethérien si et seulement si A est Noethérien.

***Remarque* 2.3.6**
Soit $f : A \longrightarrow B$ un homomorphisme d'anneaux. Alors f est dit un homomorphisme fini s'il existe une famille fini $\{b_1, b_2, ..., b_n\}$ de B telle que pour tout élément $b \in B$ on a $b = \sum_{i=1}^{n} f(a_i)b_i$ avec $a_i \in A$.

Preuve
Clairement, si $A \bowtie^f J$ est Noethérien, alors A est un anneau Noethérien, car il est isomorphe à $A \bowtie^f J/(\{0\} \times J)$ (proposition 2.3.6(3)).
Inversement, Supposons que A est un anneau Noethérien. Dans ce cas il est évident de vérifié que les conditions $(a), (b)$ et (c) sont équivalentes [[4], Proposition 6.2, 6.3, et 6.5]. De plus, (d) implique (a), car J est un sous A-module de B, et B est un A-module Noethérien d'après la condition (d) [[4], Proposition 6.5].
Maintenant, il suffit de monter que $A \bowtie^f J$ est Noethérien si A est Noethérien et la condition (c) est vraie. Si $f(A) + J$ est un A-module Noethérien alors $f(A) + J$ est un anneau Noethérien (car tout idéal de $f(A) + J$ est un sous A-module de $f(A) + J$). La conclusion découle de la proposition 2.3.9((2) $\Rightarrow$ (1)).

***Proposition* 2.3.11**
Avec les même notations de la proposition 2.3.6 et 2.3.1. Si B est un anneau Noethérien et l'homomorphisme d'anneaux $\check{f} : A \longrightarrow B/J$ est fini, alors $A \bowtie^f J$ est un anneau Noethérien si et seulement si A est Noethérien.

Preuve
Si $A \bowtie^f J$ est Noethérien nous savons toujours que A est Noethérien.
Donc il reste à montrer que si A et B sont des anneaux Noethérien et $\check{f}$ est fini, alors $A \bowtie^f J$ est un anneau Noethérien. Mais ce résultat découle immédiatement de [29, Proposition 1.8].

***Proposition* 2.3.12**
Soit $A \subseteq B$ une extension d'anneaux et $\boldsymbol{X} := \{X_1, ..., X_n\}$ un ensemble fini des indéterminées sur B, Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

1) *$A + B[\boldsymbol{X}]$ est un anneau Noethérien.*

2) *$A + B[[\boldsymbol{X}]]$ est un anneau Noethérien.*

3) *A est un anneau Noethérien et $A \subseteq B$ est une extension finie d'anneaux.*

Les deux propositions suivantes donnent une caractérisation pour les éléments nilpotents et les éléments idempotents de $A \bowtie^f J$.

***Proposition* 2.3.13 ([18], lemme 2.5)**
Soient $f : A \longrightarrow B$ un homomorphisme d'anneaux et J un idéal de B telle que $Idem(B) \cap J = \{0\}$. Alors $Idem(A \bowtie^f J) = \{(e, f(e)|e \in Idem(A)\}$

Preuve
Soit $(e, f(e) + j)$ un élément idempotent de $A \bowtie^f J$. Il est claire que e doit être un élément idempotent de A. D'autre part, $(f(e)+j)^2 = f(e)+j$. D'où, $j - j^2 = 2f(e)j$. Donc, $f(e)(j - j^2) = 2f(e)^2 j = 2f(e)j$. Par conséquent, $-f(e)j^2 = f(e)j$. D'où, $(f(e)j)^4 = (f(e)j^2)^2 = (-f(e)j)^2 = (f(e)j)^2$. Donc, $f(e)j^2 = (f(e)j)^2 \in idem(B) \cap J = \{0\}$. D'où, $f(e)j = -f(e)j^2 = 0$. Par conséquent, $j^2 = j$. Ce qui implique que $j \in idem(B) \cap J = \{0\}$. D'où, $j = 0$ et $Idem(A \bowtie^f J) \subseteq \{(e, f(e)|e \in Idem(A)\}$. L'inclusion inverse est claire.

***Proposition* 2.3.14 ([18], lemme 2.10)**
Soient $f : A \longrightarrow B$ un homomorphisme d'anneaux et J un idéal de B. Alors :
$Nilp(A \bowtie^f J) = \{(a, f(a) + j)|a \in Nilp(A),$ et $j \in Nilp(B) \cap J\}$.

Preuve
Considérons $(a, f(a) + j) \in Nilp(A \bowtie^f J)$. donc, il existe un entier positif n tel que $(a, f(a) + j)^n = 0$. D'où, $a \in Nilp(A)$ et $f(a) \in Nilp(B)$. D'autre part, $(f(a) + j)^n = 0$ donne $f(a) + j \in Nilp(B)$. Donc $j \in Nilp(B)$ car $f(a) \in Nilp(B)$. Par conséquent, $j \in Nilp(B) \cap J$.
Inversement, Soient $a \in Nilp(A)$ et $j \in Nilp(B) \cap J$. Il est claire que $f(a) \in Nilp(B)$. D'où, $f(a) + j \in Nilp(B)$. Par conséquent, $(a, f(a) + j)$ est un élément nilpotent de $A \bowtie^f J$.

2.3.4 Les idéaux premiers et maximaux de l'anneau $A \bowtie^f J$

Tous les résultats de cette partie se trouve dans l'article [22].
Soit $f : A \longrightarrow B$ un homomorphisme d'anneaux, et posons $X = spect(A), Y = spect(B)$. Notons $f^* : Y \longrightarrow X$ l'application fermée naturellement associé à f.(**i.e** $f^*(Q) = f^{-1}(Q)$ pour tout idéal premier Q de Y). Soit S un sous-ensemble de A. Alors, $V_X(S)$, ou simplement $V(S)$, désigne le sous-espace fermé de X, formé de tous les idéaux premiers de A contenant S.

***Lemme* 2.3.2 ([29], Théorème 1.4)**
Avec les mêmes notations de la définition 2.3.2. Posons $X = spect(A), Y = spect(B), Z = spect(C)$, et $W = spect(D)$. Supposons que β est surjectif. Alors Nous avons les résultats suivants :

1) *Si $H \subseteq W \setminus V(ker(p_A))$, alors il existe un unique idéal premier Q de B tel que $p_B^{-1}(Q) = H$. De plus, $Q \in Y \setminus V(ker(\beta))$ et $D_H \cong B_Q$, sous l'homomorphisme canonique induit par p_B.*

2) *L'application continue p_A^* est fermé de X dans W. Ainsi X est homéomorphe à son image , $V(ker(p_A))$, sous p_A^*.*

3) *La restriction de l'application continue p_B^* à $Y \setminus V(ker(\beta))$ est un homéomorphisme de $Y \setminus V(ker(\beta))$ à $W \setminus V(ker(p_A))$.*
En particulier, Les idéaux premiers de D sont de type $p_A^{-1}(P)$ ou $P_B^{-1}(Q)$, où P est un idéal premier de A et Q est un idéal premier de B, avec $Q \not\supseteq ker(\beta)$.

Le corollaire suivant est un résultat direct du lemme 2.3.2 :

***Corollaire* 2.3.1**
Avec les notations de la définition 2.3.2, supposons que β est surjectif. Soit H un idéal premier de D.

1) *Supposons que H contient $ker(p_A)$. Soit P l'unique idéal premier de A tel que $H = p_A^*(P)$. Alors H est un idéal maximal de D si et seulement si P est un idéal maximal de A.*

2) *Supposons que H ne contient pas $ker(p_A)$. Soit Q l'unique idéal premier de B (Q ne contient pas $ker(\beta)$) tel que $H = p_B^*(Q)$. Alors H est un idéal maximal de D si et seulement si Q est un idéal maximal de B.*

3) *D est un anneau local si et seulement si A est un anneau local et $ker(\beta) \subseteq Jac(B)$. De plus si D est un anneau local et M est l'unique idéal maximal de A, alors $\{p_A^{-1}(M)\} = Max(D)$*

A l'aide de tous ces résultats, on peut donc décrire la structure du spectre premier de l'anneau $A \bowtie^f J)$:

***Corollaire* 2.3.2**
Avec les notations de la proposition 2.3.6. Soit $X = spect(A), Y = spect(B), W = spect((A \bowtie^f J))$, et $J_0 = \{0\} \times J$. Pour tout $P \in X$ et $Q \in Y$ posons :

$$\begin{aligned} P'^f &:= P \bowtie^f J = \{(p, f(p) + j) \mid p \in P, j \in J\}; \\ \overline{Q^f} &:= \{(a, f(a) + j) \mid a \in A, j \in J, f(a) + j \in Q\}. \end{aligned}$$

Alors,nous avons les propriétés suivantes :

(1) *L'application $P \mapsto P'^f$ est un plongement fermé de X dans W. Ainsi son image, qui coïncide avec $V(J_0)$, est homéomorphe à X.*

(2) *L'application $Q \mapsto \overline{Q^f}$ est un homéomorphisme de $Y \setminus V(J)$ sur $W \setminus V(J_0)$.*

(3) *Les idéaux premiers de $A \bowtie^f J$ sont du type P'^f ou $\overline{Q^f}$, pour P variant en X et Q dans $Y \setminus V(J)$.*

***Corollaire* 2.3.3**
Par les notations du corollaire 2.3.2.

1) *Soit $P \in X$. Alors P'^f est un idéal maximal de $(A \bowtie^f J)$ si et seulement si P est un idéal maximal de A.*

2) *Soit Q un idéal premier de B qui ne contient pas J. Alors $\overline{Q^f}$ est un idéal maximal de $(A \bowtie^f J)$ si et seulement si Q est un idéal maximal de B.*

En particulier, $Max((A \bowtie^f J)) = \{P'^f | P \in Max(A)\} \cup \{\overline{Q^f} | Q \in Max(B) \setminus V(J)\}$.

3) *$(A \bowtie^f J)$ est un anneau local si et seulement si A est un anneau local et $J \subseteq Jac(B)$*

La proposition suivante décrit la localisation de l'anneau $(A \bowtie^f J)$ par tous ses idéaux premiers.

***Proposition* 2.3.15**

Avec les notations du corollaire 2.3.2. Nous avons les résultats suivants :

1) *Pour tout idéal $Q \in Y \setminus V(J)$, l'anneau $(A \bowtie^f J)_{\overline{Q^f}}$ est canoniquement isomorphe à B_Q.*

2) *Pour tout idéal $P \in X \setminus V(f^{-1}(J))$, la localisation $(A \bowtie^f J)_{P'^f}$ est canoniquement isomorphe à A_P.*

3) *Soit P un idéal premier de A contient $f^{-1}(J)$. Considérons la partie multiplicative $S := S_p(f, P, J) = f(A \setminus P) + J$ de B et posons $B_S = S^{-1}B$ et $J_S = S^{-1}J$. Si $f_P : A_P \longrightarrow B_S$ est l'homomorphisme d'anneaux induit par f, alors l'anneau $(A \bowtie^f J)_{P'^f}$ est canoniquement isomorphe à $A_P \bowtie^{f_P} J_S$.*

2.3.5 L'extension des idéaux de A à $A \bowtie^f J$

***Proposition* 2.3.16**

Avec les notations de la proposition 2.3.6 et du corollaire 2.3.2. Nous avons les propriétés suivantes :

1) *Si I (resp. H) est un idéal de A (resp. $f(A) + J$) tel que $f(I)J \subseteq H \subseteq J$, alors $I \bowtie^f H = \{(i, f(i) + h) \mid i \in I, h \in H\}$ est un idéal de $A \bowtie^f J$*

2) *Si I est un idéal de A alors l'extension $I(A \bowtie^f J)$ de I à $A \bowtie^f J$ coïncide avec $I \bowtie^f (f(I)B)J = \{(i, f(i) + \beta) \mid i \in I, \beta \in (f(I)B)J\}$.*

3) *Si I est un idéal de A tel que $f(I)B = B$, alors $I(A \bowtie^f J) = I'^f = \{(i, f(i) + j) \mid i \in I, j \in J\} = I \bowtie^f J$.*

Preuve

1) évident.

2) Soit $I_0 = I \bowtie^f (f(I)B)J$ En appliquant (1) à $H = (f(I)B)J$ on déduit que I_0 est un idéal de $A \bowtie^f J$ et , par définition, $I_0 \supseteq \iota(I) = \{(i, f(i) + \beta) \mid i \in I\}$. Soit L un idéal de $A \bowtie^f J$ qui contient $\iota(I)$, et soit $(i, f(i) + \beta) \in I_0$ (où $i \in I$, et $\beta \in (f(I)B)J$). Par conséquent, on peut trouver $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in I$, $b_1, b_2, ...b_n \in J$. tel que $\beta = \sum_{k=1}^{n} f(\alpha_k)b_k$. Comme $(i, f(i), (\alpha_1, f(\alpha_1), ..., (\alpha_n, f(\alpha_n)) \in \iota(I) \subseteq L$, alors

$$(i, f(i) + \beta) = (i, f(i)) + \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k, f(\alpha_k)(0, b_k) \in L$$

et donc $I_0 \subseteq L$.
3) Découle immédiatement de (2).

2.4 La bi-amalgamation le long d'un idéal

S. Kabbaj K. Louartiti and M. Tamekkante, *Bi-amalgamated algebras along ideals*, COMMUTATIVE ALGEBRA 9(1),(2017), 65-87.

Soient $\alpha : A \to C$, $\beta : B \to C$ et $f : A \to B$ des homomorphismes d'anneaux, dans le chapitre précédent l'amalgamation d'anneaux été étudiée sous la forme d'un produit fibré $\alpha \times \beta$ tel que $\alpha = \beta o f$.
dans ce chapitre l'intérêt est d'étudier une nouvelle construction appelée bi-amalgamations, qui se pose comme produit fibré $\alpha \times \beta$ tel que le carré suivant d'homomorphismes d'anneaux :

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ \big\downarrow{\scriptstyle g} & & \big\downarrow{\scriptstyle \alpha} \\ C & \xrightarrow{\beta} & D \end{array}$$

est commutatif avec $\alpha o \pi_B(\alpha \times \beta) = \alpha o f(A)$, où π_B la projection canonique de $B \times C$ vers B.

2.4.1 La bi-amalgamation

***Définition* 2.4.1**
Soient $f : A \to B$ et $g : A \to C$ deux homomorphismes d'anneaux, et soient J et J' deux idéaux de B et C respectivement, tel que $f^{-1}(J) = g^{-1}(J')$, La bi-amalgamation de A avec (B, C) le long de (J, J') en respectant (f, g) est le sous-anneau de $(B \times C)$ définie par :

$$A \bowtie^{f,g} (J, J') := \{(f(a) + j, g(a) + j') | a \in A, (j, j') \in J \times J'\}$$

Cette nouvelle construction est une généralisation de l'amalgamation d'anneaux et a eu ses origines par S. Kabbaj, K. Louartiti et M. Tamekkante en 2014.
L'exemple suivant montre cette généralisation :

***Exemple* 2.4.1**
Soient $f : A \to B$ un homomorphisme d'anneau et J un idéal de B, on pose $I := f^{-1}(J)$ et $t := id_A$.

donc :

$$\begin{aligned} A \bowtie^{t,f} (I, J) &= \{(a + i, f(a) + j) | a \in A, (i, j) \in I \times J\} \\ &= \{(a + i, f(a + i) + j - f(i)) | a \in A, (i, j) \in I \times J\} \\ &= \{(a, f(a) + j) | a \in A, j \in J\} \\ &= A \bowtie^{f} J. \end{aligned}$$

Maintenant, soient $f : A \to B$ et $g; B \to C$ deux homomorphismes d'anneaux et soient j et j' deux idéaux de B et C respectivement tel que : $I_0 = f^{-1}(J) = g^{-1}(J')$.

***Remarque* 2.4.1**
Soient $f : A \to B$ un homomorphisme d'anneaux et J un idéal de B, posons $I := f^{-1}(J)$ et considérons la projection canonique $\pi : A \to A/I$. donc, on obtient facilement :

$$\begin{aligned} f(a) + J &\cong \{(\bar{a}, f(a) + j) | a \in A, j \in J\} \\ &= A \bowtie^{\pi,f} (0, J). \end{aligned}$$

***Exemple* 2.4.2**
Soient $i : A \hookrightarrow B$ une injection d'anneaux, J un idéal de B, $I = A \cap J$ et $\pi : A \to A/I$ la projection canonique. d'après la remarque 2.4.1 , le sous-anneaux A+J de B peut être considéré comme bi-amalgamation par l'isomorphisme suivant :

$$A + J \cong A \bowtie^{\pi,i} (0, J)$$

2.4.2 Produit fibré et bi-amalgamation

Tout au long de cette section, soient $f : A \to B$ et $g : A \to C$ deux homomorphismes d'anneaux, et soient J et J' deux idéaux de B et C respectivement, tel que $I = f^{-1}(J) = g^{-1}(J')$, soit $A \bowtie^{f,g} (J; J')$ La bi-amalgamation de A avec (B, C) le long de (J, J') en respectant (f, g).
Cette section illustre la corrélation entre la construction du produit fibré et la bi-amalgamation. Premièrement on va voir comment la bi-amalgamation peut être considérée comme produit fibré.

***Proposition* 2.4.1**
considérons les homomorphismes d'anneaux $\alpha : f(A)+J \to A/I$, définie par $f(a)+j \mapsto \bar{a}$ et $\beta : g(A)+J' \to A/I$, définie par $g(a)+j' \mapsto \bar{a}$. Donc, la bi-amalgamation est déterminée par le produit fibré suivant :

$$\begin{tikzcd} A \bowtie^{f,g} (J; J') \arrow[r, two heads] \arrow[d] & f(A) + J \arrow[d, "\alpha"] \\ g(A) + J' \arrow[r, "\beta"] & A/I \end{tikzcd}$$

ce qui donne

$$A \bowtie^{f,g} (J, J') = \alpha \times_{\frac{A}{I}} \beta$$

Preuve

Notons que les deux applications α et β seront définies lorsque $I := f^{-1}(J) = g^{-1}(J')$ et sont des homomorphismes d'anneaux. D'une part l'inclusion $A \bowtie^{f,g} (J, J') \subseteq \alpha \times \beta$ est trivial. D'autre part on a :

$$\alpha \times_{\frac{A}{I}} \beta = \{(f(a) + j, g(b) + j')|a, b \in A, (j, j') \in J \times J', \alpha(a) = \beta(b)\}.$$

La condition $\alpha(a) = \beta(b)$ implique que $f(b - a) \in J$ et $g(b - a) \in J'$. Donc, $g(b)+j' = g(a)+(j'+g(b-a))$ avec $j'+g(b-a) \in J'$. Et par suite on a $\alpha\times\beta \subseteq A \bowtie^{f,g} (J, J')$.

***Proposition* 2.4.2**

considérons le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"] & B \arrow[d, "\alpha"] \\ C \arrow[r, "\beta"] & D \end{tikzcd}$$

est un homomorphisme d'anneaux, et soit $\pi : B \times C \to B$ la projection canonique. Donc, les conditions suivantes sont équivalentes :

1. *$\alpha \times_D \beta = A \bowtie^{f,g} (J, J')$, pour certains idéaux J et J' de B et C respectivement avec $f^{-1}(J) = g^{-1}(J')$;*
2. *le diagramme ci-dessus est commutatif avec $\alpha o \pi(\alpha \times_D \beta) = \alpha o f(A)$.*

Preuve

$1 \Rightarrow 2$ Soit $a \in A$, par hypothèse, $(f(a), g(a)) \in \alpha \times_D \beta$ pour que $\alpha o f(a) = \beta o g(a)$. Aussi on a $\pi(\alpha \times_d \beta) = f(A) + J$. De plus, pour tout $j \in J$, le fait que $(j, 0) \in A \bowtie^{f,g} (J, J')$, nous donne $\alpha(j) = \beta(0) = 0$. Donc, $\alpha o \pi(\alpha \times_D \beta = \alpha o f(A)$, comme nous voulons.

$2 \Rightarrow 1$ Soit $J = Ker(\alpha)$ et $J' = Ker(\beta)$. Par supposition, pour tout $x \in f^{-1}(J)$, $\beta o g(x) = \alpha o f(x) = 0$. Donc, $g(x) \in J'$ et par conséquent $f^{-1}(J) \subseteq g^{-1}(J')$, de même pour l'inclusion inverse. Donc $f^{-1}(J) = g^{-1}(J')$. Après, soit $(f(a)+j, g(a)+j') \in A \bowtie^{f,g} (J, J')$. On a :

$$\alpha(f(a) + j) = \alpha o f(a) = \beta o g(a) = \beta(g(a) + j')$$

. Donc $A \bowtie^{f,g} (J, J') \subseteq \alpha \times_D \beta$. D'autre part, soit $(b, c) \in \alpha \times_D \beta$. Par supposition il existe $a \in A$ tel que :

$$\alpha(b) = \alpha o \pi(b, c) = \alpha(f(a)).$$

Donc $b - f(a) \in J$. En plus, on a :

$$\beta(c) = \alpha(b) = \alpha(f(a)) = \beta(g(a)).$$

Donc, $c - g(a) \in J'$. ce qui donne :

$$(b,c) = (f(a) + b - f(a), g(a) + c - g(a)) \in A \bowtie^{f,g} (J, J').$$

Par conséquent, $\alpha \times_D \beta = A \bowtie^{f,g} (J, J')$, ce qui achève la preuve.

2.4.3 Les propriétés de base de la bi-amalgamation

Notons, soient $f : A \to B$ et $g : A \to C$ deux homomorphismes d'anneaux, et soient J et J' deux idéaux de B et C respectivement, tel que $I_0 = f^{-1}(J) = g^{-1}(J')$, soit $A \bowtie^{f,g} (J; J')$ La bi-amalgamation de A avec (B, C) le long de (J, J') en respectant (f, g).

Dans cette section on étudie quelque propriétés de la bi-amalgamation, précisément on va donner les conditions nécessaires et suffisantes pour que la bi-amalgamation soit un anneau noethérien, domaine ou anneau réduit. pour cela nous avons besoin des anneaux spéciaux $f(A) + J$ et $g(A) + J'$ (qui correspondent à B et C, respectivement, dans le cas où f et g sont surjectives).
Nous commençons par quelques propriétés des idéaux de la bi-amalgamations. pour cela notons d'abord que $0 \times J'$, $J \times 0$, et $J \times J'$ des idéaux particuliers de $A \bowtie^{f,g} (J; J')$; et si I est un idéal de A, donc l'ensemble :

$$I \bowtie^{f,g} (J; J') := \{(f(i) + j, g(i) + j') | i \in I, (j, j') \in J \times J'\}$$

est un idéal de $A \bowtie^{f,g} (J; J')$ contenant $J \times J'$.

