كلية العلوم و التقنيات فاس
Faculté des Sciences et Techniques de Fès

جامعة سيدي محمد بن عبد الله
Université Sidi Mohamed Ben Abdellah

Master Mathématique et Application au Calcul Scientifique

(MACS)

MEMOIRE DE FIN D'ETUDES

Pour l'obtention du Diplôme de Master Sciences et Techniques (MST)

Les opérateurs accrétifs et m-accrétifs et leurs applications

Réalisé par : EL-MRABTE FAOUZI

Encadré par : Pr. EL KHOMSSI MOHAMMED

Soutenu le 18/06/2018

Devant le jury composé de :

- Pr. EL AYADI Rachid	Faculté des Sciences et Techniques Fès	Examinateur
- Pr. EL HILALI ALAOUI Ahmed	Faculté des Sciences et Techniques Fès	Examinateur
- Pr. EL KHOMSSI Mohammed	Faculté des Sciences et Techniques Fès	Encadrant
- Pr. HILALI Abdelmajid	Faculté des Sciences et Techniques Fès	Examinateur
- Pr. OUADGHIRI Anisse	Faculté des Sciences et Techniques Fès	Président

Année Universitaire 2017 / 2018

FACULTE DES SCIENCES ET TECHNIQUES FES – SAISS

B.P. 2202 – Route d'Imouzzer – FES

REMERCIEMENTS

Mes premiers remerciements s'adressent à mon encadrant monsieur EL KHOMSSI Mohammed. Merci pour votre gentillesse, votre disponibilité, vos conseils, votre rigueur scientifique et votre aide très précieuse tant au niveau personnel que professionnel. Mes respectueux remerciements s'adressent aux Professeurs EL AYADI Rachid, EL HILALI ALAOUI Ahmed, HILALI Abdelmajid et OUADGHIRI Anisse pour avoir consacré du temps et de l'énergie à la lecture de mon manuscrit et pour l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail.

Mes remerciements vont aussi à l'ensemble des professeurs qui ont assuré l'enseignement du Master intitulé Mathématique et Applications aux Calculs Scientifiques.

Je ne peux terminer ces lignes sans remercier mes amis et mes parents Mohammed et Saida qui n'ont jamais cessé de m'encourager. Mes parents, à qui je ne trouverai pas les mots pour leur dire exactement tout ce que je leur dois. A chaque pas et à chaque détour du chemin ils sont là, avec sollicitude et affection, avec la confiance en moi qui en manque parfois...Merci à mes soeurs Rajae et Safae et mes frères Ahmed et Mohammed de m'avoir amené si loin.

Enfin, je remercie tous ceux que j'ai pu côtoyer durant les cinq années d'études et tous ceux qui ont contribué de près ou loin à l'aboutissement de ce modeste travail.

TABLE DES MATIÈRES

TABLE DES FIGURES

RÉSUMÉ

Nous avons décomposé ce mémoire en cinq chapitres.

Le premier chapitre préliminaire est consacré aux quelques propriétés des opérateurs accrétifs dans un espace de Banach, en particulier dans les espaces de Hilbert.
Ce chapitre représente la base de la suite de ce travail, il est complété et enrichi par des opérateurs accrétifs.

Dans le second chapitre, après définitions des opérateurs m-accrétifs et leur caractéristique, notre contribution était de proposer quelques exemples de ce type d'opérateur, ainsi que la projection de quelques théorèmes sur ces opérateurs qui ont un rôle important dans la physique.

Le problème d'évolution dans les espaces de Hilbert approché et étudié par la théorie des semi-groupes, ainsi que la notion du générateur infinitésimal de semi-groupe, ont été l'objet du troisième chapitre.
Nous avons développé certaines démonstrations ou passage de démonstration.

Le quatrième chapitre aborde une nouvelle théorie basée sur la notion des solutions ϵ-approchée et les bonnes solutions du problème d'évolution non linéaire.
Nous avons proposé une synthèse de l'essentiel provient de l'article de Crandall et Ligget complétant des travaux de Brezis et Pazy. Il s'agit d'étendre, par des méthodes nouvelles, certaines résultats établir dans le cadre des espaces de Hilbert aux espaces de Banach généraux et d'obtenir des résultats dans le cadre non linéaire, aussi proche que possible de la théorie linéaire (Hille-Yoshida).

Pour ce qui concerne le dernier chapitre, nous avons abordé quelques problèmes physiques (les problèmes de chaleur non linéaire, le problème de Stéfan ; il s'agit d'un problème difficile, nous l'avons étudié dans des cas particuliers) dans un cadre général avec une hypothèse non classique du fait que φ est croissante.
La question de l'existence et d'unicité est étudié pour ces problèmes physiques.
Ce chapitre est complété par l'étude des opérateurs elliptiques d'ordre 2. Nous avons proposé quelques estimations et inégalités liées aux solutions des problèmes.

CHAPITRE 1

OPÉRATEURS ACCRÉTIFS D'UN ESPACE DE BANACH

Notations On désigne par X un espace de Banach réel de norme notée $|.|$.
On appelle opérateur de X toute application A de X dans $\mathscr{P}$(X)et on définit :
Domaine de A ;

$$D(A) = \{x \in X; Ax \neq \emptyset\}$$

Image de A ;

$$R(A) = \bigcup_{x \in X} Ax = \bigcup_{x \in D(A)} Ax$$

On identifiera souvent A à un graphe $\{(x, y) \in X \times X, y \in Ax\}$.
Ainsi on écrira :

$$A \subset X \times X \ et \ y \in Ax \Leftrightarrow (x, y) \in A$$

La somme de deux opérateurs A et B de x est Définie comme suit :
$\forall x \in X \quad (A + B)(x) = Ax + Bx = y + z; \ y \in Ax, z \in Bx.$
(Noter que $D(A + B) = D(A) \cap D(B)$).

Le composé AB des opérateurs A et B est l'opérateur dont le graphe est :
$AB = \{(x, y) \in X \times X; \quad \exists z \in X \ avec \ \ z \in Bx, \ y \in Az\}.$

l'opérateur A est dit **univoque**, si Ax a au plus un élément pour tout x.
On ne fera pas alors de différence entre A et l'application qu'il définit de D(A)dans X :

$$A : D(A) \longmapsto X$$

$$x \longmapsto Ax$$

1.1 Opérateurs monotones d'un espace de Hilbert

Supposons d'abord que X soit un espace de Hilbert réel de produit scalaire noté <.,.>.

Définition 1.1 *On dit que A est monotone si*

$$\forall (x,y),(\hat{x},\hat{y}) \in A,\ < x-\hat{x}, y-\hat{y} > \geq 0$$

Proposition 1.1 *les insertions suivantes sont équivalentes :*
i) A est monotone
ii) $\forall (x,y),(\hat{x},\hat{y}) \in A, \forall \lambda > 0\ |x-\hat{x}| \leq |x-\hat{x}+\lambda(y-\hat{y})|$
iii) $\forall \lambda > 0\ , (I+\lambda A)^{-1} :\ R(I+\lambda A) \longmapsto X$ *est une contraction*

Remarque
Si A est un opérateur de X, on définit

$$A^{-1} = \{(y,x) \in X \times X; (x,y) \in A\}$$

Preuve 1.1 $i \Rightarrow ii$ *On a :*

$$\begin{aligned} |x-\hat{x}+\lambda(y-\hat{y})|^2 &= < x-\hat{x}+\lambda(y-\hat{y}), x-\hat{x}+\lambda(y-\hat{y}) > \\ &= |x-\hat{x}|^2 + 2\lambda < x-\hat{x}, y-\hat{y} > + \lambda^2 |y-\hat{y}|^2 \end{aligned} \tag{1.1}$$

Donc $|x-\hat{x}+\lambda(y-\hat{y})|^2 - |x-\hat{x}|^2 > 0$ $(< x-\hat{x}, y-\hat{y} > \geq 0$ *car A est monotone*$)$
D'où $|x-\hat{x}| \leq |x-\hat{x}+\lambda(y-\hat{y})|$.
$ii \Rightarrow iii$ *Soit* $(x,y),(\hat{x},\hat{y}) \in A$, *on a* $|x-\hat{x}| \leq |x-\hat{x}+\lambda(y-\hat{y})| \quad \forall \lambda > 0$
Si $x+\lambda y = \hat{x}+\lambda\hat{y}$
Alors $|x-\hat{x}+\lambda(y-\hat{y})| = 0$,
D'où $x-\hat{x} = 0$, *ainsi* $(I+\lambda A)^{-1}$ *est une application de R(I+λA) dans X qui est une contraction.*
$iii \Rightarrow i$ *On a pour tout* $\lambda > 0$,
$2 < x-\hat{x}, y-\hat{y} > + \lambda |y-\hat{y}|^2 \geq 0$ *; d'où en faisant* $\lambda \longmapsto 0$, *on obtient la monotonie de A.*

On revient maintenant au cas d'un espace de Banach quelconque.

Définition 1.2 *Un opérateur A de X est dit* ***accrétif*** *si :*

$$\forall (x,y),(\hat{x},\hat{y}) \in A,\ \forall \lambda > 0, |x-\hat{x}| \leq |x-\hat{x}+\lambda(y-\hat{y})|$$

Afin de donner des formulations équivalents de cette définition,rappelons deux notions attachées à celle d'espace de Banach.

Définition 1.3 (*Produit semi-intérieur* $[.,.]$)
$\forall (x,y) \in X, [x,y] = \lim\limits_{\lambda \to 0} \frac{|x+\lambda y|-|x|}{\lambda} = \inf\limits_{\lambda > 0} \frac{|x+\lambda y|-|x|}{\lambda}$.

Remarque
L'application $\lambda \longmapsto [x,y]_\lambda = \frac{|x+\lambda y|-|x|}{\lambda}$ est croissante car $\lambda \longmapsto |x+\lambda y|$ est convexe. Ceci justifie l'existence de la limite ci-dessus et son identité avec la borne inférieure.
En effet cette limite l existe (c'est la dérivée à l'origine de le fonction convexe $\lambda \longmapsto |x+\lambda y|$) et d'après la convexité on a $|x+\lambda y| - |x| \geq \lambda l$.

Application de dualité

On note X^* le dual de X et sa norme $|.|_*$

Définition 1.4 (*Application de dualité*)

$$\forall x \in X,\ F(x) = \{w \in X^*;\ < w, x >_{X^* \times X} = |x|^2,\ |w|_* = |x|\}$$

F est une application de X dans $\mathscr{P}(X^*)$, partout définit d'après le théorème de Hahn-Banach. Le plus souvent, nous utiliserons plutôt une version normalisée de cette application de dualité.

Définition 1.5

$$\forall x \in X,\ J(x) = \{w \in X^*;\ < w, x >_{X^* \times X} = |x|,\ |w|_* = |x|\}$$

On vérifie alors :

$$F(x) = |x|.J(x);\ J(0) = \{w \in X^*;\ |w_*| = 1\}$$

Le lien entre ces deux notions est le suivant :

Proposition 1.2 *Soit $x, y \in X$,Alors :*

$$[x,y] = \max_{w \in J(x)} < w, y >$$

$$-[x,-y] = \min_{w \in J(x)} < w, y >$$

Remarque
1) Si X est un espace de Hilbert réel de produit scalaire $<.,.>$, on montre immédiatement que :

$$[x,y] = \frac{1}{|x|} < x, y > \quad si\ |x| \neq 0$$

$F(x) =< x, . >,\quad J(x) = \frac{1}{|x|} < x, . >$
2) Si X^* est strictement convexe, l'application de dualité J est univoque en tout point distinct de l'origine. Dans ce cas, $y \longmapsto [x,y]$ est linéaire. On rappelle qu'un espace de Banach X est strictement convexe si : $(|x| = |y| = 1,\ x \neq y) \Longrightarrow (|\frac{x+y}{2}| < 1)$.

En effet ; supposons que w_1 et w_2 appartiennent à F(x) et que $w_1 \neq w_2$.
On a :$|w_1| = |w_2| = |x|$ et $< x, \frac{w_1+w_2}{2} >= |x|^2$,
d'où $\left|\frac{w_1+w_2}{2}\right| < |x|$ puisque X^* est strictement convexe, et $\left|\frac{w_1+w_2}{2}\right| \geq |x|$, il y a donc contradiction.
Donc $w_1 = w_2$. D'où J est univoque.
Les espaces de Hilbert, les espaces L^p avec 1<p<$+\infty$, sont strictement convexes. Il n'en est pas de même pour les espaces L^1,$L^{+\infty}$,etc...

La démonstration de la proposition 1.2 utilise certaines des propriétés suivantes du produit semi-intérieur.

Proposition 1.3 *$\forall x, y \in X$,*
i) $\forall \lambda > 0,\ [x, \lambda y] = \lambda [x, y]$
ii) $-[x, -y] < [x, y]$
iii) $[x, y + z] \leq [x, y] + [x, z]$
iv) $\forall \alpha \in \mathbb{R},\ [x, \alpha x + y] = \alpha |x| + [x, y]$
v) $[0, y] = |y|,\ |[x, y]| \leq |y|$
vi) $|[x, y] - [x, z]| \leq |y - z|$
vii) $X \times X \longmapsto \mathbb{R}$
$(x, y) \longmapsto [x, y]$ *est semi-continue supérieurement (s.c.s).*

Remarque
Dans les espaces où l'application de dualité est univoque, "s-accrétif " $\Longleftrightarrow$" accrétif ". Alors, la somme de deux opérateurs accrétif est accrétif. C'est le cas des espaces de Hilbert(cas des opérateurs monotones), des espaces à dual strictement convexe (cas des espaces L^p où 1<p<∞ -voir plus loin).

Calcul de [.,.] et de J dans les espaces L^p

On se donne Ω un espace mesuré dont la mesure notée dx sera supposée σ-finie. (On peut en fait se dispenser de cette hypothèse pour beaucoup des résultats qui suivront).

Pour 1<p<∞, L^p est l'espace des classes de fonctions définis dx-p.p, et de puissance p-ième sommable avec la norme $|u|_p = (\int_\Omega |u(x)|^p dx)^{1/p}$

Pour p=∞, $L^\infty(\Omega)$ est l'espace des classes de fonctions mesurables essentiellement bornés muni de la norme $|u|_\infty = \sup\limits_{x \in \Omega} |u(x)|$.

On notera $sign_0$ et $sign$ les graphes de $\mathbb{R}^2$ définies par :

$$sign_0\ r = \begin{cases} 1 & si\ \ r > 0 \\ 0 & si\ \ r = 0 \\ -1 & si\ \ r < 0 \end{cases} \tag{1.2}$$

$$sign\ r = \begin{cases} 1 & si\ \ r > 0 \\ [-1, 1] & si\ \ r = 0 \\ -1 & si\ \ r < 0 \end{cases} \tag{1.3}$$

Comme conséquence de la proposition 1.2, on a immédiatement les caractérisation suivantes :

Proposition 1.4 *Soit A un opérateur de X, alors A est accrétif si et seulement si l'un des conditions suivantes est réalisé,*
i) $\forall (x, y), (\hat{x}, \hat{y}) \in A,\ \forall \lambda > 0,\ |x - \hat{x}| \leq |x - \hat{x} + \lambda(y - \hat{y})|$
ii) $\forall \lambda > 0,\ (I + \lambda A)^{-1} :\ R(I + \lambda A) \longmapsto X$ *est une contraction*
iii) $\forall (x, y), (\hat{x}, \hat{y}) \in A,\ [x - \hat{x}, y - \hat{y}] \geq 0$
iv) $\forall (x, y), (\hat{x}, \hat{y}) \in A,\ , \exists w \in J(x - \hat{x}),\ \ < w, y - \hat{y} > \geq 0.$

Remarque
La propriété iv) nous incite à penser que, lorsque l'application de dualité n'est pas univoque, la somme de deux opérateurs accrétif n'est pas un opérateur accrétif. On peut effectivement

construire de tels exemples, par exemple si $X = \mathbb{R}^2$ muni de la norme $|(u,v)| = |u| + |v|$. Ceci nous conduit à poser la définition suivante.

Définition 1.6 *Un opérateur A de X est dit s-accrétif si*

$$\forall (x,y),(\hat{x},\hat{y}) \in A, \quad \forall w \in J(x-\hat{x}), \quad < w, y-\hat{y} > \geq 0, \ avec \ x \neq \hat{x}.$$

Proposition 1.5 *Soit A un opérateur s-accrétif de X et B un opérateur accrétif de X (resp s-accrétif).*
Alors A+B est accrétif (resp s-accrétif).
Ceci est une conséquence directe de la proposition 1.4, iv).

Proposition 1.6 *On note* $[.,.]_p$ *le produit semi-intérieur dans* $L^p(\Omega)$ *et* J_p *l'application de dualité.*
i) Si p=1, $\forall u, v \in L^1(\Omega)$

$$[u,v]_1 = \int_{x;u(x)\neq 0} sign_0(u(x)).v(x)\ dx \ + \ \int_{x;u(x)=0} |v(x)|\ dx.$$

$$J_1(u) = \{w \in L^\infty(\Omega)\ ;\ w(x) \in sign(u(x))\ dx - p.p\}.$$

ii) Si 1<p<∞, $\forall u, v \in L^p(\Omega)$

$$[u,v]_p = \frac{1}{|u|_p^{p-1}} \int_\Omega sign_0(u(x)).|u(x)|^{p-1}.v(x)\ dx$$

$$J_p(u) = \frac{1}{|u|_p^{p-1}}\ sign_0(u(.)).|u(.)|^{p-1} \in \ L^q(\Omega)$$

où $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Preuve 1.2 *<u>Cas p=1</u>*
Par définition

$$[u,v]_1 = \lim_{\lambda \to 0} \int_\Omega \frac{|u(x)+\lambda v(x)| - |u(x)|}{\lambda} dx$$

On vérifie que

$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{|u(x)+\lambda v(x)| - |u(x)|}{\lambda} dx = \left\{ \begin{array}{r} v(x)\ si\ u(x) > 0 \\ |v(x)|\ si\ u(x) = 0 \\ -v(x)\ si\ u(x) < 0 \end{array} \right.$$

On remarque que la convergence est monotone en λ *pour obtenir* $[u,v]_1$.
Puisque le dual de $L^1(\Omega)$ *est* $L^\infty(\Omega)$,

$$J_1(u) = \{w \in L^\infty(\Omega);\ \int_\Omega w(x)u(x)\ dx = \int_\Omega |u(x)|dx,\ |w|_\infty \leq 1\}.$$

Mais

$$0 = \int_\Omega (|u(x)| - w(x)u(x))dx = \int_\Omega |u(x)|(1 - w(x)sign_0\ u(x))dx.$$

implique que si u(x)≠ 0 , $1 = w(x)sign_0\ u(x)\ dx - p.p$, *puisque* $1 - w(x)sign_0\ u(x) \geq 0$.
On en déduit la description de $J_1(u)$.

Notation
Désormais, on écrira souvent,

$$\int_\Omega u \quad pour \quad \int_\Omega u(x)dx$$

.
<u>*Cas* $p \in]1, \infty[$</u> $\forall u, v \in L^p(\Omega)$

$$\begin{aligned}[u,v]_p &= \lim_{\lambda \to 0} \frac{(\int_\Omega |u+\lambda v|^p)^{\frac{1}{p}} - (\int_\Omega |u|^p)^{\frac{1}{p}}}{\lambda} \\ &= \frac{1}{p|u|_p^{p-1}} \lim_{\lambda \to 0} \int_\Omega \frac{|u(x)+\lambda v(x)|^p - |u(x)|^p}{\lambda} dx.\end{aligned}$$

Puisque $\frac{d}{dr}\ |r|^p = sign_0 r\ |r|^{p-1}$, *d'après le théorème de* `Lebesgue` *on obtient*

$$[u,v] = \frac{1}{|u|_{1-p}^p} \int_\Omega sign_0(u(x))\ |u(x)|^{p-1}\ v(x)\ dx.$$

Le dual de $L^p(\Omega)$ *est* $L^q(\Omega)$ *où* $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$. *Ainsi*

$$J_p(u) = \{w \in L^q(\Omega);\ \int_\Omega uw\ = \left(\int_\Omega |u(x)|^p\right)^{\frac{1}{p}},\ \int_\Omega |w|^q \leq 1\}.$$

D'après l'inégalité de `Hölder`

$$\int_\Omega uw \leq |u|_p |w|_q \leq |u|_p,$$

L'inégalité n'ayant lieu que si $w(x) \in sign_0(u(x)\ |u(x)|^{p-1}/|u|_p^{p-1}\ dx - p.p.$
On en déduit le résultat.

Corollaire 1.1 *i) Soit* A *un opérateur de* $L^1(\Omega)$, *alors* A *est accrétif ssi,*
$\forall (u,v)(\hat{u},\hat{v}) \in A,\ \exists\ w \in L^\infty(\Omega)$ *avec* $w(x) \in sign(u(x) - \hat{u}(x))\ dx - p.p$, $\int_\Omega w(v - \hat{v}) \geq 0.$
ii) Soit A *un opérateur de* $L^1(\Omega)$, *alors* A *est accrétif ssi,*
$\forall (u,v)\ (\hat{u},\hat{v}) \in A$ *avec* $u \neq \hat{u}, \forall w \in L^\infty(\Omega)\ , w(x) \in sign(u(x) - \hat{u}(x))dx - pp \to \int_\Omega w(v - \hat{v}) \geq 0.$
iii) Soit A *un opérateur de* $L^p(\Omega)$.*Alors*

A *accrétif* $\Longleftrightarrow$ A *s-accrétif* $\Longleftrightarrow \forall (u,v), (\hat{u},\hat{v}) \in A,\ \int_\Omega sign_0(u - \hat{u})|u - \hat{u}|^{p-1}(v - \hat{v})\ \geq 0.$

Ceci est un corollaire immédiat des propositions 1.4 et 1.6.

Calcul de [.,.] et de J dans $C_0(\Omega)$
Etant donné Ω un espace localement compact, on note $C_0(\Omega)$ la fermeture pour la topologie de la convergence uniforme de l'espace des fonctions réelles continues et à support compact dans Ω. En d'autres termes, $C_0(\Omega)$ est l'espace des fonctions continues sur Ω telles que

$$\forall \epsilon > 0, \exists K \subset \Omega,\ K\ compact\ t.q \sup_{x \in \Omega / K} |u(x)| < \epsilon.$$

Si Ω est compact, il coïncide avec l'espace des fonctions continues sur Ω.
L'espace $C_0(\Omega)$ sera muni de la norme

$$|u|_\infty = \sup_{x \in \Omega} |u(x)|.$$

Le dual de $C_0(\Omega)$ est l'espace des normes de Radon bornées sur Ω, il sera noté $Hb_b(\omega)$.
Si J est l'application de dualité de $C_0(\Omega)$,

$$\forall u \in C_0(\Omega),\ J(u) = \{\mu \in Hb_b(\Omega);\ \int_\Omega u d\mu = |u|_\infty,\ \int_\Omega d|\mu| \leq 1\}.$$

Notations
Si $u \neq 0$, on notera $E(u) = \{x_0 \in \Omega;\ |u(x_0)| = |u|_\infty\}$.
On remarque immédiatement que, si $x_0 \in E(u)$ et si δ_{x_0} désigne la mesure de Dirac en x_0, alors

$$sign_0(u(x_0))\ \delta_{x_0}\ \in J(u)$$

.
Il se trouve que ces éléments particuliers de J(u) suffisent à la décrire. En effet on a le résultat suivant :
Résultat :
Soit $u \in C_0(\Omega)$, avec $u \neq 0$. Alors
J(u)=enveloppe convexe fermé de $\{sign_0(u(x_0))\ \delta_{x_0};\ x_0 \in E(u)\}$.

En effet J(u) est un convexe compact pour la topologie $(Hb_b(\Omega), C_0(\Omega))$ (pour cette topologie,
$\mu_n \longmapsto \mu \iff \forall \varphi \in C_0(\Omega) \quad \int_\Omega \varphi d\mu_n \longmapsto \int_\Omega \varphi d\mu$).

On démontre ensuite que les mesures $\{sign_0(u(x_0))\ \delta_{x_0}\}$ sont des éléments extrémaux de ce convexe, (Soit C un convexe et c un point de C. On dit que c est un point extrémal de C lorsque $C - \{c\}$ est encore convexe).

En applique enfin le théorème de Krein-Milman disant qu'un convexe compact est l'enveloppe convexe fermée de ses points extrémaux.

La proposition ci-dessus suggère le résultat suivant que nous montrons de façon tout à fait indépendante.

Proposition 1.7 *Soit A un opérateur de $C_0(\Omega)$. Alors*
i) A est accrétif dans $C_0(\Omega)$ si et seulement si

$$\forall (u, v), (\hat{u}, \hat{v}) \in A, \exists x_0 \in E(u - \hat{x})\ avec\ sign_0(u(x_0) - \hat{u}(x_0))(v(x_0) - \hat{v}(x_0)) \geq 0.$$

ii) A est s-accrétif dans $C_0(\Omega)$ si et seulement si

$$\forall (u, v), (\hat{u}, \hat{v}) \in A\ avec\ u \neq \hat{u}, \forall x_0 \in E(u - \hat{x})\quad sign_0(u(x_0) - \hat{u}(x_0))(v(x_0) - \hat{v}(x_0)) \geq 0.$$

ou encore

$$\forall (u,v), (\hat{u},\hat{v}) \in A, \quad u(x_0) - \hat{u}(x_0) = |u-\hat{u}|_\infty \Rightarrow v(x_0) \geq \hat{v}(x_0).$$

Lemme 1.1 *On note $[.,.]_\infty$ le produit semi-intérieur dans $C_0(\Omega)$. Alors $\forall u, v \in C_0(\Omega)$ avec $u \neq 0$:*

$$[u,v]_\infty = \max_{x_0 \in E(u)} sign_0(u(x_0)).v(x_0).$$

Preuve 1.3 $[u,v]_\infty = \lim\limits_{\lambda \longmapsto 0} \frac{|u+\lambda v|_\infty - |u|_\infty}{\lambda}$.
Si $x_0 \in E(u)$

$$\frac{|u+\lambda v|_\infty - |u|_\infty}{\lambda} \geq \frac{|u(x_0)+\lambda v(x_0)| - |u(x_0)|}{\lambda}$$

,
Comme $u(x_0) \neq 0$,le membre de droite converge vers $sign_0(u(x_0))v(x_0)$.
Soit maintenant $x_\lambda \in \Omega$ tel que

$$|u(x_\lambda) + \lambda v(x_\lambda)| = |u+\lambda v|_\infty.$$

Alors $\lim\limits_{\lambda \longmapsto 0} |u(x_\lambda)| = \lim\limits_{\lambda \longmapsto 0} |u(x_\lambda)+\lambda v(x_\lambda)| = |u|_\infty$.
Comme $|u|_\infty \neq 0, x_\lambda$ reste dans un compact de Ω. On peut donc en extraire une suite x_{λ_n} telle que :$\lambda_n \longmapsto 0,\ x_{\lambda_n} \longmapsto x_0 \in \Omega,\ \lim\limits_{n \longmapsto \infty} |u(x_{\lambda_n})| = |u|_\infty$, et comme u est continue,
$|u(x_0)| = |u|_\infty$, *soit $x_0 \in E(u)$. Mais*

$$\frac{|u+\lambda v|_\infty - |u|_\infty}{\lambda} \leq \frac{|u(x_{\lambda_n}) + \lambda_n v(x_{\lambda_n})| - |u(x_{\lambda_n})|}{\lambda_n}.$$

Comme $f_n(x) = \frac{|u(x)+\lambda_n v(x)| - |u(x)|}{\lambda_n}$ est une suite de fonctions continue convergeant de façon monotone vers $f(x) = sign_0(u(x))v(x)$ qui est continue au voisinage de x_0, d'après le théorème de Dini, la convergence est uniforme sur un voisinage de 0. En particulier $f_n(x_{\lambda n}) \longmapsto f(x_0)$, et donc

$$[u,v]_\infty \leq sign_0(u(x_0)).v(x_0).$$

Le théorème de Dini s'énonce comme suit :
La convergence simple d'une suite monotone de fonctions à valeurs réelles définies et continues sur un espace compact vers une fonction continue implique sa convergence uniforme.

Preuve 1.4 *(Démonstration de la proposition 1.7)*
Pour i), il suffit d'appliquer le lemme 1 et le critère d'accrétivité iii) de la proposition 1.4.

Pour ii), on remarque en utilisant la proposition 1.2 et le lemme 1,que
$\forall u, \mu \in C_0(\Omega),\ \forall \mu \in J(u),$

$$\min_{x_0 \in E(u)} sign_0(u(x_0))v(x_0) = -[u, -v] \leq < \mu, u > \leq [u, v] = \max_{x_0 \in E(u)} sign_0(u(x_0))v(x_0)$$

.
On utilise alors directement la définition de s-accrétivité.

Avant de passer aux exemples d'opérateurs accrétifs, rappelons quelques notions supplémentaires.

Définition 1.7 *Soit u :$[a, b] \longmapsto \mathbb{R}$. On dit que u est <u>absolument continue</u> si,* $\forall \epsilon > 0,\ \exists \eta > 0 tel$ *que :*

$$\sum_n |\alpha_n - \beta_n| < \eta \Longrightarrow \sum_n |u(\alpha_n) - u(\beta_n)| < \epsilon$$

.
pour toute suite d'intervalle$]\alpha_n, \beta_n[$ *disjoints.*

Proposition 1.8 *Considérons les assertions :*
i) u : $[a, b] \longmapsto \mathbb{R}$, est absolument continue
ii) u : $[a, b] \longmapsto \mathbb{R}$, est dérivable p.p,$u^{'} \in L^1(a, b)$ *et* $u(t) - u(s) = \int_s^t u^{'}(\sigma)\ d\sigma, \quad \forall s, t \in [a, b]$.
iii) $u \in L^1_{loc}(]a, b[), \quad \frac{du}{dt} \in L^1(a, b)$ *au sens des distributions.*
Alors, i)$\Leftrightarrow$ ii)
et iii)$\leftrightarrow$ $\exists \tilde{u} = u$ p.p. vérifiant i)
iii)$\leftrightarrow$ $\exists \tilde{u} = u$ p.p. vérifiant ii)
et dans ce dernier cas $\frac{du}{dt} = \tilde{u}^{'}$ *p.p.*

Proposition 1.9 *Soit X un espace de Banach et* $u \in C^1([a, b], X)$,
Alors $t \longmapsto |u(t)|$ *est absolument continue et p.p.t,* $\frac{d}{dt}|u(t)| = < w(t), u^{'}(t) >, \quad \forall w(t) \in J(u(t))$.

Preuve 1.5 *Puisque u est dérivable en t*
$u(t + h) = u(t) + hu^{'}(t) + \theta(h)$.
Ainsi

$$\frac{|u(t + h)| - |u(t)|}{h} = \frac{|u(t) + hu^{'}(t) + \theta(h)| - |u(t)|}{h}$$

On voit en utilisant la définition de [.,.] que :

$$\lim_{h \longmapsto 0} \frac{|u(t + h)| - |u(t)|}{h} = [u(t), u^{'}(t)]$$

$$\lim_{h \longmapsto 0} \frac{|u(t + h)| - |u(t)|}{h} = -[u(t), -u^{'}(t)]$$

En tout point où $|u(t)|$ est dérivable, ces deux expressions sont égales et d'après la proposition 1.2, on a alors :

$$[u(t), u^{'}(t)] = -[u(t), -u^{'}(t)] = < w(t), u^{'}(t) > \quad , \forall w(t) \in J(u(t))$$

Mais

$$||u(t)| - |u(s)|| \leq |t-s|. \sup_{r\in[a,b]} |u^{'}(t)|.$$

La fonction $t \longmapsto |u(t)|$ est donc lipschitzienne, ceci implique qu'elle est absolument continue et donc dérivable p.p, d'après la proposition 1.8. Ainsi, d'après les calculs ci-dessus p.p.t,

$$\frac{d}{dt}|u(t)| = [u(t), u^{'}(t)] = -[u(t), -u^{'}(t)] =< w(t), u^{'}(t) > \quad, \forall w(t) \in J(u(t))$$

.

Notation

Etant donné I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $1 \leq p \leq +\infty$,on notera

$$W^{1,p}(I) = \{u \in L^p(I);\ \frac{du}{dt} \in L^p(I)\}.$$

La dérivée $\frac{du}{dt}$: étant comprise au sens des distributions.

1.2 Exemples d'opérateurs accrétifs

Nous avons donné maintenant quelques exemples d'opérateurs accrétifs.

Exemple 1.1

Soit X un espace de Banach et T :$X \longmapsto X$ une contraction ($|Tx - Ty| \leq |x-y|\ \forall x, y \in X$), Alors $I - T$ est accrétif.

En effet ; soit $x, \hat{x} \in X$ *et* $w \in J(x - \hat{x})$, alors

$< w, (x-\hat{x}) - (Tx - T\hat{x}) >= |x-\hat{x}| - < w, Tx - T\hat{x} > \geq 0$

car

$| < w, Tx - T\hat{x} > | \geq |w|_*|Tx - T\hat{x}| \leq |x - \hat{x}|.$

Exemple 1.2

$X = \mathbb{R}$. Toute fonction croissante d'une partie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définit un opérateur accrétif (ou plutôt monotone ici).

Si f :$\mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ est croissante, alors le graphe β défini par :$\forall x \in \mathbb{R},\ \beta x = [f(x^-), f(x^+)]$, est monotone.

Signalons quelques graphes que nous utilisons souvent.

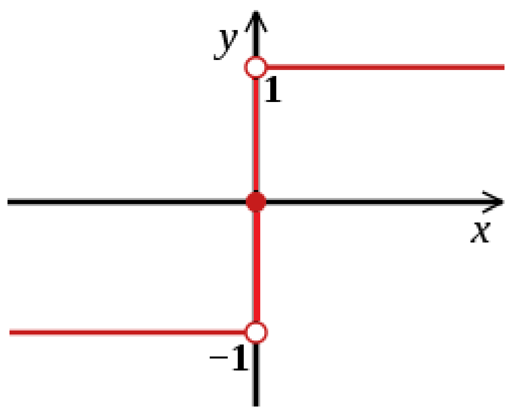

FIGURE 1.1 – sign.

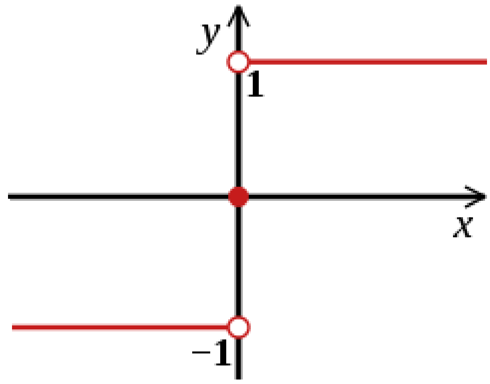

FIGURE 1.2 – $sign_0$.

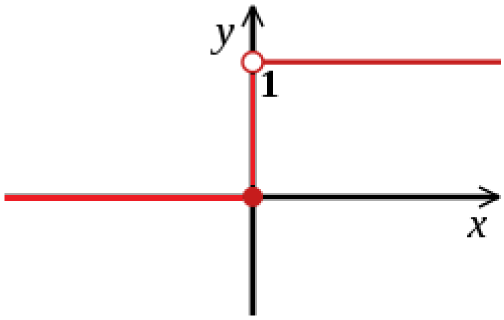

FIGURE 1.3 – $sign^+$.

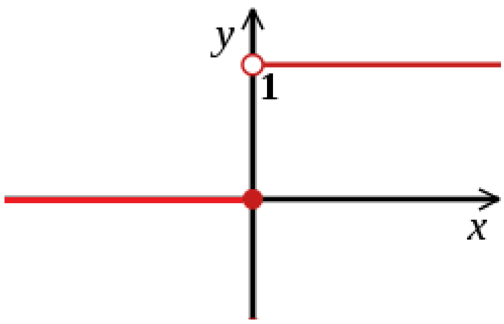

FIGURE 1.4 – $sign_0^+$.

Les deux derniers graphes sont appelés "graphes en coin" et servent de modèle pour les inéquations variationnelles.

Exemple 1.3
Soit Ω un espace mesuré (de mesure dx) et β un graphe monotone de $\mathbb{R}^2$. On définit le prolongement β_p *de* β à $L^p(\Omega)$ de la manière suivante :
$\beta_p = \{(u,v) \in L^p(\Omega) \times L^p(\Omega);\ v(x) \in \beta(u(x))\ dx - p.p.\}$.

Proposition 1.10 *β_p est accrétif dans $L^p(\Omega)$ pour tout $1 \leq p \leq +\infty$.*

Preuve 1.6 *Soit $(u,v),(\hat{u},\hat{v}) \in \beta_p$; puisque β est monotone dx-p.p ;*

$$\forall \lambda > 0,\ |u(x) - \hat{u}(x)| \leq |u(x) - \hat{u}(x) + \lambda((v(x) - \hat{v}(x))|$$

$p = +\infty$:
Prenant la borne supérieur essentielle des deux membres, on obtient

$$|u - \hat{u}|_\infty \leq |u - \hat{u} + \lambda(v - \hat{v})|_\infty$$

ce qui prouve l'accrétivité de β_∞ dans $L^\infty(\Omega)$
$1 \leq p \leq \infty$:
Elevant à la puissance p l'inégalité ci-dessus et intégrant sur Ω, on obtient

$$\int_\Omega |u(x) - \hat{u}(x)|^p dx \ \leq \int_\Omega |u(x) - \hat{u}(x) + \lambda(v(x) - \hat{v}(x)|^p dx$$

ce qui prouve l'accrétivité de β_p dans $L^p(\Omega)$.

Remarque
Il faut noter que $D(\beta) = \mathbb{R}$ n'implique pas en général $D(\beta_p) = L^p(\Omega)$. Ainsi si $\beta(r) = r^3$, on vérifie par exemple que $D(\beta_1) = L^1(\Omega) \bigcap L^3(\Omega)$ (i,e.$D(\beta_1) = L^3(\Omega)$ si Ω est de mesure bornée).

Exemple 1.4
$X = L^p(\mathbb{R})\ \ 1 \leq p \leq +\infty$. On définit
$D(A) = C_0^\infty(\mathbb{R}) = (D(\mathbb{R}))$
$Au = u'$
Alors A et -A sont s-accrétif dans $L^p(\mathbb{R})$ pour tout $p \in [1, \infty]$.

Preuve 1.7 *Commençons par le cas $1 \leq p \leq +\infty$. ; puisque A est linéaire il s'agit de montrer que :*

$$\int_\mathbb{R} sign_0(u)|u|^{p-1}u' \geq 0$$

Mais : $sign_0(u(x))|u(x)|^{p-1}u'(x) = \frac{d}{dx}|u(x)|^p$. Comme u est à support compact, il existe a tel que supp $u \subset [-a,a]$,
Ainsi

$$\int_\mathbb{R} sign_0(u)|u|^{p-1}u' = \int_{-a}^{a} \frac{d}{dx}|u(x)|^p dx = |u(a)|^p - |u(-a)|^p = 0.$$

Ceci montre à la fois que A et -A sont accrétifs (et donc s-accrétifs dans $L^p(\mathbb{R})$).

Pour montrer l'accrétivité dans $L^1(\mathbb{R})$ *et* $L^\infty(\mathbb{R})$ *on peut remarquer que,*

$$\forall 1 \leq p \leq +\infty,\ \forall \lambda > 0,\ |u|_p \leq |u + \lambda u^{'}|_p$$

et utiliser que $\lim\limits_{p \longmapsto 1} |u|_p = |u|_1, \quad \lim\limits_{p \longmapsto \infty} |u|_p = |u|_\infty.$

Pour la s-accrétivité dans $L^1(\mathbb{R})$*, il s'agit de montrer que*

$$\forall w \in L^\infty(\mathbb{R}),\ w(x) \in sign(u(x)) \Longrightarrow \int_{\mathbb{R}} w(x)u^{'}(x)dx = 0$$

Mais d'après la proposition 1.9

$$w(x)u^{'}(x) = \frac{d}{dx}|u(x)| \quad p.p.$$

Puisque u est à support compact, on en déduit

$$\int_{\mathbb{R}} w(x)u^{'}(x) = \int_{-a}^{a} \frac{d}{dx}|u(x)| = 0.$$

Pour la s-accrétivité dans $L^\infty(\Omega)$*, puisque* $u \in C_0(\mathbb{R})$ *et* $u^{'} \in C_0(\mathbb{R})$*, il s'agit de montrer (voir proposition 1.7)* $u(x_0) = |u|_\infty \Longrightarrow u^{'}(x_0) \geq 0$ *(resp* ≤ 0*) ce qui est classique.*

Exemple 1.5
$X = L^p(\mathbb{R}),\ 1 \leq p \leq +\infty$,On définit

$$D(A) = W^{1,p}(\mathbb{R}), \quad Au = u^{'}$$

Alors A et -A sont accrétifs dans $L^p(\mathbb{R})$,pour tout $p \in [1, \infty]$.

Lemme 1.2 *Soit* $j \in C^1([a,b])$ *et* $w \in W^{1,p}(a,b)$*.*

$$Alors\ j(w) \in W^{1,p}(a,b)\ et\ \frac{d}{dx}j(u(x)) = j^{'}(u(x))u^{'}(x) \quad p.p.$$

Preuve 1.8 *Puisque* $|j(u(x)) - j(u(y))| \leq |j^{'}|_\infty |u(x) - u(y)|$ *et que u est absolument continue, j(u) est aussi absolument continue et donc p.p dérivable, sa dérivé est égale p.p à* $j^{'}(u)u^{'}$ *qui appartient à* L^P *puisque* $j^{'} \in L^\infty$ *et* $u^{'} \in L^p$*.*

Lemme 1.3 *Si* $u \in W^{1,p}(\mathbb{R})$ *avec* $1 \leq p \leq \infty \quad \lim\limits_{x \longmapsto \pm\infty} u(x) = 0.$

Admettant ces lemmes, pour $1 \leq p \leq \infty$*, nous avons,*

$$\int_{\mathbb{R}} sign_0(u(x))|u(x)|^{p-1}.u^{'}(x)dx = \lim_{a \longmapsto \infty} \int_{-a}^{a} \frac{d}{dx}|u(x)|^p = \lim_{a \longmapsto \infty} |u(a)|^p - |u(-a)|^p = 0$$

Ce qui donne le résultat annoncé pour tout $1 \leq p \leq \infty$ *et donc pour tout* $p \in [1, \infty]$ *en adaptant un raisonnement déjà fait ci-dessus (car* $D(\mathbb{R})$ *dense dans* $W^{1,p}(\mathbb{R})$*).*

Preuve 1.9

$$|u|^p(x) - |u|^p(y) = \int_y^x sign_0(u(x))|u(x)|^{p-1}.u^{'}(x)dx\ tend\ vers\ 0,$$

pour que $x, y \longmapsto \infty$ *puisque* $sign_0(u)|u|^{p-1}.u^{'} \in L^1(\mathbb{R})$ *. Donc* $\lim\limits_{x \longmapsto \pm\infty} |u|^p(x)$ *existe et ne peut être que 0 puisque* $u \in L^p(\mathbb{R})$*.*

Exemple 1.6
Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ et A défini dans $L^p(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$ par :
$D(A) = C_0^\infty(\Omega)$, $Au = -\Delta u$ $(\Delta = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2}{\partial xi^2})$. Alors A est accrétif dans $L^p(\Omega)$ pour tout $1 \leq p \leq \infty$.

Lemme 1.4 *Soit $p \in C^0(\Omega)$, croissante avec p(0)=0, alors*

$$\forall u \in C_0^\infty(\Omega), \quad \int_\Omega p(u)(-\Delta u) \geq 0.$$

l'accrétivité dans $L^p(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$, est une conséquence immédiate de ce lemme, et du corollaire 1.1, on en déduit l'accrétivité dans L^1 et L^∞.

Preuve 1.10 *Supposons d'abord $p \in C^1(\mathbb{R})$, on utilise la formule de* `Green` *:*
$\forall u \in C^1(\Omega)$, $\forall v \in C^2(\Omega)$ à support compact

$$-\int_\Omega u\Delta v = \int_\Omega \nabla u \nabla v.$$

Ainsi

$$\int_\Omega p(u)(-\Delta u) = \int_\Omega p^{'}(u)|\nabla u|^2 \leq 0.$$

Si p est seulement continue, on applique le calcul ci-dessus à $p_n(r) = (\rho_n + p)(r) - (\rho_n + p)(0)$ où ρ_n est une suite régularisante de $\mathbb{R}$ et on peut aisément à la limite.

Exemple 1.7
Soit $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$, strictement croissante, avec $\varphi(0) = 0$, $D(A) = C_0^\infty(\mathbb{R})$, $Au = (\varphi(u))^{'}$.
Alors A est accrétif dans $L^1(\mathbb{R})$.
Remarque
En général, A n'est accrétif dans aucun autre espace L^p.

Preuve 1.11 *Puisque φ est strictement croissante, on a*

$$sign_0(u(x) - \hat{u}(x)) = sign_0(\varphi(u(x)) - \varphi(\hat{u}(x)) \ p.p.$$

Donc, si $w(x) = \varphi(u(x)) - \varphi(\hat{u}(x))$,

$$\int sign_0(u(x) - \hat{u}(x)).(\varphi(u(x)) - \varphi(\hat{u}(x)) = \int (sign_0 w).w^{'} = 0$$

d'après l'exemple 1.5.
En fait, le résultat ci-dessus est général comme le montre la proposition suivante.

Proposition 1.11 *Soit Ω un espace mesuré, A un opérateur de $L^1(\Omega)$,et β un graphe monotone de $\mathbb{R}$. Alors*

$$\left.\begin{array}{l} A \text{ s-accrrétif univoque} \\ ou \\ \beta \text{ injectif, } A \text{ accrétif} \end{array}\right. \Longrightarrow A\beta_1 \text{ est accrétif dans } L^1.$$

Preuve 1.12 *Soit* $(u,v),(\hat{u},\hat{v}) \in A\beta_1$ *et* $z \in \beta_1 u, v \in Az,\ \hat{z} \in \beta_1\hat{u},\ \hat{v} \in A\hat{z}$.
.Si A est accrétif, il existe $w \in L^\infty(\Omega)$ *avec* $w \in sign(z\hat{z})$ *t.q.* $\int_\Omega w(v-\hat{v}) \geq 0$.
.Si β *est injectif, on vérifie que* $sign(z-\hat{z}) \subset sign(u-\hat{u})$. *On déduit l'accrétivité de* $A\beta_1$ *dans* L^1
.Si A est s-accrétif

$$z \neq \hat{z} \longleftrightarrow \forall w \in L^\infty(\Omega) \text{ avec } w \in sign(z-\hat{z}),\ \int_\Omega w(z-\hat{z}) \geq 0$$

Si de plus A est univoque, ceci est vrai aussi si $z \neq \hat{z}$. *Pour conclure, il reste à montrer que* $sign(z-\hat{z}) \bigcap sign(u-\hat{u})$ *est non vide.*
Pour cela, on utilise w défini comme suit :

$$w(x) = \begin{cases} 1 \ si \ \ u(x) > \hat{u}(x) \\ sign_0(z(x) - \hat{z}(x) \ si \ \ u(x) = \hat{u}(x) \\ -1 \ si \ \ u(x) < \hat{u}(x) \end{cases}$$

Exemple 1.8
Soit $X = C_b(\Omega)$, $D(A) = C_0(\Omega) \bigcap C^2(\bar{\Omega})$ $Au = -\Delta u$.
Alors A est accrétif dans $C_b(\Omega)$.

Preuve 1.13 *Il s'agit de montrer que* : $\forall u \in D(A),\ u \neq 0,\ -[u,\Delta u]_\infty \geq 0$,
d'après la proposition 1.7, $\forall u \in D(A),\ u \neq 0\ \ u(x_0) = |u|_\infty \Longrightarrow -\Delta u(x_0) \geq 0$,
ce qui est classique.

Remarque
Comme conséquence de ceci, on a par exemple que le problème

$$\begin{cases} u \in C^2([0,1]) \\ u - u'' = f \ \ donne \ dans \ C_b(0,1) \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

admet au plus une solution. Ce n'est évidemment pas le cas pour le problème $u \in C^2([0,1])$, $u - u'' = f$ donné dans $C_b(0,1)$ ce qui prouve qu'un général l'opérateur $Au = -\Delta u$ avec $D(A) = C^2(\bar{\Omega})$ n'est pas accrétif dans $C_b(\Omega)$.

Proposition 1.12 *(résultat "dual" de celui de la proposition 1.11)*
Soit A un opérateur accrétif de $C_0(\Omega)$ *et* β *un graphe monotone univoque de* $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. *Alors* βA *est accrétif dans* Ω.

Preuve 1.14 *Soit* $(u,v),(\hat{u},\hat{v}) \in \beta A$, *i.e il existe* $z, \hat{z} \in C_0(\Omega)$ *avec,*
$z \in Au,\ \ v(x) = \beta z(x)\ \ \forall x \in \Omega.$
$\hat{z} \in A\hat{u},\ \ \hat{v}(x) = \beta\hat{z}(x)\ \ \forall x \in \Omega.$
Puisque A est accrétif dans $C_0(\Omega)$, *il existe* $x_0 \in E(u-\hat{u})$ *avec (par exemple)* $z(x_0) \geq \hat{z}(x_0)$.
β *univoque, croissante* $\Longrightarrow v(x_0) = \beta z(x_0) \geq \hat{v}(x_0) = \beta\hat{z}(x_0)$.

CHAPITRE 2

OPÉRATEURS M-ACCRÉTIFS- EXEMPLES

2.1 Opérateurs m-accrétifs

Définition 2.1 *Un opérateur A d'un espace de Banach est dit **m-accrétif** si*
.A est accrétif
.$\forall \lambda > 0, \quad R(I + \lambda A) = X$
i.e si, pour tout $\lambda > 0$, $(I + \lambda A)^{-1}$ est une contraction partout défini.

Notations : Si A,B sont des opérateurs de X, on dit que B est prolongement de A et on note $A \subset B$ si le graphe de A est inclus dans le graphe de B, i.e si

$$\begin{cases} D(A) \subset D(B) \\ \forall x \in D(A),\ \forall y \in Ax, \quad y \in Bx \end{cases}$$

Proposition 2.1 *Un opérateur m-accrétif est maximal accrétif*
(i.e $A \subset B$ et B accrétif $\Longrightarrow A = B$).
c'est-à-dire maximal dans l'ensemble des opérateurs (multivoques) accrétifs de X ordonné par inclusion des graphes.

Preuve 2.1 *$A \subset B \Longrightarrow I + A \subset I + B \longrightarrow (I + A)^{-1} \subset (I + B)^{-1}$,*
comme $(I + A)^{-1}$ est partout défini et $(I + B)^{-1}$ univoque, ils coïncident.

Théorème 2.1 *(Minty)*
Si X est un espace de Hilbert

(A m-accrétif)$\Longleftrightarrow$(A maximal monotone).

Si A est m-accrétif, il est trivialement maximal accrétif. Pour démontrer la réciproque utilisons d'abord la méthode de Minty basée sur le théorème de Valentine-Kinzbram sur le prolongement des contractions dans un espace de Hilbert.

Lemme 2.1 *(Théorème de Valentine-Kinzbram)*
Soit T une contraction d'une partie de H dans H. Il existe un prolongement $\widetilde{T}$ de T qui est contraction de H dans H.

Preuve 2.2 *(Démonstration de théorème de Minty)*
Soit A un maximal accrétif de H. Considérons $T = \{(x+y, x-y); (x,y) \in A\}$*, T est le graphe d'une contraction de H défini sur R(I+A). Utilisons le lemme 2.1, il existe* $\widetilde{T}$ *prolongement de T qui est une contraction de H dans H. Considérant* $\widetilde{A} = \{(\frac{u+\widetilde{T}u}{2}, \frac{u-\widetilde{T}u}{2});\quad u \in H\}$*,* $\widetilde{A}$ *est un prolongement accrétif de A ; donc* $\widetilde{T}$*=A et* $\widetilde{T}$*=T, c'est-à-dire R(I+A)=H.*
Si A est maximal-accrétif, il en est de même de λA *pour tout*
$\lambda > 0$ *et donc pour tout* $\lambda > 0, R(I+\lambda A) = H$.

Remarque
Ce résultat est faux en général pour des espaces de Banach quelconques.

Proposition 2.2 *Tout opérateur m-accrétif est fermé (i.e son graphe est fermé dans* $X \times X$*).*
Cette proposition résulte immédiatement de la proposition 2.1 et de lemme suivant.

Lemme 2.2 *Si A est accrétif, sa fermeture* $\bar{A}$ *est aussi un opérateur accrétif.*

Remarque
A nouveau la fermeture est comprise au sens des graphes dans $X \times X$.

Notations Pour un opérateur A, on note

$$\forall \lambda > 0,\ J_\lambda^A = (I + \lambda A)^{-1} \quad \text{(résolvante de A)}$$

$$A_\lambda = \frac{I - J_\lambda^A}{\lambda} \quad \text{(approximation Yoshida de A).}$$

Proposition 2.3 *Soit A accrétif dans X. Alors*
i) $A_\lambda \subset AJ_\lambda \quad \forall \lambda > 0$
ii) $|A_\lambda x| \leq |Ax| = min\{|y|;\ y \in Ax\}\ \forall \lambda > 0, \quad \forall x \in D(A) \bigcap D(J_\lambda)$
iii) $|A_\lambda|_\mu = A_{\lambda+\mu} \quad \forall \lambda, \mu > 0$
iv) (équation résolvante) $J_\lambda = J_\mu(\frac{\mu}{\lambda} I + \frac{\lambda-\mu}{\lambda} J_\lambda) \quad \forall \lambda, \mu > 0$
Si de plus A est m-accrétif.
v) A_λ *est m-accrétif, s-accrétif, lipschitzien de rapport* $\frac{2}{\lambda}$
vi) $\forall x \in \overline{D(A)},\ \lim_{\lambda \longmapsto 0} J_\lambda x = x.$

Remarque
A_λ est une régularisante naturelle de A. Nous verrons plus loin qu'elle converge vers A (en un sens à préciser) lorsque λ tend vers 0.