***Proposition* 2.4.3**
Soit I un idéal de A, donc on a les isomorphismes canoniques suivants :

1. $\dfrac{A \bowtie^{f,g} (J, J')}{I \bowtie^{f,g} (J, J')} \cong \dfrac{A}{I + I_0}$
2. $\dfrac{A \bowtie^{f,g} (J, J')}{0 \times J'} \cong f(a) + J$ *et* $\dfrac{A \bowtie^{f,g} (J, J')}{J \times 0} \cong g(a) + J'$
3. $\dfrac{A}{I_0} \cong \dfrac{A \bowtie^{f,g} (J, J')}{J \times J'} \cong \dfrac{f(a) + J}{J} \cong \dfrac{g(a) + J'}{J'}$

Preuve
1) Considérons l'application suivante :

$$\begin{array}{cccc} \varphi & : & A & \longrightarrow & \dfrac{A \bowtie^{f,g} (J, J')}{I \bowtie^{f,g} (J, J')} \\ & & a & \longmapsto & \overline{(f(a), g(a))} \end{array}$$

Clairement, φ est un homomorphisme d'anneaux surjectif, et on peut vérifier que $Ker(\varphi) = I + I_0$.

2) Si $f(a)+j=0$ pour certain $a \in A$ et $j \in J$, donc $g(a)+j' \in J'$ pour tout $j' \in J'$. Donc le noyau de l'homomorphisme canonique surjectif $A \bowtie^{f,g} (J,J') \twoheadrightarrow f(A)+J$ coïncide avec $0 \times J'$, par conséquent on a le premier isomorphisme, et on fait la même chose pour avoir le deuxième.
3) Le premier isomorphisme est un cas particulier de (1) pour $I=0$. D'autre part, si $f(a)+j \in J$ pour certain $a \in A$ et $J \in J$, donc, $g(a)+j' \in J'$ pour tout $j' \in J'$. Alors le noyau de l'homomorphisme surjectif canonique $A \bowtie^{f,g} (J,J') \twoheadrightarrow \dfrac{f(A)+J}{J}$ coïncide avec $J \times J'$.

Le fait que la bi-amalgamation peut être représentée comme produit fibré est un outil très important, qu'on peut utiliser pour montrer les propriétés de cette construction.
Voilà un résultat qui montre l'utilité de cet outil.

***Proposition* 2.4.4**
sous la notation ci-dessus, nous avons :
$A \bowtie^{f,g} (J,J')$ *est noethérien* $\Leftrightarrow$ *f(A)+J et g(A)+J' sont noethériens.*

Preuve
De la deuxième assertion de la proposition 2.4.3, il suffit de monter l'implication inverse. Par la proposition 2.4.1, on a $A \bowtie^{f,g} (J,J') = \alpha \times_{\frac{A}{I_0}} \beta$ déterminée par les homomorphismes d'anneaux $\alpha : f(A)+J \to A/I_0$, $f(a)+j \mapsto \bar{a}$ et $\beta : g(A)+J' \to A/I_0$, $g(a)+j' \mapsto \bar{a}$. Lorsque $f(A)+J$ est Noethérien, par la proposition 2.3.5, il suffit de voir que $Ker(\beta)=J'$ est un $A \bowtie^{f,g} (J,J')$-module Noethérien, avec la structure du module induite d'homomorphisme canonique surjectif $A \bowtie^{f,g} (J,J') \twoheadrightarrow g(A)+J'$. Mais, sous cette structure, les sous $A \bowtie^{f,g} (J,J')$-modules de J' sont les sous-idéaux de J' de l'anneau Noethérien $g(A)+J'$. Cela conduit à la conclusion.

***Proposition* 2.4.5 ([46] : Proposition 4.4)**
Sous la notation ci-dessus, nous avons :
Spec($A \bowtie^{f,g} (J,J')$*) est noethérien* $\Leftrightarrow$ *Spec(f(A)+J) et Spec(g(A)+J') sont noethériens.*

Le résultat suivant caractérise la bi-amalgamation sans diviseur de zéro.

***Proposition* 2.4.6**
Sous la notation ci-dessus, les assertions suivantes sont équivalentes :
1. $A \bowtie^{f,g} (J,J')$ *est un domaine ;*
2. "J=0 et g(A)+J' est un domaine" ou "J'=0 et f(A)+J est un domaine".

Preuve
Supposons que $A \bowtie^{f,g} (J,J')$ est un domaine. Si $J \neq 0$ et $J' \neq 0$, alors pour les éléments

non nul $j \in J$ et $j' \in J'$ on a $(0, j')(j, 0) = (0, 0)$. Par conséquent, l'un des J et J' doit être nul ; dans ce cas, par proposition 2.4.3 (2) $A \bowtie^{f,g} (J, J')$ est isomorphe à $f(A) + J$ ou à $g(A) + J'$. Cela conduit à la conclusion.

Le résultat suivant caractérise la bi-amalgamation sans les éléments nilpotents.

***Proposition* 2.4.7**
Sous la notation ci-dessus, considérons les condition suivantes :

(a) $f(A)+J$ *est réduit et* $J' \cap Nil(C) = 0$,
(b) $g(A)+J'$ *est réduit et* $J \cap Nil(B) = 0$,
(c) $A \bowtie^{f,g} (J, J')$ *est réduit,*
(d) $J \cap Nil(B) = 0$ *et* $J' \cap Nil(C) = 0$.

Alors :

1. *(a) ou (b)* $\Rightarrow$ *(c)* $\Rightarrow$ *(d).*
2. *Si* I_0 *est radical, tout les quatre conditions sont équivalentes.*
3. *Si* f *est surjective et* $Ker(f) \subseteq Ker(g)$*, alors :*

$$A \bowtie^{f,g} (J, J') \text{ est réduit} \Leftrightarrow B \text{ est réduit et } J' \cap Nil(C) = 0.$$

Preuve
1. Soit $(f(a)+j, g(a)+j') \in Nil(A \bowtie^{f,g} (J, J'))$. Alors $f(a)+j \in Nil(f(A)+J) = 0$. Par conséquent $a \in I_0$. Ainsi, $g(a)+j' \in J' \cap Nil(C) = 0$. Ce qui donne $Nil(A \bowtie^{f,g} (J, J')) = 0$. Cela prouve $(a) \Rightarrow (c)$, de même pour $(b) \Rightarrow (c)$.
Soit $j \in Nil(B) \cap J$. Alors, il existe un entier positif n tel que $0 = (j^n, 0) = (j, 0)^n$ appartient à $A \bowtie^{f,g} (J, J')$. Et par la suite on a $j = 0$ et donc $Nil(B) \cap J = 0$. De même, $Nil(C) \cap J' = 0$. Cela prouve $(c) \Rightarrow (d)$.
2. Maintenant, supposons que I_0 est radical, $J \cap Nil(B) = 0$, et $J' \cap Nil(C) = 0$. Soit $f(a)+j \in Nil(f(A)+J)$. Alors, il y a un entier positif n tel que $(f(a)+j)^n = 0$. Par conséquent, $f(a)^n \in J$ et donc $a^n \in I_0$; c'est-à-dire $a \in I_0$. Donc, $f(a) + j \in J \cap Nil(B) = 0$, d'où $(d) \Rightarrow (a)$. De même pour $(d) \Rightarrow (b)$.
3. Au vu de *1.*, il suffit d'observer que $f(a^n) = 0$, pour certain entier positif, forcément $(f(a), g(a))^n = 0$, donnant $f(a) = 0$.

2.4.4 La structure des idéaux premiers de la bi-amalgamation

Notons, soient $f : A \to B$ et $g : A \to C$ deux homomorphismes d'anneaux, et soient J et J' deux idéaux de B et C respectivement, tel que $I_0 = f^{-1}(J) = g^{-1}(J')$, soit

$A \bowtie^{f,g} (J; J')$ La bi-amalgamation de A avec (B, C) le long de (J, J') en respectant (f, g). Dans cette section on examine la structure des idéaux premiers de la bi-amalgamation ainsi sa localisation en idéaux premiers, également les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une bi-amalgamation soit locale.
Ensuite, nous décrivons les idéaux premiers (et maximaux) des bi-amalgamations. Pour cela on considère la notation suivante :

$$Y := Spec(f(A) + J)$$
$$Y' := Spec(g(A) + J')$$

Et, pour $L \in Y$ et $L' \in Y'$, on considère les idéaux premiers de $A \bowtie^{f,g} (J, J')$ donnés par :

$$\begin{aligned}
\bar{L} :&= (L \times (g(A) + J')) \cap (A \bowtie^{f,g} (J, J')) \\
&= \{f(a) + j, g(a) + j') | a \in A, (j, j') \in J \times J', f(a) + j \in L\}, \\
\bar{L'} :&= ((f(A) + J) \times L') \cap (A \bowtie^{f,g} (J, J')) \\
&= \{f(a) + j, g(a) + j') | a \in A, (j, j') \in J \times J', g(a) + j' \in L'\}.
\end{aligned}$$

Les deux prochains lemmes sont nécessaires pour la preuve de la proposition 2.4.8. Rappelons que si I est un idéal de A, alors

$$I \bowtie^{f,g} (J, J') := \{(f(i) + j, g(i) + j') | i \in I, (j, j') \in J \times J'\}$$

est un idéal de $A \bowtie^{f,g} (J, J')$, comme résultat directe de la proposition 2.4.3 (1) on obtient le lemme suivant :

***Lemme* 2.4.1**
Soit I un idéal de A. donc $I \bowtie^{f,g} (J, J')$ est un idéal premier (respectivement maximal) de $A \bowtie^{f,g} (J, J')$ si et seulement si $I + I_0$ est un idéal premier (respectivement maximal) de A.

Un élément de Y (respectivement Y') contenant J (respectivement J') a une forme spéciale comme illustre le lemme suivant :

***Lemme* 2.4.2**
Soit $L \in Y$ (respectivement Y') contenant J (respectivement J'). Alors

$$\bar{L} = f^{-1}(L) \bowtie^{f,g} (J, J').(respectivement, \ = g^{-1}(L) \bowtie^{f,g} (J, J')).$$

Preuve
Soit $L \in Y$ contenant J. Notons d'abord que $f^{-1}(L)$ est un idéal premier de A contenant $I_0 := f^{-1}(J)$ tel sorte que $f^{-1}(L) \bowtie^{f,g} (J, J')$ est un idéal premier de $A \bowtie^{f,g} (J, J')$ par le lemme 2.4.1. De plus, pour tout $a \in A$ et $j \in J$, on peut facilement voir que $f(a) + j \in L$ si et seulement si $a \in f^{-1}(L)$. Ainsi, $\bar{L} = f^{-1}(L) \bowtie^{f,g} (J, J')$. De même pour $L \in Y'$.

***Proposition* 2.4.8**
Sous la notation ci-dessus, soit P un idéal de $A \bowtie^{f,g} (J, J')$. Donc

(1) $J \times J' \subseteq P \Leftrightarrow \exists! p \supseteq I_0$ *dans Spec(A) tel que* $P = p \bowtie^{f,g} (J, J')$.
dans ce cas, $\exists L \supseteq J$ *dans* Y *et* $\exists L' \supseteq J'$ *dans* Y' *tel que* $P = \bar{L} = \bar{L}'$.

(2) $J \times J' \nsubseteq P \Leftrightarrow \exists! L \in Y$ *(ou* Y'*) tel que* $J \nsubseteq L$ *(ou* $J' \nsubseteq L$*) et* $P = \bar{L}$.
Dans ce cas $(A \bowtie^{f,g} (J, J'))_p \cong (f(A)+J))_L$ *(ou* $(A \bowtie^{f,g} (J, J'))_p \cong (g(A)+J')_L$*).*
Par conséquent, on a

$$Spec(A \bowtie^{f,g} (J, J')) = \{\bar{L} | L \in Spec(f(A) + J) \cup Spec(g(A) + J')\}.$$

Preuve
(1) Nous avons seulement besoin de prouver ($\Rightarrow$). Supposons que $J \times J' \subseteq P$ et considérons l'idéal p de A donné par :

$$p := \{a \in A \mid \exists (j, j') \in J \times J' \text{ tel que } (f(a) + j, g(a) + j') \in P\}$$

Or, $J \times J' \subseteq P$, donc forcément $I_0 \subseteq p$. De plus, nous avons $P \subseteq p \bowtie^{f,g} (J, J')$. Pour l'inclusion inverse, soit $a \in p$. Donc il existe $(j_1, j'_1) \in J \times J'$ tel que $(f(a)+j_1, g(a)+j'_1) \in P$. Donc, pour tout $(j, j') \in J \times J'$, nous obtenons :

$$(f(a) + j, g(a) + j') = (f(a) + j_1, g(a) + j'_1) + (j - j_1, j' - j'_1) \in P.$$

Puisque $J \times J' \subseteq P$. Il s'ensuit que

$$P = p \bowtie^{f,g} (J, J').$$

Par le lemme 2.4.1, p est un idéal premier de A. Par la proposition 2.4.3 (1), p doit être unique puisqu'il contient I_0.

Ensuite, soit $L := f(p) + J$. On peut vérifier que L est un idéal premier de $f(A) + J$ avec $p \subseteq f^{-1}(L)$. Maintenant, prenons $a \in f^{-1}(L)$. Alors $f(a) = f(x) + j$ pour certains $x \in p$ et $j \in J$. Par conséquent $(a - x) \in I_0 \subseteq p$, d'où $a \in p$. Alors :

$$f^{-1}(L) = p.$$

Donc, via le lemme 2.4.2 on a :

$$\bar{L} = f^{-1}(L) \bowtie^{f,g} (J, J') = p \bowtie^{f,g} (J, J').$$

Notez que pour $L' := g(p) + J'$, les mêmes arguments conduisent à :

$$P = \bar{L} = \bar{L}'.$$

(2) Nous avons seulement besoin de prouver ($\Rightarrow$). Supposons que $J \times J' \nsubseteq P$. Selon la [[46] proposition 3.2]et [[30],Lemme 1.1.4 (3)], il y a un unique idéal premier Q de $(f(A) + J) \times (g(A) + J')$ tel que :

$$P = Q \cap A \bowtie^{f,g} (J, J') \text{ avec } ((f(A) + J) \times (g(A) + J'))_Q = (A \bowtie^{f,g} (J, J'))_P$$

Alors soit $Q = L \times (g(A) + J')$ pour certain idéal premier $L \in Y$ ou $Q = (f(A) + J) \times L'$ pour certain idéal premier $L' \in Y'$. donc, $P = \bar{L}$ ou $P = \bar{L'}$.
Par la suite on a :

$$(A \bowtie^{f,g} (J, J'))_P \cong (f(A) + J)_L \ ou \ (A \bowtie^{f,g} (J, J'))_P \cong (g(A) + J')_{L'}.$$

Ce qui termine la preuve.

Ensuite, en appliquant la proposition 2.4.8, nous établissons les conditions nécessaires et suffisantes d'une bi-amalgamation pour qu'elle soit locale. Notez à ce stade que, dans la présence de l'égalité $f^{-1}(J) = g^{-1}(J')$, $J \neq B$ si et seulement si $J' \neq C$.

***Proposition* 2.4.9**
Sous la notation ci-dessus nous avons :

(1) $A \bowtie^{f,g} (J, J')$ *est local* $\Leftrightarrow$ $J \neq B$ *et* $f(A) + J$ & $g(A) + J'$ *sont locaux.* *De plus, l'idéal maximal de* $A \bowtie^{f,g} (J, J')$ *a la forme* $m \bowtie^{f,g} (J, J')$*, où* m *est l'idéal maximal unique de* A *contenant* I_0*.*

(2) Supposons que A *est local. Alors :*

$$A \bowtie^{f,g} (J, J') \ est\ local \ \Leftrightarrow \ J \times J' \subseteq Jac(B \times C)$$

.

Preuve
(1) Remarquez d'abord que si $J = B$, (d'où $J' = C$) alors $A \bowtie^{f,g} (J, J') = B \times C$ qui est jamais local. Supposons que $A \bowtie^{f,g} (J, J')$ est local. Alors $J \neq B$ et, par la proposition 2.4.3 (2), les deux $f(A) + J$ et $g(A) + J'$ sont locaux. De plus, $I_0 \neq A$. Par conséquent, il y a $m \supseteq I_0$ maximal dans A. Par le lemme 2.4.1, $m \bowtie^{f,g} (J, J')$ est l'idéal maximal de $A \bowtie^{f,g} (J, J')$. Ensuite, l'unicité de m est assurée par la proposition 2.4.3 (1).
Supposons ensuite que $J \neq B$ et $f(A) + J$ & $g(A) + J'$ sont locaux. Soit M un idéal maximal de $A \bowtie^{f,g} (J, J')$. Nous voulons montrer que $J \times J' \subseteq M$. En effet par l'absurde, supposons que $J \times J' \nsubseteq M$. Ensuite, par la proposition 2.4.8 (2), il y a un et un seul idéal premier L, de $f(A) + J$ tel que $M = \bar{L}$ et $J \nsubseteq L$. d'autre par, l'unicité de L et la maximalité de M force L pour être l'idéal maximal de $f(A) + J$. Par suit on a $J \subseteq L$, d'où la contradiction désirée (car $J \neq B$). Donc,

$$J \times J' \subseteq M.$$

Ainsi, par la proposition 2.4.8 (1), il existe un idéal premier (unique) de A contenant I_0 tel que :

$$M = m \bowtie^{f,g} (J, J').$$

Par le lemme 2.4.1, m est maximal dans A. Et par la proposition 2.4.3 (3), $\dfrac{A}{I_0} \cong \dfrac{f(A) + J}{J}$ est local avec $\dfrac{m}{I_0}$. Donc forcément M est l'unique idéal maximal de $A \bowtie^{f,g} (J, J')$.

(2) ($\Rightarrow$) Dans ce sens, nous n'avons pas besoin de l'hypothèse «A est local», que $A \bowtie^{f,g} (J, J')$ est local. Par (1), nécessairement, son idéal maximal contient $J \times J'$. Soit $(j, j') \in J \times J'$ et $(b, c) \in B \times C$. Ensuite, $(b, c)(j, j') \in J \times J'$. Ainsi, $(1, 1) - (b, c)(j, j')$ est inversible dans $A \bowtie^{f,g} (J, J')$ (et donc en $B \times C$). Par conséquent, $J \times J' \subsetneq Jac(B \times C)$.
($\Leftarrow$) Supposons que A est local et $J \times J' \subsetneq Jac(B \times C)$. Soit a une unité de A. Nous affirmons que $(f(a)+j, g(a)+j')$ est une unité de $A \bowtie^{f,g} (J, J')$ pour tout $(j, j') \in J \times J'$. En effet, $f(a) + j$ et $g(a) + j'$ sont respectivement des unités dans B et C, puisque $J \times J' \subsetneq Jac(B \times C)$. Ainsi, il existe $u \in B$ et $v \in C$ tels que $(f(a) + j)u = 1$ et $(g(a) + j')v = 1$. D'où

$$(f(a) + j, g(a) + j')(f(a^{-1}) - uf(a^{-1})j, g(a^{-1}) - vg(a^{-1})j') = (1, 1);$$

C'est-à-dire, $(f(a) + j, g(a) + j')$ est une unité de $A \bowtie^{f,g} (J, J')$. Ensuite, soit $(f(a) + j_1, g(a) + j'_1)$ un élément non unitaire de $A \bowtie^{f,g} (J, J')$. Donc, a est un non unitaire de A. De plus, pour tout $(f(b) + j_2, g(b) + j'_2) \in A \bowtie^{f,g} (J, J')$ nous avons :

$$(1, 1) - (f(b) + j_2, g(b) + j'_2)(f(a) + j_1, g(a) + j'_1) = (f(1 - ba) + j_3, g(1 - ba) + j'_3)$$

pour certains $j_3 \in J$ et $j'_3 \in J'$. De plus, $1 - ba$ est une unité de A puisque A est local. Donc, $(1, 1) - (f(b) + j_2, g(b) + j'_2)(f(a) + j_1, g(a) + j'_1)$ est une unité de $A \bowtie^{f,g} (J, J')$. Cela prouve que $A \bowtie^{f,g} (J, J')$ est local.

Chapitre 3

Extensions triviales définies par des conditions de Prüfer

C. Bakkari, S. Kabbaj, N. Mahdou *Trivial extensions defined by Prüfer conditions*. Journal of Pure and Applied Algebra 214 (2010), 53-60

3.1 Extensions de domaines

Dans cette section, on étudie le transfert des conditions de Prüfer aux extensions triviales de la forme $R := A \propto B$ où B est une extension du domaine A ($A \subseteq B$). On note qu'un élément $(a, b) \in R$ est régulier si et seulement si $a \neq 0$.

***Théorème* 3.1.1**
Soient $A \subseteq B$ une extension du domaine A, $K := qf(A)$ et $R := A \propto B$, l'extension triviale de A par B. Alors on a :

(1) *R est Gaussien, si et seulement si R est de Prüfer , si et seulement si A est de Prüfer et $K \subseteq B$.*

(2) *R est arithmétique si et seulement si A est de Prüfer et $K = B$.*

(3) *$w.gl.dim(R) = \infty$.*

Pour démontrer ce théorème, nous avons besoin des lemmes d'intérêts indépendants suivants.

***Lemme* 3.1.1**
Soient A un anneau, E un A-module non nul et $R := A \propto E$. Si R est Gaussien (respectivement, arithmétique), alors A l'est aussi.

Preuve
Ceci est évident, puisque les propriétés arithmétiques et Gaussiennes sont stables par quotient. (ici on a $A \cong \dfrac{R}{0 \propto E}$). Notons que le lemme 3.1.1 n'est pas vrai pour la propriété *anneau de Prüfer*, comme le montre l'exemple 3.1.4.

***Lemme* 3.1.2**
Soient K un corps, E un K-espace vectoriel non nul, et $R := K \propto E$. Alors on a : $w.gl.dim(R) = \infty$.

Preuve
Soient $\{f_i\}_{i\in I}$ une base du K-espace vectoriel E et $J := 0 \propto E$. Considérons le R-application $u : \; R^{(I)} \longrightarrow J$ définie par $u((a_i, e_i)_{i\in I}) = (0, \sum_{i\in I} a_i f_i)$. Clairement, $Ker(u) = 0 \propto E^{(I)}$. Ici, nous identifions $R^{(I)}$ avec $A^{(I)} \propto E^{(I)}$ comme R-modules. Nous avons la suite exacte de R-modules suivante :

$$0 \longrightarrow 0 \propto E^{(I)} \longrightarrow R^{(I)} \xrightarrow{u} J \longrightarrow 0.$$

Nous affirmons que J n'est pas plat, car sinon d'après [57, Théorème 3.55], nous obtenons :

$$0 \propto E^{(I)} = J^{(I)} = JR^{(I)} = (0 \propto E^{(I)}) \cap JR^{(I)} = (0 \propto E^{(I)})J = 0,$$

ce qui est absurde. Par conséquent, la suite exacte ci-dessus donne :

$$fd(J) = fd(J^{(I)}) \leq fd(J) - 1.$$

Cela force la dimension plate de J, et par conséquent, la dimension globale faible de R, d'être infinie.

Preuve du théorème :
(1) Nous avons besoin seulement de prouver les implications suivantes :
R de Prüfer $\Longrightarrow$ A de Prüfer et $K \subseteq B \Longrightarrow$ R Gaussien.
Supposons que R est un anneau de Prüfer. On va montrer d'abord que $K \subseteq B$ dans le cas où A est local. Soit $x \neq 0 \in A$, on pose $I := ((x, 0), (x, 1))R$, un idéal régulier de type fini de R. Puisque, dans ce cas R est aussi local, alors I est inversible et donc principal. D'où $I = (a, b)R$ pour certains $a \in A$ et $b \in B$. Clairement, $a = ux$ pour un certain élément inversible $u \in A$, donc $I = (ux, b)R = (x, u^{-1}b)R$.
Or, on a $(x, 0) \in I$, donc il existe $b' \in B$ tel que $u^{-1}b = b'x$. Il s'ensuit alors que $I = (x, b'x)R = (x, 0)(1, b')R = (x, 0)R$ car $(1, b')$ est inversible. Mais $(x, 1) \in I$ donc $1 = xb"$ pour un certain $b" \in B$. Par conséquent $K \subseteq B$.

Supposons maintenant que A n'est pas nécessairement local et soient $q \in Spec(B)$ et $p := q \cap A$. Clairement, $S := (A \setminus P) \times 0$ est une partie multiplicative de R avec la caractérisation $\frac{r}{1}$ est régulier dans $S^{-1}R$ si et seulement si r est régulier dans R. Donc les idéaux réguliers de type fini de $S^{-1}R$ proviennent nécessairement des idéaux réguliers de type fini de R. Donc $A_p \propto B_p = S^{-1}R$ est un anneau de Prüfer où $K = qf(A_p) \subseteq B_p \subseteq B_q$.

Il en résulte que $K \subseteq B = \cap B_q$ où q parcourt $Spec(B)$. Maintenant, on vérifie facilement que $K \subseteq B$ implique que $K \propto B = Q(R)$, où $Q(R)$ est l'anneau total des fractions de R. Par ailleurs, soient $f = \sum_i (k_i, b_i)x^i$et $g = \sum_j (k'_j, b'_j)x^j$ deux polynômes dans $Q(R)[x]$. S'il existe i ou j tel que $k_i \neq 0$ ou $k'_j \neq 0$,alors (k_i, b_i) ou (k'_j, b'_j) est inversible, donc $c(f) = Q(R)$ ou $c(g) = Q(R)$, d'où $c(fg) = c(f)c(g)$(ceci d'après le lemme de Gauss qui affirme qu'un polynôme dont le contenu contient un élément inversible est Gaussien). Si $k_i = k_j = 0$ pour tout i et j. Alors $c(fg) = 0 = c(f)c(g)$ par conséquent $Q(R)$ est Gaussien et donc R l'est aussi, d'après [8, Théorème 3.3] et par suite le lemme 3.1.1, implique que A est un domaine de Prüfer, d'où la première implication est prouvé.
Supposons que, A est un domaine de Prüfer et $K \subseteq B$. Soit I un idéal non nul de type fini de R engendré par une famille génératrice minimale $(a_1, b_1), ..., (a_n, b_n)$. Pour tout $a \neq 0 \in A$ et pour tout $b, b' \in B$, on a $(0, b') = (a, b)(0, a^{-1}b')$. Donc, la condition de minimalité force $a_i = 0$ pour chaque i ou bien $a_i \neq 0$ pour chaque i. Dans le premier cas, $I^2 = 0$ et donc I n'est pas un idéal régulier. Nous supposons par la suite que $a_i \neq 0$ pour chaque i. Il en résulte que $I = (\sum_i Aa_i) \propto B$, puisque $(a_i, b) = (a_i, b_i)(1, a_i^{-1}(b - b_i))$, pour tout i et tout $b \in B$. Puisque A est un domaine de Prüfer, alors $J := \sum_i Aa_i$ est inversible et aJ^{-1} est un idéal de A pour un certain $a \neq\in A$. Nous obtenons :

$$\begin{aligned}(a,0)^{-1}(aJ^{-1} \propto B)I &= (a,0)^{-1}(aJ^{-1} \propto B)(J \propto B) \\ &= (a,0)^{-1}(aJ^{-1}J \propto B) \\ &= (a,0)^{-1}(aA \propto B) \\ &= R.\end{aligned}$$

Par conséquent, R est un anneau de Prüfer et donc Gaussien, d'après [8, Théorème 3.3], ce qui achève la preuve de (1).
(2) Supposons que R est un anneau arithmétique. On a d'après (1), A est de Prüfer et $K \subseteq B$. Donc $K \propto B = Q(R)$ est arithmétique puisqu'il est une localisation de R. Soit $b \neq 0 \in B$. Alors $I := ((0, 1), (0, b))Q(R)$ est principal et donc $I := (0, b')Q(R)$ pour un certain $a \neq 0 \in B$. En outre $(0, b) \in I$ donne $b = kb'$ pour un certain $k \neq 0 \in K$, et par suite $I := (0, k^{-1}b')Q(R)$. De plus $(0, 1) \in I$ implique que $1 = k'k^{-1}b$ pour un certain $k' \in K$. Il en résulte que $b \in K$ et donc $K = B$.
Inversement, supposons que A est de Prüfer avec $K = B$ (1), $R = A \propto K$ est Gaussien. De plus $Q(R) = K \propto K$ est un anneau principal (à fortiori arithmétique) puisque il n'a qu'un seul idéal propre non nul $M := 0 \propto K = T(1, 0)$. D'après [8, Théorème 3.5],R est arithmétique, ce qui achève la preuve de(2).
(3) Posons $S := A \setminus 0$. Alors $T := S \times 0$ est une partie multiplicative de R. D'après le lemme 3.1.2, $w.gl.dim(T^{-1}R) = \infty$. Donc $w.gl.dim(R) = \infty$.

Ceci termine la démonstration du théorème.

***Corollaire* 3.1.1**
Soient D un domaine, $K := qf(D)$, et $R := D \propto K$. les assertions suivantes sont équivalentes :

(1) *D est un domaine de Prüfer.*

(2) *R est un anneau arithmétique.*

(3) *R est un anneau Gaussien.*

(4) *R est un anneau de Prüfer.*

Le théorème 3.1.1 enrichit la littérature par de nouveaux exemples d'anneaux Gaussiens non-arithmétiques, comme indiqué ci-dessous.
Nous rappelons qu'un anneau R est dit de conducteur fini si les idéaux $aR \cap bR$ et $(0 : c)$ sont de type fini pour tous $a, b, c \in R$ [36]. La classe des anneaux de conducteurs finis contient bien la classe des anneaux cohérents (à fortiori, les anneaux Noethérien et par conséquent, les anneaux principaux)[36, 47].

***Exemple* 3.1.1**
Soient D un domaine de Prüfer qui n'est pas un corps et $K := qf(D)$. Alors $R := D \propto K$ est un anneau arithmétique et $w.gl.dim(R) = \infty$. De plus, R n'est pas de conducteur fini, d'après [47, Théorème2.8] et donc n'est pas un anneau cohérent.

***Exemple* 3.1.2**
Soit $K \subsetneqq L$ une extension de corps. Alors $R := K \propto L$ est un anneau Gaussien qui n'est pas arithmétique.

L'exemple suivant montre que le théorème 3.1.1 élargit le champ de validité de la conjecture de **Bazzoni-Glaz** au-delà de la classe des anneaux Gaussiens cohérents.

***Exemple* 3.1.3**
Soient $\mathbb{Z}$ l'anneau des entiers relatifs et $\mathbb{R}$ le corps des nombres réels. Alors $R := \mathbb{Z}_{(2)} \propto \mathbb{R}$ satisfait les propriétés suivantes :

(1) R est un anneau Gaussien.

(2) R n'est pas un anneau arithmétique.

(3) R n'est pas un anneau cohérent.

(4) $w.gl.dim(R) = \infty$.

Preuve
Les propriétés (1),(2) et (4) découlent du théorème 3.1.1. Il reste à prouver (3), pour cela, considérons la suite exacte sur R suivante :

$$0 \longrightarrow 0 \propto \mathbb{R} \longrightarrow R \xrightarrow{u} R(0,1) = 0 \propto \mathbb{Z}_{(2)} \longrightarrow 0$$

où u est défini par $u(a, b) = (a, b)(0, 1)$. Maintenant, on a $0 \propto \mathbb{R}$ n'est pas un idéal de type fini en tant que R-module (car sinon $\mathbb{R}$ serait un $\mathbb{Z}_{(2)}-$module de type fini). Donc $0 \propto \mathbb{Z}_{(2)}$ est un idéal de type fini de R qui n'est pas de présentation finie, d'où R n'est pas un anneau cohérent. L'exemple suivant montre que le théorème 3.1.1 ne reste plus valable, en général, au-delà du contexte de l'extension de domaine.

***Exemple* 3.1.4**
Soient (A, M) un domaine local qui n'est pas de valuation, E un A-module non nul tel que $ME = 0$, et $B := A \propto E$. Alors on a : $R := A \propto B$ est un anneau de Prüfer qui n'est pas Gaussien.

Preuve
On vérifie facilement que R est un anneau total des fractions et donc c'est un anneau de Prüfer. D'après le lemme 3.1.1, R n'est pas Gaussien.

3.2 Une classe d'anneaux total des fractions

***Théorème* 3.2.1**
Soient (A, M) un anneau local et E un $\frac{A}{M}$-espace vectoriel non nul. Soit $R := A \propto E$ l'anneau extension triviale de A par E. Alors on a :

- **(1)** *R est un anneau total des fractions et donc R est un anneau de Prüfer.*
- **(2)** *R est Gaussien si et seulement si A est Gaussien.*
- **(3)** *R est arithmétique si et seulement si $A := K$ est un corps et $dim_K E = 1$.*
- **(4)** *$w.dim(R) \gneqq 1$. Si M admet une partie génératrice minimale alors $w.dim(R) = \infty$.*

Preuve
(1) Évidente.
(2) D'après le lemme 3.1.1, seulement la condition suffisante doit être démontrée. Supposons que A est un anneau Gaussien et soit $F = \sum_i (a_i, e_i)x^i$ un polynôme dans $R[x]$. Si $a_i \notin M$ pour un certain i, alors (a_i, e_i) est inversible dans R, donc F est Gaussien.

Supposons maintenant que $a_i \in M$ pour chaque i et soit $G = \sum_j (a'_j, e'_j)x^j \in R[x]$. On peut supposer, sans perte de généralité, que $a'_j \in M$ pour chaque j. Soient $f = \sum_i a_i x^i, g = \sum_j a'_j x^j \in A[x]$. On peut facilement vérifier que $ME = 0$ ce qui donne le résultat suivant :

$$\begin{aligned} c(FG) &= c(fg) \propto c(fg)E \\ &= c(fg) \propto 0 \\ &= c(f)c(g) \propto 0 \\ &= c(F)c(G). \end{aligned}$$

Par conséquent, F est Gaussien.

(3) La condition suffisante est claire puisque $K \propto K$ est un anneau principal. On Suppose par la suite que R est un anneau arithmétique. Nous affirmons que A est un corps, et nous

supposons le contraire. Soient $a \neq 0 \in M$ et $e \neq 0 \in E$, alors $I := R(a,0) + R(0,e)$ est un idéal principal dans R (car R est local). D'où $I = R(a',e')$ pour un certain $(a',e') \in R$. Clairement, $(a,0) \in I$ implique que $a' \neq 0$ et $a' \in M$. De plus $(0,e) \in I$ implique que $ba' = 0$ et $e = be'$ pour un certain $b \in A$. Nécessairement, $b \in M$ car $a' \neq 0$. Il en résulte que $e = be' = 0$, ce qui est une contradiction, d'où le résultat.
Considérons maintenant $e, e' \in E\backslash\{0\}$, alors $I = R(0,e) + R(0,e')$ est un idéal principal de R, d'où par le même argument utilisé dans la preuve du théorème 3.1.1(2), on obtient $e = ke'$ pour un certain $k \in K$ et donc $dim_K E = 1$.
(4) Soient $J := 0 \propto E$, et $\{(f_i)\}_{i\in I}$ une base du (A/M)-espace vectoriel E. Considérons la suite exacte de R-modules suivante :

$$0 \longrightarrow Ker(u) \longrightarrow R^{(I)} \xrightarrow{u} J \longrightarrow 0 \qquad (1)$$

où $u((a_i,e_i)_{i\in I}) = (0, \sum_{i\in I} a_i f_i)$. Donc, $Ker(u) = (M \propto E)^{(I)}$. Comme dans la preuve du lemme 3.1.2, nous identifions $R^{(I)}$ avec $A^{(I)} \propto E^{(I)}$ comme R-modules. Nous affirmons que J n'est pas plat. Dans le cas contraire, d'après [57, Théorème 3.55], on obtient $J^{(I)} = (M \propto E)^{(I)} \cap JR^{(I)} = J(M \propto E)^{(I)} = 0$, ce qui est absurde, d'où J est plat. D'après [57, Théorème 2.4], $w.gl.dim(R) \gneqq 1$. Ensuite, supposons que M admet une partie génératrice minimale. Alors, on peut facilement vérifier que $M \propto E$ est admet aussi une partie génératrice minimale. Soit alors $(b_i,g_i)_{i\in L}$ un famille génératrice minimale de $M \propto E$. considérons la suite exacte de R-modules suivante :

$$0 \longrightarrow Ker(v) \longrightarrow R^{(L)} \xrightarrow{v} M \propto E \longrightarrow 0$$

où $v((a_i,e_i)_{i\in L}) = \sum_{i\in L}(a_i,e_i)(b_i,g_i)$. L'hypothèse de minimalité (voir la preuve de [57, Lemme 4.43]) donne $Ker(v) \subseteq (M \propto E)^{(L)}$. Il s'ensuit alors que $Ker(v) = V \propto E^{(L)} = (V \propto 0) \oplus J^{(L)}$, où

$$V := \left\{ (a_i)_{i\in L} \in M^{(L)} \;\middle|\; \sum_{i\in L} a_i b_i = 0 \right\}$$

On obtient :

$$fd((V \propto 0) \oplus J^{(L)}) \leq fd(M \propto E) \qquad (2)$$

D'autre part, de la suite exacte (1), nous obtenons

$$fd(M \propto E) = fd(M \propto E)^{(I)} \leq fd(J) - 1 \qquad (3)$$

Par une combinaison de (2) et (3) on obtient $fd(J) \leq fd(J) - 1$. Par conséquent, la dimension plate de J (à fortiori la dimension globale faible de R) doit être infinie , ce qui achève la preuve du théorème. ■

le théorème 3.2.1 génère de nouveaux exemples d'anneaux avec des diviseurs de zéro soumis aux conditions de Prüfer comme indiqué ci-dessous.

***Exemple* 3.2.1**
Soit V un domaine de valuation non trivial. Alors $R := V \propto \dfrac{V}{M}$ est un anneau total des fractions Gaussien, qui n'est pas arithmétique.

***Exemple* 3.2.2**
Soient K un corps et E un K-espace vectoriel tel que $dim_K(E) \geq 2$. Alors $R := K \propto E$ est un anneau total des fractions Gaussien non arithmétique.

***Exemple* 3.2.3**
Soit (A, M) un domaine local qui n'est pas de valuation. Alors $R := A \propto \dfrac{A}{M}$ est un anneau total des fractions, qui n'est pas Gaussien.

***Exemple* 3.2.4**
Soit $\mathbb{R}$ le corps des nombres réels et x une indéterminée sur $\mathbb{R}$. Alors $R := \mathbb{R} \propto \mathbb{R}[x]$ satisfait les assertions suivantes :

(1) R est un anneau Gaussien.

(2) R n'est pas un anneau arithmétique.

(3) R n'est pas un anneau cohérent.

(4) R est local d'idéal maximal nilpotent non nul.

(5) $w.gl.dim(R) = \infty$.

Preuve
Les assertions (1) et (2) découlent du théorème 3.2.1. Pour l'assertion (3), voir [47, Théorème 2.6(2)].
(4) est clair, puisque l'idéal maximal de R est $M := 0 \propto R[x]$ (D'après [44, Théorème 25.1(3)]) avec $M^2 = 0$.
Finalement, (5) est satisfaits par le théorème 3.2.1(4), [8, Proposition 6.3], ou [8, Théorème 6.4].

3.3 Conjecture de Kaplansky-Tsang-Glaz-Vasconcelos

***Conjecture* 3.3.1**
Tout polynôme non nul Gaussien est de contenu localement principal

***Définition* 3.3.1**
Un anneau R est dit pseudo-arithmétique si tout polynôme Gaussien sur R est de contenu localement principal.

***Théorème* 3.3.1**
Soient A un domaine qui n'est pas un corps et K son corps des fractions.

(1) *Soit $R := A \propto K$, l'extension triviale de A par K. Alors R est un anneau pseudo-arithmétique.*

(2) *Soit $A \subseteq B$ une extension d'anneaux et $R = A \propto B$ l'extension triviale de A par B. Si R est pseudo-arithmétique, alors A l'est aussi.*

Preuve
(1) Soit $F := \sum\limits_i (a_i, k_i)x^i$ un polynôme Gaussien non nul dans $R[x]$. Supposons que $a_i \neq 0$ pour un certain i . Alors (a_i, k_i) est régulier dans R et donc $c(F)$ l'est dans R. D'où, la propriété Gaussien force F d'être régulier dans $R[x]$. Donc $c(F)$ est localement principal, d'après [50, Théorème 6]. Supposons maintenant que $a_i = 0$ pour chaque i. Soit $a \in A\backslash\{0\}$ tel que $ak_i \in A$ pour chaque i et soit $F' := (a, 0)F = \sum\limits_i (0, ak_i)x^i \in A[x]$. Nous affirmons que $f' = \sum\limits_i ak_ix^i$ est un polynôme Gaussien(non nul) de $A[x]$. En effet, considérons $g = \sum\limits_i a'_ix^i \in A[x]$ et posons $G := \sum\limits_i (a'_i, 0)x^i \in R[x]$. Alors $0 \propto c(f'g) = c(F'G) = c(F')c(G)$. De plus $c(F') = \sum\limits_i R(0, ak_i) = 0 \propto c(f')$ et $c(G) = c(g) \propto K$ (voir la preuve du lemme 3.1.1). Il s'ensuit alors que $0 \propto c(f'g) = 0 \propto c(f')c(g)$ et donc $c(f'g) = c(f')c(g)$ D'où $c(f)$ est localement principal, car A est un domaine [49]. Soit $P := p \propto K \in Max(R)$ pour un certain idéal maximal p de A, on pose $S := (A \setminus p) \times 0 \subseteq R \setminus P$ puisque $c(f')A_p = a'A_p$ pour un certain $a' \in A$ on obtient :

$$\begin{aligned}
(a, 0)c(F)R_p &= c(F')R_p \\
&= (0 \propto c(f'))R_p \\
&= (S^{-1}(0 \propto c(f')))R_p \\
&= (0 \propto c(f')A_p)R_p \\
&= (0 \propto a'A_p)R_p \\
&= (0, a')R_p = (a, 0)(0, \frac{a'}{a})R_p
\end{aligned}$$

$C(F)R_p = (0, \frac{a'}{a})R_p$ puisque $(a, 0)$ est régulier dans R. Ainsi $c(F)$ est localement principal et donc R est un anneau pseudo-arithmétique

(2) Soit $f = \sum\limits_i a_ix^i$ un polynôme Gaussien sur A et posons $F := \sum\limits_i (0, a_i)x^i \in R[x]$. Soit $G = \sum\limits_i (a'_i, b_i)x^i \in R[x]$ et posons $g := \sum\limits_i a'_ix^i \in A[x]$. Puisque f est Gaussien, on a $c(F)c(G) = (0 \propto c(f))c(G) = 0 \propto c(f)c(g) = 0 \propto c(fg)$. D'autre part, on peut vérifier facilement que $c(FG) = 0 \propto c(fg)$. Par conséquent, $c(FG) = c(F)c(G)$, donc F est un polynôme Gaussien sur R. D'où $c(F) = 0 \propto I$ est un idéal localement principal de R . Donc $C(F) = 0 \propto I$ est un idéal de R localement principal où $I := c(f)$. Maintenant, pour obtenir que I est localement principal, nous adaptons la preuve du lemme 3.1.1 dans le cas arithmétique. ■

Évidemment, un anneau est arithmétique si et seulement s'il est Gaussien et pseudo-arithmétique. Dans ce contexte, notons que les exemples 3.1.2 et 3.2.2, illustrent l'échec du théorème 3.3.1(1) pour les anneaux extensions triviales $R := A \propto E$ avec $E \neq qf(A)$.

***Exemple* 3.3.1**
Soient (A, M) un anneau local qui n'est pas un corps et E un $\frac{A}{M}$-espace vectoriel non nul. Alors $R := A \propto E$ est un anneau de Prüfer qui n'est pas pseudo-arithmétique. En effet le théorème 3.2.1 assure que R est un anneau total des fractions (donc de Prüfer) mais qui n'est pas arithmétique. Nous affirmons que $f := (a, 0) + (0, e)x$, où $a \neq 0 \in M$ et $e \neq 0 \in E$, est Gaussien mais $c(f)$ n'est pas principal dans R. Pour voir ceci, considérons $g \in R[x]$. Si $g \notin (M \times E)[x]$, alors le lemme de Gauss assure que $c(fg) = c(f)c(g)$ puisque R est local d'idéal maximal $M \propto E$. On suppose que $g \in (M \times E)[x]$. Alors, le fait que $ME = 0$ donne :

$$c(f)c(g) = (a, 0)c(g) = c((a, 0)g) = c(fg).$$

Maintenant, adaptons la démonstration du théorème 3.2.1(3), pour obtenir que $c(f)$ n'est pas principal, et donc R n'est pas pseudo-arithmétique.

***Remarque* 3.3.1**
(1) Soient A un domaine qui n'est pas de Prüfer et $K := qf(A)$. Cconsidérons $R := A \propto K$, l'anneau extension triviale de A par K. Alors, d'après le Corollaire 3.1.1, R n'est pas un anneau de Prüfer (à fortiori, R n'est pas arithmétique). Par ailleurs, il y a beaucoup de polynômes Gaussiens non régulier sur R, par exemple, $f := \sum_i (0, k_i)x^i$. Cependant, le théorème 3.3.1 assure que tout polynôme Gaussien sur R est d'idéal contenu localement principal (i.e, R est pseudo-arithmétique).
(2) Ensuite, nous examinons le cas Noethérien. Dans [42], un anneau local (R, M) est dit approximativement de Gorenstein si R est Noethérien et pour tout entier $n > 0$, il existe un idéal $I \subseteq M^n$ tel que R/I est Gorenstein (par exemple, tout anneau Noethérien local (R, M) avec le M-adique complétion $\widehat{R}$ réduit est approximativement de Gorenstein). Heinzer et Huneke ont montré que tout anneau approximativement de Gorenstein est pseudo-arithmétique [42, Théorème 1.5]. Ce résultat combiné avec [42, Remarque 1.6] affirme que la Noethérieniti n'a aucun effet direct sur la notion de pseudo-arithmétique même en dimension faible, dans le sens que les anneaux locaux non-Gorenstein Artinian ne sont pas pseudo-arithmétiques. Enfin, notons que l'exemple ci-dessus $R := A \propto K$ n'est pas Noethérien car il n'est pas cohérent d'après [47, Théorème 2.8].