Preuve 2.3 *i) Soit* $x \in D(A_\lambda)$ *et* $y = A_\lambda x = \frac{x - J_\lambda x}{\lambda}$.
Si $u = J_\lambda x$*, soit* $u + \lambda A u \ni x$*, il existe* $z \in Au$ *avec* $u + \lambda z = x$.
Ainsi $y = \frac{u + \lambda z - u}{\lambda} = z \in AJ_\lambda x$.
ii) Soit $y \in Ax$ *où* $x \in D(A) \bigcap D(J_\lambda)$*. On a* $x = J_\lambda(x + \lambda y)$ *et donc :*
$|x - J_\lambda x| \leq |x + \lambda y - x| = \lambda |y|$ *,d'où ii).*
iii) On remarque :

$$\begin{cases} y \in A_\lambda x \\ x \in D(A_\lambda) \end{cases} \Longleftrightarrow x - \lambda y \in D(A) \text{ et } y \in A(x - \lambda y)$$

Donc :
$y \in A_{\lambda+\mu} x \Longleftrightarrow y \in A(x - \mu y - \lambda y),\ x - \mu y - \lambda y \in D(A)$

$\Longleftrightarrow x-\mu y \in D(A_\lambda)$ *et* $y = A_\lambda(x-\mu y)$
et (en appliquant la remarque ci-dessus à A_λ*)*
$\Longleftrightarrow x \in D((A_\lambda)_{mu})$ *et* $y = (A_\lambda)_\mu x$.
iv) On remarque que $D(J_\mu(\frac{u}{\lambda}I + \frac{\lambda-\mu}{\lambda}J_\lambda)) \subset D(J_\lambda)$. *Il suffit de donc de montrer*
$\forall x \in D(J_\lambda),\ \ \frac{\mu}{\lambda}x + \frac{\lambda-\mu}{\lambda}J_\lambda(x) \in D(J_\mu)$
et $J_\lambda x = J_\mu(\frac{\mu}{\lambda}x + \frac{\lambda-\mu}{\lambda}J_\lambda x)$
D'après i), $(J_\lambda x,\ \frac{x-J_\lambda x}{\lambda}) \in A$ *; ceci implique :*
$J_\lambda x + \mu\frac{x-J_\lambda x}{\lambda} \in (I+\mu A)(J_\lambda x)$ *ce qui est une autre forme de l'égalité cherchée.*
v) Si A est m-accrétif, $I - J_\lambda$ *est s-acrrétif d'après l'exemple 1.1 du chapitre I. Il en est donc de même de* A_λ*. Le fait que* A_λ *est lipschitzien de rapport* $\frac{2}{\lambda}$ *est clair. La m-accrétivité de* A_λ *résulte de lemme suivant.*

Lemme 2.3 *Soit* $T : X \longmapsto X$ *une contraction, alors (I-T) est m-accrétif*

Il s'agit de montrer l'existence de X solution de
$x + \lambda(x - Tx) = y$ *donné dans X*
$\Longrightarrow (1+\lambda)x - \lambda Tx = y \Longleftrightarrow x = \frac{1}{1+\lambda}(\lambda Tx + y)$
L'application $\phi(x) = \frac{1}{1+\lambda}(\lambda Tx + y)$ *est une contraction stricte.*
vi) Si $x \in D(A)$*, d'après ii), on a :*

$$|x - J_\lambda x| \leq \lambda|Ax| \Longrightarrow \lim_{\lambda\longmapsto 0} J_\lambda x = x.$$

Si $x \in \overline{D(A)}$*, il existe* $x_n \in D(A)$ *convergent vers x. Alors*

$$\begin{aligned}|x - J_\lambda x| &\leq |x - x_n| + |x_n - J_\lambda x_n| + |J_\lambda x_n - J_\lambda x|.\\ &\leq 2|x - x_n| + |x_n - J_\lambda x_n|\end{aligned}$$

On en déduit :

$$\limsup_{\lambda\longmapsto 0} |x - J_\lambda x| \leq 2|x - x_n| \quad \forall n,$$

D'où vi).

2.2 Exemples d'opérateurs m-accrétifs

Proposition 2.4 *Soit* $A : X \longmapsto X$ *lipschitzien accrétif. Alors A est m-accrétif.*

Preuve 2.4 *Soit à résoudre en X*

$$x + \lambda Ax = y \Longleftrightarrow x = y - \lambda Ax.$$

Si $Tx = y - \lambda Ax$ *et si k est la constante de Lipschitz de A, on a*

$$|Tx - T\hat{x}| \leq \lambda k|x - \hat{x}|.$$

Si $\lambda k < 1$*, T a un point fixe, d'où la subjectivité de* $I + \lambda A$*. On termine alors à l'aide du résultat suivant.*

Lemme 2.4 *Soit A accrétif dans X. Alors*
(A m-accrétif)$\Longleftrightarrow (\exists\lambda_0 > 0,\ t.q\ \ R(I + \lambda_0 A) = X)$.

Preuve 2.5 *Pour $\lambda > 0$, on a (formellement)*

$$I + \lambda A = I + \lambda_0 A + (\lambda - \lambda_0)A = (I + (\lambda - \lambda_0)AJ_{\lambda_0})(I + \lambda_0 A).$$

Comme $I + \lambda_0 A$ est surjectif, il suffit de montrer que $I + (\lambda - \lambda_0)AJ_{\lambda_0}$ pour encore en utilisant i) de la proposition 1.3, que $I + (\lambda - \lambda_0)AJ_{\lambda_0}$ est surjectif. (On démontre inversement que le problème posé est exactement et non pas formellement, équivalent à celui-ci).
Soit à résoudre :

$$x + (\lambda - \lambda_0)\frac{x - J_{\lambda_0}x}{\lambda_0} = y \Longleftrightarrow x\frac{\lambda}{\lambda_0} - \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0}J_{\lambda_0}x = y$$
$$\Longrightarrow x = \tfrac{\lambda-\lambda_0}{\lambda}J_{\lambda_0}x + \tfrac{\lambda_0}{\lambda}y$$

Si $Tx = \frac{\lambda-\lambda_0}{\lambda}J_{\lambda_0}x + \frac{\lambda_0}{\lambda}y$, on a :

$$|Tx - T\hat{x}| \leq \frac{|\lambda - \lambda_0|}{\lambda}|x - \hat{x}|.$$

Si $|\lambda - \lambda_0| < \lambda$, T est une contraction stricte et, d'après les arguments ci dessus, $I + \lambda A$ est surjectif. Or cela se produit pour tout $\lambda \in]\frac{\lambda_0}{2}, +\infty[$. Il suffit maintenant de répéter l'argument en remplaçons λ_0 par un élément arbitraire de $]\frac{\lambda_0}{2}, +\infty[$; on couvre ainsi $]\frac{\lambda_0}{4}, \infty[$. On continue ainsi pour obtenir $]0, \infty[$.

Remarque
On montrons plus loin le résultat plus général suivant : Soit $A : X \longmapsto X$ continu, accrétif. Alors A est m-accrétif.

2.3 Sous-différentiel d'une fonction convexe

Soit H un espace de Hilbert. Dans ce paragraphe, on considère des fonctions
$\varphi : H \longmapsto]-\infty, +\infty]$ convexes : i.e.

$$\forall \alpha \in [0, 1]\ ,\ \varphi(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha\varphi(x) + (1 - \alpha)\varphi(y)$$

s.c.i : i.e.

$$\forall x_n \longmapsto x,\ \varphi(x) \leq \liminf_{n \longmapsto \infty} \varphi(x_n)$$

$\Longleftrightarrow \forall \alpha \in \mathbb{R}\ \ \{x \in H;\ \varphi(x) \leq \alpha\}$ est fermé
$\Longleftrightarrow$ $(lorsque\ \varphi\ est\ propre)$ $\forall \alpha \in \mathbb{R}\ \ \{x \in H;\ \varphi(x) \leq \alpha\}$ est faiblement fermé.
On dira que φ est propre si $\varphi \neq +\infty$.
Notation

$$D(\varphi) = \{x \in H;\ \ \varphi(x) < +\infty\}.$$

Définition 2.2 *Soit φ une fonction convexe s.c.i propre sur H. On définit son sous-différentiel $\partial\varphi$ de la manière suivante :*

$$\partial\varphi = \{(x, y) \in H \times H;\ \ \forall \xi \in H,\ \varphi(\xi) - \varphi(x) \geq < y, \xi - x >\}.$$

Remarques
$D(\partial\varphi) \subset D(\varphi)$ car si $x \in D(\partial\varphi)$ et si $\varphi(\xi) < +\infty$, $\varphi(x) \leq \varphi(\xi) - < y - \xi - x >$ pour $y \in \partial\varphi(x)$.

Si φ est Fréchet-différentielle, on vérifie que $\partial\varphi(x) = \varphi^{'}(x)$ $\forall x \in H$.

Proposition 2.5 *Soit φ est convexe, s.c.i, propre sur H. Alors $\partial\varphi$ est maximal monotone.*

Preuve 2.6 <u>Monotonie</u>. *Soit $(x,y),(\hat{x},\hat{y}) \in \partial\varphi$, alors :*

$$\begin{aligned} &\varphi(\hat{x}) - \varphi(x) \geq < y, \hat{x} - x > \\ &\varphi(x) - \varphi(\hat{x}) \geq < \hat{y}, x - \hat{x} > \\ \Longrightarrow\quad & 0 \geq < y - \hat{y}, \hat{x} - x > . \end{aligned}$$

$R(I + A) = H$. Soit $y \in H$, il s'agit de résoudre en x_0

$$x_0 + \partial\varphi(x_0) \ni y$$

Pour cela considérons la fonctionnelle :

$$\Phi(x) = \frac{1}{2}|x - y|^2 + \varphi(x).$$

Φ est aussi convexe, s.c.i, propre. De plus $\lim_{|x|\longmapsto\infty} \Phi(x) = +\infty$.
En effet, d'après le théorème de Hahn-Banach, Φ est minoré par une fonction affine ($\Longrightarrow \exists\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ t.q $\varphi(x) \geq \alpha|x| + \beta$).
On en déduit qu'il existe R assez grand tel que

$$\inf_{x\in H} \Phi(x) = \inf_{x\in H,\ |x|\leq R} \Phi(x)$$

Mais $\{x \in H,\ |x| \leq R\}$ est faiblement compacte. Comme Φ est s.c.i pour la topologie faible, elle est minoré par B_R, et atteint son minimum en un point x_0. Ainsi

$$\begin{aligned} &\forall\xi \in H, \quad \forall t \in [0, 1] \quad \Phi(t\xi + (1 - t)x_0) \geq \Phi(x_0) \\ &\Longrightarrow \tfrac{1}{2}|t\xi + (1 - t)x_0 - y|^2 + \varphi(t\xi + (1 - t)x_0) \geq \tfrac{1}{2}|x_0 - y|^2 + \varphi(x_0) \\ &\Longrightarrow \tfrac{1}{2}t^2|\xi+y|^2+t(1-t) < \xi-y,\ x_0-y > +\tfrac{1}{2}(t^2-2t)|x_0-y|^2+t(\varphi(\xi)-\varphi(x_0)) \geq 0 \end{aligned}$$

Divisant par t et faisant tendre t vers 0, on distinct

$$\varphi(\xi) - \varphi(x_0) + < \gamma_0 - y, \xi - x_0 > \geq 0$$

Soit $y - \gamma_0 \in \partial\varphi(x_0)$

2.3.1 Exemples de sous-différentiels

$H = \mathbb{R}$: dans ce cas, tout opérateur maximal monotone est un sous-différentiel.

Proposition 2.6 *Soit $\beta \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, les assertions suivantes sont équivalents.*
i)β est maximal monotone
ii) $\exists j : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ convexe, s.c.i, propre t.q $\beta = \partial j$.

Une démonstration élémentaire peut-être obtenue en considérant :

$$j(r) = \begin{cases} \int_0^r \beta^0(s)ds & si \quad r \in \overline{D(\beta)} \\ \quad +\infty & sinon \end{cases}$$

Où $\beta^0(s)$ est l'élément de $\beta(s)$ de plus petit module.

Proposition 2.7 *Soit β un graphe maximal monotone avec $0 \in \beta(0)$ et β_2 son prolongement à $L^2(\Omega)$. Alors β_2 est maximal monotone.*
De plus, si $\beta = \partial j$ avec j(0)=0 et min j(t)=j(0)=0

$$J(u) = \begin{cases} \int_\Omega j(u(x))dx & si\ j(u) \in L^1(\Omega) \\ +\infty & sinon \end{cases}$$

Alors J est convexe, s.c.i, propre sur $L^2(\Omega)$ et $\partial J = \beta_2$.

Preuve 2.7 *On sait déjà que β_2 est monotone. Soit $f \in L^2(\Omega)$ puisque β_2 est maximal monotone, p.p.x, il existe $u(x) \in \mathbb{R}$ t.q $u(x) + \beta u(x) \ni f(x)$.*
Comme $u(x) = (I+\beta)^{-1}.f(x)$, u est mesurable. De plus, d'après $0 = (I+\beta)^{-1}0$, $|u(x)| \leq |f(x)|$ p.p et donc $u \in L^2(\Omega)$ et $u + \beta_2 u \ni f$.

Remarques
1)Si Ω est de mesure borné, on peut se dispenser de l'hypothèse $0 \in \beta 0$. En effet ;
$a = (I+\beta)^{-1}0 \in L^2(\Omega)$ *et* $|u(x) - a| \leq |f(x)| \Longrightarrow |u(x)| \leq |a| + |f(x)|$.

2)On démontre de même que si $0 \in \beta 0$, β_p est m-accrétif dans $L^p(\Omega)$, $1 \leq q \leq \infty$.
La convexité de J est clair. Montrons qu'elle est s.c.i, i.e. $\{u \in L^2(\Omega);\ \ J(u) \leq \alpha\}$ est fermé pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$. Soit donc u_n avec $J(u_n) \leq \alpha$ convergent vers u dans $L^2(\Omega)$. On peut supposer que u_n converge p.p vers u et donc

$$j(u(x)) \leq \liminf_{n \longmapsto \infty} j(u_n(x)) \quad p.p$$

On vérifie que j(u) est mesurable et d'après le lemme de `Fatou`, on a alors (remarquer que $j \geq 0$)

$$\int_\Omega j(u(x)) \leq \liminf_{n \longmapsto 0} \int_\Omega j(u_n(x)) \leq \alpha.$$

Montrons enfin $\beta_2 \subset \partial J$ (il en résulter $\beta_2 = \partial J$).
Soit $(u, v) \in \beta_2$, alors $\forall w \in D(J)$
p.p.x $j(w(x)) - j(u(x)) \geq v(x)(w(x) - u(x))$.
Ceci implique $j(u) \in L^1$ (remarquer que D(J) n'est pas vide).
Il suffit alors d'intégrer pour obtenir

$$J(w) - J(u) \geq \int_\Omega v(w-u)$$

soit $v \in \partial J(u)$.

CHAPITRE 3

EQUATION $\dfrac{DU}{DT} + AU \ni 0$ DANS LES ESPACES DE HILBERT

Dans ce paragraphe, H désigne un espace de Hilbert réel de produit scalaire noté $<.,.>$ et de norme noté $|.|$.
On note pour $1 \leq p \leq \infty \;\; et \;\; 0 < T < \infty$:

$$W^{1,p}(0,T;H) = \{u \in L^p(0,T;H);\ \frac{du}{dt} \in L^p(0,T;H)\}.$$

(la dérivée $\frac{du}{dt}$ étant comprise au sens des distributions).

Théorème 3.1 *Soit A un opérateur maximal monotone de H. Alors, pour tout $u_0 \in D(A)$, il existe une unique fonction $u : [0,\infty[\longmapsto H$ telle que :*

1. $u \in W^{1,p}(0,\infty;H)$
2. $u(t) \in D(A), \quad \forall t \in [0,\infty[$
3. $\frac{du}{dt}(t) + Au(t) \ni 0 \quad p.p.t \in]0,\infty[$
4. $u(0) = u_0$
5. *u est dérivable à droite en tout point et on a :*
   $\frac{d^+u}{dt}(t) + A^0u(t) = 0$
   $t \longmapsto A^0u(t)$ *est continue à droite sur* $[0,\infty[$.
6. *si* $u, \hat{u}$ *sont les solutions de 1),2),3) avec* $u(0) = u_0, \quad \hat{u}(0) = \hat{u}_0$.
   $\forall t \in [0,\infty[, \quad |u(t) - \hat{u}(t)| \leq |u_0 - \hat{u}_0|$.
7. $||\frac{du}{dt}||_{L^\infty(0,\infty;H)} \leq |A^0u_0|$.

Notation
A^0 désigne la section minimale de A et est définie par $D(A^0) = D(A)$ et

$$\forall x \in D(A), \quad A^0x = \{y \in Ax;\ |y| = \inf_{z\in Ax} |z|\}.$$

On démontre facilement que, si A est maximal monotone, Ax est un convexe fermé pour tout $x \in D(A)$. Ainsi A^0 est univoque et $\forall x \in D(A) \quad A^0x = projection\ de\ 0\ sur Ax$.

Remarque 1
Il faut noter la propriété 5) qui montre que malgré tous les chois offerts (on a une équation multivoque $\frac{du}{dt} + Au \ni 0$) le système "minimise" systématiquement sa vitesse.
Remarque 2
Pour tout $t \geq 0,\ u \longmapsto u(t)$ définit une application de $D(A)$ dans lui-même. Posons

$$\forall t \geq 0, \quad S(t)u_0 = u(t)$$

D'après 6), on a :

$$|S(t)u_0 - S(t)\hat{u}_0| \leq |u_0 - \hat{u}_0|.$$

Ainsi $S(t)$ est une contraction de $D(A)$ dans $D(A)$. Elle admet donc un unique prolongement par continuité à $\overline{D(A)}$ qu'on note encore $S(t)$. Ainsi $(S(t))_{t\geq 0}$ définit un semi-groupe continu de contractions sur $\overline{D(A)}$, c'est-à-dire :
i) $\forall t, s \geq 0 \quad S(t+s) = S(t)S(s)\ et\ S(0) = I$
ii) $\forall t \geq 0, \forall u_0, \hat{u}_0 \in \overline{D(A)} \quad |S(t)u_0 - S(t)\hat{u}_0| \leq |u_0 - \hat{u}_0|$
iii) $\forall u_0 \in \overline{D(A)} \quad \lim\limits_{t \longmapsto 0} |S(t)u_0 - u_0| = 0.$
On dit que $S(t)$ est le semi-groupe engendré par A.

Il est possible de montrer que, réciproquement, étant donné un semi-groupe vérifiant i), ii), iii) il existe un et un seul opérateur maximal monotone qui l'engendre au sens défini cidessus.

Notons aussi que A^0 apparaît comme le générateur infinitésimal du semi-groupe $S(t)$ engendré par A, c'est-à-dire

$$D(A^0) = D(A) = \{x \in \overline{D(A)};\ \lim_{t \longmapsto 0} \frac{x - S(t)x}{t} \quad existe\}$$

et $\qquad A^0 x = \lim\limits_{t \longmapsto 0} \frac{x - S(t)x}{t}.$
Remarque 3
Toutes ces "bornes" propriétés sont particulières aux espaces de Hilbert et ne se généralisent pas aux semi-groupes de contractions sur les espaces de Banach quelconque.

Preuve 3.1 *(Démonstration du théorème 3.1)*
Unicité :
Soit $u, \hat{u}$ vérifiant 1),2),3). Alors d'après la monotonie de A :
p.p.t $\quad (\frac{du}{dt}(t) - \frac{d\hat{u}}{dt}(t), u(t) - \hat{u}(t)) \leq 0$
$\iff$ *p.p.t.* $\ \frac{d}{dt}\ \frac{1}{2}|u(t) - \hat{u}(t)|^2 \leq 0$
$\iff t \longmapsto \frac{1}{2}\ |u(t) - \hat{u}(t)|^2$ *est décroissante.*
En particulier $|u(t) - \hat{u}(t)| \leq |u_0 - \hat{u}_0|$.
Ceci montre l'unicité, ainsi que la propriété de contraction 6).
Existence :
Soit $u_0 \in D(A)$ *et pour tout* $\lambda > 0,\ u_\lambda$ *la solution de :*

$$(P_\lambda) \begin{cases} u_\lambda \in C^1([0, \infty[; H) \\ \frac{du_\lambda}{dt} + A_\lambda u_\lambda = 0 \quad dans\ [0, \infty[. \\ u_\lambda(0) = u_0 \end{cases}$$

On a vu au chapitre précédent que A_λ était lipschitzien partout défini l'existence de u_λ solution de (P_λ) est donc classique.

Estimation fondamentale
Soit h>0 ; puisque

$$\forall t \geq 0, \quad \frac{du_\lambda}{dt}(t+h) + A_\lambda u_\lambda(t+h) = 0$$

et que A_λ est accrétif, on a comme ci-dessus :

$$|u_\lambda(t+h) - u_\lambda(t)| \leq |u_\lambda(h) - u_0|$$

Mais, divisant par h et faisant tendre h vers 0, on obtient

$$|A_\lambda u_\lambda(t)| = \left|\frac{du_\lambda}{dt}(t)\right| \leq \left|\frac{du_\lambda}{dt}(0)\right| = |A_\lambda u_0| \leq |A^0 u_0| \qquad *$$

Montrons que u_λ est de Cauchy dans $C([0,T];H)$
Pour tout T>0. Multipliant

$$\frac{du_\lambda}{dt} - \frac{du_\mu}{dt} + A_\lambda u_\lambda - A_\mu u_\mu = 0$$

par $u_\lambda - u_\mu$, on obtient

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_\lambda - u_\mu|^2 + (A_\lambda u_\lambda - A_\mu u_\mu, u_\lambda - u_\mu) = 0.$$

On écrit

$$\begin{aligned} u_\lambda - u_\mu &= (u_\lambda - J_\lambda u_\lambda) - (u_\mu - J_\mu u_\mu) + (J_\lambda u_\lambda - J_\mu u_\mu) \\ &= \lambda A_\lambda u_\lambda - \mu A_\mu u_\mu + (J_\lambda u_\lambda - J_\mu u_\mu) \end{aligned}$$

On en déduit (car $(A_\lambda u_\lambda - A_\mu u_\mu, J_\lambda u_\lambda - J_\mu u_\mu) \geq 0$)

$$\begin{aligned} (A_\lambda u_\lambda - A_\mu u_\mu, u_\lambda - u_\mu) &\geq (A_\lambda u_\lambda - A_\mu u_\mu, \lambda A_\lambda u_\lambda - \mu A_\mu u_\mu) \\ &= \lambda|A_\lambda u_\lambda|^2 + \mu|A_\mu u_\mu|^2 - (\lambda+\mu)|A_\lambda u_\lambda||A_\mu u_\mu| \\ &\geq \tfrac{\lambda-\mu}{2}(|A_\lambda u_\lambda|^2 - |A_\mu u_\mu|^2) \end{aligned}$$

Ainsi

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_\lambda - u_\mu|^2 \leq \frac{|\lambda-\mu|}{2}||A_\lambda u_\lambda|^2 - |A_\mu u_\mu|^2| \leq \frac{\lambda+\mu}{2}|A^0 u_0|^2$$

*En utilisant *. D'où l'estimation*

$$|u_\lambda - u_\mu|(t) \leq \sqrt{(\lambda+\mu)t}\ |A^0 u_0|$$

On en déduit que u_λ converge dans $C([0,T];H)$ (pour tout T>0) vers $u \in C([0,\infty];H)$. La vitesse de convergence est estimé par

$$|u_\lambda(t) - u(t)| \leq \sqrt{\lambda t}\ |A^0 u_0|.$$

Démonstration de 3)
Pour tout λ>0,

$$\frac{du_\lambda}{dt} + AJ_\lambda u_\lambda(t) \ni 0 \quad (car A_\lambda \subset AJ_\lambda)$$

*Mais $\frac{du_\lambda}{dt}$ est borné dans $L^\infty(0,T;H)$ (d'après *) et donc dans $L^2(0,T;H)$ qui est un espace de Hilbert. On peut donc trouver $\lambda_n \longmapsto 0$ t.q $\frac{du_{\lambda_n}}{dt}$ converge faiblement dans $L^2(0,T;H)$. On a* *alors au sens des distributions (puisque* $u_{\lambda_n} \longmapsto u$ *dans* $L^2(0,T;H)$*) :*

$$\frac{du_{\lambda_n}}{dt} = \frac{du}{dt}$$

*et de plus l'estimation * se conserve à la limite soit*

$$** \qquad \left|\left|\frac{du}{dt}\right|\right|_{L^\infty(0,T;H)} \leq |A^0 u_0|$$

D'autre part

$$|J_\lambda u_\lambda(t) - u_\lambda(t)| = \lambda |A_\lambda u_\lambda(t)| \leq \lambda |A^0 u_0|.$$

Donc $J_\lambda u_\lambda(t) \longmapsto u(t)$ *dans* $C([0,T];H)$ *pour tout T.*
On conclut alors à l'aide des deux lemmes suivants pour approuver 3).

Lemme 3.1 *Soit A un opérateur maximal monotone de H et* $\mathcal{A}$ *un prolongement à* $\mathcal{H} = L^2(0,T;H)$ *défini par*

$$\mathcal{A} = \{(u,v) \in \mathcal{H}; \quad v(t) \in Au(t) \ p.p.t\}$$

Alors $\mathcal{A}$ *est maximal monotone dans* $\mathcal{H}$*.*

Lemme 3.2 *Si A est maximal monotone sur H, il est fermé dans* $H \times H_w$ *et* $H_w \times H$*, où* $H_w = H$ *dans sa topologie faible.*

Le lemme 3.1 se démontre de façon élémentaire.
Pour le lemme 3.2, on utilise le fait que la fermeture d'un opérateur monotone dans $H \times H_w$ ou $H_w \times H$ est encore monotone et en déduit encore la maximalité de A.
Remarque
Si $u_0 \in \overline{D(A)}$, $S(t)u_0$ n'est qu'une solution "faible" de l'équation 2). En effet, $t \longmapsto S(t)u_0$ n'est en général pas dérivable p.p et on n'a pas $S(t)u_0 \in D(A)$ pour t>0. On peut par exemple se référer à l'exemple suivant :

$$H = L^2(\mathbb{R}) \quad , Au = u' \ avec \ \ D(A) = W^{1,2}(\mathbb{R}) \ (\Longrightarrow \overline{D(A)} = L^2(\mathbb{R}))$$

On vérifie aisément que $S(t)u_0 = u_0(. - t) \ \ \forall t \geq 0$.
Ainsi, si $u_0 \notin D(A),\ alors,\ \forall t > 0,\ S(t)u_0 \notin D(A)$.
Par contre, si A est le sous-differentiel d'une fonction convexe, s.c.i, alors le semi-groupe a un effet régularisant sur la donné initiale au sens que

$$\forall t > 0, \quad S(t)(\overline{D(A)}) \subset \ D(A).$$

Ainsi, on a :

Théorème 3.2 *Soit* φ *convexe s.c.i propre sur H vérifiant* $\varphi(0) = min\varphi = 0$*. Alors le semi-groupe S(t) engendré par* $A = \partial\varphi$ *vérifie :*

$$\forall u_0 \in \overline{D(A)},\ \forall t > 0, \quad S(t)u_0 \in D(A) \ et \ |AS(t)u_0| \leq \frac{|u_0|}{t}.$$

En conséquence, pour tout $u_0 \in \overline{D(A)}$*, il existe* $u : [0,\infty[\longmapsto H$ *(unique) vérifiant :*

i) $u \in C([0,\infty];H) \quad , u(0) = u_0$

ii) $\forall \delta > 0, \quad u \in W^{1,\infty}([\delta, \infty]; H)$
iii) $u'(t) + Au(t) \ni 0$ *p.p.t*
iv) $u(t) \in D(A) \quad \forall t > 0.$

Remarque
Lorsque A est maximal monotone linéaire (de domaine dense) la propriété $|AS(t)u_0| \leq \frac{|u_0|}{t}$ équivalent à la propriété pour S(t) de se prolonge en un semi-groupe analytique sur un secteur du plan complexe contenant l'axe réel. Ici, loin de tel n'est possible en général puisque $t \longmapsto S(t)u_0$ n'est pas différentiable sur $[0, \infty[$.

Idée de la démonstration du théorème 3.2 :

Remarquons d'abord que i), ii), iii), iv) se déduisent immédiatement du théorème 3.1 dés que l'on suppose $S(t)u_0 \in D(A) \quad \forall t > 0$. D'autre part, l'unicité se déduit de iii) et de la propriété de contraction due à la monotonie de A.

Pour démontrer le point essentiel, nous effectuons des calculs formels, on supposant que φ est régulière, ceux-ci peuvent être justifiés en les effectuant sur l'équation approché

$$\frac{du_\lambda}{dt} + (\partial\varphi)_\lambda(u_\lambda) \ni 0, \quad u_\lambda(0) = u_0.$$

En utilisant que $(\partial\varphi)_\lambda = \partial\varphi_\lambda$ où φ_λ est partout définie et Fréchet différentiable sur H.

Estimation de l'énergie :
Multiplions par u l'équation :

$$(\alpha) \qquad \frac{du}{dt} + \partial\varphi(u) \ni 0.$$

Nous obtenons après intégration

$$\frac{1}{2}|u(t)|^2 - \frac{1}{2}|u(0)|^2 + \int_0^T < \partial\varphi(u), u >= 0$$

Mais d'après la définition du sous-différentiel

$$< \partial\varphi(u), u >\geq \varphi(a) - \varphi(0) = \varphi(u).$$

Donc

$$(\beta) \quad \frac{1}{2}|u(0)|^2 \geq \frac{1}{2}|u(t)|^2 + \int_0^T \varphi(u(t))dt$$

Multiplions maintenant (α) *par* $t\ \frac{du}{dt}$ et intégrons :

$$\int_0^T t\left|\frac{du}{dt}\right|^2 + \int_0^T < \partial\varphi(u), t\ \frac{du}{dt} >= 0.$$

Supposons φ régulière et $\partial\varphi = \varphi'$ au sens usuel, on en déduit :

$$\int_0^T t\left|\frac{du}{dt}\right|^2 + \int_0^T t\ \frac{d}{dt}\varphi(u(t)) = 0$$

Soit

$$\int_0^T t\left|\frac{du}{dt}\right|^2 + T\varphi(u(T)) = \int_0^T \varphi(u(t))\ dt$$

Couplant (β) *et* (α), nous avons (puisque$\varphi \geq 0$)

$$\int_0^T t\left|\frac{du}{dt}\right|^2 \leq \frac{1}{2}|u(0)|^2$$

Mais, d'après le théorème 3.1, on sait que $t \longmapsto |\frac{du}{dt}|$ est décroissante.
Donc

$$\frac{1}{2}|u(0)|^2 \geq \int_0^T t\left|\frac{du}{dt}\right|^2 \geq \left|\frac{du}{dt}\right|^2(T).\int_0^T r\ dt \geq \frac{T^2}{2}\left|\frac{du}{dt}\right|^2(T)$$

ou encore

$$\left|\frac{du}{dt}(T)\right| \leq \frac{|u(0)|}{T}$$

Ce qui est l'estimation cherché, le fait que $u(t) \in D(A)$ pour tout t s'en déduit.

Application
Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$. On suppose sa frontière aussi régulière qu'il est nécessaire pour que les résultats de régularité suivants soit valables (et en particulier l'estimation (T) ci-dessous).

Théorème 3.3 *Soit β un graphe maximal monotone de $\mathbb{R}^n$ avec $0 \in \beta 0$.*
Soit $u_0 \in L^2(\Omega)$ avec $u_0(x) \in \overline{D(\beta)}$ p.p.x (i.e $u_0 \in \overline{D(\beta_2)}$). Alors, il existe une unique solution du problème

i) $u \in C([0,\infty[; L^2(\Omega)) \bigcap L^\infty([\delta,\infty[; H_0^1(\Omega) \bigcap H^2(\Omega))\quad \forall\delta > 0$
$\qquad \bigcap W^{1,\infty}([\delta,\infty[\ ; L^2(\Omega))$

ii) $\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + \beta u \ni 0 \quad p.p.(t,x) \in (0,\infty)\times\Omega$

iii) $u(t,x) = 0 \quad p.p.(t,x) \in (0,\infty)\times\partial\Omega$

iv) $u(0,x) = u_0(x) \quad p.p.x \in \Omega.$

De plus, $\forall t > 0,\quad u(t) \in H_0^1(\Omega)\bigcap H^2(\Omega)$.

Notations
On rappelle les définitions des espaces de Sobolev

$$H^1(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega);\ \ \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega),\ \ \forall i = 1,.....,N\}$$

muni de la norme

$$||u||_{H^1}^2 = |u|_2^2 + \sum_{i=1}^N \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|_2^2$$

.

$$H^2(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega);\ \ \frac{\partial u}{\partial x_i},\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \in L^2(\Omega),\ \ \forall\ i,j = 1,.....,N\}$$

muni de la norme

$$||u||_{H^2}^2 = ||u||_{H^1}^2 + \sum_{i=1}^{N} \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right|_2^2 .$$

Ces espaces sont des espaces de Hilbert.
On définit aussi

$$\begin{aligned} H_0^1(\Omega) &= \{fermeture\ de\ C_0^\infty\ dans\ H^1(\Omega)\} \\ &= \{u \in H^1(\Omega);\ \ trace\ de\ u\ sur\ \partial\Omega = 0\}. \end{aligned}$$

Le théorème 3.3 est une conséquence directe des théorèmes 3.1, 3.2 et de la proposition suivante.

Proposition 3.1 *Soit j convexe,s.c.i telle que $\beta = \partial j$ avec j(0)=0.*
On définit

$$\varphi(u) = \begin{cases} \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 + \int_\Omega j(u) & si\ u \in H_0^1(\Omega)\ et\ j(u) \in L^1(\Omega) \\ & +\infty\ sinon \end{cases}$$

Alors, φ est convexe, s.c.i, propre sur $L^2(\Omega)$ et $\partial\varphi(u) = -\Delta u + \beta_2 u$ avec $D(\partial\varphi) = H_0^1(\Omega) \bigcap H^2(\Omega) \bigcap D(\beta_2)$
De plus, on a l'estimation

$$(T) \qquad ||u||_{H^2(\Omega)} \leq c|-\Delta u + \beta_2 u|_2$$

où c ne dépend que de Ω et de N.
Enfin $\overline{D(\partial\varphi)} = \{u_0 \in L^2(\Omega);\ \ u_0(x) \in \overline{D(\beta)}\ p.p.x\}$.

Preuve 3.2 *Montons d'abord que φ est s.c.i, c'est-à-dire, $\forall\lambda \in \mathbb{R}\ \ \{u \in H;\ \varphi(u) \leq \lambda\}$ est fermé.*
(Il est clair par ailleurs que φ est convexe et propre). Soit donc $u_n \in H$ avec $\varphi(u_n) \leq \lambda$ et $u_n \longmapsto u$. On a

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^2 + \int_\Omega j(u_n) \leq \lambda$$

ce qui implique que $|\nabla u_n|$ est borné dans L^2 (puisque $j \geq 0$).
Donc, il existe u_{n_k} avec $\frac{\partial u_{n_k}}{\partial x_i}$ convergent faiblement dans $L^2(\Omega)$. La limite est nécessairement $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ et on a

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 \leq \liminf_{n \longmapsto \infty} \int_\Omega |\nabla u_n|^2.$$

D'autre part, p.p.x

$$j(u(x)) \leq \liminf_{n \longmapsto \infty} j(u_n(x)).$$

Par composition, j(u) est mesurable (j est s.c.i) et d'après le lemme de Fatou

$$\int_\Omega j(u(x)) \leq \int_\Omega \liminf_{n \longmapsto \infty} j(u_n(x)) \leq \liminf_{n \longmapsto \infty} \int_\Omega j(u_n(x)).$$

On en déduit

$$\varphi(u) \leq \lambda.$$

Notons maintenant $A = -\Delta + \beta_2$ *avec* $D(A) = H_0^1(\Omega) \bigcap H^2(\Omega) \bigcap D(\beta_2)$.
Alors $A \subset \partial\varphi$.
En effet, d'après le chapitre 2, si $[u, w] \in \beta_2$, $j(u) \in L^1$ *et pour tout* $h \in L^2(\Omega)$ *:*

$$\int_\Omega j(h) - \int_\Omega j(u) \geq < w, h - u >$$

D'autre part, si $u \in H_0^1(\Omega) \bigcap H^2(\Omega)$

$$\int_\Omega < -\Delta u, h - u >= \int_\Omega \nabla u \nabla(h - u) \quad \forall h \in \ H_0^1(\Omega)$$

(ceci n'est autre que la formule de Green déjà rappelé au chapitre 1, elle s'obtient à partir de $C_0^\infty(\Omega)$ *par densité).*
On obtient :

$$\int_\Omega < -\Delta u, h - u >\leq \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla h|^2 - \frac{1}{2}|\nabla u|^2.$$

Ajoutant cette inégalité à celle précédemment obtenue, on a $A \subset \partial\varphi$.
Pour montrer l'égalité, il suffit de montrer que A *est maximal monotone.*

Lemme 3.3 *Pour tout* $\epsilon \geq 0$ *et tout* $f \in L^2(\Omega)$*, il existe un unique* u *solution de*

$$\begin{cases} u \in H_0^1(\Omega) \bigcap H^2(\Omega) \\ \epsilon u - \Delta u = f \quad p.p \ dans \ \Omega \end{cases}$$

De plus

$$(E) \qquad ||u||_{H^2(\Omega)} \leq C \, \|f\|_{L^2(\Omega)}$$

où C *est une constante ne dépendant que de* Ω *et de* N *(et non de* $\epsilon \geq 0$*).*

Remarque
Ce lemme montre en particulier que l'opérateur A_1 défini par

$$D(A_1) = H_0^1(\Omega) \bigcap H^2(\Omega)$$
$$A_1 u = -\Delta u$$

est maximal monotone dans $L^2(\Omega)$ (on sait déjà qu'il est monotone). Il faut noter que la possibilité de résoudre le problème ci-dessus pour $\epsilon = 0$ va bien au-delà de cette maximalité.

Preuve 3.3 *Le lemme 3.3 repose essentiellement sur l'estimation triviale (E). Ceci admis, le reste peut être déduit du fait que* $\partial\varphi_1$ *est maximal monotone où*

$$\varphi_1(u) = \begin{cases} \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 & si \ u \in H_0^1(\Omega) \\ +\infty & sinon \end{cases}$$

En effet, si $\epsilon > 0$*, il existe* u *solution de*

$$\epsilon u + \partial\varphi_1(u) \ni f \in L^2(\Omega).$$

et cet u vérifie nécessairement

$$\begin{cases} u \in H_0^1(\Omega) \quad (D(\partial\varphi_1) \subset D(\varphi_1) = H_0^1(\Omega)) \\ \epsilon u - \Delta u = f \ \textit{dans} \ \ D'(\Omega) \end{cases}$$

Car pour tout t réel et tout $\theta \in C_0^\infty(\Omega)$, *on a*

$$\varphi_1(u + t\theta) - \varphi_1(u) \geq \int (f - \epsilon u)t\theta$$

Soit

$$t \int_\Omega \nabla u \nabla \theta + \frac{t^2}{2} \int_\Omega |\nabla \theta|^2 \geq t \int_\Omega (f - \epsilon u)\theta.$$

Divisant par t>0 et faisant tendre t vers 0 et de même par t<0, on en déduit

$$\forall \theta \in C_0^\infty(\Omega) \quad \int_\Omega \nabla u \nabla \theta = \int_\Omega (f - \epsilon u)\theta.$$

ou encore $\quad -\Delta u = f - \epsilon u \ \ \textit{dans} \ \ D'(\Omega)$.
On voit qu'à ce stade, il est nécessaire d'utiliser un résultat de régularité, en l'occurrence :

$$\begin{cases} v \in H_0^1(\Omega) \\ -\Delta v \in L^2(\Omega) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} v \in H^2(\Omega) \\ ||v||_{H^2} \leq c||\Delta v||_{L^2} \end{cases}$$

où C est une constante ne dépendant que de Ω. *Pour vérifie que dans notre cas l'estimation est indépendante de* ϵ, *on multiple l'équation par* $-\Delta u$ *pour obtenir*

$$\epsilon \int_\Omega u(-\Delta u) + \int_\Omega (\Delta u)^2 = \int f(-\Delta u).$$

Puisque $\int_\Omega u(-\Delta u) = \int_\Omega |\nabla u|^2 \geq 0$, *on obtient* $\|\Delta u\|_{L^2} \leq \|f\|_2$ *et donc* $||u||_{H^2} \leq c||f||_2$.
L'existence pour $\epsilon = 0$ *s'en déduit aisément.*

Lemme 3.4 *Pour tout* $\epsilon \geq 0$ *et tout* $f \in L^2(\Omega)$, *il existe un unique u solution de*

$$(P) \qquad \begin{cases} u \in H_0^1(\Omega) \bigcap H^2(\Omega) \\ \epsilon u - \Delta u + \beta_2 u \ni f \ \ \textit{p.p dans} \ \Omega. \end{cases}$$

De plus

$$(E_1) \qquad ||u||_{H^2(\Omega)} \leq c||f||_{L^2}$$

où c ne dépend que de Ω *et de N.*

Preuve 3.4 *Pour* $\epsilon > 0$, *l'unicité résulte de la monotonie de* $-\Delta + \beta_2$. *Pour* $\epsilon = 0$, *étant donné* $u, \hat{u}$ *deux solutions, on multiple scalairement la différence des deux équations par* $u - \hat{u}$ *pour obtenir :*

$$\int_\Omega |\nabla(u - \hat{u}|^2 \leq \int_\Omega (u - \hat{u})(-\Delta(u - \hat{u})) + \int_\Omega (u - \hat{u})(\beta_2 u - \beta_2 \hat{u}) = 0$$

Ceci implique $u - \hat{u}$=*constante et donc* $u - \hat{u} = 0$ *puisque* $u - \hat{u} \in H_0^1(\Omega)$.

Pour l'existence, on remarque d'abord que, pour tout $\lambda > 0$, *il existe* u_λ *solution de*

$$(P_\lambda) \qquad \begin{cases} \epsilon u_\lambda - \Delta u_\lambda + \beta_\lambda u_\lambda = f \\ u_\lambda \in H_0^1(\Omega) \bigcap H^2(\Omega). \end{cases}$$

En effet, cette équation peut être réécrite

$$(\epsilon\lambda + 1)u_\lambda - \lambda\Delta u_\lambda = \lambda f + (I + \lambda\beta)^{-1}u_\lambda.$$

Or, considérons l'application T qui à $v \in L^2(\Omega)$ associe la solution w de

$$\begin{cases} (\epsilon\lambda + 1)w - \lambda\Delta w = \lambda f + (I + \lambda\beta)^{-1}v \\ \qquad\qquad\qquad w \in H_0^1(\Omega) \bigcap H^2(\Omega). \end{cases}$$

Multipliant par $w - \hat{w}$, on obtient :

$$(\epsilon\lambda + 1)\int_\Omega |w - \hat{w}|^2 + \lambda \int_\Omega |\nabla(w - \hat{w})|^2 \le |v - \hat{v}|_2 |w - \hat{w}|_2$$

D'après l'inégalité de Poincaré, il existe $C_1 = C_1(\Omega, N) > 0$ tel q

$$\frac{1}{C_1}\int_\Omega |w - \hat{w}|^2 \le \int_\Omega |\nabla|w - \hat{w}|^2.$$

Ainsi

$$(\epsilon\lambda + 1 + \frac{\lambda}{C_1}|w - \hat{w}|_2 \le |v - \hat{v}|_2,$$

ce qui montre que (même pour $\epsilon = 0$) T est une contraction stricte de $L^2(\Omega)$ et admet donc un point fixe, d'où l'existence annoncé de u_λ.

Faisons maintenant des estimations sur u_λ. Multiplions (P_λ) par $\epsilon u_\lambda + \beta_\lambda u_\lambda$ est intégrons :

$$\int_\Omega (\epsilon u_\lambda + \beta_\lambda u_\lambda)^2 - \int_\Omega (\epsilon u_\lambda + \beta_\lambda u_\lambda)\Delta u_\lambda = \int_\Omega f \ (\epsilon u_\lambda + \beta_\lambda u_\lambda).$$

Mais

$$-\int_\Omega (\epsilon u_\lambda + \beta_\lambda u_\lambda)\Delta u_\lambda = \int_\Omega (\epsilon + \beta'_\lambda(u_\lambda))|\nabla u_\lambda|^2 \ge 0.$$

Puisque β_λ est croissante (on peut commencer par régulariser β_λ pour justifier ce calcul). On obtient ainsi

$$|\epsilon u_\lambda + \beta_\lambda u_\lambda|^2 \le |f|_2.$$

On en déduit, on réutilisant (P_λ) :

$$|\Delta u_\lambda|_2 \le 2|f|_2.$$

D'après le lemme 3.1

$$||u_\lambda||_{H^2(\Omega)} \le 2C|f|_2$$

Il est maintenant possible de passer à la limite dans (P_λ).
Puisque u_λ est borné dans $H^2(\Omega)$, on peut en extraire une suite u_{λ_n} (avec $\lambda_n \longmapsto 0$) convergent faiblement vers vers $u \in H^2(\Omega)$.
D'après l'injection compacte de $H^2(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$, on peut supposer que u_{λ_n} converge fortement dans H^1 vers u (et donc dans $L^2(\Omega)$). En particulier $u \in H_0^1$.

Pour montrer que u est solution de (P), on remarque que

$$\beta_\lambda u_\lambda \in \beta_2[(I+\lambda\beta_2)^{-1}u_\lambda]$$

et

$$|(I+\lambda\beta_2)^{-1}u_\lambda - u_\lambda|_2 \leq \lambda|\beta_\lambda u_\lambda|_2.$$

Puisque $\beta_\lambda u - \lambda$ est borné dans $L^2(\Omega)$, il en résulte que $(I+\lambda\beta_2)^{-1}u_\lambda$ converge dans $L^2(\Omega)$ vers u. Mais $\beta_\lambda u - \lambda$ converge faiblement dans $L^2(\Omega)$ vers $f-(\epsilon u - \Delta u)$. D'après le lemme 3.2

$$u \in D(\beta_2) \text{ et } f-(\epsilon u-\Delta u) \in \beta_2 u.$$

Ceci achève la démonstration du lemme 3.4.

<u>Pour compléter celle de la proposition 3.1</u> *il reste à montrer que* $\overline{D(\partial\varphi)} = \{u_0 \in L^2(\Omega);\ \ u_0(x) \in \overline{D(\beta)}\ \ p.p.x\}$.

.Si $u_n \in D(\beta_2)$ converge dans $L^2(\Omega)$ vers u, on peut en extraire une suite telle que $u_{n_k} \longmapsto u(x)$ p.p ; donc $u(x) \in \overline{D(\beta)}$ p.p. et

$$\overline{D(\partial\varphi)} \subset \{u_0 \in L^2;\ u_0 \in \overline{D(\beta)}\ p.p.\}.$$

Pour l'inclusion inverse, nous procédons en 3 étapes.

.$\underline{\{u_0 \in L^2;\ u_0 \in \overline{D(\beta)}\ p.p.\}}$: on considère $(I+\lambda\beta)^{-1}u_0$ qui appartient à $D(\beta_2)$ si $u_0 \in L^2$. Si $u_0 \in \overline{D(\beta)}$, p.p ; $(I+\lambda\beta)^{-1}u_0(x) \longmapsto u_0(x)$. On vérifie que la convergence a lieu dans $L^2(\Omega)$ d'après le théorème de Lebesgue.

.$\underline{D(\beta_2) \subset \overline{H_0^1 \bigcap H^2 \bigcap D(J)}}$ où $\partial J = \beta_2$: soit $u_0 \in D(\beta_2)$ et pour $\lambda > 0$, u_λ solution de

$$\begin{cases} u_\lambda \in H_0^1(\Omega)\bigcap H^2(\Omega) \\ u_\lambda - \lambda\Delta u_\lambda = u_0 \in D(\beta_2). \end{cases}$$

On a

$$\int_\Omega (\beta^0 u_\lambda)u_\lambda \leq \int_\Omega (\beta^0 u_\lambda)u_0 \text{ car } \quad -\int_\Omega (\beta^0 u_\lambda)\Delta u_\lambda \geq 0.$$

Donc

$$J(u_0) - J(u_\lambda) \geq \int_\Omega (\beta^0 u_\lambda)(u_0 - u_\lambda) \geq 0 \Longrightarrow (u_\lambda \in D(J) \text{ car } u_0 \in D(J)).$$

D'autre part, $u_\lambda \overset{L^2(\Omega)}{\to} u_0$, car $H_0^1 \bigcap H^2$ est dense dans $L^2(\Omega)$ et $u_\lambda = (I-\lambda\Delta)^{-1}u_0$.

.$\underline{H_0^1 \bigcap H^2 \bigcap D(J) \subset \overline{D(\partial\varphi)}}$: soit $u_0 \in H_0^1 \bigcap H^2 \bigcap D(J)$ et pour $\epsilon > 0, u_\epsilon$ solution de

$$\begin{cases} u_\epsilon - \epsilon\Delta u_\epsilon + \epsilon\beta(u_\epsilon) \ni u_0 \\ u_\epsilon \in H_0^1 \bigcap H^2 \end{cases}$$

(i.e. $u_\epsilon = (I+\epsilon\partial\varphi)^{-1}u_0$) Alors

$$J(u_0) - J(u_\epsilon) \geq \left(\frac{u_0 - u_\epsilon}{\epsilon} + \Delta u_\epsilon, u_0 - u_\epsilon\right) \geq \frac{1}{\epsilon}|u_0 - u_\epsilon|_2^2 + (\Delta u_0, u_0 - u_\epsilon)$$

$$\Longrightarrow |u_0 - u_\epsilon|_2^2 \leq \epsilon[J(u_0) + |\Delta u_0|_2 |u_0 - u_\epsilon|_2]$$

en déduit que $u_\epsilon \overset{L^2}{\to} u_0$ quand $\epsilon \longmapsto 0$ et l'inclusion cherchée.

CHAPITRE 4

GÉNÉRATION DE SEMI-GROUPES DE CONTRACTIONS DANS LES ESPACES DE BANACH QUELCONQUES

Etant donné A un opérateur m-accrétif d'un espace de Banach X, parallèlement à la théorie Hilbertienne, on espère pouvoir résoudre le problème

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} + Au \ni 0 \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

pour tout u_0 *dans* $D(A)$ et défini ainsi, en posant $u(t) = S(t)u_0$ un semi-groupe de contraction $(S(t))_{t\geq 0}$ *de* $\overline{D(A)}$ dans lui-même.

Contrairement au cas des espaces de Hilbert, il n'est pas possible d'espérer résoudre le problème ci-dessus en un sens fort. On peut s'en convaincre à l'aide de l'exemple simple suivant

Soit $X = C([0,1])$ muni de la norme "sup"

$D(A) = \{u \in C^1([0,1]))\ ;\ \ u(0) = 0\}$

$Au = u'$.

On vérifie aisément que A est m-accrétif dans $C([0,1])$ (la solution de $u + \lambda u' = f,\ u(0) = 0$ est explicitement donnée par $u(x) = \frac{1}{\lambda} \exp^{\frac{-x}{\lambda}} \int_0^x \exp^{\frac{\xi}{\lambda}} f(\xi) d\xi$). Considérons maintenant le problème d'évolution associé soit (formellement).

$$\begin{cases} u_t + u_x = 0 \ \ \forall (t,x) \in (0,\infty) \times (0,\infty) \\ u(t,0) = 0 \ \ \forall t > 0 \\ u(0,x) = u_0(x) \ \ \forall x \geq 0 \ avec \ u_0 \in C^1([0,1]),\ u(0) = 0. \end{cases}$$

La solution de ce problème est donné par

$$u(t,x) = \begin{cases} u_0(x-t) \ \ 0 \leq t \leq x \\ 0 \ \ 0 \leq x \leq t \end{cases}$$

Alors,

$$u_t(t,x) = -u_x(t,x) = \begin{cases} -u_0'(x-t) \ \ 0 \leq t \leq x \\ 0 \ \ 0 \leq x \leq t. \end{cases}$$

Ainsi, sauf dans le cas où $u_0'(0) = 0$, on a

$$\forall t > 0, \quad u_t(t, .) \notin X$$
$$et\ u(t, .) \notin D(A).$$

Nous allons introduire une notion de solution faible pour les équations ci-dessus. Pour des raisons qui apparaîtront clairement par la suite, cette notion sera défini à l'aide de solutions approchées.

Soit donc X un espace de Banach réel et A un opérateur de X (que lorsque pour l'instant).

On se donne $u_0 \in X,\ a, b \in \mathbb{R}\ et\ f \in L^1(a, b; X)$.

Définition 4.1 *Etant donné $\epsilon > 0$, on appelle solution ϵ-approché sur $[a, b]$ du problème*

$$P(u_0, f) \quad \begin{cases} \frac{du}{dt} + Au \ni f\ sur\ [a, b] \\ \qquad\qquad u(a) = u_0 \end{cases}$$

toute fonction $u_\epsilon : [a, b[\longmapsto X$ telle qu'il existe une partition $a = t_0 < t_1 < ..... < t_n \leq b$ et des suites $\{(x_i, y_i) \in A,\ f_i \in X,\ \ i = 1, ..., N\}$ et $x_0 \in X$ avec

1. $\forall i = 1, ..., N, \quad \forall t \in]t_{i-1}, t_i], \quad u_\epsilon(t) = x_i$
2. $\forall i = 1, ..., N, \quad \frac{x_i - x_{i-1}}{t_i - t_{i-1}} + Ax_i \ni f_i$
3. $\max\limits_{1 \leq i \leq N} (t_i - t_{i-1}) < \epsilon, \quad b - t_N < \epsilon$
4. $\sum\limits_{i=1}^{N} \int_{t_{i-1}}^{t_i} |f(t) - f_i|\ dt < \epsilon$
5. $|x_0 - u_0| < \epsilon.$

Remarque

u_ϵ est à valeur dans D(A) pour t>0.

Définition 4.2 *On appelle <u>bonne solution</u> du problème $P(u_0, f)$ sur $[a, b]$ (en anglais mild solution) toute fonction $u \in C([a, b], X)$ telle qu'il existe $\epsilon_n \longmapsto 0$ et une suite de solutions ϵ_n-approchées <u>convergeant uniformément</u> sur $[a, b]$ vers u.*

Nous verrons plus loin que ce procédé fournit effective une "bonne" solution du problème posé. Pour l'instant, nous nous intéressons à l'existence de telles solutions. Deux étapes s'imposent d'elles-mêmes :

<u>**Etape 1**</u>

Construire des solutions ϵ-approchées pour tout $\epsilon > 0$.

<u>**Etape 2**</u>

Montrer la convergence des solutions approchées.

Nous allons commencer par le cas particulier où $f \equiv 0$.

Nous noterons alors $P(u_0)$ *pour* $P(u_0, 0)$.

Il se trouve que, la seule hypothèse d'accrétivité, assure la réalisation du second point. Nous énonçons dés maintenant le résultat fondamental concernant ce point.

Remarque
Nous utiliserons systématiquement, et sans nécessairement les rappels, les notations de la définition 4.1. Nous serons souvent conduits à considérer simultanément deux solutions approchées distinct. La deuxième sera notée $\hat{u}_{\hat{\epsilon}}$ et les notations correspondantes seront celles de la définition 4.1 mais surmontés d'un chapeaux.

Théorème 4.1 *Soit A accrétif dans X et $u_\epsilon, \hat{u}_{\hat{\epsilon}}$ des solutions ϵ et $\hat{\epsilon}$-approchées de $P(u_0)$ et $P(\hat{u}_0)$. Alors*

$$(6)\quad \left\{ \begin{array}{r} \forall i = 0, 1...N,\ \ \forall j = 0, 1, ..N,\ \ \forall (x, y) \in A \\ |x_i - \hat{x}_j| \leq |x_0 - x| \\ + \sum\limits_{k=1}^{i} (t_k - t_{k-1})|f_k| + \sum\limits_{l=1}^{j} (\hat{t}_l - \hat{t}_{l-1})|\hat{f}_l| \\ + \{(t_i - \hat{t}_j)^2 + \epsilon t_i + \hat{\epsilon}\hat{t}_j\}^{1/2}|y|. \end{array} \right.$$

Remarque
Les données u_0 *et* $\hat{u}_0$ n'apparaissent pas dans u résolution ci-dessus, ceci provient du fait qu'il est valable pour des solutions ϵ-approchées du seul problème $\frac{du}{dt} + Au \ni 0$ sans préciser de la donnée initiale.
Comme par la suite, nous sommes essentiellement intéressés par le problème $P(u_0, f)$ lui-même, nous avons préféré ne pas multiplier les définitions et les poser directement pour le problème de donnée.
La démonstration du théorème 4.1 utilise le lemme technique suivant.