(3) À partir de [38], un anneau R est dit un ***(PF)-anneau*** si tout idéal principal de R est plat, ou, de façon équivalente, si R est un domaine local [35, Théorème 4.2.2(3)]. Un anneau R est dit un ***(PP)-anneau*** ou de anneau de Baer faible si tout idéal principal de R est projectif. Dans la classe des anneaux Gaussiens, les propriétés (PP) et (PF) coïncident, respectivement, avec la notion de semi-héréditaire et de dimension globale faible inférieure ou égal 1. Clairement, notons que l'exemple ci-dessus $R := A \propto K$ n'est pas un domaine local. Compte tenu de l'exemple 3.3.1 et de la Remarque 3.3.1, la (Fig.1) résume les relations entre toutes ces classes d'anneaux où les implications sont irréversibles en général. De la discussion ci-dessus, il se trouve que la notion de pseudo-

arithmétique doit avoir une caractérisation accueille les trois classes hétérogènes ; arithmétiques, domaines locaux, et localement approximativement de Gorenstein (voir Fig.1). Cette nouvelle caractérisation offrira une fin heureuse à la conjecture de **Kaplansky-Tsang-Glaz-Vasconcelos** .
Dans cette veine, on conjecture ce qui suit :

***Conjecture* 3.3.2**
Un anneau R est pseudo-arithmétique si et seulement si l'idéal nul est localement irréductible.

***Remarque* 3.3.2**
(1) Fuchs, Heinzer et Olberding ont récemment étudié l'irréductibilité dans les anneaux commutatifs [32, 31] et ils ont observé qu'il est facile de voir qu'un anneau R est arithmétique si et seulement si pour tout idéal I de R, I_M est un idéal irréductible de R_M, pour tout idéal maximal M de R contenant I [32].

(2) Supposons que le conjecture 3.3.2 est vrai. Si R est un domaine local ou localement approximativement de Gorenstein, alors un polynôme sur R est Gaussien si et seulement si son contenu est localement principal [49, Théorème 4] et [42, Théorème 1.5]. En particulier, tout polynôme non nul sur un domaine est Gaussien si et seulement si son contenu est inversible. En effet, la propriété domaine local découle du fait que l'idéal nul dans un domaine est irréductible. Ensuite, supposons que R est localement approximativement de Gorenstein. Rappelons qu'un polynôme Gaussien $f := \sum_i a_i x^i$ sur un anneau R force son image $\overline{f} := \sum_i \overline{a_i} x^i$ d'être Gaussien sur R/I, pour tout idéal I de R. En utilisant ce fait et le fait que la condition Gaussien est une propriété locale, en combinaison avec le définition d'un anneau localement approximativement de Gorenstein , Heinzer et Huneke ont montré que la preuve se réduit au cas où R est un anneau de Gorenstein local de dimension zéro (voir le début de la preuve de [42, Théorème 1.5]). Mais dans ce cadre l'idéal nul est irréductible.

Chapitre 4

Les conditions de Prüfer dans La duplication amalgamée d'un anneau le long d'un idéal

M. Chhiti, M. Jarrar, S. Kabbaj, N. Mahdou ; *Prüfer Conditions in an Amalgamated Duplication of a Ring Along an Ideal.* Communications in Algebra, 43 : 249-261, (2015)

4.1 Définitions et notations

***Définition* 4.1.1**
Un anneau R est dit un ***(fqp)-anneau****, si tout idéal de type fini de R est quasi-projectif [1].*

Soit R un anneau, alors le schéma suivant résume les relations entre les conditions de Prüfer où les implications ne peuvent pas être inversées en général, [1, 9, 8, 38, 37]

$$\begin{array}{c} \text{R est semi-héréditaire} \\ \Downarrow \\ w.gl.dim(R) \leq 1 \\ \Downarrow \\ \text{R est arithmétique} \\ \Downarrow \\ \text{R est un } \textbf{fqp}\text{-anneau} \\ \Downarrow \\ \text{R est Gaussien} \\ \Downarrow \\ \text{R est de Prüfer.} \end{array}$$

***Définition* 4.1.2**
Soient A un anneau, I un idéal de A, et $\pi : A \to \frac{A}{I}$ la surjection canonique. La duplication amalgamée de A le long de I, notée $A \bowtie I$, est le produit fibré de π et π ; c'est le sous-anneau de $A \times A$, définie par :

$$A \bowtie I := \{(a, a+i) \mid a \in A,\, i \in I\}$$

Tout le long de ce qui suit , $A \bowtie I$ désigne la duplication amalgamée d'un anneau A le long d'un idéal I. Si J est un idéal de A, alors $J \bowtie I := \{(j, j+i) \mid j \in J,\, i \in I\}$ est un idéal de $A \bowtie I$ avec $\dfrac{A \bowtie I}{J \bowtie I} \cong \dfrac{A}{J}$ [21, Proposition 5.1]. Sous l'injection naturelle $i : A \hookrightarrow A \bowtie I$ défini par $i(a) = (a, a)$, nous identifions A avec son image dans $A \bowtie I$; et la surjection naturelle $A \bowtie I \twoheadrightarrow A$ donne l'isomorphisme $\dfrac{A \bowtie I}{(0) \bowtie I} \cong A$ [19, Remarque 1].
En outre, pour un anneau R On note :
$Q(R)$:={l'anneau total des fractions de R},
$Z(R)$:={l'ensemble des diviseurs de zéro de R},
$U(R)$:={ l'ensemble des éléments inversibles},
$Nil(R)$:={Le Nilradical de R},
$J(R)$:={Le radical de Jacobson},
$Max(R)$:={L'ensemble des idéaux maximaux de R},
$Max(R, I)$:={$m \in Max(R) \mid I \subseteq m$},
$Ann(I)$:={L'annulateur d'un idéal I de R}.

4.2 Transfert de la condition anneau de Prüfer

***Remarque* 4.2.1**
Soient A un anneau, I un idéal de A, et P un idéal premier de A. Dans [19, Propositions 5 et 7] D'Anna a prouvé que si $I \nsubseteq P$, alors $\widetilde{P} := \{(p+i, p) \mid p \in P, i \in I\}$ et $P \bowtie I$ sont les seuls idéaux premiers de $A \bowtie I$ couché sur P, et nous avons :

$$\frac{A \bowtie I}{\widetilde{P}} \cong \frac{A \bowtie I}{P \bowtie I} \cong \frac{A}{P} \ \textit{et} \ (A \bowtie I)_{\widetilde{P}} \cong (A \bowtie I)_{P \bowtie I} \cong A_P.$$

Notons que $P \bowtie I$ et $\widetilde{P}$ sont incomparables. Cependant, si $I \subseteq P$ alors $P \bowtie I = \widetilde{P}$ est l'unique idéal premier de $A \bowtie I$ couché sur P, et nous avons :

$$\frac{A \bowtie I}{P \bowtie I} \cong \frac{A}{P} \ \textit{et} \ (A \bowtie I)_{P \bowtie I} \cong A_P \bowtie I_P.$$

En conséquence :
(A, m) est local avec $I \subseteq \mathrm{m}$ si et seulement si $A \bowtie I$ est local d'idéal maximal $\mathrm{m} \bowtie I$.

***Théorème* 4.2.1**
Soient (A,m) un anneau local et I un idéal propre de A. Alors $A \bowtie I$ *est un anneau de Prüfer si et seulement si A est un anneau de Prüfer et* $I = aI$ *pour tout* $a \in \mathrm{m} \setminus \mathrm{Z(A)}$.
***Remarque* 4.2.2**

(1) Soit (A,m) un anneau de Prüfer local. On peut facilement vérifier que :

$$aI = a^2I, \forall a \in \mathrm{m} \text{ (i.e, } \forall \mathrm{a} \in \mathrm{A)}$$
$$\Downarrow$$
$$aI = I, \forall a \in \mathrm{m} \setminus \mathrm{Z(A)} \text{ (i.e, } \forall \mathrm{a} \in \mathrm{A} \setminus \mathrm{Z(A))}$$
$$\Downarrow$$
$$I \subseteq Z(A) \subseteq \mathrm{m}.$$

Par conséquent, d'après le théorème 4.2.1, si I est un idéal régulier propre de A (i.e, $I \nsubseteq Z(A)$), alors l'amalgamation $A \bowtie I$ n'est jamais un anneau de Prüfer. La première hypothèse "$aI = a^2I, \ \forall a \in \mathrm{m}$" sera utilisé plus tard dans le théorème 4.3.1 pour caractériser les amalgamations soumis aux conditions Gaussien et **fqp**.

(2) Notons que, dans le cas $(0) \neq I \subseteq Z(A)$, l'hypothèse "$I = aI, \forall a \in \mathrm{m} \setminus \mathrm{Z(A)}$" n'est pas nécessairement intégré dans le condition anneau de Prüfer local. Par exemple, posons $A := \mathbb{Z}_{(2)} \propto \mathbb{Q}$ et $I := 0 \propto \mathbb{Z}_{(2)}$. Alors A est un anneau enchaîné [5, Théorème 2.1(2)] d'idéal maximal $2\mathbb{Z}_{(2)} \propto \mathbb{Q}$ et $I^2 = 0$, alors que $I \neq (4,0)I$.. Donc, d'après le théorème 4.2.1, $A \bowtie I = A \propto I$ n'est pas un anneau de Prüfer.

La preuve du théorème repose sur les lemmes suivants qui sont d'intérêts indépendants. On rappel que $f \in R[x]$ est dit un polynôme de Gauss si $c(fg) = c(f)c(g)$, pour tout $g \in R[x]$ [58].

***Lemme* 4.2.1**
Soient A un anneau et I un idéal de A. Si le polynôme $F(x) := \sum_{i=0}^{n}(a_i, a_i)x^i$ *est Gaussien sur* $A \bowtie I$*, alors* $f := \sum_{i=0}^{i} a_ix^i$ *est Gaussien sur A.*

Preuve
Évidente. ∎

***Lemme* 4.2.2**
Soient A un anneau et I un idéal de A. Si $A \bowtie I$ *est de Prüfer, alors A l'est aussi.*

Preuve
Supposons que $A \bowtie I$ est un anneau de Prüfer. Soit $J := \sum_{i=0}^{n} a_iA$ un idéal de type fini régulier de A et a un élément régulier de J. Il est clair que, $G := \sum_{i=0}^{n} (a_i, a_i)A \bowtie I$ est un idéal de type fini régulier de $A \bowtie I$ car $(a,a) \in G$. Donc G est inversible, et par

suite le polynôme $F(x) := \sum_{i=0}^{n}(a_i, a_i)x^i$ est Gaussien sur $A \bowtie I$. D'après le lemme 4.2.1, $f := \sum_{i=0}^{i} a_i x^i$ est Gaussien sur A. Par conséquent, d'après [9, Théorème 4.2], $J = c(f)$ est inversible dans A et donc A est de Prüfer.

Nous rappelons un résultat important de Maimani et Yassemi qui fournit une description de l'ensemble des diviseurs de zéro de $A \bowtie I$ pour un anneau commutatif quelconque. Dans ce qui suit, le sous-ensemble $\{ (a, a+i) | a \in Z(A), i \in I \}$ de $A \bowtie I$ sera noté par $Z(A) \bowtie I$.

***Lemme* 4.2.3**
Soient A un anneau et I un idéal de A. Alors

$$Z(A \bowtie I) = Z(A) \bowtie I \cup \{(i, 0) \mid i \in I\} \cup \{(a, a+i) \Bigm| a \in A \backslash Z(A) \text{ et } \exists j \neq 0 \in I,\ j(a+i) = 0 \}$$

***Lemme* 4.2.4**
Soient R un anneau de Prüfer, local et x un élément régulier de R. Alors, xR est comparable avec tout idéal principal de R.

Preuve
La preuve découle immédiatement de [1, lemme 3.8].

***Lemme* 4.2.5**
Soient A un anneau de Prüfer local et I un idéal de A. Alors

$$I \subseteq Z(A) \Leftrightarrow Z(A \bowtie I) = Z(A) \bowtie I.$$

Preuve
Supposons que $I \subseteq Z(A)$. Soit a un élément régulier de A et soit $i \in I$. Nous affirmons que $a+i$ est régulier dans A. En effet, les idéaux aA et iA sont comparables par le lemme 4.2.4. Il en résulte que $i = ka$ pour un certain $k \in A$ non unitaire puisque $I \subseteq Z(A)$. Ainsi, un $a + i = (1 + k)a \in A \setminus Z(A)$ d'où l'affirmation. Par conséquent, l'ensemble $\{(a, a + i) \Bigm| a \text{ est } r\acute{e}\text{gulier et } j(a + i) = 0 \text{ pour un certain } j \neq 0 \in I \}$ est vide. Donc, à partir de la description de $Z(A \bowtie I)$ dans le lemme 4.2.3, nous obtenons le résultat voulu. L'inverse est trivial par le même lemme.

Preuve du Théorème 4.2.1 :
(1) (A, m) est supposé local et $I \subseteq \mathrm{m}$; c'est équivaut à dire que $A \bowtie I$ est local. Supposons que $A \bowtie I$ est de Prüfer. D'après le lemme 4.2.2, A est de Prüfer. Notons que $Z(A) \subseteq \mathrm{m}$. Nous affirmons que $I \subseteq Z(A)$. En effet, soit $i \in I \setminus Z(A)$. Il est clair que (i, i) est régulier dans $A \bowtie I$. D'après le lemme 4.2.4, les idéaux $((0, i))$et $((i, i))$ sont comparables dans $A \bowtie I$ et nécessairement, $(0, i) = (i, i)(b, b + j)$ pour certains $b \in A$ et $j \in I$. Alors $b = 0$ et $i = ij$, où $j = 1$, ce qui est absurde. Ensuite, soit $a \in A \setminus Z(A)$ et $i \in I$. Par le lemme 4.2.5,$(a, a + i)$ est régulier dans $A \bowtie I$. Comme ci-dessus, via le lemme 4.2.4, nous

obtenons $(0,i) = (a, a+i)(b, b+j)$ pour certains $b \in A$ et $j \in I \subseteq \mathrm{m}$. Par conséquent, $b = 0$ et donc $i = aj(1-j)^{-1} \in aI$, comme désiré.

Inversement, supposons que A est un anneau de Prüfer (local) avec $I = aI$ pour tout $a \in m \setminus Z(A)$ (i.e, pour tout $a \in A \setminus Z(A)$). Soit $F := ((a, a+i)(b, b+j))$ un idéal régulier de $A \bowtie I$. Supposons que l'un, au moins, des deux générateurs de F est régulier. D'après le lemme 4.2.5, a ou b est régulier dans A. Donc, d'après le lemme 4.2.4, (a) et (b) sont comparables dans A ; disons que , a est régulier dans A et $b = ac$ avec $c \in A$. Par hypothèse, il existe $k \in I$ tel que $j - ic = (a+i)k$. Donc, on peut facilement vérifier que $(b, b+j) = (a, a+i)(c, c+k)$ c'est à dire que $F := ((a, a+i))$. Maintenant, supposons que les deux générateurs de F sont diviseurs de zéro et soit $(r, r+h)$ un élément régulier de F. Donc, comme ci-dessus on obtient $a = ra'$, $i - ha' = (r+h)k_1$, $b = rb'$, et $j - hb' = (r+h)k_2$, pour certains $a', b' \in A$ et $k_1, k_2 \in I$ ce qui donne $F := ((r, r+h))$. Donc, dans les deux cas F est principal (et à fortiori inversible) et par suite $A \bowtie I$ est un anneau de Prüfer [10, Théorème 2.13(2)].

► Comme application du théorème 4.2.1 (combiné avec le théorème 4.3.1), on peut construire un nouvel exemple d'anneau de Prüfer qui n'est pas Gaussien.

***Exemple* 4.2.1**
Soit $R := \frac{\mathbb{Z}}{8\mathbb{Z}} \bowtie \frac{2\mathbb{Z}}{8\mathbb{Z}}$. On a $Z\left(\frac{\mathbb{Z}}{8\mathbb{Z}}\right) = \frac{2\mathbb{Z}}{8\mathbb{Z}}$ et donc d'après, le théorème 4.2.1, R est un anneau de Prüfer local (qui n'est pas Gaussien par le théorème 4.3.1 (2)). En outre, R n'est pas, ni une extension triviale d'un anneau ni un produit fibré de type étudié dans [15, 14].

► Les anneaux totaux des fractions sont une source importante d'anneaux de Prüfer. Ensuite, nous étudions le transfert de cette notion à une amalgamation.

***Proposition* 4.2.1**
Soient A un anneau et I un idéal de A tel que $I \subseteq J(A)$. Alors $A \bowtie I$ est un anneau total des fractions si et seulement si A l'est aussi.

Preuve
Supposons que A est un anneau total des fractions et posons $(x, x+i) \in A \bowtie I$. Si x est un diviseur de zéro dans A, alors $(x, x+i)$ l'est aussi dans $A \bowtie I$ puisque nous avons toujours $Z(A) \bowtie I \subseteq Z(A \bowtie I)$. Supposons maintenant que x est inversible dans A et posons $y := x^{-1}$ et $j := -iy^2(1+yi)^{-1}$. Comme $I \subseteq J(A)$ alors $j \in I$. De plus, nous avons $(x, x+i)(y, y+i) = (1,1)$. Donc $(x, x+i)$ est inversible dans $A \bowtie I$. Inversement, on suppose que $A \bowtie I$ est un anneau total des fractions. Soit $x \in A$ alors (x, x) est un diviseur de zéro ou bien inversible dans $A \bowtie I$. Clairement, on a x est un diviseur de zéro ou inversible dans A, ce qui termine la preuve. ■

Soit (A, m) un anneau local, et soit n un entier ≥ 2. D'après la proposition 4.2.1, $\frac{A}{\mathrm{m}^n} \bowtie \frac{\mathrm{m}^{n-1}}{\mathrm{m}^n} \left(= \frac{A}{\mathrm{m}^n} \propto \frac{\mathrm{m}^{n-1}}{\mathrm{m}^n}\right)$ est un anneau total des fractions local et à fortiori anneau de Prüfer local.

Rappelons que la notion d'un anneau de Prüfer n'est pas stable par quotient [12, Exemple 3.3] (aussi [51, Exemple 3,6] et [6, Exemple 2,8]). Un anneau R est localement de Prüfer si R_p est de Prüfer $\forall p \in Spec(R)$ [14, Définition 2.1]. Lucas a prouvé que si R_m est de Prüfer, pour tout $m \in Max(R)$ (à fortiori, si R est localement de Prüfer), alors R est de Prüfer [51, Proposition 2.10] ; et construit un anneau de Prüfer qui n'est pas local et non localement de Prüfer [51, Exemple 2.11]. Récemment, Boynton a donné un exemple d'un anneau de Prüfer local qui n'est pas localement de Prüfer [14, Exemple 2.4]

4.3 Transfert des conditions arithmétique, Gaussien, et fqp

Nous rappelons la caractérisation importante suivante des anneaux Gaussiens. Pour tout a et b dans un anneau Gaussien, nous avons $(a,b)^2 = (a^2)$ ou (b^2) ; de plus si $ab = 0$ et par exemple $(a,b)^2 = (a^2)$, alors $b^2 = 0$, [8, Théorème 2.2]
Notons que les notions arithmétique et Gaussien sont stables par quotient.

***Définition* 4.3.1**
Soient R un anneau et I un idéal de R. On dit que I est quasi-projectif si l'application naturelle $Hom_R(I,I) \to Hom_R(I,I/J)$ définie par $f \mapsto \overline{f}$ est surjective pour tout sous-idéal J de I.
*R est dit un **fqp**-anneau si tout idéal de type fini de R est quasi-projectif [1].*

***Remarque* 4.3.1**
La propriété **fqp**-anneau est stable par produit fini. En effet :
Soient R_1 et R_2 deux **fqp**-anneau, $R := R_1 \times R_2$ et $I := I_1 \times I_2$, où I_i est un idéal de type fini de R_i pour chaque i = 1,2. Soit f $:I \to I/K$ une R-application, où K est un sous-idéal de I, et posons $K = K_1 \times K_2$ et $f = f_1 \times f_2$, où K_i est un sous-idéal de I_i et $f_i \in Hom_R(I_i, I_i/K_i)$ définie par $f_1(x) := a$ telle que $f(x,0) = (a,b)$ et de même pour f_2. Par conséquent, il existe $g_i \in Hom_R(I_i, I_i)$ tel que $\overline{g_i} = f_i$. Il est clair que $\overline{g} = \overline{g_1} \times \overline{g_2} = f$. Il s'ensuit alors que R est un **fqp**-anneau. La réciproque est triviale.

***Théorème* 4.3.1**
Soient (A, m) un anneau local et I un idéal propre de A.

(1) *$A \bowtie I$ est arithmétique si et seulement si A est arithmétique et I =(0).*

(2) *$A \bowtie I$ est Gaussien si et seulement si A est Gaussien, $I^2 = (0)$, et $\forall a \in \mathrm{m}$, $aI = a^2I$.*

(3) *$A \bowtie I$ est un **fqp**-anneau si et seulement si A est un **fqp**-anneau (respectivement, anneau de Prüfer), $\left(Z(A)\right)^2 = 0$, et $\forall a \in \mathrm{m}$, $aI = a^2I$.*

Pour prouver ce théorème nous avons besoin des lemmes suivants.

***Lemme* 4.3.1**
Soient A un anneau et I un idéal propre de A. Soient J un idéal de A et K un sous-idéal de I. Alors $J \bowtie K$ est un idéal $A \bowtie I$ si et seulement si $JI \subseteq K$.

***Lemme* 4.3.2**
*Soient A un anneau et I un idéal propre de A. Si $A \bowtie I$ est un **fqp**-anneau, alors A est un **fqp**-anneau.*

Preuve
Supposons que $A \bowtie I$ est un **fqp**-anneau, et soit $J := (a_1, ..., a_n)$ un idéal de type fini de A, K un sous-idéal de J, et $f \in Hom_A(J, J/K)$. Il s'agit de montrer qu'il existe $g \in Hom_A(J, J)$ tel que $f = \overline{g} \pmod{K}$. Pour cela, considérons l'idéal de $A \bowtie I$, $U := J \bowtie JI$ (lemme 4.3.1). Nous affirmons que $U := ((a_1, a_1), ..., (a_n, a_n))$. Évidemment, $(a_i, a_i) \in U \ \forall i = 1, ..., n$. Ensuite, soit $(x, x + h) \in U$. Nous avons :

$$\begin{aligned}
(x, x+h) &= (x, x) + (0, \sum_j e_j f_j) \; (avec, \; x \in J \; et \; (e_j, f_j) \in J \times I, \; 1 \leq j \leq m) \\
&= \sum_i (r_i, r_i)(a_i, a_i) + (0, \sum_j (\sum_i s_{ij} a_i) f_j) \; (avec, \; r_i, s_{ij} \in A, \; 1 \leq i \leq n) \\
&= \sum_i (r_i, r_i)(a_i, a_i) + \sum_j (\sum_i s_{ij} a_i, \sum s_{ij} a_i)(0, f_j) \\
&= \sum_i (r_i, r_i)(a_i, a_i) + \sum_j (0, f_j) \sum_i (s_{ij}, s_{ij})(a_i, a_i) \\
&= \sum_i (r_i, r_i + \sum_j f_j s_{ij})(a_i, a_i),
\end{aligned}$$

D'où l'affirmation.