Lemme 4.1 *Soit A accrétif et*
(7) $\quad \frac{v-w}{\delta} + Av \ni f, \quad \frac{\hat{v}-\hat{w}}{\hat{\delta}} + A\hat{v} \ni \hat{f}.$
où $\delta, \hat{\delta} > 0, \quad v, w, f, \hat{v}, \hat{w}, \hat{f} \in X$. *Alors*
(8) $\quad |v - \hat{v}| \leq \frac{\hat{\delta}}{\delta+\hat{\delta}}|w - \hat{v}| + \frac{\delta}{\delta+\hat{\delta}}|\hat{w} - v| + \frac{\delta\hat{\delta}}{\delta+\hat{\delta}}|f - \hat{f}|.$

Preuve 4.1 *D'après l'accrétivité de A :*

$$0 \leq [v - \hat{v}, (f - \frac{v - w}{\delta}) - (\hat{f} - \frac{\hat{v} - \hat{w}}{\hat{\delta}})] \leq [v - \hat{v}, f - \hat{f}] + [v - \hat{v}, \frac{w - v}{\delta}] + [v - \hat{v}, \frac{\hat{v} - \hat{w}}{\hat{\delta}}]$$

Or (voir par le chapitre 1 pour les propriétés de [.,.])

$$[v - \hat{v}, \frac{w - v}{\delta}] \leq \frac{1}{\delta}[|v - \hat{v} + w - v| - |v - \hat{v}|] = \frac{1}{\delta}[|w - \hat{v}| - |v - \hat{v}|]$$
$$[v - \hat{v}, \frac{\hat{v} - \hat{w}}{\hat{\delta}}] \leq \frac{1}{\delta}[|v - \hat{v} + \hat{v} - \hat{w}| - |v - \hat{v}|] = \frac{1}{2}[|v - \hat{w}| - |v - \hat{v}|]$$

On en déduit

$$\frac{1}{\delta} + \frac{1}{\hat{\delta}}|v - \hat{v}| \leq |f - \hat{f}| + \frac{1}{\delta}|w - \hat{v}| + \frac{1}{\hat{\delta}}|v - \hat{w}|$$

ce qui donne (8).

Preuve 4.2 *(Démonstration du théorème 4.1)*
Notons $a_{i,j} = |x_i - \hat{x}_j|, \ \ \delta_k = t_k - t_{k-1}, \ \ \hat{\delta}_l = \hat{t}_l - \hat{t}_{l-1}, \ \ u_i = \sum\limits_{k=1}^{i} (t_k - t_{k-1})|f_k|,$

$\hat{u}_j = \sum_{l=1}^{j}(t_l - t_{l-1})|\hat{f}_l|$. *Il s'agit de montrer la propriété* $\mathcal{P}_{i,j}$ *suivante :*

$$\mathcal{P}_{i,j}\left\{\begin{array}{r} \forall (x,y) \in A \\ a_{i,j} \leq |x_0 - x| + |\hat{x}_0 - x| + u_i + \hat{u}_j + \{(t_i - \hat{t}_j)^2 + \epsilon t_i + \hat{\epsilon}\hat{t}_j\}^{1/2}|y|. \end{array}\right.$$

Nous allons raisonner par récurrence (sur les deux indices i,j) de la manière suivante :

Etape 1

Prouve de :$(\mathcal{P}_{i-1,j}$ *et* $\mathcal{P}_{i,j-1} \quad 1 \leq i \leq N, \ 1 \leq j \leq \hat{N}) \Longrightarrow (\mathcal{P}_{i,j})$

Etape 2

Prouve de $\mathcal{P}_{i,0}, \quad \forall i = 1, ...N$

$\mathcal{P}_{0,j}, \quad \forall j = 1, ...\hat{N}.$

Pour la première étape, nous appliquer le lemme 4.1 aux relations

$$\frac{x_i - x_{i-1}}{\delta_i} + Ax_i \ni f_i, \quad \frac{\hat{x}_j - \hat{x}_{j-1}}{\hat{\delta}_j} + A\hat{x}_j \ni \hat{f}_j$$

Ceci donne

$$(10) \quad a_{i,j} \leq \frac{\hat{\delta}_j}{\delta_i + \hat{\delta}_j}\ a_{i-1,j} + \frac{\delta_i}{\delta_i + \hat{\delta}_j}\ a_{i,j-1} + \frac{\delta_i\hat{\delta}_j}{\delta_i + \hat{\delta}_j}(|f_i| + |\hat{f}_j|),$$

Supposant $\mathcal{P}_{i-1,j}$ *et* $\mathcal{P}_{i,j-1}$*, nous en déduisons :*

$$a_{i,j} \leq \frac{\hat{\delta}_j}{\delta_i + \hat{\delta}_j}[|x_0 - x| + |\hat{x}_0 - x| + u_{i-1} + \hat{u}_j + \{(t_{i-1} - \hat{t}_j)^2 + \epsilon t_{i-1} + \hat{\epsilon}\hat{t}_j\}^{1/2}|y|]$$
$$+\frac{\delta_i}{\delta_i + \hat{\delta}_j}[|x_0 - x| + |\hat{x}_0 - x| + u_i + \hat{u}_{j-1} + \{(t_i - \hat{t}_{j-1})^2 + \epsilon t_i + \hat{\epsilon}\hat{t}_{j-1}\}^{1/2}|y|]$$
$$+\frac{\delta_i\hat{\delta}_j}{\delta_i + \hat{\delta}_j}(|f_i| + |\hat{f}_j|).$$

Dans cette somme, il apparait $|x_0 - x| + |\hat{x}_0 - x|$ *; d'autre part*

$$\frac{\hat{\delta}_j}{\delta_i + \hat{\delta}_j}(u_{i-1} + \hat{u}_j + \delta_i|f_i|) = u_i$$
$$\frac{\delta_i}{\delta_i + \hat{\delta}_j}(u_i + \hat{u}_{j-1} + \hat{\delta}_j|\hat{f}_j|) = u_j$$

Enfin, on utilise la concavité de $r \longmapsto r^{1/2}$.

Corollaire 4.1 *Soit A accrétif dans X et* u_{ϵ_n} *et* $\hat{u}_{\hat{\epsilon}_p}$ *des solutions approchées de* $P(u_0)$ *et* $P(\hat{u}_0)$ *convergent uniformément vers u et* $\hat{u}$*, alors*

$$(11)\ |u_{\epsilon_n}(t) - \hat{u}_{\hat{\epsilon}_p}(t)| \leq \epsilon_n + \hat{\epsilon}_p + |u_0 - x| + |\hat{u}_0 - x| + \epsilon_n + \hat{\epsilon}_p + \{(\epsilon_n + \hat{\epsilon}_p + 3\epsilon_n^2 + 3\hat{\epsilon}_p^2\}^{1/2}|y|.$$

$\forall (x,y) \in A, \quad \forall 0 \leq t \leq min(t_{N_n}, \hat{t}_{\hat{N}_p}).$

Corollaire 4.2 *Soit A accrétif dans X et* $u_0 \in \overline{D(A)}$. *On suppose qu'il existe une suite* u_{ϵ_n} *de solutions* ϵ_n*- approchées de* $P(u_0)$ *sur* $[0,T]$ *avec* $\lim_{n \longmapsto \infty} \epsilon_n = 0$. *Alors il existe une bonne solution sur* $[0,T]$ *de* $P(u_0)$*, obtenue comme limite uniforme sur* $[0.T]$ *de* u_{ϵ_n}.

Preuve 4.3 *D'après le corollaire 4.1,*

$$|u_{\epsilon_n}(t) - u_{\epsilon_p}(t)| \leq \epsilon_n + \epsilon_p + 2\ |u_0 - x| + \epsilon_n + \epsilon_p + \{(\epsilon_n + \epsilon_p)t + 3\epsilon_n^2 + 3\epsilon_p^2\}^{1/2}|y|$$

$\forall (x, y) \in A, \quad \forall 0 \leq t \leq min(t_{N_n}, t_{N_p})$.
(Notons que la valeur des solutions approchées sur $]t_N, T]$ *n'intervient pas et on peut toujours supposées qu'elles sont égales à* $u_\epsilon(t_N)$ *sur* $[t_N, T]$*). On en déduit*

$$\limsup_{n,p\longmapsto\infty} (\sup_{t\in[0,T]} |u_{\epsilon_n}(t) - u_{\epsilon_p}(t)|) \leq 2|u_0 - x|.$$

Puisque $u_0 \in \overline{D(A)}$ *et que x est arbitraire dans D(A), ceci prouve la convergence uniforme de* u_{ϵ_n} *sur* $[0, T]$.

Réutilisant à nouveau l'estimation (11) du corollaire 4.1 et passant à la limite, on obtient : $\forall 0 \leq s, t < T$

$$(12) \quad |u(t) - u(s)| \leq 2|u_0 - x| + |t - s||y|.$$

Donc

$$\limsup_{|t-s|\longmapsto 0} |u(t) - u(s)| \leq 2|u_0 - x| \quad \forall x \in D(A).$$

Ceci prouve l'uniforme continuité de u sur $[0, T]$.

Remarque
On obtient également une estimation de la vitesse de convergence de u_{ϵ_n} *vers u à savoir :*

$$\sup_{t\in[0,T]} |u_{\epsilon_n}(t) - u(t)| \leq 2\epsilon_n + 2|u_0 - x| + 2\sqrt{\epsilon_n T}|y|.$$

Corollaire 4.3 *Soit A accrétif dans X et* $u, \hat{u}$ *des bonnes solutions sur* $[0, T]$ *de* $P(u_0)$ *et* $P(\hat{u}_0)$ *respectivement. Alors*

$$(13) \quad \forall 0 \leq t \leq T, \quad |u(t) - \hat{u}(t)| \leq |u_0 - \hat{u}_0|.$$

En particulier, le problème $P(u_0)$ *admet au plus une bonne solution pour* $u_0 \in \overline{D(A)}$.

Preuve 4.4 *Soit* u_{ϵ_n} *et* $\hat{u}_{\hat{\epsilon}_p}$ *des solutions approchées de* $P(u_0)$ *et* $P(\hat{u}_0)$ *convergent uniformément vers u et* $\hat{u}$*. D'après le corollaire 4.1,* $\forall (x, y) \in A, \quad \forall 0 \leq t \leq min(t_{N_n}, \hat{t}_{\hat{N}_p})$

$$(11)\ |u_{\epsilon_n}(t) - \hat{u}_{\hat{\epsilon}_p}(t)| \leq \epsilon_n + \hat{\epsilon}_p + |u_0 - x| + |\hat{u}_0 - x| + \epsilon_n + \hat{\epsilon}_p + \{(\epsilon_n + \hat{\epsilon}_p + 3\epsilon_n^2 + 3\hat{\epsilon}_p^2\}^{1/2}|y|.$$
$$\Longrightarrow |u(t) - \hat{u}(t)| \leq |u_0 - x| + |\hat{u}_0 - x| \quad \forall x \in D(A).$$

On applique alors ceci à une suite $x_n \in D(A)$ convergent vers $\hat{u}_0$.
(Il faut bien sûr avoir remarqué auparavant qu'une bonne solution est nécessairement à valeur dans $\overline{D(A)}$; en effet, les solutions ϵ-approchées sont à valeur dans D(A) pour t>0, donc une bonne solution est à valeur dans $\overline{D(A)}$ pour t>0 et, par continuité, également pour t=0).

Le théorème 4.1 fournit également un premier résultat de régularité pour les bonnes solutions à donnée initiale dans D(A) ou, plus précisément dans le domaine généralisé de A défini comme suit :

Définition 4.3 *Etant donné $A \subset X \times X$, on pose :*

$$\widehat{D}(A) = \{x \in X; \quad \exists (x_n, y_n) \in A \ avec \ \ x_n \longmapsto x, \quad y_n \ borné\}$$

$$\forall x \in \widehat{D}(A), \ ||Ax|| = inf\{\lim_{n \longmapsto \infty} |y_n|; \quad (x_n, y_n) \in A, \quad x_n \longmapsto x, \quad y_n \ borné\}$$

Remarque
On vérifie immédiatement que $D(A) \subset \hat{D}(A) \subset \overline{D(A)}$.

Si A est un opérateur maximal monotone d'un espace de Hilbert H, on a $\hat{D}(A) = D(A)$ *et* $|Ax| = ||Ax||$ d'après la fermeture de A dans $H \times H_w$. On peut en fait montrer que $D(A) = \hat{D}(A)$ pour un opérateur m-accrétif d'un espace de Banach réflexif.

Si $X = C_b(\mathbb{R})$, $D(A) = \{u \in C_b(\mathbb{R}) \bigcap C^1(\mathbb{R}); \ u' \in C_b(\mathbb{R})\}$ *et* $Au = u'$, $\hat{D}(A)$ est l'espace des fonctions lipschitziennes sur $\mathbb{R}$ *et* $||Au|| = ||u'||_{L^\infty(\mathbb{R})}$.

Si $X = L^1(\mathbb{R})$, $D(A) = W^{1,1}(\mathbb{R})$ *et* $Au = u$, $\hat{D}(A)$ est l'espace des fonctions à variation bornée sur $\mathbb{R}$ *et* $||Au||$=variation totale de u'.

Corollaire 4.4 *Soit A accrétif dans X et u une bonne solution de $P(u_0)$ sur $[0, T]$. Alors*

$$(14) \quad \forall u_0 \in \hat{D}(A), \ \forall 0 \leq s, t \leq T, \quad |u(t) - u(s)| \leq |t - s| \ ||Au_0||.$$

(u lipschitzienne de rapport $||Au_0||$)

Remarque
Si X est réflexif, une fonction lipschitzienne de $[0, T]$ dans X est p.p dérivable. Dans ce cas, on peut donc espérer qu'une bonne solution soit solution "forte" du problème posé (voir plus loin pour ce type de résultat). Ce résultat fait malheureusement défaut dans le cas d'un espace de Banach quelconque.

Preuve 4.5 *(Démonstration du corollaire 4.4)*
Il suffit d'utiliser la relation (12) soit

$$|u(t) - u(s)| \leq 2|u_0 - x| + |t - s||y|.$$

Si $u_0 \in D(A)$, il existe $(x_n, y_n) \in A$ avec $x_n \longmapsto x$ et y_n borné ; appliquant l'inégalité ci-dessus à (x_n, y_n), on obtient

$$|u(t) - u(s)| \leq |t - s| \limsup_{n \longmapsto \infty} |y_n|$$

ce qui donne (14).

Nous allons maintenant étudier le problème de la construction de solution approchées de $P(u_0)$. Cette construction est immédiate lorsque A est m-accrétif ; en effet, $(I + \lambda A)$ est alors surjectif pour tout $\lambda > 0$ et on obtient immédiatement une solution T/n-approchée de $P(u_0)$ *sur* $[0, T]$ en posant

$$\begin{cases} x_0 = u_0 \in \overline{D(A)} \\ \forall i = 1, ...n, \quad x_i = (I + \frac{T}{n}A)^{-1}x_{i-1} = ... = (I + \frac{T}{n}A)^{-i}u_0 \end{cases}$$

Plus généralement, nous avons le résultat suivant dû à Crandall-Liggett qui a précédé historiquement celui de Kobayaski contenu dans le théorème 1.

Corollaire 4.5 *(Théorème de Crandall-Liggett)*
Soit A accrétif tel que $\forall\lambda > 0,\quad R(I+\lambda A) \supset \overline{D(A)}$. *Alors pour tout* $u_0 \in \overline{D(A)}$, *il existe une bonne solution sur* $[0,\infty[$ *de* $P(u_0)$ *(unique d'après le corollaire 4.3).*

En conséquence, A "engendre" un semi-groupe de contractions $(S(t))_{t\geq 0}$ *de* $\overline{D(A)}$ *dans lui-même défini par* $S(t)u_0 = u(t)$ *où u est la bonne solution sur* $[0,\infty[$ *de* $P(u_0)$. *De plus, on a la formule exponentielle*

$$(15) \qquad S(t)u_0 = \lim_{n\longmapsto\infty} (I + \frac{t}{n}A)^{-n}u_0,$$

la convergence étant uniforme sur tout intervalle borné.

Remarque
une bonne solution sur $[0,\infty[$ *de* $P(u_0)$ est une fonction continue de $[0,\infty[$ *dans* X dont la restriction à $[0,T]$ est bonne solution sur $[0,T]$ *de* $P(u_0)$ pour tout T>0.

Définition 4.4 *On dira que A est un pseudo-générateur si pour tout* $u_0 \in \overline{D(A)}$, *il existe une unique bonne solution sur* $[0,\infty[$ *de* $P(u_0)$ *à valeur dans* $\overline{D(A)}$. *Dans ce cas, posant* $S(t)u_0$*=valeur en* $t \geq 0$ *de la bonne solution de* $P(u_0)$, *on définit un semi-groupe de contraction si A accrétif de* $\overline{D(A)}$ *dans lui-même vérifiant :*

$$\forall s,t \geq 0 \quad S(t+s) = S(t)oS(s) \quad S(0) = I$$
$$\forall x \in \overline{D(A)} \qquad \lim_{t\longmapsto 0^+} S(t)x = x$$
$$\forall t \geq 0,\ \forall x,y \in \overline{D(A)} \quad |S(t)x - S(t)y| \leq |x-y|.$$

Preuve 4.6 *(Démonstration du corollaire 4.5)*
Etant donné T>0 et $\lambda > 0$, *on pose*

$$\begin{cases} x_0 = u_0 \\ x_i = (I+\lambda A)^{-1}x_{i-1}, \quad i = 1,...N \ ou\ N\lambda \geq T \end{cases}$$

Cette suite est bien défini puisque $R(I+\lambda A) \supset \overline{D(A)}, \quad \forall\lambda > 0.$
De plus

$$\frac{x_i - x_{i-1}}{\lambda} + Ax_i \ni 0, \qquad \forall i = 1,...N.$$

Ainsi, la fonction

$$\begin{cases} u_\lambda(t) = x_i \ sur\ ](i-1)\lambda, i\lambda], i = 1,....N \\ u_0 \ pour\ t = 0 \end{cases}$$

est une solution λ*-approchée de* $P(u_0)$. *Puisque A est accrétif elle converge vers une bonne solution u sur* $[0,T]$ *de* $P(u_0)$ *quand* $\lambda \longmapsto 0$. *D'après l'unicité établie dans le corollaire 4.3, cette bonne solution est unique. De plus, comme T est arbitraire, elle fournit une solution sur* $[0,\infty[$.

Maintenant, étant donné $0 \leq t \leq T$, *on choisit* $\lambda = \frac{t}{n}$. *Alors* $u_\lambda(t) = (I + \frac{t}{n}A)^{-n}u_0$ *converge vers u(t), et on vérifie que la convergence est uniforme pour* $t \in [0,T]$. *En fait, le théorème 4.1 fournit l'estimation*

$$|(I + \frac{t}{n}A)^{-n}u_0 - S(t)u_0| \leq \frac{t}{\sqrt{n}}|y| + 2|x - x_0| \quad \forall (x,y) \in A.$$

La condition du corollaire 4.5 assurent que A est un pseudo-générateur peut on fait être considérablement affaiblie. On peut pas par exemple établie la proposition suivante où d(x,E) représente la distance de $x \in X$ à $E \subset X$ soit

$$d(x, E) = \inf_{y \in E} |x - y|.$$

Proposition 4.1 *Soit A accrétif tel que*

$$(15) \qquad \forall x \in \overline{D(A)}, \ \liminf_{\lambda \longmapsto 0} \frac{1}{\lambda} d(x, R(I + \lambda A)) = 0.$$

Alors A est un pseudo-générateur.

Pour montrer l'intérêt d'un tel résultat donnée en immédiatement une conséquence.

Preuve 4.7 *Montrons que A vérifie (15). Pour cela, considérons $x\lambda = x - \lambda Ax$. Alors*

$$d(x, R(I + \lambda A)) \leq |x - (x_\lambda + \lambda Ax_\lambda)| = \lambda |Ax - Ax_\lambda|$$
$$\Longrightarrow \lim_{\lambda \longmapsto 0} \frac{1}{\lambda} d(x, R(I + \lambda A)) = \lim_{\lambda \longmapsto 0} |Ax - Ax_\lambda| = 0 \textit{ puisque A continue}$$

Proposition 4.2 *Soit $A : X \longmapsto X$ continue (donc univoque et partout défini) et accrétif. Alors A est un pseudo-générateur.*

Remarque

On voit qu'il suffit en fait de poser A <u>hémicontinue fort</u> , i.e. $\forall x, y \in X, \ \lim_{\lambda \longmapsto 0} A(x + \lambda y) = Ax$.

On verra un peut plus loin que si A est continue (ou hémicontinue fort) et accrétif, il est en fait m-accrétif, ce qui généralise le résultat vu précédemment pour des opérateurs lipschitzienne.

Revenons maintenant à la proposition 4.1, il est clair que sa démonstration consiste à montrer que l'hypothèse (15) implique l'existence des solutions ϵ-approchées sur $[0, T]$ pour tout $\epsilon > 0$ *et* $T > 0$. D'après (15), si $x \in \overline{D(A)}$, il existe $\lambda > 0$ (petit) et $(x_\lambda, y_\lambda) \in A$ tel que $x - (x_\lambda + \lambda y_\lambda) = \lambda \epsilon(\lambda)$ où $\epsilon(\lambda)$ est petit.

Posant $x_1 = x_\lambda, \ y_1 = y_\lambda, \ \epsilon_1 = \epsilon(\lambda), \ \lambda_1 = \lambda$ et appliquant à nouveau (15) à x_1, on obtient (x_2, y_2) *et* λ_2, ϵ_2 "petits" avec

$$x - (x_2 + \lambda_2 y_2) = \lambda_2 \epsilon_2,$$

etc... On voit qu'on obtient ainsi une solution approchée de $P(u_0)$ sur un certain intervalle $[0, T_x]$. Le problème consiste à montrer que T_x peut-être aussi grand qu'on veut... et ceci aussi petits pour les λ_i.

Nous allons montrer que c'est possible encore grâce à l'accrétivité de A. En fait, nous allons démontrer un résultat plus général qui va aussi permettre de résoudre un autre type de question naturellement liée à la notion se semi-groupe, à savoir :

Etant donné $(S(t))_{t \geq 0}$ un semi-groupe engendré par A et $F \subset \overline{D(A)}$ un fermé, à qu'elle condition a-t-on

$$(16) \qquad \forall t > 0, \quad S(t)F \subset F?$$

Par exemple, si A est m-accrétif, $S(t) = (I + \frac{t}{n}A)^{-n}$, et si

$$(17) \qquad \forall \lambda > 0, \quad J_\lambda F \subset F,$$

On voit immédiatement que (16) est satisfait. Cependant, l'hypothèse (17) peut être affaiblie comme suit :

Proposition 4.3 *Soit F un fermé de X et A accrétif tel que*

$$F \subset \overline{D(A)} \subset R(I + \lambda A) \quad \forall \lambda > 0$$

On suppose

$$(18) \quad \forall x \in F, \quad \liminf_{\lambda \longmapsto 0} \frac{1}{\lambda} d(J_\lambda x, f) = 0 \quad (J_\lambda = (I + \lambda A)^{-1}).$$

Alors, si $(S(t))_{t\geq 0}$ est le semi-groupe engendré par A.

$$(19) \quad \forall t \geq 0 \quad S(t)F \subset F.$$

Les propositions 4.1 et 4.3 sont des conséquences du théorème suivant :

Théorème 4.2 *Soit A accrétif et $F \subset \overline{D(A)}$ fermé. On suppose*

$$(20) \quad \begin{cases} \forall x \in F, \ \forall \epsilon > 0, \ \exists \lambda \in]0, \epsilon], \ \exists (x_\lambda, y_\lambda) \in A, \exists u_\lambda \in F \\ \quad\quad \text{avec } |x - (x_\lambda + \lambda y_\lambda)| + |x_\lambda - u_\lambda| \leq \lambda.\epsilon \end{cases}$$

Alors, $\forall u_0 \in F$, il existe une bonne solution sur $[0, \infty[$ de $P(u_0)$ à valeurs dans F. Donc, A engendre un semi-groupe de contractions de F dans F.

Preuve 4.8 *(Démonstration de la proposition 4.1)*
On remarque que (15)$\Longrightarrow$ (20) avec $F = \overline{D(A)}$ et $x_\lambda = u_\lambda$. On applique alors le théorème 4.2.

Preuve 4.9 *(Démonstration de la proposition 4.3)*
On remarque que (18)$\Longrightarrow$ (20) avec $x_\lambda + \lambda y_\lambda = x$ (soit $x_\lambda = J_\lambda x$). On applique le théorème 4.2 et on utilise l'unicité des bonnes solutions.

Preuve 4.10 *(Démonstration du théorème 4.2)*
Soit $u_0 \in F$ et $\epsilon > 0$. Nous allons construire des suites $(\lambda_n) \subset]0, \epsilon]$, $(x_n, y_n) \in A$, $u_n \in F$ avec

$$(21) \quad \forall n \geq 1 \quad |u_n - (x_n + \lambda_n y_n)| + |x_n - u_n| \leq \lambda_n \epsilon$$

et

$$(22) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n = +\infty.$$

Montrons que le théorème 4.2 sera alors démontrer. En effet, d'après (21), on a

$$\forall n \geq 1, \ |x_n - u_n| \leq \lambda_n \epsilon, \quad |u_n - (x_{n+1} + \lambda_n, y_{n+1})| \leq \lambda_{n+1} \epsilon.$$

ce qui implique

$$(23) \quad \left| \frac{x_{n+1} - x_n}{\lambda_{n+1}} + y_{n+1} \right| \leq \epsilon + \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} \epsilon \quad \forall n \geq 1$$

Posons alors, $t_n = \lambda_2 + \lambda_3 + ... + \lambda_{n+1} \quad \forall n \geq 1. \quad t_0 = 0$

$$(24) \qquad \begin{cases} u_\epsilon(0) = x_1 \\ u_\epsilon(t) = x_n \ pour \ t \in]t_{n-1}, t_n], \ n \geq 1 \end{cases}$$

Si T>0, on définit N=N(T) comme l'entrer tel que

$$t_N \leq T \leq t_{N+1}.$$

Alors, si $\alpha(\epsilon) = max(\epsilon, |x_1 - u_0|, \Delta_T)$ *où*

$$\Delta_T = \sum_{n=1}^{N}(t_n - t_{n-1})\ (\epsilon + \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}}\epsilon) = \epsilon\sum_{n=1}^{N}\lambda_{n+1} + \epsilon\sum_{n=1}^{N}\lambda_n$$

$$\leq \epsilon(2t_N + \epsilon),$$

u_ϵ *est une solution* $\alpha(\epsilon)$*-approchée de* $P(u_0)$ *avec*

$$d(u_\epsilon(t), F) \leq \epsilon^2 \qquad \forall t \geq 0.$$

D'après le théorème 4.1 (ou corollaire 4.2), il suffit donc de montrer que $\lim\limits_{\epsilon \longmapsto 0} \alpha(\epsilon) = 0$*, soit* $\lim\limits_{\epsilon \longmapsto 0} |x_1 - u_0| = 0$ *(noter que, puisque F est fermé, la limite u de* u_ϵ *eux à valeurs dans F).*
Or, d'après (21)

$$(25) \quad |u_0 - (x_1 + \lambda_1 y_1)| \leq \lambda_1\epsilon.$$

D'après l'accrétivité de A, pour tout $(x, y) \in A$*,*

$$(26) \quad |x - x_1| \leq |x - x_1 + \lambda_1(y - y_1)|.$$

De (25) et (26), on déduit :

$$\begin{aligned} |u_0 - x_1| &\leq |u_0 - x| + |x - x_1| \leq 2|u_0 - x| + |u_0 - (x_1 + \lambda_1 y_1)| + \lambda_1|y| \\ &\leq 2|u_0 - x| + \lambda_1\epsilon + \lambda_1|y| \\ &\leq 2|u_0 - x| + \epsilon^2 + \epsilon|y|. \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \limsup_{\epsilon \longmapsto 0} |u_0 - x_1| \leq 2|u_0 - x| \quad \forall x \in D(A)$$

$$\Longrightarrow \limsup_{\epsilon \longmapsto 0} |u_0 - x_1| = 0 \quad puisque \ \ u_0 \in \overline{D(A)}.$$

Il nous reste à montrer qu'il est possible de construire des suites vérifiant (21) et (22). Pour cela, nous définissons :

$\forall x \in F,\ \lambda(x) = \sup\{\lambda \in]0, \epsilon];\ \exists (x_1, y_1) \in A$ *et* $u_\lambda \in F$ *avec* $|x - (x_\lambda + \lambda y_\lambda)| + |x_\lambda - u_\lambda| \leq \lambda.\epsilon\}.$

On définit alors par récurrence (à partir de l'hypothèse (20)) des suites $(\lambda_n), (x_n, y_n) \in A$*,* $u_n \in F$ *avec*

$$\forall n \geq 1 \quad |u_{n-1} - (x_n + \lambda_n y_n)| + |x_n - u_n| \leq \lambda_n\epsilon$$

$$0 \leq \frac{1}{2}\lambda(u_{n-1}) \leq \lambda_n \leq \epsilon.$$

Posons $T = \sum_{n=2}^{\infty} \lambda_n$. *Il s'agit de montrer* $T = +\infty$. *Pour cela, nous utilisons le lemme suivante (comparable au théorème 4.1).*

Lemme 4.2 *Soit* u_ϵ *une solution* ϵ*-approchée de* $P(u_0)$. *Alors, avec les notations de la définitions 4.1 :*

$$\forall 1 \leq k \leq j \leq i \leq N; \quad |x_i - x_j| \leq (t_i - t_j)|Ax_k| + \sum_{p=k+1}^{i} \lambda_p |f_p| + \sum_{p=k+1}^{j} \lambda_p |f_p|$$

où $\lambda_p = t_p - t_{p-1}$.