Soit $V := K \bowtie KI$, un sous-idéal de U par le lemme 4.3.1, et considérons la fonction

$$\begin{aligned}
f : \quad S_0^{-1}A &\longrightarrow S^{-1}R \\
\frac{a}{s} &\longmapsto \frac{(a, 0)}{(s, 0)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F : \qquad\qquad U &\longrightarrow U/V \cong J/K \bowtie JI/KI \\
\sum_{i=0}^{n} \lambda_i (a_i, a_i) &\longrightarrow \sum_{i=0}^{n} \lambda_i (f(a_i), f(a_i)).
\end{aligned}$$

On peut vérifier que F est bien définie et donc un $A \bowtie I$-application. Puisque U est quasi-projective, alors il existe $G \in Hom_{A \bowtie I}(U, U)$ tel que $F = \overline{G} \pmod{V}$. Maintenant, considérons $a \in J$ et $g(a)$ égal à la première coordonnée de $G(a, a)$. Il est clair que, $g \in Hom_A(J, J)$. En outre, $\overline{G(a, a)} = F(a, a) = (f(a), f(a))$ implique que $f = \overline{g}$.

***Lemme* 4.3.3 ([58], Théorème 2)**
*Soit R un **fqp**-anneau local qui n'est pas un anneau enchaîné. Alors*

$$(Nil(R))^2 = 0$$

.

***Lemme* 4.3.4 ([1], Lemme 4.5)**
*Soit R un **fqp**-anneau local qui n'est pas un anneau enchaîné. Alors*

$$Z(R) = Nil(R).$$

Preuve du Théorème 4.3.1 :
(1) Supposons que $A \bowtie I$ est un anneau arithmétique local (i.e anneau enchaîné), alors A l'est aussi car la propriété arithmétique est stable par quotient. De plus, pour chaque $i \in I$, les idéaux $(i,0)A \bowtie I$ et $(0,i)A \bowtie I$ sont comparables. Dans le cas $(i,0) \in (0,i)A \bowtie I$, il existe un élément $(a,j) \in A \times I$ tel que $(0,i) = (a,a+j)(i,0) = (ai,0)$, d'où $i = 0$. De même, l'autre cas donne $i = 0$. Donc, nous concluons que $I = 0$. La réciproque est triviale, en effet $A \bowtie (0) \cong A$

(2) Supposons que $A \bowtie I$ est Gaussien local. Alors A l'est aussi, puisque la propriété Gaussien est stable par quotient. Ensuite, il faut montrer que $I^2 = 0$. Soit $a, b \in I$, alors nous avons $((a,a),(0,a))^2 = ((0,a)^2)$ ou $((a,a)^2)$. Les deux cas donnent, respectivement, $a^2 = 0$ ou $a^2(1-i) = 0$ pour un certain $i \in I \subseteq$ m. Il s'ensuit alors que $a^2 = 0$. De même on a $b^2 = 0$. Maintenant, puisque A est Gaussien alors $ab = 0$. Pour prouver la dernière assertions, considérons $a \in A$ et $i \in I$. Dans $A \bowtie I$, nous avons $((a,a),(0,i))^2 = ((a,a))^2$ car $I^2 = 0$. Il en résulte que $ai = a^2j$ avec $j \in I$, donc $aI = a^2I$, d'où le résultat.

Inversement, soit $(a,a+i),(b,b+i) \in A \bowtie I$. Puisque A est local Gaussien , et si par exemple $(a,b)^2 = (a)^2$ alors $b^2 = a^2x$ et $ab = a^2y$ avec $x, y \in A$. Par ailleurs, $ab = 0$ implique que $b^2 = 0$. Par hypothèse, il existe $i_1, i_2, i_3, j_1, j_2 \in I$ tels que $2bj = a^2xj_1$, $2axi = a^2i_1$, $aj = a^2j_2$, $bi = a^2xi_2$, et $2ayi = a^2i_3$. En utilisant le fait que $I^2 = 0$, et par un calcul simple on obtient $(b,b+j)^2 = (a,a+i)^2(x,x+xj_1-i_1)$ et $(a,a+i)(b,b+j) = (a,a+i)^2(y,y+xi_2+j_2-i_3)$. En outre, supposons $(a,a+i)(b,b+j) = 0$. Ainsi $ab = 0$, d'où $b^2 = 0$ et $2bj = 0$ car $bI = 0$. De sorte que $(b,b+j)^2 = 0$. Par conséquent $A \bowtie I$ est Gaussien local.
Cela termine la preuve de (2).

(3) Sans perte de généralité, nous supposons que $A \bowtie I$ est un **fqp**-anneau local qui n'est pas un anneau enchaîné (i.e,$I \neq 0$). D'après le lemme 4.3.2, A est un **fqp**-anneau (et donc un anneau de Prüfer). Donc $Z(A)$ est un idéal (premier) de A. De plus, par (2), $aI = a^2I$ pour chaque $a \in A$. En particulier, $I = aI$ pour tout élément régulier $a \in A$ et donc par la remarque 4.2.2, $I \subseteq Z(A)$. Ainsi, par le lemme 4.2.5, $Z(A \bowtie I) = Z(A) \bowtie I$. Enfin, le (1) combiné avec les lemmes 4.3.3 et 4.3.4 permettent de conclure que $(Z(A))^2 = 0$

Réciproquement, supposons que A est un anneau de Prüfer,$(Z(A))^2 = 0$, et $aI = a^2I$ pour tout élément $a \in A$. Il s'agit de montrer que $A \bowtie I$ est un fqp-anneau. Tout le long de la preuve, nous utiliserons les résultats suivants $I \subseteq Z(A)$,$I^2 = 0$, et $I = aI \forall a \in A \setminus Z(A)$.

Soient $(a, a+i)$ et $(b, b+j)$ deux éléments non nuls incomparables de $A \bowtie I$.

Affirmations (1) : $a, b \in Z(A)$.

En effet, par l'absurde, supposons que a est régulier dans A. Par le lemme 4.2.4, on a (a) et (b) sont comparables. On suppose que $b = ac$ pour un certain $c \in A$. Il existe $k \in I(= aI)$ tel que $j - ci = ak$ ceci implique que $(b, b+j) = (a, a+i)(c, c+k)$, ce qui est une contradiction. Maintenant, si $a = bc$ pour un certain $c \in A$, nécessairement, b est régulier et donc par le même argument on aboutit à la même contradiction, d'où l'affirmation (1).

Affirmations (2) : $Ann(a, a+i) = Ann(b, b+j)$ et $((a, a+i)) \cap ((b, b+j)) = 0$.

Il est clair que $Ann(a, a+i) \subseteq Z(A \bowtie I) = Z(A) \bowtie I = Ann(b, b+j)$ par le lemme 4.2.5. L'autre inclusion découle directement de l'affirmation (1). Donc $Ann(a, a+i) = Z(A) \bowtie I = Ann(b, b+j)$. Il reste à montrer que $((a, a+i)) \cap ((b, b+j)) = 0$. Pour cela, considérons $(x, x+h)$ et $(y, y+k) \in A \bowtie I$ tels que

$$(a, a+i)(x, x+h) = (b, b+j)(y, y+k)$$

Nous obtenons par l'affirmation (1)

$$ax = by \text{ et } xi = yj$$

Nous affirmons que x ou $y \in Z(A)$. En effet, par l'absurde , nous supposons que x et y ne sont pas réguliers dans A. D'où, d'après le lemme 4.2.4 xA et yA sont comparables ; disons que $x = ry$ pour un certain $r \in A$. Alors $ary = by$ et $ryi = yj$ d'où $b = ra$ et $j = ri$, il s'ensuit alors que $(b, b+j) = (a, a+i)(r, r)$, ce qui est absurde. Par conséquent, x ou $y \in Z(A)$ d'où $ax = by = xi = yj = 0$, ce qui achève la preuve de l'affirmation(2).

Finalement, soit J un idéal de type fini de $A \bowtie I$ de générateur minimal

$\{ (a_1, a_1 + i_1), ..., (a_n, a_n + i_n) \}$. Par l'affirmation (2), nous obtenons

$$\begin{gathered} Ann(a_h, a_h + i_h) = Ann(a_k, a_k + i_k), \quad \forall h \neq k \in \{1, ..., n\}; \\ J = ((a_1, a_1 + i_1) \oplus ((a_2, a_2 + i_2)) \oplus \ldots \oplus ((a_n, a_n + i_n)). \end{gathered}$$

Par conséquent, $((a_h, a_h + i_h)) \cong ((a_k, a_k + i_k))$ et donc $((a_h, a_h + i_h))$ est $((a_k, a_k + i_k))$-projectif, pour tout h, k. D'où d'après [33, Corollaire 1.2], J est quasi-projectif.
ce qui termine la preuve du théorème. ■

***Remarque* 4.3.2**
Il est intéressant de noter que, dans le théorème 4.3.1(2-3), les deux hypothèses $I^2 = 0$ et $(Z(A))^2 = 0$ sont indépendants avec l'hypothèse "$aI = a^2 I$, $\forall a \in A$." Par exemple, si A est un anneau enchaîné et I est l'idéal donné dans la remarque 4.2.2(2), alors on a bien $I^2 = Z((A))^2 = 0$ car $I \subseteq Z(A) = 0 \propto \mathbb{Q}$. Réciproquement, soit $A := \dfrac{\mathbb{Z}}{8\mathbb{Z}}$ et $I := \dfrac{4\mathbb{Z}}{8\mathbb{Z}}$, on peut vérifier que $Z((A))^2 = I \neq 0$ et $aI = a^2 I = 0$, $\forall a \in A := \dfrac{\mathbb{Z}}{8\mathbb{Z}}$.

Le corollaire suivant traite le cas général.

***Corollaire* 4.3.1**
Soient A un anneau et I un idéal propre de A.

(1) *$A \bowtie I$ est arithmétique si et seulement si A est arithmétique et $I_m = 0, \forall m \in Max(A)$.*

(2) *$A \bowtie I$ est localement un **fqp**-anneau si et seulement si A est localement un **fqp**-anneau, $(Z(A_m))^2 = 0$, et $aI_m = a^2 I_m$, $\forall m \in Max(A, I)$, et $\forall a \in m$.*

(3) *$A \bowtie I$ est Gaussien si et seulement si A est Gaussien, $I_m^2 = 0$, et $aI_m = a^2 I_m$, $\forall m \in Max(A, I)$, et $\forall a \in m$.*

Preuve
Soit $m \in Max(A)$. D'après la remarque 4.2.1, on a $(A \bowtie I)_{m \bowtie I} \cong A_m \bowtie I_m$ si $I \subseteq m$ et $(A \bowtie I)_{m \bowtie I} \cong A_m$ si $I \nsubseteq m$. Donc, le théorème 4.3.1 et le fait que les propriétés arithmétiques et Gaussiens sont locaux conduit à la conclusion.

► Comme application du Corollaire 4.3.1, on peut construire un exemple d'un anneau localement un **fqp**-anneau qui n'est pas arithmétique.

***Exemple* 4.3.1**
Soient $A := \frac{\mathbb{Z}}{12\mathbb{Z}}$, $\mathrm{m}_1 := 2\mathrm{A}$, $\mathrm{m}_2 = 3\mathrm{A}$, et $I := \mathrm{m}_1\mathrm{m}_2$. Alors $A \bowtie I$ est localement un **fqp**-anneau qui n'est pas un anneau arithmétique. En effet :

$(Z(A_{\mathrm{m_i}}))^2 = \mathrm{m_i^2 Am_i} = 0$ (pour i=1,2) ; $I_{\mathrm{m}_1} = 6A_{\mathrm{m}_1} \neq 0$; $I_{\mathrm{m}_2} = 0$; et facilement $aI_{\mathrm{m}_1} = a^2 I_{\mathrm{m}_1}, \forall a \in \mathrm{m}_1$

4.4 Dimension globale faible et transfert de la condition semi-héréditaire

***Théorème* 4.4.1**
Soient A un anneau et I un idéal propre de A.

(1) *$w.gl.dim(A \bowtie I) \leq 1$ si et seulement si $w.gl.dim(A) \leq 1$ et $I_m = 0$, $\forall m \in Max(A, I)$.*

(2) *On suppose que I est de type fini , alors $A \bowtie I$ est semi-héréditaire si et seulement si A est semi-héréditaire et $I_m = 0$, $\forall m \in Max(A, I)$.*

Avant de prouver le théorème 4.4.1, nous établissons le lemme suivant :

***Lemme* 4.4.1**
Soient A un anneau et I un idéal propre de A. Si $A \bowtie I$ est cohérent, alors A l'est aussi. La réciproque est vraie lorsque I est de type fini.

Preuve
Si $A \bowtie I$ est cohérent, alors A l'est aussi, par [35, Théorème 4.1.5], puisque A est un sous-anneau rétracté de $A \bowtie I$ à travers l'application $\psi \ : A \bowtie I \to A$ définie par $\psi(a, a+i) = a$. Inversement, supposons que A est cohérent et I de type fini. Rappelons que $I \times 0$ est un idéal de $A \bowtie I$ et $\dfrac{A \bowtie I}{I \times 0} \cong A$ [19, Remarque 1(b)]. Nous affirmons que $I \times 0$ est $A \bowtie I$-cohérent. En effet, soit H un sous idéal de type fini de $I \times 0$. On va montrer que H est de présentation finie. Il est clair que, $H := \sum_{i=1}^{n} A \bowtie I(a_i, 0)$, pour certains $n \in \mathbb{N}$ et $a_i \in I$. Considérons la suite exacte de $A \bowtie I$-modules :

$$0 \longrightarrow Ker(u) \bowtie (A \bowtie I)^n \xrightarrow{u} H \longrightarrow 0,$$

où $u(r_i, r_i + e_i)_{1 \leq i \leq n} = \sum_{i=1}^{n} (r_i, r_i + e_i)(a_i, 0) = (\sum_{i=1}^{n} r_i a_i, 0)$.

$$\text{D'où} \ : \ Ker(u) = \{(r_i, r_i + e_i)_{1 \leq i \leq n} \in (A \bowtie I)^n | \sum_{i=1}^{n} r_i a_i = 0\}$$

Maintenant, posons $J := \sum_{i=1}^{n} Ra_i$ un sous idéal de type fini de I, et considérons la suite exacte de A-modules :

$$0 \longrightarrow Ker(v) \longrightarrow A^n \xrightarrow{v} J \longrightarrow 0,$$

où $v(b_i)_{1 \leq i \leq n} = \sum_{i=1}^{n} b_i a_i$. Donc, sous l'identification de $A \bowtie I$-modules $(A \bowtie I)^n = A^n \bowtie I^n$. Nous avons $Ker(u) = Ker(v) \bowtie I$. Or, A est cohérent donc J est de présentation finie. Par conséquent, $Ker(v)$ est un A-module de type fini .D'où $Ker(u)$ est un $A \bowtie I$-module de type fini (I est de type fini). Il s'ensuit alors que H est de présentation finie et donc $I \times 0$ est $A \bowtie I$-cohérent D'après [35, Théorème 2.4.1 (2)], $A \bowtie I$ est cohérent, ce qui prouve le lemme.

Preuve du théorème 4.4.1 :
(1) Si $I_m = 0$, pour tout $m \in Max(A, I)$, alors la remarque 4.2.1 donne $(A \bowtie I)_{\widetilde{m}} \cong (A \bowtie I)_{m \bowtie I} \cong A_m, \forall m \in Max(A), \widetilde{m} = \{(x+i, x) \mid x \in m, i \in I\}$, ensuite le corollaire 4.3.1 (1) conduit à la conclusion.
(2) En combinant le lemme 4.4.1 et (1) et le fait qu'un anneau est semi-héréditaire si et seulement s'il est cohérent et de dimension globale faible au plus égale 1 [10, Théorème 3.3]

***Exemple* 4.4.1**
D'après le théorème 4.4.1,$\frac{\mathbb{Z}}{12\mathbb{Z}} \bowtie \frac{4\mathbb{Z}}{12\mathbb{Z}} = \frac{\mathbb{Z}}{12\mathbb{Z}} \propto \frac{4\mathbb{Z}}{12\mathbb{Z}}$ est un anneau semi-héréditaire puisque $\left(\frac{\mathbb{Z}}{12\mathbb{Z}}\right)_{\frac{2\mathbb{Z}}{12\mathbb{Z}}} = 0$..

On rappelle que la dimension globale faible d'un anneau arithmétique (respectivement Gaussien cohérent) est soit 0,1 ou ∞ [56] (respectivement.,[56, Théorème 3.3]) Maintenant, on utilise l'amalgamation pour construire de nouveaux exemples d'anneaux Gaussiens non-cohérents, non-arithmétiques avec dimension globale faible infinie.

***Exemple* 4.4.2**
Soient A un anneau Gaussien, non-cohérent,local et $I \neq 0$ un idéal propre de$A$ avec $I^2 = 0$ et $aI = a^2 I \forall a \in A$. Supposons que $0 \times I$ n'est pas plat dans $A \bowtie I$ (en particulier, si I est de type fini ou non plat sur A). Ensuite, l'amalgamation $R := A \bowtie I$ est un anneau Gaussien non-cohérent, non-arithmétique, local avec $w.gl.dim(R) = \infty$.
Pour un exemple explicite, on peut prendre $A := \mathbb{Z}_2 \propto \mathbb{Q}$ et $I := 0 \propto \mathbb{Q}$.

Preuve
D'après le théorème 4.3.1, le théorème 4.4.1, et le lemme 4.4.1, R est un anneau Gaussien non cohérent, non arithmétique et local avec $w.gl.dim(R) \geq 2$. Ensuite, supposons que $0 \times I$ n'est pas $A \bowtie I$-plat. Soit $\{f_i\}_{i \in \Delta}$ un ensemble de générateurs de I, et considérons la R-application $u : \ R^{(\Delta)} \longrightarrow 0 \times I$ définie par $u(a_i, e_i)_{i\in\Delta} = \sum\limits_{i\in\Delta}(a_i, e_i)(0, f_i) = (0, \sum\limits_{i\in\Delta} a_i f_i)$.
Clairement, $Ker(u) = V \bowtie I^{(\Delta)}$, où $V := \{(a_i)_{i\in\Delta} / \sum\limits_{i\in\Delta} a_i f_i = 0\}$. Ici nous identifions R^{Δ} avec $A^{\Delta} \bowtie I^{\Delta}$ comme des R-modules. Nous avons la suite exacte de R-modules suivante :

$$0 \to V \bowtie I^{(\Delta)} \to R^{(\Delta)} \overset{u}{\to} 0 \times I \to 0$$

D'autre part, $V \bowtie I^{(\Delta)} = V^* \oplus (0 \times I)^{(\Delta)}$,où $V^* = \{(a, a)/a \in V\}$. Puisque $0 \times I$ est n'est pas plat, la suite exacte ci-dessous donne :

$$fd(0 \times I) \leq fd(V^* \oplus (0 \times I)^{\Delta}) \leq fd(0 \times I) - 1$$

Par conséquent, $fd(0 \times I) = w.gl.dim(R) = \infty$, d'où le résultat.

Maintenant, si I est de type fini, alors $0 \times I$ n'est pas R-plat car R est local et $(a, 0)(0 \times I) = 0 \ \forall a \neq 0$. De plus, en utilisant l'interprétation de la platitude en termes de relations [13, Ch. I,§2, Corollaire 1], on peut facilement vérifier que, si $0 \times I$ est R-plat, alors I est A-plat.

Pour l'exemple explicite, il est facile de voir que $I^2 = 0$ et $aI = a^2 I \ \forall a \in 2\mathbb{Z} \propto \mathbb{Q}$. Par ailleurs, A est arithmétique (et donc Gaussien) par [6, Théorème 2.1] et non cohérent par [47, Théorème 2.8]. Finalement, nous affirmons que $I := 0 \propto \mathbb{Q}$ n'est pas plat dans $A := \mathbb{Z}_{(2)} \propto \mathbb{Q}$ puisqu'il n'est pas plat dans $\mathbb{Q} \propto \mathbb{Q}$. Pour la démonstration, voir la preuve de [6, Lemme 2.3].

Chapitre 5

Les conditions de Prüfer dans l'amalgamation algébrique le long d'un idéal

C. A. Finocchiaro; *Prüfer-Like Conditions on an Amalgamated Algebra Along an Ideal*. Houston journal of mathematics. 40-1, 63-79 (2014)

5.1 Définitions et Notations

***Définition* 5.1.1**
Soit A un anneau

- (P_1) *A est anneau semi-héréditaire si tout idéal de type fini de A est projectif.*
- (P_2) *w.gl.dim(A)≤ 1 si A_p est domaine de valuation pour tout idéal premier (maximal) de A.*
- (P_3) *A est arithmétique anneau si tout idéal de type fini de A est localement principal.*
- (P_4) *A est anneau gaussien si $c(fg) = c(f)c(g)$, pour tout f et $g \in R[x]$.où $c(h) = (a_1, a_2, ..., a_n)$ est l'idéal de R engendré par les coefficients de h dans R.*
- (P_5) *A est un anneau de Prüfer si tout idéal régulier de type fini de R est inversible.*

Dans [8] il est montré que pour tout $n \in \{1, 2, 3, 4\}$ la condition (P_n) implique la condition (P_{n+1}). De plus, Bazouni et Glaz ont montré que l'anneau A satisfait la condition (P_n) si et seulement s'il satisfait la condition (P_{n+1}) et l'anneau total de fractions $Q(A)$ satisfait la condition (P_n).

Tout d'abord on rappel la définition du produit fibré et l'amalgamation algébrique :

***Définition* 5.1.2**
Soient $\alpha : A \longrightarrow C$, $\beta : B \longrightarrow C$ des homomorphisme d'anneaux.
Alors $D = \alpha \times_C \beta = \{(a,b) \in A \times B \mid \alpha(a) = \beta(b)\}$ est un sous-anneau de $A \times B$ appelé le produit fibré de α et β.

***Définition* 5.1.3**
Soient A et B deux anneaux commutatifs et unitaires, soit J un idéal de B, et soit $f : A \longrightarrow B$ un homomorphisme d'anneaux. On appelle l'amalgamation de A et B suivant J et respectant f le sous anneau de $A \times B$ défini par :

$$A \bowtie^f J = \{(a, f(a) + j) | \ a \in A, j \in J\}$$

***Remarque* 5.1.1**
Soit $f : A \longrightarrow B$ un homomorphisme d'anneaux, S est une partie multiplicative de A et J un idéal de B. Considérons la partie multiplicative $T := f(S)+J$ et soit $f_S : A_S \longrightarrow B_T$ est un homomorphisme d'anneaux induit par f. Par une simple vérification on peux voir que $f_S^{-1}(JB_T) = f^{-1}(J)A_S$. De plus, pour tout idéal K de B, il est immédiat que $KB_T = B_T$ si et seulement si $f^{-1}(J+K) \cap S \neq \emptyset$. Ainsi, $B_T = \{0\}$ si et seulement si $f^{-1}(J) \cap S \neq \emptyset$. Si P un idéal premier de A et $S := A \setminus P$, $T := S_P := f(S) + J$, et on note simplement f_S par f_P et KB_T par K_{S_P}.

La caractérisation suivante des anneaux Prüfer sera utile. nous rappelez-le ici pour la commodité du lecteur.

***Théorème* 5.1.1 ([40, théorème 13])**
Soit A un anneau. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) A est un anneau de Prüfer.

(ii) Si I,J et K sont des idéaux de A et J et K sont réguliers, alors :

$$I(J \cap K) = IJ \cap IK.$$

(iii) Pour tout m idéal maximal de A, (A,m) a la propriété de l'ordre régulier total.

***Définition* 5.1.4**
On dit que l'anneau A est anneau localement Prüfer si A_m est anneau de Prüfer pour tout $m \in Max(A)$.