Le lemme se démontre par récurrence de la même manière que le théorème 4.1.
Supposons alors $T < \infty$. D'après le lemme ci-dessus appliqué à u_ϵ défini en (24)

$$\forall k \leq N, \quad \limsup_{i,j \longmapsto \infty} |x_i - x_j| \leq \sum_{n=k}^{\infty} \lambda_{n+1}(\epsilon + \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}}\epsilon)$$
$$\leq \epsilon(T - t_k) + \epsilon(T - t_{k-1})$$

et donc $\limsup_{i,j \longmapsto \infty} |x_i - x_j| = 0$. Ceci prouve que x_n converge quand $n \longmapsto \infty$. Sa limite $x_\infty \in F$ puisque

$$d(x_n, F) \leq |x_n - u_n| \leq \lambda_n \epsilon$$

et $\lambda_n \longmapsto 0$ si $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n < \infty$. Mais appliquant (20) à x_∞, on obtient l'existence de $\lambda \in]0, \epsilon/2], (x_\lambda, y_\lambda) \in A,\ u_\lambda \in F$ avec

$$|x_\infty - (x_\lambda + \lambda y_\lambda)| + |u_\lambda - x_\lambda| \leq \lambda.\epsilon/2$$

et donc, pour n assez grand, puisque $u_n \longmapsto x_\infty$ *et* $\lambda_n \longmapsto 0$,

$$|u_n - (x_\lambda + \lambda y_\lambda)| + |u_\lambda - x_\lambda| \leq \lambda.\epsilon$$
$$\text{et } \lambda(u_n) \leq 2\lambda_n < \lambda$$

ce qui contredit la définition de $\lambda(u_n)$.

Nous avons vu déjà au des applications du théorème 4.2 sous la forme des propositions 4.1, 4.2, 4.3. Nous allons en donner d'autres en commençant par le cas d'opérateurs continus sur un fermé de X.
Soit donc $F \subset X$ un fermé et $A : F \longrightarrow X$ continu. Il s'agit de résoudre le problème

$$(P) \quad \begin{cases} u'(t) + Au(t) = 0 \\ u(0) = u_0 \in F \end{cases}$$

Notons que si $u \in C([0,T], X)$, il en est de même de Au et donc de $u'(t)$. Il est donc naturel de supposer $u \in C^1([0,T], X)$.
D'autre part, il est implicite qu'une solution de (P) est à valeurs dans D(A)=F. On a alors la condition nécessaire suivante.

Proposition 4.4 *Soit $F \subset X$ fermé et $A : F \longrightarrow X$ continu. On suppose qu'il existe T>0 et $u \in C^1([0,T],F)$ solution de (P). Alors*

$$(27) \qquad \lim_{\lambda \longmapsto 0} \frac{1}{\lambda} d(u_0 - \lambda A u_0, F) = 0.$$

Preuve 4.11 *puisque u est dérivable en 0 et que $u^{'}(0) = -Au_0$, on a :*

$$u(t) = u_0 - tAu_0 + t.\epsilon(t) \quad avec \quad \lim_{t \longmapsto 0} \epsilon(t) = 0$$

$$\Longrightarrow d(u_0 - tAu_0)F) \leq |u_0 - tAu_0 - u(t)| \leq t|\epsilon(t)|$$

d'où (27).

La condition (27) est classique dans l'étude des équations différentielles ordinaires. Il est intéressant de se demander si elle est suffisante. Si F=X, on sait que la seule continuité de A ne suffit pas à assurer l'existence de solutions de (P). Par contre, si on suppose X de dimension fini, ou si A est localement lipschitzien, alors la condition (27) vérifie pour tout $u_0 \in F$ assure au mois l'existence de solutions locales.

Notons que certaines équations aux dérivées partielles peuvent être strictement réduits à des équations différentielles ordinaires du type (P) avec A localement lipschitzien, c'est le cas de l'équation d'Euler intervenant en hydrodynamique.

Ici nous allons nous intéresser au cas où A est accrétif.

Proposition 4.5 *Soit $F \subset X$ fermé et $A : F \longrightarrow X$ continu ; accrétif. Alors le problème*

$$(28) \qquad \begin{cases} u \in C^1([0,\infty[,F) \\ u^{'}(t) + Au(t) = 0 \\ \hfill u(0) = u_0 \end{cases}$$

a une solution pour tout $u_0 \in F$ si et seulement si

$$(29) \quad \forall u_0 \in F \quad \liminf_{\lambda \longmapsto 0} \frac{1}{\lambda} d(u_0 - \lambda A u_0, F) = 0.$$

Dans ce cas, A est alors s-accrétif et la solution de (28) est unique.

Cette proposition sera une conséquence de la proposition 4.1 et du lemme suivant.

Lemme 4.3 *Soit $F \subset X$ fermé et $A : F \longrightarrow X$ continu, accrétif, et $x \in F$. Alors, il y a équivalence entre*

$$(30) \qquad \liminf_{\lambda \longmapsto 0} \frac{1}{\lambda} d(x - \lambda Ax, F) = 0.$$

$$(31) \qquad \liminf_{\lambda \longmapsto 0} \frac{1}{\lambda} d(x, R(I + \lambda A)) = 0.$$

Remarque

(30)$\Longrightarrow$(31) est vrai sans hypothèse d'accrétivité.

Preuve 4.12 *Supposons (30). Alors pour* $\epsilon > 0$ *il existe* $x_\lambda \in F,\ \lambda \in]0,\epsilon]$ *et* $\epsilon_\lambda \in X$ *avec*

$$x - \lambda Ax = x_\lambda + \lambda\epsilon_\lambda \quad , |\epsilon_\lambda| \leq \epsilon$$

Alors

$$\begin{aligned} x - (x_\lambda + \lambda Ax_\lambda) &= x - (x - \lambda Ax - \lambda\epsilon_\lambda + \lambda Ax_\lambda) \\ &= \lambda(Ax - Ax_\lambda) + \lambda\epsilon_\lambda \end{aligned}$$

Ainsi

$$\frac{1}{\lambda}d(x, R(I + \lambda A)) \leq |Ax - Ax_\lambda| + \epsilon \leq 2\epsilon \text{ pour } \lambda \text{ assez petit puisque}$$

$$|x_\lambda - x| \leq \lambda(|Ax| + \epsilon) \text{ (avec } \lambda \longmapsto 0)$$

et A est continu sur F. D'où (31).

Inversement, supposons (31), $\forall\epsilon > 0$*, il existe* $(x_\lambda, y_\lambda) \in A$ *(ici* $y_\lambda = Ax_\lambda$*) avec* $\lambda \in]0,\epsilon]$ *et* $\epsilon_\lambda \in X$ *avec*

$$x - (x_\lambda + \lambda Ax_\lambda) = \lambda\epsilon_\lambda \quad |\epsilon_\lambda| \leq \epsilon$$

$$\Longrightarrow x - \lambda Ax = x_\lambda + \lambda(Ax_\lambda - Ax) + \lambda\epsilon_\lambda.$$

Mais, d'après l'accrétivité de A :

$$|x - x_\lambda| \leq |(x + \lambda Ax) - (x_\lambda + \lambda Ax_\lambda)| \leq \lambda|\epsilon_\lambda| + \lambda|Ax|$$

Donc x_λ *tend vers* x *quand* $\lambda \longmapsto 0$ *et* $Ax_\lambda \longmapsto Ax$ *par continuité.*
(31) se déduit alors de

$$d(x - \lambda Ax, F) \leq |x - \lambda Ax - x_\lambda| \leq \lambda|Ax_\lambda - Ax| + \lambda|\epsilon_\lambda|.$$

Preuve 4.13 *(Démonstration de la proposition 4.5)*
Nous avons déjà vu que la condition (29) était nécessaire. Supposons maintenant (29). Alors, d'après le lemme 4.2,

$$\forall x \in F = \overline{D(A)},\ \liminf_{\lambda \longmapsto 0} \frac{1}{\lambda}d(x, R(I + \lambda A)) = 0$$

Donc d'après la proposition 4.1, A est un pseudo-générateur.
Nous allons montrer que toute bonne solution de $P(u_0)$ *est en fait une solution de (29). Soit* u_ϵ *une solution* ϵ*-approchée de* $P(u_0)$ *sur* $[0,T]$ *de u. Soit* $u_\epsilon(0) = x_0,\ u_\epsilon(t) = x_i$ *pour* $t \in]t_{i-1}, t_i]$ *avec*

$$\frac{x_i - x_{i-1}}{t_i - t_{i-1}} + Ax_i = \epsilon_i$$

Notons v_ϵ *la fonction continu linéaire par morceaux construite par les* x_i*, soit*

$$v_\epsilon = x_0,$$

$$v_\epsilon(t) = x_{i-1} + \frac{t - t_{i-1}}{t_i - t_{i-1}}(x_i - x_{i-1}) \qquad t \in]t_{i-1}, t_i]$$

Alors

$$p.p.t \quad v_\epsilon^{'}(t) + Au_\epsilon(t) = \epsilon(t)$$

où $\epsilon(t) = \epsilon_i$ *sur* $]t_{i-1}, t_i]$*.On en déduit*

$$(32) \quad \forall s, t \in [0,T] \quad v_\epsilon(t) - v_\epsilon(s) + \int_s^t Au_\epsilon(\sigma)d\sigma = \int_s^t \epsilon(\sigma)d\sigma$$

On vérifie directement que

$$\forall t \in [0,T] \quad |v_\epsilon(t) - u_\epsilon(t)| \leq \epsilon$$

Donc v_ϵ *converge aussi uniformément vers u. Par continuité,* $Au_\epsilon(\sigma) \longmapsto Au(\sigma)$*. Puisque* $u([0,T])$ *est compact et A localement borné (puisque continu),* $Au_\epsilon(\sigma)$ *reste uniformément borné pour* $\sigma \in [0,T]$ *et* ϵ *petit. Donc* $\int_s^t Au_\epsilon(\sigma)d\sigma \longmapsto \int_s^t Au(\sigma)d(\sigma)$*.*
(on peut en fait montrer que Au_ϵ *converge uniformément sur [0,T] vers* $Au(\sigma)$*).*
Enfin, par définition des solution ϵ*-approchées*

$$\left|\int_s^t \epsilon(\sigma)d(\sigma)\right| \leq \int_0^T |\epsilon(\sigma)|d(\sigma) \leq \epsilon.$$

On peut donc passer à la limite dans (32) et obtenir

$$\forall s, t \in [0,T], \qquad u(t) - u(s) + \int_s^t Au(\sigma)d(\sigma) = 0.$$

Ceci prouve (puisque $\sigma \longmapsto Au(\sigma)$ *continu) que* $u \in C^1([0,T], X)$ *et* $u^{'}(t) + Au(t) = 0$*. L'unicité résulte immédiatement de l'accrétivité de A.*
Il nous reste à montrer que A est s-accrétif. Soit $x, \hat{x} \in F$ *et* $u, \hat{u}$ *les solutions de* $P(x)$*,* $P(\hat{x})$*. Si* $w \in J(x - \hat{x})$

$$< w, Ax - A\hat{x} >= \lim_{t \longmapsto 0} < w, \frac{x - w(t)}{t} - \frac{\hat{x} - \hat{u}(t)}{t} >$$
$$= \lim_{t \longmapsto 0} \frac{1}{t}[|x - \hat{x}| - < w, u(t) - \hat{u}(t) >] \geq 0 \; puisque$$
$$| < w, u(t) - \hat{u}(t) > | \leq |u(t) - \hat{u}(t)| \leq |x - \hat{x}|$$

Remarque
En fait A est le générateur infinitésimal du semi groupe S(t) défini par $S(t)u_0 = u(t)$ où u est solution de (28).

Toujours comme conséquence de la proposition 4.2, on énonce maintenant un résultat de perturbation.

Proposition 4.6 *Soit A un opérateur un générateur accrétif de X et* $B : \overline{D(A)} \longmapsto X$ *continu tel que A+B soit accrétif. On suppose*

$$(33) \qquad \forall x \in \overline{D(A)}, \quad \liminf_{\lambda \longmapsto 0} \frac{1}{\lambda} d(x - \lambda Bx, R(I + \lambda A)) = 0.$$

Alors A+B est un pseudo-générateur.

Remarque
Si A est m-accrétif, la condition (33) est vide. On verra plus loin que, dans ce cas, A+B est même m-accrétif.

Plus généralement, s'il existe un fermé F de X tel que

$$(34) \quad \begin{cases} \overline{D(A)} \subset F \subset R(I+\lambda A) \ \ \forall \lambda > 0 \\ \forall x \in \overline{D(A)} \ \ \liminf_{\lambda \longmapsto 0} \frac{1}{\lambda} d(x-\lambda Bx, F) = 0 \end{cases}$$

alors les hypothèse de la proposition 4.6 sont satisfaites.

Preuve 4.14 *(Démonstration de la proposition 4.6)*
A nouveau, nous montrons que A+B vérifie les hypothèses de la proposition 4.2.
Soit $\lambda_n \longmapsto 0 \quad (x_n, y_n) \in A$ *et* $\epsilon_n \longmapsto 0$ *avec*

$$x - \lambda_n Bx = x_n + \lambda_n y_n + \lambda_n \epsilon_n$$

$$d(x, R(I+\lambda_n(A+B)) \leq |x - (x_n + \lambda_n y_n + \lambda_n Bx_n)|$$
$$\leq \lambda_n |Bx - Bx_n| + \lambda_n \epsilon_n$$

Puisque B est continu, il suffit de montrer que $x_n \longmapsto x$. *Or*

$$x_n = (I+\lambda_n A)^{-1}(x - \lambda_n Bx - \lambda_n \epsilon_n)$$
$$\Longrightarrow |x_n - (I+\lambda_n A)^{-1} x| \leq \lambda_n |Bx| + \lambda_n \epsilon_n \longmapsto 0.$$

Comme $x \in \overline{D(A)}$, $\lim_{n \longmapsto 0} (I+\lambda_n A)^{-1} x = x$.

Donnons un exemple d'application de la proposition 4.6.
Considérons le système d'équations aux dérivées partielles

$$(35) \quad \begin{cases} u_t + u_x + u^2 - v^2 = 0 \\ v_t - v_x + v^2 - u^2 = 0 \\ u(x,0) = u_0(x) \geq 0; \ v(x,0) = v_0(x) \geq 0 \\ \text{avec } (t,x) \in [0,\infty[\times \mathbb{R} \end{cases}$$

Posons $X = L^1(\mathbb{R}) \times L^1(\mathbb{R})$ muni de la norme $|(u,v)| = \int_{\mathbb{R}} |u| + \int_{\mathbb{R}} |v|$

$$A(u,v) = (u', -v')$$

$$D(A) = \{(u,v) \in X; \ \ u', v' \in L^1(\mathbb{R})\}.$$

On vérifie que A est m-accrétif dans $L^1(\mathbb{R})$. De plus si

$$(u,v) + \lambda A(u,v) = (f_1, f_2) \quad \lambda > 0$$

alors $0 \leq f_1 \leq M, \ 0 \leq f_2 \leq M \Longrightarrow 0 \leq u \leq M, \ 0 \leq v \leq M.$
Notons $C_M = \{(u,v) \in X; \ 0 \leq u \leq M, \ 0 \leq v \leq M\}$
Alors la restriction A_M *de* A à C_M *(ie.* $A_M \subset A, \ D(A_M) = D(A) \bigcap C_M)$
vérifie $\quad R(I+\lambda A_M) \supset C_M = \overline{D(A_M)}$
Introduisons maintenant $B_M(u,v) = (u^2 - v^2, v^2 - u^2)$ *avec* $D(B_M) = C_M$.

On vérifie que B_M est continu sur C_M. D'autre part, il est accrétif car :

$$\int sign_0(u-\hat{u})((u^2-v^2)-(\hat{u}^2-\hat{v}^2)) + \int sign_0(v-\hat{v})((v^2-u^2)-(\hat{v}^2-\hat{u}^2)) =$$
$$\int (sign_0(u-\hat{u}) - sign_0(v-\hat{v}))((u^2-\hat{u}^2)-(v^2-\hat{v}^2)).$$

Puisque

$$u, v, \hat{u}, \hat{v} \geq 0,\ sign_0(u-\hat{u}) = sign_0(u^2-\hat{u}^2),\ sign_0(v-\hat{v}) = sign_0(v^2-\hat{v}^2)$$

Comme $sign_0$ est une fonction croissante, l'intégrale ci-dessus est positive.

Montrons enfin que $d((u,v)-\lambda B_M(u,v), C_M) = 0$ pour tout $(u,v) \in C_M$.

$$(u,v) - \lambda B_M(u,v) = (u(1-\lambda u) + \lambda v^2, v(1-\lambda v) + \lambda u^2).$$

Pour $\lambda ||u||_\infty \leq 1,\ u(1-\lambda u) + \lambda v^2 \geq 0$. Donc, si $u_\lambda = u(1-\lambda u) + \lambda$, il suffit de montrer que $\int_{\mathbb{R}} |u_\lambda - min(u_\lambda, M)| = \sigma(\lambda)$ (le minimum est identique pour la deuxième composante). Ceci est égale à

$$\int_{\mathbb{R}} (u + \lambda(v^2-u^2) - M)^+ \leq \lambda \int_{[u<v]\bigcap[v^2-u^2 \geq \frac{M-u}{\lambda}]} |v^2-u^2| = \lambda\epsilon(\lambda)$$

avec $\lim\limits_{\lambda \longmapsto 0} \epsilon(\lambda)$ puisque la mesure de l'ensemble concerné tend vers 0.

Grâce à la proposition 4.5, on sait qu'on fait B_M est s-accrétif dans X et donc $A_M + B_M$ est accrétif. D'après la remarque de la proposition 4.6, $A_M + B_M$ est un pseudo-générateur. Donc, pour tout $(u_0, v_0) \in C_M$, il existe une bonne solution sur $[0.\infty[$ de (35). De plus, $(u_0, v_0) \longmapsto (u(t), v(t))$ est une contraction dans X. Comme M est arbitraire, ceci donne une solution pour tout $(u_0, v_0) \in (L^1(\mathbb{R}) \bigcap L^\infty(\mathbb{R}))^2$ *avec* $u_0, v_0 \geq 0$. Par densité de $L^1 \bigcap L^\infty$ *dans* L^1, on obtient une solution pour tout $(u_0, v_0) \in X$ *avec* $u_0, v_0 \geq 0$.

4.1 Semi-groupes linéaires : Théorème de Hille-Yoshida

Définition 4.5 *Etant donné $D \subset X$ un fermé et $(S(t))_{t\geq 0}$ un semi-groupe continu d'opérateurs de D dans D, son générateur infinitésimal est défini par*

$$D(A_s) = \{x \in D;\ \lim_{t \longmapsto 0} \frac{x - S(t)x}{t}\ existe\}$$
$$\forall x \in D(A_s) \quad A_s x = \lim_{t \longmapsto 0} \frac{x - S(t)x}{t},$$

Il se trouve qu'il y a dans le cas linéaire une correspondance bijective entre les semi-groupes de contractions de X dans X et les opérateurs m-accrétifs, linéaires et de domaine dense, cette correspondance étant défini par : "$(S(t)) \longmapsto A_s$" et la réciproque :"$A \longmapsto S(t)$" où S(t) est le semi-groupe engendré par A au sens des bonnes solutions.
Plus précisément :

Théorème 4.3 *(Hille-Yoshida)*

1. *Soit $(S(t))_{t\geq 0}$ un semi-groupe continu de contractions de X dans X. Alors son générateur infinitésimal A_s est m-accrétif, linéaire de domaine dense et s-accrétif. De plus, A_s engendre $(S(t))_{t\geq 0}$ (au sens des bonnes solutions).*

2. *Soit A m-accrétif, linéaire de domaine dense. Alors A est le générateur infinitésimal du semi-groupe qu'il engendre de X dans X.*

   De plus, sous les conditions 1) et 2).
   i) $\forall x \in D(A) \quad AS(t)x = S(t)Ax$ *(et donc* $S(t)x \in D(A)$*)*
   ii) $\forall x \in D(A)$, *si* $u :\longmapsto S(t)x$, $u \in C^1([0, \infty[, X)$ *et est solution de*

$$\begin{cases} u^{'}(t) + Au(t) = 0 \\ u(0) = x \end{cases}$$

   iii) $\forall \lambda > 0, \ \forall x \in X \quad (I + \lambda A)^{-1}x = \frac{1}{\lambda}\int_0^{\infty} \exp^{-s/\lambda} S(s)x \ dx.$

Remarque
Dans le théorie linéaire classique, le générateur infinitésimal de S(t) est défini comme la dérivée à droite en 0 de S(t), ce qui fournit $-A_s$ au lieu de A_s. Ici, nous avons en tiendrons à cette définition "non linéariste", la transposition étant clair.

Preuve 4.15 *Montrons d'abord le point 2) .*
Si A est m-accrétif de domaine dense, d'après le corolaire 4.5, il engendre un semi-groupe continu de contractions de X dans X qui est linéaires puisque

$$S(t)x = \lim_{n \longmapsto \infty} (I + \frac{t}{n}A)^{-n}x.$$

Notons $J_\lambda = (I + \lambda A)^{-1}$. *Alors,* $\forall x \in D(A), \ AJ_\lambda x = J_\lambda Ax$. *En effet,*
le relation $x = (I + \lambda A)J_\lambda x = J_\lambda + \lambda AJ_\lambda x$ *implique* $AJ_\lambda x \in D(A)$
(ici D(A) est un sous-espace vectoriel) et

$$Ax = A(J_\lambda x + \lambda AJ_\lambda x) = AJ_\lambda + \lambda AAJ_\lambda x = (I + \lambda A)(AJ_\lambda x)$$
$$\Longrightarrow J_\lambda Ax = AJ_\lambda x.$$

Soit $x \in D(A)$ *et* $\lambda > 0$; *posons* $x_i = J_\lambda^i x$; *alors*

$$0 = \frac{x_i - x_{i-1}}{\lambda} + Ax_i \Longrightarrow 0 = \frac{x_i - x_{i-1}}{\lambda} + J_\lambda^i Ax.$$

Notons v_λ *la fonction affine par morceaux telle que* $v_\lambda(i\lambda) = x_i$, *et* w_λ *la fonction en escalier définie par*

$$w_\lambda(t) = Ax_i = J_\lambda^i Ax \qquad \forall t \in](i-1)\lambda, i\lambda].$$

La relation ci-dessus devient

$$0 = v_\lambda^{'}(t) + w_\lambda(t)$$
$$\Longrightarrow 0 = v_\lambda(t) - v_\lambda(s) + \int_s^t w_\lambda(\sigma) \ d\sigma \qquad \forall t, s \geq 0.$$

Mais $v_\lambda(t)$ *converge vers S(t)x quand* λ *tend vers* 0 *et, de même, puisque* $\overline{D(A)}$, $w_\lambda(t)$ *converge vers S(t)Ax, ceci uniformément sur* $[0.T]$, $\forall T > 0$
A la limite, on obtient :

$$0 = S(t)x - S(s)x + \int_s^t S(\sigma)Ax \ d\sigma$$

Ceci prouve que $t \longmapsto S(t)x$ *est continûment dérivable et* $\frac{d}{dt}S(t)x = S(t)A$
Pour montrer que $S(t)Ax = AS(t)x$. *On remarque que si* $t \in](i-1)\lambda, i\lambda]$

$$w_\lambda(t) = J_\lambda^i Ax = AJ_\lambda^i x.$$

Quand $\lambda \longmapsto 0,\ J_\lambda^i x \longmapsto S(t)x,\ J_\lambda^i Ax \longmapsto S(t)Ax$, *mais comme* A *est fermé* $S(t)x \in D(A)$ *et* $AS(t)x = S(t)Ax$.
Puisque :

$$Ax = -\frac{d}{dx}S(t)x|_{t=0} \ = \lim_{t\longmapsto 0}\frac{x - S(t)x}{t} \ , on\ a$$

$$A \subset A_s.$$

Mais A_s *est accrétif (et même s-accrétif) par définition. Par maximalité* $A = A_s$. *On a ainsi prouvé 2) et de même coupe i) et ii).*
Montrons maintenant 1).
La relation $A_s x = \lim\limits_{t\longmapsto 0}\frac{x-S(t)x}{t}$ *définit un opérateur linéaire accrétif. Considérons*

$$x_\lambda = \frac{1}{\lambda}\int_0^\infty \exp^{-s/\lambda} S(s)x\ ds \qquad (\lambda > 0)$$

Ceci est bien défini car $s \longmapsto S(s)x$ *est continu, donc mesurable et* $||\exp^{-s/\lambda} S(s)x|| \leq \exp^{-s/\lambda}||x||$ *qui est intégrable sur* $[[0,\infty]$.
Par linéarité et continuité :

$$\frac{x_\lambda - S(t)x_\lambda}{t} = \frac{1}{\lambda t}\int_0^\infty \exp^{-s/\lambda} S(s)x\ ds - \frac{1}{\lambda t}\int_0^\infty \exp^{-s/\lambda} S(t+s)x\ ds$$

$$= \frac{1}{\lambda t}\int_0^t \exp^{-s/\lambda} S(s)x\ ds + \frac{1}{\lambda}\int_t^\infty \frac{\exp^{-s/\lambda} - \exp^{-(s-t)/\lambda}}{t} S(s)x\ ds$$

$$\downarrow_{\frac{1}{\lambda}x} \qquad\qquad \downarrow_{\frac{1}{\lambda^2}\int_0^\infty \exp^{-s/\lambda} S(s)x\ ds = -\frac{1}{\lambda}x_\lambda}$$

quand $t \longmapsto 0$ *On en déduit* $x_\lambda \in D(A_s)$ *et* $A_s x_\lambda = \frac{1}{\lambda}(x - x_\lambda)$ *soit*

$$x_\lambda + \lambda A_s x_\lambda = x$$

Ceci montre que $I + \lambda A_s$ *est surjectif et* A_s *m-accrétif, ainsi que iii). D'autre part :*

$$|x_\lambda - x| \leq \frac{1}{\lambda}\int_0^r \exp^{-s/\lambda}|S(s)x - x|ds + \frac{1}{\lambda}\int_r^\infty \exp^{-s/\lambda}|S(s)x - x|ds$$

$$\leq \sup_{0\leq s\leq r}|S(s)x - x| + 2|x|\exp^{-r/\lambda}$$

$$\Longrightarrow \limsup_{\lambda\longmapsto 0}|x_\lambda - x| \leq \sup_{0\leq s\leq r}|S(s)x - x| \quad \forall r > 0$$

Ceci montre que $\lim\limits_{\lambda\longmapsto 0} x_\lambda = x$ *et donc* $\overline{D(A_s)} = X$.

Enfin, notons $\hat{S}(t)$ *le semi-groupe engendré par* A_s *; d'après le point 2),* $\hat{v}(t) = \hat{S}(t)x$ *avec* $x \in D(A_s)$ *vérifie*

$$\hat{u} \in C^1([0,\infty[, X),\ \hat{u}(0) = 0,\ \hat{u}^{'}(t) + A_s\hat{u}(t) = 0$$

D'autre part, si $x \in D(A_s)$

$$\begin{aligned}\lim_{h\longmapsto 0}\frac{S(t+h)x-S(t)x}{h} &= \lim_{h\longmapsto 0} S(t)\frac{S(h)x-x}{h} = -S(t)A_s x\\ &= \lim_{h\longmapsto 0}\frac{S(h)-I}{h}S(t)x = -A_s S(t)x\end{aligned}$$

$$si\ t>0\ \lim_{h\longmapsto 0}\frac{S(t)x-S(t-h)x}{h} = \lim_{h\longmapsto 0} S(t-h)\left(\frac{S(h)x-x}{h}\right) = -S(t)A_s x.$$

Ceci prouve que $u(t)=S(t)x \in C^1([0,\infty[,X)$ et $u'(t)+A_s u(t)=0$ D'après l'accrétivité de A_s, il y a unicité de telles solutions, donc $S(t)x=\hat{S}(t)x\ \forall x\in D(A_s)$, par densité, $S(t)=\hat{S}(t)$.

Remarque
Les que nous avons d'utiliser sont évidement très particulières aux opérateurs linéaires, mais utilisent aussi de manier partielle la densité du domaine du générateur. En particulier, il est faux que $x \longmapsto S(t)x$ soit différentiable $\forall x \in D(A)$ si A est seulement m-accrétif linéaire. Il suffit de se référer à l'exemple du début de ce chapitre soit : $X = C([0,1])$,
$D(A)=\{u\in C^1([0,1]);\ u(0)=0\}$ *et* $Au=u'$. Nous avons vu que $S(t)u_0 \in D(A)$
(*et* $u'(t)=-AS(t)u_0$ *seulement si* $u_0\in C^1([0,1])$ *avec* $u_0(0)=u_0'(0)=0$. Il est clair que dans ce cas $\overline{D(A)}\neq X$. Par contre si $X_1=\overline{D(A)}=\{u\in C([0,1]);\ u(0)=0\}$ *alors* $S(t):X_1\longmapsto X_1$ admet d'après le théorème 4.3 un générateur infinitésimal de domaine dense dans X_1 (en fait $D(A_1)=\{u\in C^1([0,1]);\ u(0)=u'(0)=0\}$ *et* $A_1u=u'$).

Ces difficultés ne se présentent cependant pas si l'espace X est réflexif comme le montre la :

Proposition 4.7 *Soit X un espace de Banach réflexif et A un opérateur m-accrétif linéaire. Alors $\overline{D(A)}=X$.*

Preuve 4.16 *Soit $X_1=\overline{D(A)}$ et $x\in X$ et $x_\lambda=(I+\lambda A)^{-1}x$. Alors*

$$||x_\lambda||\le ||x||,\quad x_\lambda+\lambda A x_\lambda = x\ ou\ x_\lambda + A(\lambda x_\lambda)=x.$$

Puisque X est réflexif, et $||x_\lambda||\le||x||$, $\exists\lambda_n\longmapsto 0$ tq, $xx_{\lambda_n}\longmapsto x_\infty$, $A(\lambda_n x\lambda_n)\longmapsto x-x_\infty$ Mais A est fermé et donc faiblement fermé puisque linéaire. Il en résulte

$$0\in D(A)\ et\ A0 = x - x_\infty.\ \Longrightarrow x = x_\infty$$

Donc x appartient à la fermeture faible de D(A) qui coïncide avec $\overline{D(A)}$.

La correspondance biunivoque qui existe entre les semi-groupes linéaires partout définis et les opérateurs m-accrétifs linéaires de domaine dense ne s'étend malheureusement pas au cadre non-linéaire. Nous avons vu le cas des opérateurs m-accrétif qui sont associé à un semi-groupe de contraction.

Faisons le point de la situation ; d'abord en ce qui concerne la notion de générateur infinitésimal. En ce qui concerne les points positifs :

1. *Le cas linéaire en plus haut.*
2. *Si A est continu, accrétif et vérifie la condition tangentielle, il engendre un semi-groupe $S(t):\overline{D(A)}\longmapsto\overline{D(A)}$ tel que $x\longmapsto S(t)x$ soit C^1. Dans ce cas, $A_s=A$.*

3. *Si X=H espace de Hilbert, et si A est un opérateur maximal monotone, le semi-groupe engendré S(t) et tel que,* $\forall x \in D(A)$ $t \longmapsto S(t)x$ *est dérivable à droite et* $\frac{d^+}{dt}S(t)x = -A^0S(t)x$*. Dans ce cas* $A_s = A^0$*. Ceci s'étend d'ailleurs aux A m-accrétifs d'un espace de Banach X tel que X et* X^* *son dual soient uniformément convexes.*

Cependant, il existe des opérateurs m-accrétifs de domaine dense, dont le semi-groupe engendré est tel que $D(A_s) = \varnothing$.

Etant donné un semi-groupe de contractions, il est donc désespéré d'utiliser son générateur infinitésimal pour lui associer un opérateur m-accrétif qui l'engendre. Les résultats les plus positif concernant ce problème sont des conséquences de le proposition suivante.

Proposition 4.8 *Soit X un espace de Banach, C un convexe fermé de X et* $S(t) : C \longmapsto C$ *un semi-groupe continu de contraction. On pose*

$$\forall \lambda > 0,\ t > 0\ \ J_{\lambda,t} = \left(I + \lambda \frac{I - S(t)}{t}\right)^{-1}.$$

On suppose qu'il existe une suite $t_n \longmapsto 0$ *telle que.*

$$(36) \quad \forall x \in C,\ \forall \lambda > 0,\ \lim_{n \longmapsto \infty} J_{\lambda,t_n} x \text{ existe.}$$

Alors, si on note $J_\lambda x$ *cette limite, l'opérateur*

$$(37) \quad A = \{\left(J_\lambda x, \frac{x - J_\lambda x}{\lambda}\right);\ \lambda > 0,\ x \in C\}$$

est accrétif et vérifie $R(I + \lambda A) = C$, $\overline{D(A)} = C$*. De plus, A engendre S(t) au sens des bonnes solutions (en fait* $S(t)x = \lim_{n \longmapsto \infty} ((I + \frac{t}{n}A)^{-n}x, \quad \forall x \in C)$*.*

Cette proposition a été établie par Crandall-Liggelt auxquels nous renvoyons pour une démonstration. Notons que l'accrétivité de A et $R(I + \lambda A) = c$ sont immédiats. En effet, puisque S(t) est une contraction,$\frac{I-S(t)}{t}$ est accrétif et donc $J_{\lambda,t}$ est une contraction et vérifie de plus l'équation résolvante, (voir proposition 2.3, chapitre 2). Il s'ensuit que J_λ est une famille de contraction vérifiant l'équation résolvante. D'autre part, puisque $S(t)c \subset C$ on vérifie que $J_{\lambda,t}c \subset C$ et donc $J_\lambda c \subset C$.
Maintenant

$$u + \sigma A u = v \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{r} \exists \lambda > 0,\ x \in C \\ u = J_\lambda x \\ J_\lambda x + \sigma \frac{x - J_\lambda x}{\lambda} = v \Longrightarrow \frac{\sigma}{\lambda} x + \frac{\lambda - \sigma}{\lambda} J_\lambda x = v. \end{array} \right.$$

D'après l'équation résolvante.

$$\Longrightarrow J_\sigma v = J_\sigma \left(\frac{\sigma}{\lambda} x + \frac{\lambda - \sigma}{\lambda} J_\lambda x\right) = J_\lambda x = u.$$

D'autre part, si $u = J_\sigma v$ *avec* $v \in C,\ u \in D(A)$ *et*

$$v = J_\sigma v + \sigma \frac{v - J_\sigma v}{\sigma} \in u + \sigma A u.$$

Ainsi

$$\left\{\begin{array}{r} u+\sigma Au=v \\ u,v\in C \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{r} u=J_\sigma v \\ u,v\in C. \end{array}\right.$$

Donc A est accrétif et $R(I+\lambda A)=C$.

. Si X est un espace de Hilbert, et $S(t)\ :\ C\longmapsto C$ un semi-groupe continu de contractions (C convexe fermé), alors

$$\forall\lambda>0,\ \forall x\in C\quad \lim_{t\longmapsto 0} J_{\lambda,t}x\ existe;$$

d'où l'existence d'un opérateur maximal monotone engendrent S(t).

. Si X est de dimension finie, on peut montrer que l'hypothèse (36) est satisfaite également.

. Si X est de dimension 2, alors

$$\forall\lambda>0,\ \forall x\in C,\ \lim_{t\longmapsto 0} J_{\lambda,t}x\ existe.$$

Mais si X est de dimension 3, il existe des semi-groupes continues de contractions définis sur X tout entier tel que,
$\lim\limits_{t\longmapsto 0} J_{\lambda,t}x$ n'existe pas toujours (bien qu'il existe une suite (t_n pour laquelle il y a convergence).

Tous ces résultats partiels soulignent la compléxité du problème. On peut penser que l'approche à l'aide de $J_{\lambda,t}$ n'est pas adéquate. On réfléchira alors à l'exemple exhibé par Crandall-Ligget d'un semi-groupe partout défini sur un espace de dimension 2 engendré par 2 opérateurs m-accrétifs différents, soit :

A,B m-accrétifs, A$\neq$ B

$$\forall x\in X,\quad S(t)x=\lim_{n\longmapsto\infty}\left(I+\frac{t}{n}A\right)^{-n}x=\lim_{n\longmapsto\infty}\left(I+\frac{t}{n}B\right)^{-n}x.$$

Nous allons terminer ce chapitre par quelques résultats concernant l'équation non homogène

$$P(u_0,f):\frac{du}{dt}+Au\ni f(t),\quad u(0)=u_0.$$

Énonçons immédiatement un résultat essentiel.

Théorème 4.4 *Soit A m-accrétif dans X et* $f\in L^1(0,T;X)$. *Alors,* $\forall u_0\in\overline{D(A)}$, *il existe une bonne solution de*

$$\frac{du}{dt}+Au\ni f,\ u(0)=u_0$$

Preuve 4.17 *1^{ere} étape : f est constante :* $f(t)\equiv z\quad\forall t\in[0,T]$.
Puisque A est m-accrétif, l'opérateur A_z *défini par*

$$A_z=\{(x,y-z),\ (x,y)\in A\}$$

est également m-accrétif. Donc pour tout $u_0\in\overline{D(A_s)}=\overline{D(A)}$, *il existe une bonne solution de*

$$\frac{du}{dt}+A_z u\ni 0,\ u(0)=u_0$$

On vérifie immédiatement que u est bonne solution de

$$\frac{du}{dt} + A_z u \ni z,\ \ u(0) = u_0$$

. D'autre part, si $\hat{u}$ est la bonne solution de $P(\hat{u}, \hat{z})$, on a :

$$(38) \qquad |u(t) - \hat{u}(t)| \leq |u_0 - \hat{u}_0| + t|z - \hat{z}|.$$

En effet, $u(t) = \lim\limits_{n \longmapsto \infty} \left(I + \frac{t}{n} A_z\right)^{-n} u_0$. *Or*

$$\begin{aligned} x = (I + \lambda A_z)^{-1} y &\Longleftrightarrow x + \lambda A x - \lambda z \ni y. \\ &\Longleftrightarrow x = (I + \lambda A)^{-1}(y + \lambda z). \end{aligned}$$

Donc

$$\left|(I + \lambda A_z)^{-1} u_0 - (I + \lambda A_z)^{-1} \hat{u}_0\right| \leq |y_0 - \hat{y}_0| + \lambda |z - \hat{z}|$$

et par récurrence

$$|(I + \frac{t}{n} A_z)^{-n} u_0 - (I + \frac{t}{n} A_z)^{-n} \hat{u}_0| \leq |u_0 - \hat{u}_0| + t|z - \hat{z}|.$$

Ce qui donne l'estimation cherché par passage à la limite.
2^eme étape : f est en escalier : $f(t) = z_i \ \ \forall t \in]t_{i-1}, t_i]$ *où* $0 = t_0 < t_1 < ...t_N = T$. *On remarque que la fonction* $u \in C([0, T]; X)$ *défini par*

$$u(t) = \begin{cases} u_0 & pour\ t = 0 \\ u_i(t) & pour\ t \in]t_{i-1}, t_i] \end{cases}$$

où $u_i(t)$ est la bonne solution sur $[t_{i-1}, t_i]$ de

$$\begin{cases} \frac{du_i(t)}{dt} + A u_i(t) \ni z_i \\ u_i(t_{i-1}) = u_{i-1}(t_{i-1}) \quad \forall i = 1, ..N \end{cases}$$

est en fait bonne solution sur [0,T] de

$$\frac{du}{dt} + Au \ni f, \qquad u(0) = u_0.$$

De plus, d'après (38), on a (avec des notations évidentes)

$$\forall i = 1, ...N, \quad \forall t \in]t_{i-1}, t_i].$$
$$|u(t) - \hat{u}(t)| \leq |u_i(t_{i-1}) - \hat{u}_i(t_{i-1})| + (t - t_{i-1})|z_i - \hat{z}_i|$$

soit

$$|u(t) - \hat{u}(t)| \leq |u(t_{i-1}) - \hat{u}(t_{i-1})| + \int_{t_{i-1}}^{t} |f(\sigma) - \hat{f}(\sigma)| d\sigma$$

et donc.

$$(39) \quad \forall t \in [0, T] \ \ |u(t) - \hat{u}(t)| \leq |u_0 - \hat{u}_0| + \int_0^t |f(\sigma) - \hat{f}(\sigma)| d\sigma.$$

3ème étape : *$f \in L^1(0,T;X)$, on utilise le fait qu'il existe une suite de fonctions en escalier f_n convergent vers f dans $L^1(0,T;X)$. Pour tout n, il existe u_n bonne solution de*

$$\frac{du_n(t)}{dt} + Au_n(t) \ni f_n(t), \quad u_n(0) = u_0$$

et d'après (39), on a :

$$\forall t \in [0,T], \quad |u_n(t) - u_p(t)| \leq \int_0^T |f_n(\sigma) - f_p(\sigma)| d\sigma.$$

Ceci prouve que u_n est de Cauchy dans $C([0,T];X)$ et donc converge vers $u \in C([0,T];X)$. D'après les propriétés générales des bonnes solutions (voir chapitre suivant), u est bonne solution de $P(u_0,f)$.

Remarque

A ce stade, on ne sait toujours pas s'il y a unicité des bonnes solutions de $P(u_0,f))$ si $f \in L^1(0,T;X)$.
Cette propriété sera établie plus loin.

Passant à la limite dans (39), on voit que les bonnes solutions u, $\hat{u}$ *de* $P(u_0,f)$ *et* $P(\hat{u}_0,\hat{f})$ que nous obtenons vérifiant :

$$(40) \qquad |u(t) - \hat{u}(t)| \leq |u_0 - \hat{u}_0| + \int_0^t |f(\sigma) - \hat{f}(\sigma)| d\sigma.$$

CHAPITRE 5

SUR L'ÉQUATION $U_T = \Delta\varphi(U)$

Nous allons appliquer la théorie que nous avons développé aux équations d'évolution qui peuvent s'écrire sous la forme

$$\frac{du}{dt} + A\varphi(u) = 0$$

ou $\varphi : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ est une fonction croissante et A un opérateur accrétif dans $L^1(\Omega)$. Nous avons intéressons surtout au cas où $A = -\Delta$ *dans* $L^1(\mathbb{R}^N)$ ou dans $L^1(\Omega)$, Ω ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^N$, avec conditions au bord de type Dirichlet ou Neumann. Les techniques que nous utilisons se généralisent aux cas d'opérateurs A (linéaires ou non) satisfaisant certaines propriétés de type principe de maximum, par exemple :

$$(1) \quad Au = -\sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{i,j}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) + \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}(b_i(x)u) + c(x)u.$$

avec la condition d'ellipticité

$$\forall \xi = (\xi_1, ..., \xi_N), \ \sum_{i,j} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \alpha(\sum_i \xi_i^2), \quad \alpha > 0.$$

où $A = -\Delta$ avec condition non linéaires au bord (du type $-\frac{\partial u}{\partial n} \in \beta(u)$, β *monotone*), etc,..,

Le modèle type est l'équation

$$(2) \quad \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta(u^m) = 0$$

où m est un réel strictement positif (pour des solutions qui ne sont pas positives, on remplace u^m par $u|u|^{m-1}$). Cette équation est connue sous la nom d'équation des milieux poreux.
Elle est, en effet, un modèle mathématique pour représenter la diffusion d'un gaz dans un milieu poreux homogène. Elle est obtenue de la manière suivante :

Considérons un gaz diffusant dans un milieu poreux homogène.
On note u sa densité ($u = u(t,x)$, t variable de temps, x variable d'espace), $p = p(t,x)$ sa pression, $\vec{v} = \vec{v}(t,x)$ sa vitesse.
(α) loi de conservation de la masse $fu_t + div(u\vec{v}) = 0$

f est la constante de porosité du milieu= fraction de volume disponible pour le gaz.

(β) loi de Darcy $\vec{v} = -\frac{k}{\mu}\nabla p$
k=constante de perméabilité du milieu.
μ=constante de viscosité du gaz

(γ) l'équation d'état $u = u_0\rho^\gamma$.
u_0 *et* γ sont des constantes strictement positives avec $\gamma \leq 1$. Cette dernière équation est caractéristique de l'état gazeux du fluide considéré

Éliminant $\vec{v}$ *et* ρ dans $(\alpha), (\beta), (\gamma)$, on obtient

$$fu_y - \frac{k}{\mu u_0^{1/\gamma}} div(u\nabla u^{\frac{1}{\gamma}}) = 0.$$

Remarquant que $u\nabla u^{\frac{1}{\gamma}} = \frac{1}{\gamma+1}\nabla\left(u^{1+\frac{1}{\gamma}}\right)$, ceci s'écrit encore

$$\begin{cases} u_t - K\Delta u^m = 0 \\ m = 1 + \frac{1}{\gamma}, \quad K = \frac{k}{f(\gamma+1)\mu u_0^{1/\gamma}}. \end{cases}$$

Effectuant un changement de temps (on pose $v(t) = u(\frac{t}{K})$) on se ramène à l'équation initiale.

Cette équation sert en fait de modèle pour de nombreux autres phénomènes. Citons-en quelques-uns :

Diffusion spatiale de populations dans ce modèle, u est la densité de population. On fait l'hypothèse que les individus ont tendance à se déplacer des régions les plus peuplées vers les régions le moins peuplées. On a l'équation suivante :

$$\vec{v} = -k(u)\nabla u.$$

où k est une fonction positive de u. Ceci joint à l'équation de conservation de la population

$$u_t + Kdiv(u\vec{v}) = 0, \quad K\ constante.$$

fournit

$$u_t - Kdiv(uk(u)\nabla u) = 0$$

Posant

$$\varphi(r) = \int_0^r sk(s)ds, \quad on\ a\ donc$$

$$u_t - Kdiv(\nabla\varphi(u)) = u_t - K\Delta\varphi(u) = 0$$

et φ est une fonction croissante qui est une puissance si $k(u)$ est une puissance.

Equation non linéaire de la chaleur : l'évolution de la température $u(x,t)$ d'un corps est régi par

$$\frac{\partial u}{\varphi t} - div(k(u)\nabla(u)) = 0$$

où $k(u)$ est la conductivité du milieu. Si celle-ci est indépendante de u, on obtient l'équation linéaire de la chaleur classique. Le plus souvent, en particulier pour de hautes températures, k dépend effectivement de u. Posant alors

$$\varphi(r) = \int_0^r k(s)ds,$$

l'équation devient

$$u_t - \Delta\varphi(u) = 0$$

où φ est croissante, car k est évidemment positive.
La même équation est encore un modèle utilisé physique des plasmas ; u est alors une densité d'ions .
Problème de Stéfan : celui-ci consiste à séparer la température d'un corps à 2 phases liquide-solide (ex un glaçon dans un verre de Whisky).

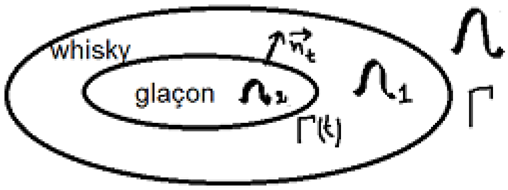

FIGURE 5.1 – Représentation schématique.

Il s'agit d'un problème à frontière libre : la surface de séparation $\Gamma(t)$ entre les deux phases varie, en effet, avec le temps. Soit $u(x, t)$ la température en chaque point x à l'instant t. Notons Ω_1 la région "whisky", Ω_2 la région "glace". Pour "normaliser" les températures, on supposera que

$u(x, t) > 0$ *dans* Ω_1 (on note u_1)
$u(x, t) < 0$ *dans* Ω_2 (on note u_2)
$u(x, t) = 0$ *sur* $\Gamma(t)$.

Si k_1 (*resp* k_2) est la conductivité du whisky (resp de la glace), on a, en les supposant constantes

$$(3) \quad u_t - k_1\Delta u = 0 \quad dans\ \Omega_1.$$

$$(4) \quad u_t - k_2\Delta u = 0 \quad dans\ \Omega_2.$$

D'autre part, à la frontière il y a échange de chaleur et perte de chaleur par fusion de la glace (ou inversement). On désigne par $\vec{n}_t$ la normale à $\Gamma(t)$ dirigée vers Ω_1. La balance d'énergie à la frontière s'écrit

$$(5) \quad -k_1\nabla u_1.\vec{n}_t + k_2\nabla u_2.\vec{n}_t = bV_{n_t}$$

où V_{n_t} est la composante de la vitesse de déplacement de l'interface dans la direction $\vec{n}_t$.
Posons alors

$$v = \begin{cases} k_1u_1\ sur\ \Omega_1 \times (0, T) \quad (soit\ v_1) \\ 0 \quad sur\ S = U_t\Gamma(t) \\ k_2u_2\ sur\ \Omega_2 \times (0, T). \quad (soit\ v_2). \end{cases}$$

Nous allons montrer (en admettant que v est suffisamment régulière et que la frontière libre $S = U_t\Gamma(t)$ est de mesure nulle dans $(0,T)\times\mathbb{R}^3$, que la solution du problème précédent est aussi solution de

$$(6) \quad \frac{\partial}{\partial t}\beta(v) - \Delta v = 0 \quad dans\ D^{'}(]0,T[\times\Omega)$$

(donc en posant $w = \beta v \Longleftrightarrow v = \varphi(w)$, on est ramené à l'équation $w_t - \Delta\varphi(w) = 0$). Pour montrer (6), il s'agit de montrer que, $\forall\varphi \in C_0^\infty(]0,T[\times\Omega)$

$$(6)^{'} \quad \left\langle \frac{\partial\varphi}{\partial t}, \beta(v) \right\rangle_{D\times D'} + < \Delta\varphi, v >_{D\times D'} = 0.$$

On a, en supposant que les données sont nulles sur le bord Γ :

$$\left\langle \frac{\partial\varphi}{\partial t}, \beta v \right\rangle = \int\int_{(0,T)\times\Omega_1} \frac{\partial\varphi}{\partial t}\beta v_1 + \int\int_{(0,T)\times\Omega_2} \frac{\partial\varphi}{\partial t}\beta v_2.$$

$$= \int_S b\varphi\cos(\vec{N},t) - \int\int_{(0,T)\times\Omega_1} \varphi\frac{\partial}{\partial t}\beta v_1 - \int\int_{(0,T)\times\Omega_2} \varphi\frac{\partial}{\partial t}\beta v_2,$$

où $\vec{N}$ est la normale à S dirigée vers $\Omega_1\times(0,T)$

$$< \Delta\varphi, v >= \int_0^T\int_{\Gamma(t)} \varphi\nabla v_1.\vec{n}_t + \int\int_{(0,T)\times\Omega_1} \Delta v_1.\varphi - \int_0^T\int_{\Gamma(t)} \varphi\nabla v_2\vec{n}_t + \int\int_{(0,T)\times\Omega_2} \varphi\Delta v_2.\varphi.$$

Utilisant (3) et (4), on obtient que

$$\left\langle \frac{\partial\varphi}{\partial t}, \beta v \right\rangle + < \Delta\varphi, v >= \int_0^T\int_{\Gamma(t)} \varphi(k_1\nabla u_1\vec{n}_t - k_2\nabla u_2\vec{n}_k) + \int_S b\varphi\cos(\vec{N},t)$$

Mais cette dernière intégrale est encore égale à

$$\int_0^T\int_{\Gamma(t)} b\varphi V_{n_t}.$$

Utilisant (5), on obtient $(6^{'})$ et donc (6).
Revenons à l'équation : (E_m) $\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u^m = 0$ avec

$\alpha)$ Ω un ouvert borné de frontière régulière.

Avant d'appliquer la théorie des emi-groupes non linéaires, nous allons faire une recherche systématique de solutions particulières

1) Solution séparables : $u(t,x) = \alpha(t)\psi(x)$ est solution ssi

$$\alpha^{'}\psi - \alpha^m\Delta\psi^m = 0$$

$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{r} \alpha^{'} = k\alpha^m \\ k\psi - \Delta\psi^m = 0, \quad \psi \geq 0. \end{array} \right.$$

Si $k \geq 0$, la deuxième équation n'admet que la solution triviale dans les deux cas $\alpha)$ *et* $\beta)$. Nous allons donc supposer $k = -\mu > 0$ soit à résoudre

$$(8) \quad \alpha^{'} + \mu\alpha^m = 0$$

et

$$(9) \quad \begin{cases} \Delta\psi^m + \mu\psi = 0 \; dans \; \Omega, \quad \psi \geq 0 \\ \psi|_{\partial r} = 0 \end{cases}$$

ou

$$(10) \quad \Delta\psi^m + \mu\psi = 0 \; dans \; \mathbb{R}^N, \quad \psi \geq 0.$$

La solution de (8) est de la forme $\alpha^{1-m}(t) = K + (m-1)\mu t \; si \; m \neq 1$, soit

$$(11) \quad \alpha(t) = \frac{1}{(K + (m-1)\mu t)^{1/(m-1)}} \quad si \; m > 1$$

$$(12) \quad \alpha(t) = \{(K - (1-m)\mu t)^+\}^{1/(1-m)} \quad si \; m < 1.$$

La résolution de (9), (10) est beaucoup plus délicate. Il apparaît une valeur critique (N-2)/(N+2). Ainsi, si $N \geq 3$:

si m>(N-2)/(N+2), (10) admet une solution

si m≤ (N-2)/(N+2), (9) admet une solution.

On remarque que lorsque $0 < m < 1$, (et $m < (N-2)/(N+2)$ dans le cas (9) et $m > (N-2)/(N+2)$ dans le cas (10)), il existe une solution de $\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u^m = 0$.

Elle s'annule donc identiquement en un temps fini. On peut montrer que ce phénomène se produit systématiquement pour des données initiales $u_0 \in L^2$ dés que

$0 < m < 1$ dans le cas α)

$0 < m < (N-2)^+/N$ dans le cas β).