***Remarques* 5.1.1**
Soit A un anneau.

(a) Par [51, Proposition 2.10], si A est anneau localement Prüfer, alors A est un anneau de Prüfer.

(b) Si A est un anneau gaussien, alors A_m est aussi, pour tout $m \in Max(A)$ (tout localisation d'un anneau gaussien reste un anneau gaussien). Par suit A est un anneau localement Prüfer.

(c) La réciproque de (a) n'est pas toujours vraie, comme il nous montre le contre exemple [51, Example 2.11]. De plus on observe dans [8, Example 3.8], Si K est un corps et X_1, X_2 sont indéterminés sur K, alors $K[X_1, X_2]/(X_1, X_2)^3$ est un anneau total de fractions local (ainsi est un anneau localement Prüfer) mais n'est pas un anneau Gaussien. Donc on obtient les inclusions des classes d'anneaux suivant : $\{Semi - héréditaire\} \subsetneq \{w.gl.dim \leqslant 1\} \subsetneq \{Arithmétique\} \subsetneq \{Gaussien\} \subsetneq \{Localement\ Prüfer\} \subsetneq \{Prüfer\}$.

***Remarque* 5.1.2**
Soit $\{A_1, A_2, ..., A_r\}$ une famille des anneaux finies non nulle, est soit $A := \Pi_{i=1}^{r} A_i$. Comme indiqué par Bakkari dans un travail publier dans arXiv, pour tout $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, A satisfait la condition (P_n) si et seulement si A_i satisfait la même condition (P_n) pout tout $i \in \{1, 2, ..., r\}$.

5.2 Résultats au cas où le conducteur de l'extension d'anneau $A \bowtie^f J \subset A \times B$ est régulier

comme il a noté dans [27, lemme 1.50], le conducteur d'extension d'anneau $A \bowtie^f J \subset A \times B$ est $C = f^{-1}(J) \times J$. Les résultats suivants montrent que quand C est un idéal régulier de $A \times B$ (i.e., si $f^{-1}(J), J$ sont des idéaux régulier de A, B, respectivement), donc $A \bowtie^f J$ satisfait les conditions de Prüfer (P_n) $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ seulement dans le cas trivial.

***Théorème* 5.2.1**
Soit $f : A \longrightarrow B$ un homomorphisme d'anneaux et soit J un idéal de B. si $f^{-1}(J)$ et J sont des idéaux régulier, donc les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $A \bowtie^f J$ est un anneau de Prüfer ;

(ii) A, B sont des anneaux de Prüfer et J=B.

Preuve
$(ii) \Rightarrow (i)$ Par (ii), $A \bowtie^f J = A \times B$. Donc, il suffit d'appliquer [34, Proposition 3].
$(i) \Rightarrow (ii)$ En effet par l'absurde, soient J un idéal propre de B et M un idéal maximal de A tel que $f^{-1}(J) \subseteq M$. Considérons la partie multiplicative $S_M := f(A \setminus M) + J$ de B. Par la Proposition 2.3.15 (3) la localisation de $A \bowtie^f J$ en l'idéal maximal

$$M'^f := \{(m, f(m) + j) | m \in M, j \in J\}$$

est isomorphe avec $C := A_M \bowtie^{f_M} J_{S_M}$ (i.e $f_M : A_M \to B_{S_M}$ est l'homomorphisme d'anneau induit par f). Maintenant, on prend $a_0 \in f^{-1}(J)$ et $b_0 \in J$ deux éléments réguliers. Alors, en particulier, $a_1 := (a_0, b_0)A \bowtie^f J$ est un idéal régulier de $A \bowtie^f J$. Posons $a^* := a_0/1 \in A_M$, $b^* := b_0/1 \in B_{S_M}$. Évidemment, a^*, b^* sont des éléments réguliers. Puisque $A \bowtie^f J$ est un anneau de Prüfer, $(A \bowtie^f J, M'^f)$ a la propriété de l'ordre régulier total, par le Théorème 5.1.1. Ainsi, si $a_2 := (a_0, 0)A \bowtie^f (J)$, les idéaux $(a^*, b^*)C = a_1C$, $(a^*, 0) = a_2C$ sont comparable. Or, si $b^* \neq 0$, on obtient $(a^*, b^*)C \nsubseteq (a^*, 0)C$. Par la suite $(a^*, 0)C \subseteq (a^*, b^*)C$. Ainsi il existe des éléments $\alpha \in A_M$, $\beta \in JB_{S_M}$ tel que

$$(a^*, 0) = (\alpha, f_M(\alpha) + \beta)(a^*, b^*)$$

Or, on a a^* est régulier donc, $\alpha = 1$ et on a aussi $b^*(1 + \beta) = 0$ donc, $\beta = -1$, car b^* est régulier. Alors $JB_{S_M} = B_{S_M}$ est par la Remarque 5.1.1 $f^{-1}(J) \nsubseteq M$, ce qui est absurde. Ainsi $J = B$ et par conséquent, $A \bowtie^f J = A \times B$. On peut conclure que A et B sont des anneaux de Prüfer en appliquant [34, Proposition 3], ce qui achève la preuve. ∎

***Corollaire* 5.2.1**

On considère la notation de la Proposition 2.3.6, soit $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Si $f^{-1}(J)$ et J sont des idéaux réguliers alors les conditions suivantes sont équivalentes :

- *(i) $A \bowtie^f J$ satisfait la condition (P_n) de Prüfer (resp. $A \bowtie^f J$ est localement Prüfer) ;*
- *(ii) A, B satisfait la condition (P_n) de Prüfer (resp. A, B sont localement Prüfer) et J=B.*

Preuve

$(ii) \Rightarrow (i)$. Par (ii) , $A \bowtie^f J = A \times B$. Alors il suffit d'utiliser la Remarque 5.1.2, [34, Proposition 3].

$(i) \Rightarrow (ii)$. Si $A \bowtie^f J$ est localement Prüfer, alors il est un anneau de Prüfer, par la Remarque 5.1.1(a). Ainsi par Théorème 5.2.1 on a $J = B$. De plus, il est facile de voir que A et B sont des anneaux localement Prüfer. Maintenant soit $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Si $A \bowtie^f J$ satisfait la condition de Prüfer (P_n), alors $A \bowtie^f J$ est un anneau de Prüfer. Donc on applique le Théorème 5.2.1 et la Remarque 5.1.2 pour conclure. ∎

***Corollaire* 5.2.2**

Soient A un anneau et I un idéal régulier de A. considérons la duplication amalgamée de A le long de l'idéal I

$$A \bowtie I := \{(a, a + i) | a \in A, i \in I\}$$

Soit $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ alors :

$A \bowtie I$ satisfait la condition (P_n) de Prüfer (resp. $A \bowtie I$ est un anneau localement Prüfer) si et seulement si A satisfait la condition (P_n) de Prüfer (resp. A est un anneau localement Prüfer) et I=A.

Preuve

Application directe du Corolaire 5.2.1. ∎

5.3 Resultats dans le cas générale

***Lemme* 5.3.1**
Soient $r : B \to A$ une rétraction d'anneau, et X un indéterminé sur B. Si $\sum_{i=0}^{n} b_i X^i$ est un polynôme Gaussien sur B, alors $\sum_{i=0}^{n} r(b_i)X^i$ est un polynôme Gaussien sur A.

Preuve
Voir la preuve de [7, Theorem 2.1(1)] ■

Notation : On note Par $Reg(A) := \{a \in A \mid \text{a est un élément régulier de } A\}$

***Proposition* 5.3.1**
Sous la notaion de Proposition 2.3.6, Si $A \bowtie^f J$ est un anneau de Prüfer et $f(Reg(A)) \subseteq Reg(B)$, Alors A est un anneau de Prüfer.

Preuve
Soit X un indéterminé sur A et $I := (i_0, ..., i_n)$ un idéal régulier de type finie de A. On considère le polynôme $p(X) := \sum_{k=0}^{n} i_k X^k \in A[X]$. Prenons un élément régulier $i \in I$. Alors, puisque $f(Reg(A)) \subseteq Reg(B)$ c'est facile de voir que $(i, f(i))$ est un élément régulier de l'idéal $I^{\bowtie} := ((i_0, f(i_0)), ..., (i_n, f(i_n)))$ type fini de $A \bowtie^f J$. Puisque $A \bowtie^f J$ est un anneau de Prüfer alors $I^{\bowtie}$ est un idéal inversible de $A \bowtie^f J$, ainsi le polynôme $p_{\bowtie}(X) := \sum_{k=0}^{n} (i_k, f(i_k))X^k \in A \bowtie^f J\ [X]$, qui contient $I^{\bowtie}$ est un polynôme de Gauss sur $A \bowtie^f J$ par [58]. Soit $p_A : A \bowtie^f J \to A$ est la projection $((i, f(i) + j) \mapsto i)$. Ensuite, nous avons $p(X) = \sum_{k=0}^{n} p_A((i_k, f(i_k)))X^k$. Puisque p_A est une rétraction d'anneau (Remarque 2.3.1), par la suite $p(X)$ est un polynôme Gaussien sur A, par le lemme 5.3.1. Ainsi son contenu, c'est exactement l'idéal régulier I qui est inversible, par [50, Theorem 6]. Ceci complète la preuve. ■

***Remarque* 5.3.1**
Sous la notation de Proposition 2.3.6. Le fait que $A \bowtie^f J$ est un anneau Prüfer n'implique pas en général que A est un anneau de Prüfer, pour le contre exemple voir [7, Exemple 2.3] et [21, Remark 2.8].

Le résultat suivant est obtenu en modifiant la preuve de [11, Theorem 1].

***Proposition* 5.3.2**
Soit $\phi : A \to B$ un homomorphisme d'anneau surjectif. Si A est un anneau de Prüfer et $Ker(\phi)$ est un idéal régulier de A, alors $I(J \cap L) = IJ \cap IL$, pour tous les idéaux I, J et L de B. En particulier, B est un anneau de Prüfer.

Preuve
Soient $K := Ker(\phi)$ et I, J et L des idéaux de B. Pour démontrer l'égalité $I(J \cap L) = IJ \cap IL$, il suffit de montrer que $IJ \cap IL \subseteq I(J \cap L)$. Si $\bar{x} \in IJ \cap IL$, alors ils existent des éléments $\bar{a_i} \in I$, $\bar{b_i} \in J$, $\bar{\alpha_j} \in I$ et $\bar{c_j} \in L$, avec $i \in \{1, ..., n\}$ et $j \in \{1, ..., m\}$, tel

que $\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} \bar{a_i}\bar{b_i} = \sum_{j=1}^{m} \bar{\alpha_j}\bar{c_j}$. Pour tout $i \in \{1, ..., n\}$ et $j \in \{1, ..., m\}$, Par l'axiome du choix, on prend $a_i \in \phi^{-1}(\bar{a_i})$, $b_i \in \phi^{-1}(\bar{b_i})$, $\alpha_j \in \phi^{-1}(\bar{\alpha_j})$ et $c_j \in \phi^{-1}(\bar{c_j})$, et on pose $I' := \phi^{-1}(I)$, $J' := \phi^{-1}(J)$ et $L' := \phi^{-1}(L)$. Si $x = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$ alors $x - \sum_{j=1}^{m} \alpha_j c_j \in K$. Donc $x \in (I'L' + K) \cap I'J'$. Par le Théorème 5.1.1 et puisque K est un idéal régulier de A, on obtient

$$(I'L'+K)\cap I'J' = (I'L'\cap I'J')+(K\cap I'J') \subseteq (I'L'\cap I'(J'+K))+K = I'(L'\cap(J'+K))+K$$

Ainsi, ils existent des éléments $a'_h \in I'$, $b'_h \in J'$, et $d_h \in K$, avec $h \in \{1, ..., r\}$ tel que $b'_h + d_h \in L'$, pour tout h, et $x = \sum_{h=1}^{r} a'_h(b'_h + d_h) + d$, pour certain $d \in K$. ce qui donne que $\bar{x} = \sum_{h=1}^{r} \phi(a'_h)\phi(b'_h) \in I(J \cap L)$. Donc $IJ \cap IL \subseteq I(J \cap L)$.
Par le Théorème 5.1.1, B est un anneau de Prüfer. ∎

***Corollaire* 5.3.1**
On garde la notation de Proposition 2.3.6 et on suppose que $A \bowtie^f J$ est un anneau Prüfer. Alors on a :

(1) Si $\{0\} \times J$ est un idéal régulier de $A \bowtie^f J$, alors A est un anneau de Prüfer.

(2) Si $f^{-1}(J) \times \{0\}$ est un idéal régulier de $A \bowtie^f J$, alors f(A)+J est un anneau de Prüfer.

Preuve
il suffit d'appliquer la Proposition 2.3.6(3) et 5.3.2. ∎

Maintenant, nous allons donner des conditions suffisantes pour que $A \bowtie^f J$ soit un anneau total de fractions (en particulier, un anneau de Prüfer).

***Proposition* 5.3.3**
Soient A un anneau total de fractions (c'est-à-dire $A = Q(A)$), $f : A \to B$ un homomorphisme d'anneau et J un idéal de B contenu dans le radical de Jacobson Jac(B) de B. Supposons qu'au moins l'une des conditions suivantes est vérifiée.

(a) J est contenu dans f(A).

(b) J un A-module de torsion (avec la structure naturelle de A-module induit par f)

Alors $A \bowtie^f J$ un anneau total de fractions (en particulier, un anneau de Prüfer).

Preuve
Soit $(a, f(a) + j)$ un élément non inversible de $A \bowtie^f J$. Le but est de montrer que $(a, f(a) + j)$ est un diviseur de zéro de $A \bowtie^f J$. puisque $J \subseteq Jac(B)$, par le Corolaire 2.3.3 on obtient

$$Max(A \bowtie^f J) = \{M'^f \mid M \in Max(A)\}$$

Ainsi, il existe un idéal maximal M de A tel que $(a, f(a) + j) \in M'^f$ et $a \in M$. Puisque A est un anneau total de fractions, alors a est un diviseur de zéro de A. Par conséquent, nous pouvons choisir un élément non nul $\alpha \in A$ tel que $a\alpha = 0$. Les deux cas suivants peuvent survenir.

- *Considérons la condition* (a). Si $\alpha \in Ann_A(J)$ alors on a $(a, f(a)+J)(\alpha, f(\alpha)) = (0,0)$. Sinon, soit $\beta \in J$ tel que $f(\alpha)\beta \neq 0$. Puisque $J \subseteq f(A)$, il existe un élément $x \in f^{-1}(J)$ tel que $f(x) = \beta$. Bien sûr, $\alpha x \neq 0$ et $(\alpha x, 0) \in A \bowtie^f J$, puisque $\alpha x \in f^{-1}(J)$ alors, $(a, f(a)+j)(\alpha x, 0) = (0,0)$.
- *Considérons la condition* (b). Puisque J est un A-module de torsion, alors il existe un élément régulier $x_0 \in A$ tel que $f(x_0)j = 0$. Bien sûr, $\alpha x_0 \neq 0$, puisque $\alpha \neq 0$. Alors $(a, f(a)+j)(\alpha x_0, f(\alpha x_0)) = (0,0)$.

D'où le résultat désiré. ■

***Proposition* 5.3.4**
Sous la notation de Proposition 2.3.6 on a :

(1) Si $A \bowtie^f J$ est un anneau arithmétique, alors A est un anneau arithmétique.

(2) Si $A \bowtie^f J$ est un anneau gaussien, alors A est un anneau gaussien.

Preuve
Par [21, Remark 4.6], A est un anneau de rétraction de $A \bowtie^f J$, via la projection $p_A : A \bowtie^f J \to A$, $((a, f(a)+j) \mapsto a)$. Alors, en appliquant [7, Théorème 2.1 (1) et Théorème 2.5] pour conclure. ■

***Proposition* 5.3.5**
Nous conservons la notation de la Proposition 2.3.6 et de la Remarque 5.1.1. Supposons que $J_{S_M} = \{0\}$, pour tout $M \in Max(A) \cap V(f^{-1}(J))$. Alors on a :

(1) Si A est un anneau localement Prüfer et B_N est un anneau de Prüfer, pour tout $N \in Max(B) \setminus V(J)$, alors $A \bowtie^f J$ est un anneau localement Prüfer.

(1) Si A est un anneau gaussien et B_N est un anneau gaussien, pour tout $N \in Max(B) \setminus V(J)$, alors $A \bowtie^f J$ est un anneau gaussien.

Preuve
Par le Corollaire 2.3.3, nous avons

$$Max(A \bowtie^f J) = \{M'^f \mid M \in Max(A)\} \cup \{\bar{N}^f \mid N \in Max(B) \setminus V(J)\}$$

Par la Proposition 2.3.15 et que $J_{S_M} = \{0\}$, pour tout $M \in Max(A) \cap V(f^{-1}(J))$, nous avons $(A \bowtie^f J)_{\bar{N}^f} \cong B_N$, pour tout $N \in Max(B) \setminus V(J)$, et $(A \bowtie^f J)_{M'^f} \cong A_M$ pour tout $M \in Max(A)$.
Donc si on considère les conditions de (1) on trouve dans les deux cas $(A \bowtie^f J)$ est localement Prüfer.
De même pour (2), si A est un anneau gaussien d'après la Remarque 5.1.1 alors, A_M est un anneau gaussien pour tout $M \in Max(A)$ ce qui achève la preuve. ■

***Proposition* 5.3.6**
Nous conservons la notation de la Définition 5.1.2, et on pose $D := \alpha \times_C \beta$. Soit $p_A : D \to A$ (resp. $p_B : D \to B$) la restriction à D de la projection de $A \times B$ dans A (resp. B). les conditions suivantes sont équivalentes.

(i) L'ensemble de tous les idéaux de $D := \alpha \times_C \beta$ est totalement ordonné par inclusion.

(ii) Au moins l'une des assertions suivantes est vraie :

(a) α est injectif et l'ensemble de tous les idéaux de $p_B(D)$ est totalement ordonné par inclusion.

(a) β est injectif et l'ensemble de tous les idéaux de $p_A(D)$ est totalement ordonné par inclusion.

Preuve
Il est claire que $Ker(p_A) = \{0\} \times Ker(\beta)$ et $Ker(p_B) = Ker(\alpha) \times \{0\}$.
$(ii) \Rightarrow (i)$. Il suffit de noter que si l'instruction (a) (resp. (b)) est vraie, alors p_B (resp. p_A) est un isomorphisme de D sur $p_B(D)$ (resp. $p_A(D)$).
$(i) \Rightarrow (ii)$. Si l'ensemble de tous les idéaux de D est totalement ordonné par inclusion, il est évident que toute image d'un homomorphisme de D a la même propriété. Ainsi, si l'instruction (a) est fausse, α n'est pas injectif. Cela implique que $Ker(p_B) \nsubseteq Ker(p_A)$, puis nous avons $Ker(p_A) \subseteq Ker(p_B)$, par hypothèse. Il clair que β est injective et p_A est un isomorphisme de D dans $p_A(D)$. Ainsi, instruction (b) est vraie. ■

***Proposition* 5.3.7**
Nous conservons la notation de la proposition 2.3.6 et Remarque 5.1.1. Supposons que pour tout $M \in Max(A) \cap V(f^{-1}(J))$, soit l'application $f_M : A_M \to B_{S_M}$ est surjective ou $f^{-1}(J)A_M \neq \{0\}$. Donc Les conditions suivantes sont équivalentes.

(i) $A \bowtie^f J$ est un anneau arithmétique.

(ii) A est un anneau arithmétique, $J_{S_M} = \{0\}$, pour chaque $M \in Max(A) \cap V(f^{-1}(J))$, et, pour tout $N \in Max(B) \setminus V(J)$, l'ensemble de tous les idéaux de B_N est totalement ordonné par inclusion.

Preuve
$(i) \Rightarrow (ii)$. Par [45, Theorem 1], l'ensemble de tous les idéaux de chaque la localisation de $A \bowtie^f J$ à ses idéaux maximaux est totalement ordonnée par inclusion. Ainsi, la Proposition 2.3.15 implique que dans chaque localisation B_N $(N \in Max(B) \setminus V(J))$ l'ensemble de tous les idéaux est totalement ordonné par inclusion.
Maintenant, soit M un idéal maximal de A contenant $f^{-1}(J)$. Par Proposition 2.3.15, la localisation $(A \bowtie^f J)_{M'^f}$ est isomorphe à $A_M \bowtie^{f_M} J_{S_M}$. Si $\pi_M : B_{S_M} \to B_{S_M}/J_{S_M}$ est la projection canonique et $\check{f}_M := \pi_M o f_M$, par Proposition 2.3.1 l'anneau $A_M \bowtie^{f_M} J_{S_M}$ est le produit fibré des homomorphismes d'anneau $\check{f}_M$ et π_M. on sait que $f_M^{-1}(J_{S_M}) = f^{-1}(J)A_M$ (Remarque 5.1.1) et en appliquant la Proposition 5.3.6, on obtient $J_{S_M} = \{0\}$. Ainsi, par la Proposition 2.3.15, A_M est isomorphe à $(A \bowtie^f J)_{M'^f}$, pour chaque M idéal maximal de A. Cela prouve que A est un anneau arithmétique.
$(ii) \Rightarrow (i)$. Appliquer [45, Theorem 1], Proposition 2.3.6 (3) et la structure local de $A \bowtie^f J$ (Proposition 2.3.15). ■

***Proposition* 5.3.8**
Nous conservons la notation de la Proposition 2.3.6 et la Remarque 5.1.1. Supposons que, pour chaque idéal maximal M de A contenant $f^{-1}(J)$, soit l'application $f_M : A_M \to B_{S_M}$ est surjective ou $f^{-1}(J)A_M \neq \{0\}$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes.

(i) $A \bowtie^f J$ *a une dimension globale faible au plus égale à 1.*

(ii) A *a une dimension globale faible au plus égal à 1,* B_N *est un domaine de valuation, pour tout* $N \in Max(B) \setminus V(J)$ *et* $J_{S_M} = \{0\}$, *pour tout* $M \in Max(A) \cap V(f^{-1}(J))$.

Preuve
$(i) \Rightarrow (ii)$. Par la proposition 2.3.15, on a $(A \bowtie^f J)_{\bar{N}^f} \cong B_N$, pour tout idéal maximal N de B ne contenant pas J. Alors, par définition on a B_N est un domaine de valuation pour tout $N \in Max(B) \setminus V(J)$. Soit maintenant M un idéal maximal de A contenant $f^{-1}(J)$. Donc, en particulier, $A \bowtie^f J$ est un anneau arithmétique, par suite $J_{S_M} = \{0\}$, par la proposition 5.3.7. Ainsi, par la Proposition 2.3.6(3), la localisation A_M est isomorphe au domaine de valuation $(A \bowtie^f J)_{M'^f}$, pour tout idéal maximal M de A. Ce qui prouve que A a une dimension globale faible ≤ 1.
$(ii) \Rightarrow (i)$. Appliquer la structure locale de $A \bowtie^f J$ (Proposition 2.3.15).
Notez que (ii) implique (i), sans aucune hypothèse supplémentaire. ■

Pour donner des conditions pour que $A \bowtie^f J$ soit un anneau semi-héréditaire, nous voulons utiliser la caractérisation suivante.

***Théorème* 5.3.1 ([35, Corollary 4.2.19])**
Soit A un anneau. Alors il est semi-héréditaire si et seulement si A est cohérent et la dimension global faible de A est au plus égale à 1.

Soit $\phi : A \longrightarrow B$ un homomorphisme d'anneau et soit R un B-module. On notera par $._\phi$ la multiplication scalaire, induite par ϕ, pour que R soit un A-module.

***Lemme* 5.3.2**
Nous conservons la notation de la proposition 2.3.6. Si J est un A-module de type fini (avec la structure A-module induite par f), alors l'injection de l'anneau $\iota : A \longrightarrow A \bowtie^f J$ est finie.

Preuve
Soit $\{j_1, ..., j_n\} \subseteq J$ être une famille finie génératrice du A-module J, et soit $(a, f(a) + j)$ un élément de $A \bowtie^f J$. Par suite, ils existent des éléments $a_1, ..., a_n \in A$ tel que $j = \sum_{i=1}^{n} a_i ._f j_i = \sum_{i=1}^{n} f(a_i) j_i$. Donc il est clair que :

$$(a, f(a) + j) = a ._\iota (1, 1) + \sum_{i=1}^{n} a_i ._\iota (0, j_i)$$

Cela prouve que $\{(1, 1), (0, j_1), ..., (0, j_n)\} \subseteq A \bowtie^f J$ est une famille fini génératrice de $A \bowtie^f J$ comme A-module (avec la structure induite par $._\iota$), c'est-à-dire que ι est finie. ■

***Proposition* 5.3.9**

Nous conservons la notation de la Proposition 2.3.6. Alors, on a les assertions suivantes :

(1) Si $A \bowtie^f J$ est un anneau cohérent, alors A est cohérent.

(2) Si A est un anneau cohérent et J est un A-module cohérent (avec la structure induite par f), alors $A \bowtie^f J$ est un anneau cohérent.

Preuve

On trouve l'assertion (1) à partir de [21, Remark 4.6] et [35, Theorem 4.1.5].

Pour (2). Nous commençons par remarquer que, lorsque J est, en particulier un A-module de type fini, l'application injective ι est finie, par le Lemme 5.3.2. Maintenant, considérons les projections $p_A : A \bowtie^f J \longrightarrow A$, $p_B : A \bowtie^f J \longrightarrow B$. Alors, p_A (resp. p_B) est induite sur A (resp. J) une structure de $A \bowtie^f J$-module. Avec ces structures, nous avons la suite exacte de $A \bowtie^f J$-module suivante.

$$0 \longrightarrow J \xrightarrow{i} A \bowtie^f J \xrightarrow{p_A} A \longrightarrow 0$$

Où $i : J \longrightarrow A \bowtie^f J$ est défini par $j \mapsto (0, j)$, pour tout $j \in J$. Soit $\iota : A \hookrightarrow A \bowtie^f J$ l'injection d'anneau tel que : $a \mapsto (a, f(a))$, pour tout $a \in A$, Sur le $A \bowtie^f J$-module J, l'application ι induit la multiplication scalaire suivante :

$$a._\iota j := (a, f(a))._{p_B} j = p_B((a, f(a)))j = f(a)j \qquad (a \in A, j \in J)$$

Par suite la structure de A-module donnée à J par ι est la même structure induite sur $A \bowtie^f J$ par f. Puisque ι est finie et J est un A-module cohérent, par [41, Corollary 1.1] on a que J est un $A \bowtie^f J$-module cohérent. De plus, ι induit au $A \bowtie^f J$-module A par suite la multiplication scalaire

$$a._\iota \alpha := (a, f(a))._{p_A} \alpha = p_A((a, f(a)))\alpha = a\alpha \qquad (a,\ \alpha \in A)$$

Ainsi ι induit sur A sa structure naturelle de module sur lui-même. Depuis A, par hypothèse, est un anneau cohérent, par suite il est $A \bowtie^f J$-module cohérent, encore une fois par [41, Corollary 1.1]. Alors $A \bowtie^f J$ est un $A \bowtie^f J$-module, par [13, Pag. 43, exercice 11 (a)], c'est-à-dire que $A \bowtie^f J$ est un anneau cohérent. ■

***Corollaire* 5.3.2**

Nous conservons la notation de la Proposition 2.3.6 et la Remarque 5.1.1, et supposons que $J_{S_M} = \{0\}$, pour tout idéal maximal M de A contenant $f^{-1}(J)$. Si A est un anneau semi-héréditaire (resp. anneau semi-héréditaire et Noetherian), B_N est un domaine de valuation, pour chaque $N \in Max(B)\backslash V(J)$ et J est un A-module cohérent (resp. A-module de type fini), avec la structure induite par f, alors $A \bowtie^f J$ est un anneau semi-héréditaire.

Preuve

On sait que, si A est noethérien, alors, un A-module est cohérent si et seulement si il est de type fini. Donc, en utilisant le Théorème 5.3.1, la Proposition 5.3.8 ($(ii) \Longrightarrow (i)$) et la Proposition 5.3.9 pour conclure. ■

Rappelons que un domaine intègre A est *almost Dedekind* si A_M est un **DVR** pour tout idéal maximal M de A, en particulier un almost Dedekind est un domaine de prüfer.

***Exemple* 5.3.1**
Soit A un domaine almost Dedekind non Noethérien a au moins deux idéaux maximaux principaux distincts $M := (m)$, $N := (n)$ (un tel domaine existe, voir [30]), soient $B := A/(M \cap N)$,et $f : A \longrightarrow B$ la projection canonique, on prend l'ensemble $J := M/(N \cap N)$. il est clair que, $f^{-1}(J) = M$ et, puisque $f(N) \in S_M$, par suite on a $J_{S_M} = \{0\}$. Soit $\bar{N} := N/(M \cap N)$ l'idéal maximal unique de B ne contenant pas J. Donc, la localisation $B_{\bar{N}}$ est isomorphe au corps A/N. De plus, l'application $p : A \longrightarrow J$, $a \longmapsto f(am)$ est clairement A-linéaire, surjectif et $Ker(p) = N$. Cela montre que J est une présentation finie comme un A-module. Alors, puisque A est un anneau cohérent, étant un domaine de Prüfer, et en appliquant [13, Exercice 12 (a) (β)], puisque J est un A-module cohérent. Alors $A \bowtie^f J$ est un anneau semi-héréditaire, par Corollaire 5.3.2.

***Exemple* 5.3.2**
On garde la notation de la Proposition 2.3.6. Le fait que $A \bowtie^f J$ est semi-héréditaire n'implique pas en général que J est cohérent comme A-module et $J_{S_M} = \{0\}$, pour tout $M \in Max(A) \cap V(f^{-1}(J))$. Par exemple, soient X un indéterminé sur $\mathbb{Q}$, $A := \mathbb{Z}$, $B := \mathbb{Q}[X]$ et $J := X\mathbb{Q}[X]$, on considère l'injection $f : A \longrightarrow B$. Alors $A \bowtie^f J$ est isomorphe à l'anneau $\mathbb{Z} + X\mathbb{Q}[X]$, par [21, Example 2.5]. De plus, d'après [43, Theorem 1.3], on obtient facilement $A \bowtie^f J$ est un domaine de Prüfer (c'est-à-dire un domaine semi-héréditaire). Mais, clairement, J n'est pas de type fini comme un A-module et $J_{S_M} \neq \{0\}$, pour tout $M \in Max(A)$.

***Corollaire* 5.3.3**
Sous la notation de la Proposition 2.3.6 et la Remarque 5.1.1. Supposons que J est un A-module cohérent et que, pour tout $M \in Max(A) \cap V(f^{-1}(J))$, *soit* f_M *est un homomorphisme d'anneau surjectif ou* $f^{-1}(J)A_M \neq \{0\}$. *Alors les conditions suivantes sont équivalentes.*

(i) $A \bowtie^f J$ *est un anneau semi-héréditaire.*

(ii) *A est un anneau semi-héréditaire,* B_N *est un domaine de valuation, pour tout* $N \in Max(B) \setminus V(J)$ *et* $J_{S_M} = \{0\}$, *pour tout* $M \in Max(A) \cap V(f^{-1}(J))$.

Preuve
$(ii) \Longrightarrow (i)$. C'est l'assertion du Corollaire 5.3.2.
$(i) \Longrightarrow (ii)$. Selon la Proposition 5.3.9 (1), A est un anneau cohérent. Alors il suffit d'appliquer le Théorème 5.3.1 et la Proposition 5.3.8 pour compléter la preuve. ■

Chapitre 6

transfert de la propriété arithmétique à la bi-amalgamation

S.Kabbaj, N. Mahdou and M. A. S. Moutui; *Bi-amalgamations subject to the arithmetical property*, Journal of Algebra and Its Applications 16(1) (2016) 1750030, 11 p.

Ce chapitre étudie la proptiété arithmétique et les propriétés semi-héréditaires ainsi que la faible dimension globale dans les bi-amalgamations

Soient $f : A \longrightarrow B$ et $g : A \longrightarrow C$ deux homomorphismes d'anneaux et J et J' deux idéaux propre de B et C respectivement. tel que $I_0 := f^{-1}(J) = g^{-1}(J')$. On note au cour de ce chapitre avec $A \bowtie^{f,g} (J, J')$ la bi-amalgamation de A avec (B, C) le long de (J, J') en respectant (f, g).

Notations
Pour un anneau R, $Spec(R)$ (respectivement, $Max(R)$) désignera l'ensemble des tous les idéaux premiers (respectivement maximaux) de R, et, pour tout idéal I de R, $Spec(R, I)$ (respectivement, $Max(R, I)$) désignera l'ensemble de tous les premiers (respectivement, maximaux) idéaux de R contenant I.

6.1 Résultats

Le premier résultat principal établit les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une bi-amalgamation hérite la propriété arithmétique. À cette fin, adoptons la notation suivante :
Pour tout $p \in Spec(A, I_0)$ (respectivement $\in Max(A, I_0)$), on considère les parties multi-

plicatives

$$S_P := f(A \setminus p) + J \quad et \quad S'_p := (A \setminus p) + J'$$

de B et C, respectivement, et soient

$$f_p : A_p \to B_{S_p} \quad et \quad g_p : A_p \to C_{S'_p}$$

les homomorphismes d'anneaux canoniques induits par f et g. On peut vérifier facilement que

$$f_p^{-1}(J_{S_p}) = g_p^{-1}(J'_{S'_p}) = (I_0)_p.$$

De plus, par le Lemme 2.4.1, $P := p \bowtie^{f,g} (J, J')$ est un idéal premier (respectivement maximal) de $A \bowtie^{f,g} (J, J')$ et par [46, Proposition 5.7] on a

$$(A \bowtie^{f,g} (J, J'))_P \cong A_p \bowtie^{f_p, g_p} (J_{S_p}, J'_{S'_p})$$

Ces résultats seront utilisés dans la suite sans référence explicite. Rappelons qu'un anneau arithmétique local est aussi appelé anneau enchaîné.

***Théorème* 6.1.1**
Sous la notation ci-dessus, nous avons :

(1) $A \bowtie^{f,g} (J, J')$ est un anneau enchaîné si et seulement si les deux anneaux $f(A) + J$ et $g(A) + J'$ sont des anneaux enchaînés et $J = 0$ ou $J' = 0$.

(2) $A \bowtie^{f,g} (J, J')$ est anneau arithmétique si et seulement si les deux anneaux $f(A) + J$ et $g(A) + J'$ sont des anneaux arithmétiques, et pour tout $\mathfrak{m} \in Max(A, I_0)$, $J_{S_\mathfrak{m}} = 0$ ou $J'_{S'_\mathfrak{m}} = 0$.

Preuve
(1) Par la Proposition 2.4.1, on peut considérer $A \bowtie^{f,g} (J, J')$ comme produit fibré $D := \alpha \times_{\frac{A}{I_0}} \beta$ avec $Ker(\alpha) = J$, $Ker(\beta) = J'$, et $p_1(D) = f(A) + J$ (respectivement, $p_2(D) = g(A) + J'$) avec p_1 (respectivement p_2) la restriction à D de la projection de $(f(A) + J) \times (g(A) + J')$ en $f(A) + J$ (respectivement, $g(A) + J'$). De plus, rappelons que la notion d'anneau enchaîné est stable par anneau quotient et $\frac{f(A)+J}{J} \cong \frac{g(A)+J'}{J'}$ Proposition 2.4.3(3). Par conséquent, le résultat découle facilement de la Proposition 5.3.6.

(2) Notez d'abord que (1) est la version locale de (2). Pour voir cela, rappelez-vous que $A \bowtie^{f,g} (J, J')$ est local si et seulement si les deux $f(A) + J$ et $g(A) + J'$ sont locaux ; et $\mathfrak{m} \bowtie^{f,g} (J, J')$ est l'idéal maximal de $A \bowtie^{f,g} (J, J')$, où $\mathfrak{m}$ est l'unique idéal maximal de A contenant I_0 Proposition 2.4.9. De plus on a l'isomorphisme :

$$\frac{A \bowtie^{f,g} (J, J')}{0 \times J'} \cong f(A) + J$$

donné par la Proposition 2.4.3(2), on déduit que :

$$\frac{\mathfrak{m} \bowtie^{f,g} (J, J')}{0 \times J'} \cong f(\mathfrak{m}) + J$$

est un idéal maximal de $f(A)+J$, de même $g(\mathfrak{m})+J'$ est un idéal maximal de $g(A)+J'$, alors $S_{\mathfrak{m}}$ et $S'_{\mathfrak{m}}$ doit être constitué uniquement d'unités de sorte que $J_{S_{\mathfrak{m}}}=J$ et $J'_{S'_{\mathfrak{m}}}=J'$ comme on veut.
Supposons maintenant que $A\bowtie^{f,g}(J,J')$ est arithmétique. Soit $\mathfrak{m}\in Max(A,I_0)$ et $\mathfrak{M}:=\mathfrak{m}\bowtie^{f,g}(J,J')$. Donc :

$$A_{\mathfrak{m}}\bowtie^{f_{\mathfrak{m}},g_{\mathfrak{m}}}(J_{S_{\mathfrak{m}}},J'_{S'_{\mathfrak{m}}})\cong(A\bowtie^{f,g}(J,J'))_{\mathfrak{M}}$$

est un anneau enchaîné (puisque la propriété arithmétique est stable par localisation). Par (1), $J_{S\mathfrak{m}}$ ou $J'_{S'_{\mathfrak{m}}}$ est nul, comme souhaité. Ensuite, soit $L\in Spec(f(A)+J)$ et considérons l'idéal premier de $A\bowtie^{f,g}(J,J')$ donné par

$$\bar{L}:=(L\times(g(A)+J'))\cap(A\bowtie^{f,g}(J,J')).$$

Si $J\nsubseteq L$ alors par la Proposition 2.4.8(2)

$$(f(A)+J)_L\cong(A\bowtie^{f,g}(J,J'))_{\bar{L}}$$

est arithmétique. Ensuite, supposons que $J\subseteq L$. Par le Lemme 2.4.2, nous avons

$$\bar{L}:=p\bowtie^{f,g}(J,J')$$

où $p:=f^{-1}(L)\in Spec(A,I_0)$ et on peut facilement vérifier que $L=f(p)+J$. Ainsi,

$$A_p\bowtie^{f_p,g_p}(J_{S_p},J'_{S'_p})\cong(A\bowtie^{f,g}(J,J'))_{\bar{L}}$$

est anneau enchaîné. Par (1) $f_p(A_p)+J_{S_p}$ est un anneau enchaîné et (comme vu ci-dessus) avec l'idéal maximal $f_p(pA_p)+J_{S_p}$. Le fait que $f_p(A_p)+J_{S_p}$ soit local donne les résultats suivants :

Affirmation (1). $f_p(A_p)+J_{S_p}=(f(A)+J)_L$.
En effet, d'abord on observe que

$$S_p=(f(A)+J)\setminus(f(p)+J)=(f(A)+J)\setminus L$$

et, par conséquent, les deux $f_p(A_p)+J_{S_p}$ et $(f(A)+J)_L$ sont des sous-anneaux de B_{S_p}. L'inclusion vers l'avant est évidente. Pour prouver l'autre, soit $x\in(f(A)+J)_L$; donc,

$$x=\frac{f(a)+i}{f(s)+j}=\left(\frac{1}{f(s)+j}\right)\left(\frac{f(a)}{1}\right)+\frac{i}{f(s)+j}$$

pour certains $a\in A$, $s\in A\setminus p$ et i, $j\in J$. Clairement, il suffit de montrer que :

$$\frac{1}{f(s)+j}\in f_p(A_p)+J_{S_p}.$$

Ce qui est vrai puisqu'on peut vérifier que

$$\frac{f(s)+j}{1} = \frac{f(s)}{1} + \frac{j}{1} \notin f_p(pA_p) + J_{S_p}$$

comme $f_p(pA_p) + J_{S_p}$ est l'idéal maximal de $f_p(A_p) + J_{S_p}$, on termine la preuve de l'affirmation.
Par (1), $(f(A) + J)_L$ est arithmétique. Par conséquent, $f(A) + J$ est (localement) arithmétique et ainsi $g(A) + J'$ par des arguments similaires.

Inversement, supposons que $f(A)+J$ et $g(A)+J'$ sont arithmétiques et, $\forall \mathfrak{m} \in Max(A, I_0)$, $J_{S_\mathfrak{m}}$ ou $J'_{S_\mathfrak{m}}$ est nul. Soit $\mathfrak{M} \in Max(A \bowtie^{f,g} (J, J'))$. Supposons que $J \times J' \nsubseteq \mathfrak{M}$. Par la Proposition 2.4.8(2), il y a L dans $Spec(f(A) + J)$ tel que

$$(A \bowtie^{f,g} (J, J'))_\mathfrak{M} \cong (f(A) + J)_L.$$

Donc, dans ce cas, $(A \bowtie^{f,g} (J, J'))_\mathfrak{M}$ est évidemment arithmétique. Ensuite, supposons que $J \times J' \subseteq \mathfrak{M}$. Par la Proposition 2.4.8(1) et le Lemme 2.4.1, il y a un unique $\mathfrak{m} \in Max(A, I_0)$ tel que

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{m} \bowtie^{f,g} (J, J').$$

Par hypothèse, on a $J'_{S'_\mathfrak{m}} = 0$. Maintenant, soit $L := f(\mathfrak{m}) + J$, un idéal premier sur $f(A) + J$. Par suite, via la Proposition 2.4.3(2) et l'affirmation (1), on a :

$$\begin{aligned}(A \bowtie^{f,g} (J, J'))_\mathfrak{M} &\cong A_\mathfrak{m} \bowtie^{f_\mathfrak{m}, g_\mathfrak{m}} (J_{S_\mathfrak{m}}, 0)\\ &\cong f_\mathfrak{m}(A_\mathfrak{m}) + J_{S_\mathfrak{m}}\\ &= (f(A) + J)_L.\end{aligned}$$

Donc, dans ce cas aussi, $(A \bowtie^{f,g} (J, J'))_\mathfrak{M}$ est arithmétique. Par conséquent, $A \bowtie^{f,g} (J, J')$ est arithmétique, ce qui termine la preuve du théorème. ■

***Remarque* 6.1.1**
Dans [46, Proposition 3.2], il est prouvé que toute bi-amalgamation $A \bowtie^{f,g} (J, J')$ peut être vue comme un carré conducteur avec le conducteur $J \times J'$. Boynton a examiné le transfert de la propriété arithmétique aux carrés conducteurs dans le cas particulier où l'idéal conducteur est régulier [15, Theorem 3.3] (et aussi [16, Theorem 4.1]). Nous ne pouvons pas faire appel à ce résultat dans le contexte du Théorème 6.1.1 puisque, sous l'hypothèse que "$J \times J'$ est régulier", la bi-amalgamation $A \bowtie^{f,g} (J, J')$ ne peut jamais satisfaire la propriété arithmétique (à cause de la condition nécessaire : $\forall \mathfrak{m} \in Max(A, I_0)$, $J_{S_\mathfrak{m}} = 0$ ou $J'_{S'_\mathfrak{m}} = 0$). Cette remarque est également valable pour le Corollaire 6.1.2 (sur la dimension globale faible) et le Corollaire 6.1.4 (sur la propriété semi-héréditaire).

***Remarque* 6.1.2**
Observez que le Théorème 6.1.1(1) peut aussi se lire comme suit : $A \bowtie^{f,g} (J, J')$ *est un anneau enchaîné si et seulement si "*$J = 0$ *et* $g(A)+J'$ *est un anneau enchaîné" ou "*$J' = 0$ *et* $f(A) + J$ *est un anneau enchaîné"* ce qui est évident car le fait que la notion d'anneau enchaîné est stable par quotient et $\frac{f(A)+J}{J} \cong \frac{g(A)+J'}{J'}$ Proposition 2.4.3(3).

Comme exemple pour le Théorème 6.1.1, nous donnons un anneau arithmétique qui se présente comme une bi-amalgamation voir l'Exemple 6.2.1 .

Rappelons que toute amalgamation peut être considérée comme un cas particulier de la bi-amalgamation, car $A \bowtie^f J = A \bowtie^{id_A,f} (f^{-1}(J), J)$. Par conséquence, le Théorème 6.1.1 couvre le cas particulier d'amalgamations, comme il est indiqué ci-dessous.

***Corollaire* 6.1.1**
Sous la notation ci-dessus, nous avons :

(1) $A \bowtie^f J$ *est un anneau enchaîné si et seulement si les deux anneaux* A *et* $f(A)+J$ *sont des anneaux enchaînés et* $J=0$ *ou* $f^{-1}(J)=0$

(2) $A \bowtie^f J$ *est anneau arithmétique si et seulement si les deux anneaux* A *et* $f(A)+J$ *sont des anneaux arithmétiques, et pour tout* $\mathfrak{m} \in Max(A, f^{-1}(J))$, $J_{S_\mathfrak{m}} = 0$ *ou* $f_\mathfrak{m}^{-1}(J_{S_\mathfrak{m}}) = 0$.

***Remarque* 6.1.3**
dans le Chapitre 5. Finocchiaro a prouvé le résultat suivant pour le transfert de la propriété arithmétique aux amalgamations : *"Supposons que, pour chaque* $\mathfrak{m} \in Max(A, f^{-1}(J))$, *soit* $f_\mathfrak{m}$ *surjective ou* $f_\mathfrak{m}^{-1}(J_{S_\mathfrak{m}}) \neq 0$. *Alors,* $A \bowtie^f J$ *est arithmétique et seulement si* A *est arithmétique,* $J_{S_\mathfrak{m}} = 0$ *pour chaque* $\mathfrak{m} \in Max(A, f^{-1}(J))$, *et pour tout* $\mathfrak{m}' \in Max(B)$ *ne contenant pas* J, *les idéaux de* $B_{\mathfrak{m}'}$ *sont totalement ordonnés par inclusion"* (voir la Proposition 5.3.7).
Le Corollaire 6.1.1 couvre ce résultat en raison du fait que si $f_\mathfrak{m}$ est surjective et $J_{S_\mathfrak{m}} \neq 0$ alors $f_\mathfrak{m}^{-1}(J_{S_\mathfrak{m}}) \neq 0$; combiné avec la structure idéale maximale de deux types de $A \bowtie^f J$ (voir la Proposition2.3.15) ; précisément, $A_\mathfrak{m} \cong (A \bowtie^f J)_{\mathfrak{m}\bowtie^f J}$ lorsque $J_{S_\mathfrak{m}} = 0$ et $B_{\mathfrak{m}'} \cong (A \bowtie^f J)_{\bar{\mathfrak{m}'}}$ où $\bar{\mathfrak{m}'} = \{(a, f(a)+j) \in A \bowtie^f J | f(a)+j \in \mathfrak{m}'\}$.

***Remarque* 6.1.4**
Supposons que $J = 0$. Puis Remarque 6.1.2 combiné avec la Proposition 2.3.7 nous donnent : $A \bowtie^f J$ est un anneau enchaîné (respectivement, domaine de valuation) si et seulement si $f^{-1}(J) = 0$ et $f(A)+J$ est un anneau enchaîné (respectivement, domaine de valuation).

Pour un exemple d'anneau arithmétique apparaissant sous forme d'amalgamation, voir l'exemple 6.2.2. Ensuite, soit I un idéal propre de A. La duplication amalgamée de A le long de I est un cas spéciale d'amalgamation d'anneau donnée par :

$$A \bowtie I := A \bowtie^{id_A} I = \{(a, a+i) \mid a \in A,\ i \in I\}$$

Comme une autre application du Théorème 6.1.1, nous obtenons des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une bi-amalgamation a une dimension globale faible d'au plus 1. Pour ce but, soit $Nil(R)$ désigne le nilradical d'un anneau R.

Corollaire 6.1.2
Supposons que $w.dim(f(A)+J) \leq 1$, $w.dim(g(A)+J') \leq 1$, $J \cap Nil(B) = 0$, $J' \cap Nil(C) = 0$ et, $\forall \mathfrak{m} \in Max(A, I_0)$, $J_{S_\mathfrak{m}} = 0$ ou $J'_{S'_\mathfrak{m}} = 0$. Alors $w.dim(A \bowtie^{f,g} (J, J') \leq 1$. L'inverse est vrai si I_0 est radical.

Preuve
Rappelons qu'un anneau R a une dimension globale faible inférieur ou égale 1 si et seulement si R est arithmétique et réduit [9, Theorem 3.5]. Une combinaison de ce fait avec le Théorème 6.1.1 et la Proposition 2.4.7 (sur le transfert de la propriété réduite) conduit à la conclusion. ■

L'inverse du Corollaire 6.1.2 n'est pas vrai en général. Un contre-exemple dans le cas particulier des amalgamations est donné dans l'Exemple 6.2.3. Aussi, à titre d'exemple pour ce résultat, l'Exemple 6.2.4 présente un anneau de globale dimension faible ≤ 1 qui se présente sous la forme d'une bi-amalgamation.
Pour le cas particulier des amalgamations, nous obtenons le résultat suivant :

Corollaire 6.1.3
Sous la notation ci-dessous, on a :
$w.dim(A \bowtie^f J) \leq 1$ si et seulement si $w.dim(A) \leq 1$, $f(A) + J$ est arithmétique (respectivement gaussien), $J \cap Nil(B) = 0$, et pour tout $\mathfrak{m} \in Max(A, f^{-1}(J))$, $J_{S_\mathfrak{m}} = 0$ ou $f_\mathfrak{m}^{-1}(J_{S_\mathfrak{m}}) = 0$.

Preuve
Combiner le Corollaire 6.1.1(2) et la Proposition 2.3.8 avec les faits bien connus que $w.dim(R) \leq 1$ si et seulement si R est réduit et arithmétique (respectivement, réduit et gaussien) [9, Theorems 3.5 et 4.8]. ■

La remarque 6.1.3 est également valable pour le corollaire 6.1.3 et la Proposition 5.3.8 pour la globale dimension faible. Voir l'Exemple 6.2.3 où $w.dim(A \bowtie^f J) \leq 1$ et $w.dim(f(A) + J) > 1$. Le Corollaire 6.1.3 récupère un résultat connu pour la duplications amalgamée Théorème 4.4.1(1)
Un anneau R est semi-héréditaire si et seulement si R est cohérent et $w.dim(R) \leq 1$ [9, Theorem 3.3]. Une combinaison de ce fait avec le Corollaire 6.1.2 et la Proposition 2.4.4 établit le transfert de la propriété semi-héréditaire aux bi-amalgamations dans le cas particulier des cadres noethériens.

Corollaire 6.1.4
Supposons que $f(A) + J$ et $g(A) + J'$ sont des anneaux semi-héréditaires Noethériens, $J \cap Nil(B) = 0$, $J' \cap Nil(C) = 0$ et, $\forall \mathfrak{m} \in Max(A, I_0)$, $J_{S_\mathfrak{m}} = 0$ ou $J'_{S'_\mathfrak{m}} = 0$. Alors, $A \bowtie^{f,g} (J, J')$ est un anneau semi-héréditaire Noethériens. La réciproque est vraie si I_0 est radical.

Pour le cas particulier des amalgamations, nous avons un résultat qui enrichie ce travail. Pour cela, nous rappelons d'abord le résultat suivant qui étudie le transfert de cohérence aux amalgamations.

***Lemme* 6.1.1 ([2, Theorem 2.2])**
Supposons que $f^{-1}(J)$ et J sont de type fini dans A et $f(A)+J$, respectivement. Alors : $A \bowtie^f J$ est cohérent si et seulement si A et $f(A)+J$ sont cohérents.

Comparez ce résultat avec la Proposition 5.3.9 sur le transfert de la cohérence aux amalgamations. Le résultat suivant est une combinaison de ce lemme et du Corollaire 6.1.3 avec le fait bien connu que R est semi-héréditaire si et seulement si R est cohérent et $w.dim(R) \leq 1$ [9, Theorem 3.3].

***Corollaire* 6.1.5**
Supposons que $f^{-1}(J)$ et J sont de type fini dans A et $f(A)+J$, respectivement. Alors $A \bowtie^f J$ est semi-héréditaire si et seulement si A est semi-héréditaire, $f(A)+J$ est cohérent arithmétique (respectivement, gaussien cohérent), $J \cap Nil(B) = 0$ et, pour tout $\mathfrak{m} \in Max(A, f^{-1}(J))$, $J_{S_\mathfrak{m}} = 0$ ou $f_\mathfrak{m}^{-1}(J_{S_\mathfrak{m}}) = 0$.

Voir l'Exemple 6.2.3 où $A \bowtie^f J$ est semi-héréditaire et $f(A)+J$ n'est pas semi-héréditaire. Le Corollaire 6.1.5 récupère un résultat connu pour les duplications des amalgamations Théorème 4.4.1(2)

6.2 Exemples

Premièrement, à titre d'exemple pour le Théorème 6.1.1, nous proposons une famille d'anneaux arithmétiques non réduits qui se présentent sous la forme de bi-amalgamations.

***Exemple* 6.2.1**
Soit $(A, \mathfrak{m})$ un domaine de valuation, $K := qf(A)$, E un A-module de type fini tel que $E_\mathfrak{m} = 0$, et $B := A \propto E$ l'extension trivial de l'anneau A par E, et $C := K[[X]]$. Considérons les homomorphismes d'anneaux injectifs $f : A \hookrightarrow B$ et $g : A \hookrightarrow C$ et soit $J := 0 \propto E$. Nous affirmons que la bi-amalgamation $R := A \bowtie^{f,g} (J, 0)$ est un anneau arithmétique non réduit. En effet, notons d'abord que $f^{-1}(J) = g^{-1}(0) = 0$, $f(A)+J = B$, et $g(A) = A$. De plus, B est (locale) arithmétique Par [55, Theorem 3.1]. Donc, R est un anneau enchaîné par Théorème 6.1.1. toutefois, R n'est pas réduit par la Proposition 2.4.7 comme $J^2 = 0$.

► Ensuite, à titre d'exemple pour le Corollaire 6.1.1, nous fournissons un exemple d'anneau arithmétique non réduit qui se présente sous la forme d'une amalgamation.

***Exemple* 6.2.2**
Soit $(A, \mathfrak{m})$ un domaine de valuation, E un A-module divisible non nul dont les sous-modules sont totalement ordonnés par inclusion (par exemple $E := qf(A)$), et $B := A \propto E$

l'extension de trivial de l'anneau A par E. Considérons l'homomorphisme injectif d'anneau $f : A \hookrightarrow B$ et soit $J := 0 \propto E$. Ensuite, l'amalgamation $R := A \bowtie^f J$ est un anneau arithmétique non réduit. En effet, $f^{-1}(J) = 0$ et $f(A) + J = B$ est un anneau enchaîné par [3, Theorem 4.16]. Donc, R est un anneau enchaîné par le Corollaire 6.1.1 mais pas réduit par la Proposition 2.3.8 comme $J \cap Nil(B) \neq 0$.

► L'inverse des Corollaires 6.1.2 et 6.1.4 ne sont pas vraies en général. Un contre-exemple est donné ci-dessous dans le cas trivial d'une amalgamation où $A \bowtie^f J \cong A$ et $f(A) + J = B$.

***Exemple* 6.2.3**
Considérons l'homomorphisme surjectif canonique d'anneau $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ et notons J l'idéal nul de $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$. Alors, $Z \bowtie^f J \cong \mathbb{Z}$ est un domaine de Dedekind et $f(\mathbb{Z}) + J = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ n'est pas réduit de sorte que $w.dim(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}) > 1$.

► Ensuite, afin d'illustrer le Corollaire 6.1.2, on peut utiliser des bi-amalgamations pour enrichir la littérature avec de nouveaux exemples d'anneaux non-semi-héréditaires de faible dimension globale ≤ 1 à partir des anneaux existants.

***Exemple* 6.2.4**
Soit A_0 un anneau de Noethérien avec $w.dim(A_0) \leq 1$ et soit I un idéal propre de A_0 tel que $I_{\mathfrak{m}} = 0$, $\forall \mathfrak{m} \in Max(A_0, I)$ (par exemple, $A_0 := \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ et $I := 4\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$; clairement, $I_{\mathfrak{m}_1} = 0$ et $I_{\mathfrak{m}_2} = 0$, où $\mathfrak{m}_1 := 2\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ et $\mathfrak{m}_2 := 3\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$). Soit $A := A_0 \bowtie I$ la duplication amalgamée de A_0 le long de I. Par Théorème 4.4.1(1), $w.dim(A) \leq 1$. Soit D un anneau non cohérent avec $w.dim(D) \leq 1$ (par exemple [39, Exemple 4.1]). Enfin, considérons les homomorphismes naturels de l'anneau $f : A \twoheadrightarrow A_0$ et $g : A \hookrightarrow A \times D$, et soit $J := I$ et $J' := (I \bowtie I) \times D$. Ensuite, la biamalgamation $R := A \bowtie^{f,g} (J, J')$ est un anneau n'est pas semi-héréditaire avec globale dimension faible ≤ 1. En effet, notez d'abord que $f^{-1}(J) = g^{-1}(J') = I \bowtie I$. Ensuite, nous avons $w.dim(f(A) + J) = w.dim(A_0) \leq 1$ et $w.dim(g(A) + J') = w.dim((A \times 0) + ((I \bowtie I) \times D)) = w.dim(A \times D) = sup\{w.dim(A), w.dim(D)\} \leq 1$. De plus, soit $\mathfrak{m} \bowtie I \in Max(A, I \bowtie I)$. Nécessairement, $\mathfrak{m} \in Max(A_0, I)$. par conséquent, $S_{\mathfrak{m} \bowtie I} = f(A \setminus (\mathfrak{m} \bowtie I)) + J = (A_0 \setminus \mathfrak{m}) + I$ et par conséquent $J_{S_{\mathfrak{m} \bowtie I}} = I_{\mathfrak{m}} = 0$. Maintenant, A_0 et D sont réduits et donc de même pour A et $A \times D$. Par le Corollaire 6.1.2, $w.dim(R) \leq 1$. Enfin, notons que R n'est pas cohérent (et, forcément, non semi-héréditaire) puisque $\frac{R}{J \times 0} \cong g(A) + J' = A \times D$ n'est pas cohérent (comme D n'est pas cohérent).

► Ensuite, à titre d'exemple pour le Corollaire 6.1.4, nous fournissons un exemple d'anneau semi-héréditaire qui se présente sous la forme d'une bi-amalgamation.

***Exemple* 6.2.5**
Soient A un anneau semi-héréditaire Noethérien et I un idéal propre de A tel que $I_{\mathfrak{m}} = 0$, $\forall \mathfrak{m} \in Max(A, I)$ (par exemple $A := \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ et $I := 4\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$). Soit $B := A \bowtie I$ la duplication amalgamée de A le long de I et soit D un anneau semi-héréditaire Noethé-

rien. Enfin, considérons les homomorphismes naturels des anneaux injectifs $f : A \hookrightarrow B$ et $g : A \hookrightarrow A \times D$, et soit $J := I \bowtie I = I \times I$ et $J' := I \times D$. Alors la bi-amalgamation $R := A \bowtie^{f,g} (J, J')$ est un anneau semi-héréditaire Noethérien. En effet, notons que $f^{-1}(J) = g^{-1}(J') = I$ et, $\forall \mathfrak{m} \in Max(A, I)$, $S_{\mathfrak{m}} := f(A \setminus \mathfrak{m}) + I \times I = ((A \setminus \mathfrak{m}) + I) \times ((A \setminus \mathfrak{m}) + I)$. Alors $J_{S_{\mathfrak{m}}} = (I \times I)_{S_m} \cong I_{\mathfrak{m}} \times I_{\mathfrak{m}} = 0$. De plus, $f(A) + J = A \bowtie A = A \times A$ et $g(A) + J' = A \times 0 + I \times D = A \times D$ sont des anneaux semi-héréditaires Noethérien (comme le sont A et D). Par conséquent, le Corollaire 6.1.4 mène à la conclusion.

Perspectives

Nous terminons ce travail, par quelques perspectives de recherche que nous souhaitions aborder prochainement.

La première question :

quelles sont les conditions nécessaires pour que la bi-amalgamée soit un anneau gaussien, fqp-anneau, un anneau de valuation ou un anneau de Prüfer ?

La deuxième question :

Soit R un anneau total des fractions. Dans quelles conditions, R est Gaussien ?

La troisième question :

Soit R un anneau total des fractions, est-ce-que $w.dim(R) = 0, 1$ ou ∞ ?

Bibliographie

[1] J. Abuihlail, M. Jarrar, S. Kabbaj, (2011), *Commutative rings in which every finitely generated ideal is quasi-projective,* J. Pure Appl. Algebra 215 : 2504-2511.

[2] K. Alaoui Ismaili and N. Mahdou, *Coherence in amalgamated algebra along an ideal*, Bull. Iran. Math. Soc. 41(3) (2015) 625–632.

[3] D. D. Anderson and M. Winders, *Idealization of a module*, J. Comm. Algebra, 1 (2009), 3–56.

[4] M. F. Atiyah and I. G. MacDonald, *Introduction to commutative algebra*, Addison-Wesley, Reading, 1969

[5] C. Bakkari, *On Prüfer-like conditions,* to appear in J. Commut. Algebra.

[6] C. Bakkari, S. Kabbaj and N. Mahdou, *Trivial extensions defined by Prüfer conditions,* J. Pure Appl. Algebra 214 (2010), 53-60.

[7] C. Bakkari, N. Mahdou, H. Mouanis, *Prüfer–like conditions in subring retracts and applications*, Comm. Algebra 37, (2009) 47–55.

[8] S. Bazzoni, S. Glaz, *Gaussian properties of total rings of quotients,* J. Algebra 310 (2007) 180-193.

[9] S. Bazzoni and S. Glaz, *Prüfer rings in Multiplicative Ideal Theory in Commutative Algebra,* Eds : J. W. Brewer, S. Glaz, W.J. Heinzer, and B. Olberding , Springer, (2006), 263-277.

[10] S. Bazzoni and S. Glaz, *Prüfer rings in Multiplicative Ideal Theory in Commutative Rings,* pp. 55– 72, Springer-Verlag, New York, 2006.

[11] M. Jr. Boisen, M. D. Larsen, *On Prüfer rings as images of Prüfer domains*, Proc. Amer. Math. Soc. 40 (1973), 87–90.

[12] M. Jr. Boisen, P. Sheldon, (1975), *Pre-Prüfer rings,* Pacific J. Math. 58 : 331-344.

[13] N. Bourbaki, (1972), *Commutative Algebra,* Paris : Hermann.

[14] J.G. Boynton, (2011), *Prüfer conditions and the total quotient ring,* Comm. Algebra 39(5) : 1624-1630.

[15] J.G. Boynton, (2007), *Pull-backs of arithmetical rings,* Comm. Algebra 35 : 2671-2684.

[16] J. G. Boynton, *Pullbacks of Prüfer rings*, J. Algebra 320 (2008) 2559–2566.

[17] M. Chhiti, M. Jarrar, S. Kabbaj, N. Mahdou ; *Prüfer Conditions in an Amalgamated Duplication of a Ring Along an Ideal.*Communications in Algebra, 43 : 249-261, (2015)

[18] M .Chhiti, N. Mahdou and M. Tamekkante *Clean property in amalgamated algebras along an ideal* Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics Volume 44 (1) (2015), 41 – 49

[19] M. D'Anna, *A construction of Gorenstein rings*, J. Algebra. 306 (2006), no. 2, 507-519.

[20] M. D'Anna, C. A. Finacchiaro, et M. Fontana ; *Amalgamated algebras along an ideal*, Comm Algebra and Aplications, Walter De Gruyter (2009), 241–252.

[21] M. D'Anna, C. Finocchiaro, M. Fontana, (2009), *Amalgamated algebras along an ideal,* M. Fontana, S. Kabbaj, B. Olberding, I. Swanson, eds. Commutative Algebra and its Applications. Berlin : Walter de Gruyter, pp. 155-172.

[22] M. D'Anna, C. A. Finacchiaro, et M. Fontana ; *New Algebraic Properties of an Amalgamated Algebra Along an Ideal.* Communications in Algebra,44 :5, 1836-1851 (2016)

[23] M. D'Anna, C. A. Finacchiaro, et M. Fontana ; *Properties of chains of prime ideals in amalgamated algebras along an ideal*, J. Pure Applied Algebra 214(2010), 1633-1641

[24] M. D'Anna et M. Fontana ; *An amalgamated duplication of a ring along an ideal : the basic properties*, J. Algebra Appl. 6(3) (2007), 443-459.

[25] M. D'Anna and M. Fontana, *The amalgamated duplication of a ring along a multiplicative canonical ideal*, Ark. Mat. 45(2007), no. 2, 241–252.

[26] P. M. Eakin ; *The converse of a wellknown theorem on Noetherian rings*,Math. Ann.177, 278-282(1968).

[27] C. A. Finocchiaro, *Amalgamation of algebras and the ultrafilter topology on the space of valuation overrings of an integral domain*, PhD thesis, University Roma Tre, Rome, December 2010.

[28] C. A. Finocchiaro ; *Prüfer-Like Conditions on an Amalgamated Algebra Along an Ideal.* Houston journal of mathematics. 40-1, 63-79 (2014)

[29] M. Fontana, *Topologically defined classes of commutative rings*, Ann. Mat. Pura Appl. 123 (1980), 331–355.

[30] M. Fontana, J. A. Huckaba et I. J. Papick, *Prüfer Domains*, Marcel Dekker, New York, 1997. 12

[31] L. Fuchs, W. Heinzer, B. Olberding, *Commutative ideal theory without finiteness conditions : Completely irreducible ideals,* Trans. Amer. Math. Soc. 358 (2006) 3113-3131.

[32] L. Fuchs, W. Heinzer, B. Olberding, *Commutative ideal theory without finiteness conditions : Primal ideals,* Trans. Amer. Math. Soc.357 (2005) 2771-2798.

[33] K.R. Fuller, D.A. Hill, (1970), *On quasi-projective modules via relative projectivity,* Arch. Math. (Basel) 21 :369-373.

[34] R. Gilmer, J. Huckaba, Δ*-rings*, J. Algebra, 28 (1974), 414–432.

[35] S. Glaz ; *Commutative coherent rings*, Springer-Verlag, Lecture Notes in Mathematics, 1371 (1989).

[36] S. Glaz, *Finite conductor rings,* Proc. Amer. Math. Soc. 129 (2000) 2833-2843.

[37] S. Glaz, *Prüfer conditions in rings with zero-divisors,* CRC Press Series of Lectures in Pure Appl. Math.241, (2005), 272-282.

[38] S. Glaz, *The weak dimension of Gaussian rings,* Proc. Amer. Math. Soc.133 (2005), 2507-2513 (electronic).

[39] S. Glaz and R. Schwarz, *Prüfer conditions in commutative rings*, Arab. J. Sci. Eng. 36 (2011) 967–983.

[40] M. Griffin, *Prüfer rings with zero divisors*, J. Reine Angew. Math. 239/240 (1969), 55-67.

[41] M. Harris, Some results on coherent rings, Proc. Amer. Math. Soc. 17 (1966), 474–479.

[42] W. Heinzer and C. Huneke, *Gaussian polynomials and content ideals,* Proc. Amer. Math. Soc.125 (1997), 739-745.

[43] E. Houston, J. Taylor, *Arithmetic properties in pullbacks*, J. Algebra 310 (2007), no. 1, 235260.

[44] J.A. Huckaba, *Commutative rings with zero divisors*, Marcel Dekker, New York-Basel,1988.

[45] C. U. Jensen, *Arithmetical rings*, Acta Math. Acad. Sci. Hungar. 17 (1966),115-123.

[46] S. Kabbaj, K. Louartiti and M. Tamekkante, *Bi-amalgamated algebras along ideals*, Commutative algebra 9(1),(2017), 65-87.

[47] S. Kabbaj and N. Mahdou, *Trivial extensions defined by coherent-like conditions*, Comm. Algebra 32 (2004) 3937–3953.

[48] S.Kabbaj, N. Mahdou and M. A. S. Moutui ; *Bi-amalgamations subject to the arithmetical property*, Journal of Algebra and Its Applications 16(1),(2016) 1750030, 11p.

[49] K.A. Loper and M. Roitman, *The content of a Gaussian polynomial is invertible,* Proc. Amer. Math. Soc. 133 (2005), 1267-1271 (electronic)

[50] T.G. Lucas, *Gaussian polynomials and invertibility,* Proc. Amer. Math. Soc. 133 (7) (2005), 1881-1886 (electronic)

[51] T.G. Lucas, (1986), *Some results of Prüfer rings.* Pacific J. Math. 124 (2) : 333-343.

[52] N. Mahdou, *Cours et exercices corrigés : Structure algébrique* FST Fès 2015

[53] N. Mahdou, *Introduction à l'algèbre homologique* FST Fès (2010)

[54] N. Mahdou, *Anneaux Commutatifs Cohérents et la (n,d)propriété* IPNPUB – Fès – Maroc (2017)

[55] M. Kabbour and N. Mahdou, A. Mimouni, *Trivial ring extensions defined by arithmetical-like properties*, Comm. Algebra 41 (2013) 4534–4548.

[56] B. Osofsky, (1969), *Global dimension of commutative rings with linearly ordered ideals,* J. London Math. Soc. 44 : 183-185.

[57] J.J. Rotman, *An introduction to homological algebra,* Academic Press, New York, 1979.

[58] H. Tsang, *Gauss's Lemma,* Ph.D. Thesis, University of Chicago, 1965.