2) Solutions invariantes par similarité : on se place dans le cas $\mathbb{R}^N$. Soit u solution de (E_m) et

$$u_\lambda(t,x) = \lambda^\alpha u(\lambda^\beta t, \lambda x)$$

Alors

$$u_{\lambda_t}(t,x) = \lambda^{\alpha+\beta} u_t(\lambda^\beta t, \lambda x)$$

$$\Delta u_\lambda^m(t,x) = \lambda^{\alpha m+2} \Delta u^m(\lambda^\beta t, \lambda x).$$

Ainsi u_λ est aussi solution de (E_m) si

$$(13) \qquad \alpha + \beta = \alpha m + 2$$

Cherchons des solutions invariantes par cette transformation soit

$$(14) \quad \forall\lambda > 0, \; \forall t > 0, \; \lambda^\alpha u(\lambda^\beta t, \lambda x) = u(t,x)$$

$$(15) \quad \lambda^\alpha u(0, \lambda x) = u(0,x)$$

Posons $t = 1, \; \tau = \lambda^\beta, \; \lambda x = \xi$; ceci devient

$$(16) \quad \forall\tau > 0, \; \forall\xi \in \mathbb{R}^N \quad \tau^{\alpha/\beta} u(\tau, \xi) = u(1, \xi\tau^{-1/\beta}).$$

Nous sommes ainsi conduits à chercher des solutions particulière de la forme

$$u(t,x) = t^{-\alpha/\beta} \psi(xt^{-1/\beta})$$

où $\psi : \mathbb{R}^N \longmapsto \mathbb{R}$. Soit à résoudre

$$\frac{-\alpha}{\beta} t^{-1-\alpha/\beta}\psi - \sum_i \frac{1}{\beta} x_i t^{-1-1/\beta} t^{-\alpha\beta}\psi_{\tau_i} = t^{-\alpha m/\beta} t^{-2/\beta}.\Delta\psi^m$$

Posant $\xi = xt^{-1/\beta}$ et utilisant (13), ceci équivalent à

$$(17) \quad \frac{-\alpha}{\beta}\psi - \sum_i \frac{1}{\beta}\ \xi_i\ \psi_{\tau_i} = \Delta\psi^m$$

Cherchons des solutions de cette équation sous la forme

$$\psi(\xi) = k(a^2 - |\xi|^2)^\gamma \ \ \textit{pour}\ |\xi| \le a,\ a > 0$$

L'équation (17) devient

$$\frac{-\alpha}{\beta} k(a^2 - |\xi|^2)^\gamma + \frac{2k\gamma}{\beta}|\xi|^2(a^2 - |\xi|^2)^{\gamma-1} = -2\gamma^m N k^m (a^2 - |\xi|^2)^{\gamma^m - 1} + 4\gamma^m k^m(\gamma^{m-1})|\xi|^2(a^2 - |\xi|^2)^{\gamma^m - 2}$$

soit encore

$$\frac{k}{\beta}(a^2 - |\xi|^2)^{\gamma-1}[2\gamma|\xi|^2 - \alpha(a^2 - |\xi|^2)] = (a^2 - |\xi|^2)^{\gamma^m - 2} 2k^m\gamma^m[2(\gamma^m - 1)|\xi|^2 - N(a^2 - |\xi|^2)]$$

Regardant le comportement en $a = |\xi|$, on a nécessairement $\gamma - 1 = \gamma^m - 2$, soit $\gamma = 1/(m-1)$. Après simplification, on identifie les coefficients du polynôme restent pour obtenir

$$\alpha = N$$
$$2k^{m-1}\frac{m}{m-1}N\beta = 1$$

ce qui, joint à $\alpha + \beta = \alpha m + 2$, fournit la solution

$$(18) \quad u(t,x) = \frac{1}{t^{\lambda_N}}\left\{\left(b^2 - \frac{(m-1)\lambda}{2mN}\frac{|x|^2}{t^{2\lambda}}\right)^+\right\}^{1/(m-1)}$$

où $\lambda = \frac{1}{\beta} = \frac{1}{N(m-1)+2}$ et b une constante >0 arbitraire (reliée à a ci-dessus par $b^2 = k^{m-1}a^2$). Ceci correspond à une solution effective sur $\mathbb{R}^N$ lorsque $m \neq 1$ *et* $\lambda > 0$, soit

$$N(m-1) + 2 > 0 \Longleftrightarrow m > \frac{(N-2)^+}{N}.$$

On remarque à nouveau la différence entre les cas m>1 et m<1.

Si $\frac{(N-2)^+}{N} < m < 1$, la solution (18) est strictement positive sur $\mathbb{R}^N$ pour tout t>0.

Si $m > 1$, u(t) est à support dans $S_t = \{x;\ |x| \le Ct^\lambda\}$, où $C^2 = \frac{b^2 2mN}{(m-1)\lambda}$. Ce support se réduit donc jusqu'à tendre vers l'origine lorsque $t \longmapsto 0$.

Ainsi (18) correspond à la solution fondamentale de l'équation $\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u^m = 0$. On vérifie que lorsque $m \longmapsto 1$, elle converge vers la solution fondamentale de l'équation de la chaleur

$$u_1(t) = \frac{1}{(4\pi t)^{N/2}}\exp(-|x|^2/4t)$$

A noter un phénomène nouveau dans la diffusion non linéaire si m>1 : la vitesse de propagation est fini.

Plus précisément, si $m = 1$ *et* $u(0) \geq 0$ à support compact, $u(t,x) > 0$ $\forall x \in \mathbb{R}^N$ *et* $\forall t > 0$. La solution devient donc immédiatement strictement positive partout.
La solution (18) montre que ce n'est pas le cas si m>1.
Le support de la solution croît, mais de manière contrôlable.

Remarque
Les solutions particulières que nous venons d'exhiber sont très utiles dans l'étude du problème général à donnée initiale arbitraire dans $L^1(\Omega)$. On montre par exemple que le comportement asymptotique (quand $t \longmapsto \infty$) que toute solution est analogue à celui de la solution particulière (18).

D'autre part, toute estimation établie sur les solutions quelconque peut être vérifiée explicitement sur ces solutions particulières : on peut ainsi en prouver l'optimalité.

On désigne par β un graphe maximal monotone de $\mathbb{R}$ tel que $0 \in \beta$.
Nous allons montrer que l'opérateur "$-\Delta\beta$" avec un domaine convenable est m-accrétif dans $L^1(\Omega)$ et vérifie des propriétés de type principe du maximum.

Théorème 5.1 *Soit Ω un espace mesuré et A un opérateur de $L^1(\Omega)$ vérifiant*
(I) A est linéaire m-accrétif de domaine dense
(II) (Principe de maximum)

$$\forall f \in L^1(\Omega),\ \forall \lambda > 0,\quad \sup_\Omega (I + \lambda A)^{-1} f \leq \max(0, \sup_\Omega f)$$

(III) (Continuité de A^{-1})

$$\alpha|u|_1 \leq |Au|_1 \quad \forall u \in D(A).$$

Alors, pour tout $f \in L^1(\Omega)$, il existe $u \in D(A)$ unique tel que

$$(19) \quad Au(x) + \beta u(x) \ni f(x) \ \ p.p.x$$

De plus, si $w \in L^1(\Omega)$ avec $w(x) \in \beta u(x)$ p.p.x et $Au + w = f$,

$$(20) \quad |(w - \hat{w})^+|_1 \leq |(f - \hat{f})^+|_1$$

et, pour tout $j : \mathbb{R} \longmapsto [0, \infty]$ convexe, s.c.i. avec $j(0) = \min j = 0$

$$(21) \quad \int_\Omega j(w) \leq \int_\Omega j(f)$$

En particulier, $\forall 1 \leq p \leq \infty$

$$(22) \quad |w|_p \leq |f|_p.$$

Corollaire 5.1 *Soit γ un graphe maximal monotone avec $\gamma(0) \ni 0$ et A vérifiant les hypothèses du théorème 5.1. Alors $A\gamma$ est m-accrétif dans $L^1(\Omega)$. De plus, si $u,\ \hat{u},\ f,\ \hat{f} \in L^1(\Omega)$ avec*

$$u + A\gamma u \ni f, \quad \hat{u} + A\gamma\hat{u} \ni \hat{f}$$
$$(23) \quad |(u - \hat{u})^+|_1 \leq |(f - \hat{f})^+|_1.$$
$$(24) \quad f \geq 0 \Longrightarrow u \geq 0.$$
$$(25) \quad |u|_p \leq |f|_p \quad \forall 1 \leq p \leq \infty.$$

Preuve 5.1 *Nous avons vue au paragraphe 1 que* $A\gamma$ *était accrétif dans* $L^1(\Omega)$. *Reste à résoudre*

$$(26) \quad u + A\gamma u \ni f \ pour \ f \in L^1(\Omega).$$

Pour $\beta = \gamma^{-1}$. *D'après le théorème 5.1, il existe* $v \in L^1(\Omega)$ *solution de*

$$\beta v(x) + Av(x) \ni f(x).$$

Soit $u(x) \in \beta v(x)$ *tel que* $u + Av \ni f$. *Alors* $v(x) \in \gamma u(x)$ *p.p.x*
Donc u est solution de (26). On obtient (23), (24), (25) à partir de (20), (21), (22).

Corollaire 5.2 *Soit* γ *un graphe maximal monotone avec* $\gamma(0) \ni 0$ *et* A *vérifiant les hypothèses du théorème 5.1. Alors, pour* $u_0 \in \overline{D(A)}$ *et* $f \in L^1(0,T;L^1(\Omega))$, *il existe une unique bonne solution de*

$$\frac{du}{dt} + A\gamma(u) \ni f, \quad u(0) = u_0.$$

De plus,

$$(27) \quad (u_0 \leq \hat{u}_0, \ f \leq \hat{f}) \Longrightarrow (u(t) \leq \hat{u}(t) \quad \forall t \in [0,T])$$

$$(28) \quad |u(t)|_p \leq |u_0|_p + \int_0^t |f(\sigma)|_p d\sigma \quad \forall 1 \leq p \leq \infty.$$

Preuve 5.2 *On applique la théorie abstraite. Si* $f \equiv 0$, $u(t) = \lim\limits_{n \longmapsto \infty} (I + \frac{t}{n} A\gamma)^{-1} u_0$. *Les propriétés (23), (24), (25) se transmettent donc à* $u(t)$, $\hat{u}(t)$ *(conséquence du lemme de Fatou, par exemple). On passe ensuite à* $f(t) \equiv z$ *et on utilise*

$$u(t) = \lim_{n \longmapsto \infty} (I + \frac{t}{n} A_z)^{-n} u_0, \quad A_z = A - z.$$

Mais

$$(I + \lambda A_z)^{-1} u_0 = (I + \lambda A)^{-1}(u_0 + \lambda z);$$

donc

$$|(I + \lambda A_z)^{-1} u_0|_p \leq |u_0| + \lambda |z|_p.$$

En vue de la démonstration du théorème 5.1, nous allons maintenant donner des énoncés équivalents su principe du maximum énoncé en (II). La proposition qui suit présente en fait un intérêt propre.

Proposition 5.1 *Soit* A *un opérateur linéaire m-accrétif de domaine dense dans* $L^1(\Omega)$.
Les assertions suivantes sont équivalents

$$i) \ \forall \lambda > 0, \ \forall f \in L^1(\Omega), \quad \sup_\Omega (I + \lambda A)^{-1} f \leq \max(0, \sup_\Omega f)$$

$$ii) \ \forall p \in C^1(\mathbb{R}) \bigcap L^\infty(\mathbb{R}) \ avec \ p(0) = 0, \ p' \geq 0.$$

$$\forall u \in D(A) \quad \int_\Omega A \ u \ p(u) \geq 0.$$

$$iii) \ \forall \gamma \ graphe \ maximal \ monotone \ avec \ 0 \in \gamma(0), \ \forall u \in D(A)$$

$$\forall w \in \gamma u, \ avec \ u, Au \in L^p(\Omega), \ w \in L^{p'}(\Omega) \ et \ 1/p + 1/p' = 1:$$

$$\int_\Omega A\ u\ w \geq 0.$$

$$iv)\ \forall j : \mathbb{R} \longmapsto [0,\infty],\ convexe\ s.c.i\ avec\ j(0) = 0 = \min j$$

$$\int_\Omega j((I+\lambda A)^{-1}f) \leq \int_\Omega j(f)$$

Remarque
A est alors accrétif dans tous les espaces $L^p,\ 1 \leq p \leq \infty$.
L'argument essentiel dans la démonstration de cette proposition est le lemme d'"interpolation" suivant

Lemme 5.1 *Soit $T : L^1(\Omega) \longmapsto L^1(\Omega)$ une contraction telle que*

$$(29) \qquad \min(0, \inf_\Omega u) \leq Tu(x) \leq \max(0, \sup_\Omega u)$$

Alors, pour tout $j : \mathbb{R} \longmapsto [0,\infty]$ convexe, s.c.i :

$$(30) \qquad \int_\Omega j(Tu(x))dx \leq \int_\Omega j(u(x))dx.$$

Remarque :
Ce résultat est à rapprocher de celui affirmant que si T est une contraction de $L^1(\Omega)$ *dans* $L^1(\Omega)$ telle que

$$|Tu - T\hat{u}|_\infty \leq |u - \hat{u}|_\infty.$$

Alors

$$||Tu - T\hat{u}|_p \leq |u - \hat{u}|_p.$$

En particulier, si A_0 est un opérateur de $L^1 \cap L^\infty$ acrrétif dans L^1 *et* L^∞, il est accrétif dans tous les L^p.

Preuve 5.3 *(Démonstration du lemme 5.1)*
Considérons d'abord les fonctions convexes particulières

$$j_1(r) = (r-t)^+, \quad j_2(r) = (-r-t)^+, \quad t \geq 0$$

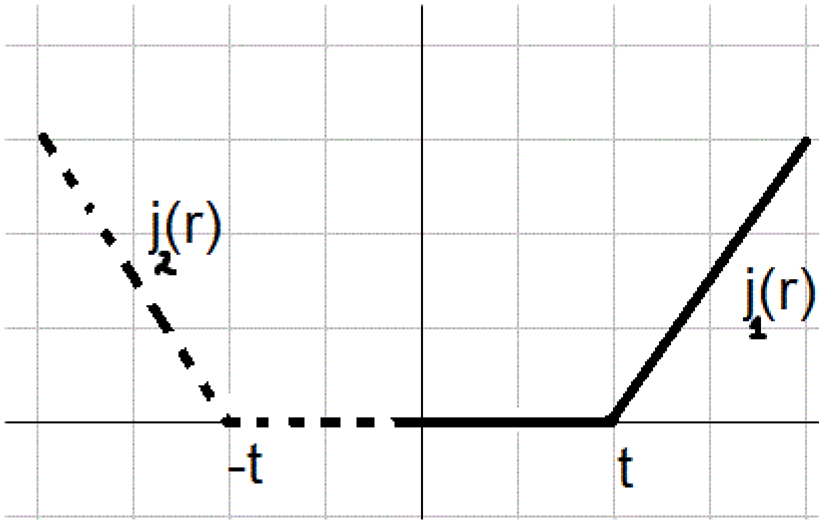

FIGURE 5.2 – $j_1(r)$ et $j_2(r)$.

Considérons $v(x) = \min(u(x), t)$*. On a* $Tv \leq t$*. Donc*

$$(Tu - t)^+ \leq (Tu - Tv)^+ \leq |Tu - Tv| \quad p.p$$

$$\Longrightarrow (31) \quad \int_\Omega (Tu - t)^+ \leq \int |u - v| \leq \int (u - t)^+$$

De la même façon (on considérant par exemple $u \longmapsto -(T(-u))$

$$\int_\Omega (-T(-u) - t)^+ \leq \int (u - t)^+$$

$$\Longrightarrow (32) \int_\Omega (-T(u) - t)^+ \leq \int (-u - t)^+, \text{ (en changeant } u \text{ en } -u).$$

Ainsi, (30) est prouvé pour j_1 *et* j_2*.*

On utilise maintenant que, si j *est convexe,* C^1*, avec* j' *lipschitzienne, (et* $j(0) = \min j = 0$*), alors*

$$(33) \quad j(r) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{j''(t)}{|t|} [t(r - t)]^+ dt.$$

(vérifiant immédiate). Or, de (31) et (32), on déduit

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \int_\Omega (t(Tu - t))^+ \leq \int (t(u - t))^+$$

Multipliant par $\frac{j''(t)}{|t|}$ *et intégrant, on obtient*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dt \frac{j''(t)}{|t|} \int_\Omega [t(Tu - t)]^+ \leq \int_{-\infty}^{+\infty} dt \frac{j''(t)}{|t|} \int_\Omega [t(u - t)]^+$$

Appliquant Fubini, on obtient

$$\int_\Omega j(Tu(x))dx \leq \int_\Omega j(u(x))dx.$$

Pour calculer, il suffit d'utiliser que, toute fonction j convexe, s.c.i exemple, prendre

$$j_\lambda(r) = \inf_t \left\{ \frac{1}{2\lambda}|r-t|^2 + j(t) \right\}.$$

On vérifie que $j_\lambda^{'} = (\partial j)_\lambda$.

Preuve 5.4 *(Démonstration de la proposition 5.1)*

i) $\Longrightarrow$ iv) est le contenu du lemme 5.1

iv) $\Longrightarrow$ iii) : Soit j convexe s.c.i avec $j(0) = \min j = 0$ telle que $\partial j = \gamma$. Puisque $w(x) \in \gamma(u(x))$, on a

$$j\left((I+\lambda A)^{-1}u(x)\right) - j(u(x)) \geq -\lambda w(x) A_\lambda u(x) = -\lambda w(x)(I+\lambda A)^{-1}Au(x).$$

Pour intégrer ceci, vérifions que $j(u) \in L^1$;

$$j(0) - j(u(x)) \geq -w(x)u(x) \Longrightarrow j(u(x)) \leq w(x)u(x) \in L^1 \text{ (car } w \in L^{p'} \text{ et } u \in L^p)$$

Ainsi

$$\int j\left((I+\lambda A)^{-1}u(x)\right) \geq \int j(u(x)) - \lambda \int w(x)(I+\lambda A)^{-1}Au(x).$$

D'après le point iv), $\int j((I+\lambda A)^{-1}u(x)) \leq \int j(u(x))$

$$\Longrightarrow -\int w(x)(I+\lambda A)^{-1}Au(x) \leq 0$$

Puisque $(I+\lambda A)^{-1}Au \longmapsto Au$ dans L^2, on a le résultat si p=1.
Sinon

$$|(I+\lambda A)^{-1}Au|_p \leq |Au|_p.$$

Si $1 < p < \infty$, $(I+\lambda A)^{-1}Au$ converge faiblement vers Au dans L^p ce qui suffit. Si $p = \infty$, on utilise que $(I+\lambda A)^{-1}Au \overset{p.p}{\to} Au$ au moins selon une sous-suite. On applique alors le théorème de Lebesgue.

iii) $\Longrightarrow$ ii) est trivial

ii) $\Longrightarrow$ i) : considérant $k = \max(0, \sup_\Omega f)$ et $\rho(r) = sign_0^+(u-k)$.

Puisque ρ est limite croissante de fonctions $\rho_n \in C^1(\mathbb{R}) \bigcap L^\infty(\mathbb{R})$ avec $\rho(0) = 0$ et $\rho^{'}(0) = 0$, on a

$$u - k + \lambda Au = f - k,$$

On en déduit

$$\int_\Omega (u-k)^+ \leq \int_\Omega sign_0^+(u-k)(f-k) \leq 0$$
$$\Longrightarrow u \leq k$$

Preuve 5.5 *(Démonstration du théorème 5.1)*

Etablissons d'abord (20). Soit donc

$$Au(x) + w(x) = f(x) \qquad w(x) \in \beta u(x)$$
$$A\hat{u}(x) + \hat{w}(x) = \hat{f}(x) \qquad \hat{w}(x) \in \beta \hat{u}(x)$$

Multiplions

$$(34) \qquad A(u-\hat{u}) + w - \hat{w} = f - \hat{f}$$

par

$$h(x) = \begin{cases} +1 & si\ u(x) > \hat{u}(x)\ ou\ w > \hat{w} \\ & 0\ \ sinon. \end{cases}$$

On a $h \in sign^+(u-\hat{u}) \bigcap sign^+(w-\hat{w})$. *D'après la proposition 5.1,* $\int_\Omega hA(u-\hat{u}) \geq 0$. *Multiplions (34) par h, on obtient donc*

$$\int_\Omega (w-\hat{w})^+ \leq \int_\Omega h(f-\hat{f}) \leq \int_\Omega (f-\hat{f})^+.$$

Notons B l'extension de β *à* $L^1(\Omega)$. *L'estimation (20) prouve que R(A+B) est fermé. En effet, si* $f_n \in Au_n + Bu_n \overset{L^1}{\to} f$, *d'après (20)*

$$|w_p - w_q|_1 \leq |f_p - f_q|_1$$

Donc $w_n \overset{L^1}{\to} w$. *Par différence,* $Au_n \overset{L^1}{\to} v = f - w$. *Mais d'après (III),* $u_n \overset{L^1}{\to} u$. *Puisque A est fermé,* $f - w = v = Au$.
Soit $f \in R(A+B)$.

Il nous reste à montrer que R(A+B) est dense dans $L^1(\Omega)$.
On commence par résoudre

$$(35) \qquad \epsilon u_{\lambda,\epsilon} + Au_{\lambda,\epsilon} + \beta_\lambda u_{\lambda,\epsilon} = f.$$

où $\beta_\lambda = I - (I+\lambda\beta)^{-1}$, *ceci a bien une solution, car (35) équivalent à*

$$(\lambda\epsilon + 1)u_{\lambda,\epsilon} + \lambda Au_{\lambda,\epsilon} = \lambda f + (I+\lambda\beta)^{-1}u_{\lambda,\epsilon}.$$

soit

$$u_{\lambda,\epsilon} = \left(I + \frac{\lambda}{\lambda\epsilon+1}A\right)^{-1}\left(\frac{\lambda}{\lambda\epsilon+1}f + \frac{1}{\lambda\epsilon+1}(I+\lambda\beta)^{-1}u_{\lambda,\epsilon}\right)$$

On applique alors un théorème de point fixe contractant. On voit de plus que, si $f \in L^\infty$, *le même théorème de point fixe, appliqué dans* $L^1 \bigcap L^\infty$ *grâce à (II), parce que* $u_{\lambda,\epsilon}$ *et* $Au_{\lambda,\epsilon} \in L^\infty$.

Multipliant (35) par $\epsilon u_{\lambda,\epsilon} + \beta_\lambda u_{\lambda,\epsilon}$ *et utilisant*

$$\int (\epsilon u_{\lambda,\epsilon} + \beta_\lambda u_{\lambda,\epsilon})Au_{\lambda,\epsilon} > 0,$$

on obtient

$$(36) \qquad |\epsilon u_{\lambda,\epsilon} + \beta_\lambda u_{\lambda,\epsilon}|_{L^2} \leq |f|_{L^2}.$$

On suppose $f \in L^1 \bigcap L^\infty \quad (\subset L^2)$ *et en fait tendre* λ *vers 0,* ϵ *étant fixé. Montrons que* $u_{\lambda,\epsilon}$ *est de Cauchy dans* L^2. *Multipliant*

$$\epsilon(u_{\lambda,\epsilon} - u_{\mu,\epsilon}) + A(u_{\lambda,\epsilon} - u_{\mu,\epsilon}) + \beta_\lambda u_{\lambda,\epsilon} - \beta_\mu u_{\mu,\epsilon} = 0$$

par $u_{\lambda,\epsilon} - u_{\mu,\epsilon}$ *et utilisant la proposition 5.1 ii, on a :*

$$\epsilon|u_{\lambda,\epsilon} - u_{\mu,\epsilon}|^2_{L^2} + \int_\Omega (u_{\lambda,\epsilon} - u_{\mu,\epsilon})(\beta_\lambda u_{\lambda,\epsilon} - \beta_\mu u_{\mu,\epsilon}) \leq 0.$$

Développant $u_{\lambda,\epsilon} = u_{\lambda,\epsilon} - (I+\lambda\beta)^{-1}u_{\lambda,\epsilon} + (I+\lambda\beta)^{-1}u_{\lambda,\epsilon}$ *(de même pour* $u_{\mu,\epsilon}$ *et utilisant l'accrétivité de* β *et la relation*

$$\beta_\lambda = \frac{1}{\lambda}(I - (I+\lambda\beta)^{-1}) \subset \beta(I+\lambda\beta)^{-1},$$

en obtient

$$\epsilon|u_{\lambda,\epsilon} - u_{\mu,\epsilon}|^2_{L^2} + \int_\Omega (\lambda\beta_\lambda u_{\lambda,\epsilon} - \mu\beta_\mu u_{\lambda,\epsilon})(\beta_\lambda u_{\lambda,\epsilon} - \beta_\mu u_{\mu,\epsilon}) \leq 0$$

Comme $\beta_\lambda u_{\lambda,\epsilon}$ *est borné dans* L^2 *d'après (36), on en déduit que* $u_{\lambda,\epsilon}$ *est de Cauchy dans* L^2 *quand* $\lambda \longmapsto 0$. *Soit* $u_{\lambda,\epsilon} \stackrel{L^2}{\to} u_\epsilon$.
Puisque

$$\left|(I+\lambda\beta)^{-1}u_{\lambda,\epsilon} - u_{\lambda,\epsilon}\right| \leq \lambda|\beta_\lambda u_{\lambda,\epsilon}|,$$

On a aussi que $(I+\lambda\beta)u_{\lambda,\epsilon} \longmapsto u_\epsilon$ *quand* $\lambda \longmapsto 0$. *D'après la fermeture de* β *dans* $L^2(\Omega) \times (L^2(\Omega) - faible)$ *et*

$$\beta_\lambda u_{\lambda,\epsilon} \in \beta((I+\lambda\beta)^{-1}u_{\lambda,\epsilon}),$$

On en déduit que, au moins suivant une suite extraite, $\beta_\lambda u_{\lambda,\epsilon}$ *converge faiblement dans* L^2 *avec* $w \in \beta u_\epsilon$.
Ainsi $Au_{\lambda,\epsilon} = f - \epsilon u_{\lambda,\epsilon} - \beta_\lambda u_{\lambda,\epsilon}$ *converge faiblement dans* L^2 *vers* $f - \epsilon u_\epsilon - w$. *Considérons* v_ϵ *la solution de*

$$\epsilon v_\epsilon + Av_\epsilon = f - w$$

Il nous reste à montrer à ces stade que $v_\epsilon = u_\epsilon$. *Mais, prenant des combinaisons barycentriques des* $\beta_\lambda u_{\lambda,\epsilon}$, *on a l'existence de* v_λ, w_λ *avec*

$$\epsilon v_\lambda + Av_\lambda = f - w_\lambda, \quad w_\lambda \stackrel{L^2}{\to} w, \quad v_\lambda \stackrel{L^2}{\to} v_\epsilon$$

Multiplions la différence des deux équations par $v_\epsilon - v_\lambda$ *et utilisant toujours la proposition 5.1, on a*

$$\epsilon|v_\epsilon - v_\lambda|^2 \leq \int |v_\epsilon - v_\lambda||w - w_\lambda|$$

Ceci montre que $v_\lambda \stackrel{L^2}{\to} v_\epsilon$ *et donc* $u_\epsilon = v_\epsilon$ *(on utilise en fait l'accrétivité de* A *dans* $L^2(\Omega)$*)*

Reste à faire tendre ϵ *vers* 0. *D'après l'estimation (20) appliquée à* $\epsilon I + \beta$ *et à*

$$\epsilon u_\epsilon + Au_\epsilon + \beta u_\epsilon \ni f \in L^1 \cap L^\infty.$$

on a

$$|\epsilon u_\epsilon + \beta u_\epsilon|_1 \leq |f|_1 \Longrightarrow |Au_\epsilon| \leq 2|f|_1.$$

d'après III

$$\Longrightarrow \alpha|u_\epsilon|_1 \leq |Au_\epsilon|_1 \leq 2|f|_1.$$

En particulier $\epsilon u_\epsilon \stackrel{L^1}{\to} 0$ *et donc* $f \in \overline{R(A+B)}$.

Ceci montre la densité de $R(A+B)$ *dans* L^1.

5.1 Application aux opérateurs elliptiques d'ordre 2

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ de frontière régulière.

$$(37) \quad Lu = -\sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_j}(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}) + \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}(a_i u) + au$$

où on suppose

$$(38) \quad a_{i,j},\ a_i \in C^1(\overline{\Omega}),\ a \in L^\infty(\Omega)$$

$$(39) \quad a \geq 0, \quad a + \sum_i \frac{\partial a_i}{\partial x_i} \geq 0.$$

$$(40) \quad \sum_{i,j} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \alpha \left(\sum_i \xi_i^2\right) \quad \textit{avec } \alpha > 0.$$

Pour $1 < p < \infty$, la réalisation naturelle de L *dans* $L^p(\Omega)$ est l'opérateur A_p défini par

$$D(A_p) = W^{2,p}(\Omega) \bigcap W_0^{1,p}(\Omega).$$

$$A_p u = Lu \text{ (calculé au sens des distributions).}$$

Proposition 5.2 *A_p est m-accrétif de domaine dense $L^p(\Omega)$ (et donc engendre un semi-groupe continue de contractions linéaires sur $L^p(\Omega)$).*

Lemme 5.2 *Soit $f \in L^p(\Omega)$ avec $1 < p < \infty$. Alors, il existe un unique u solution de*

$$\begin{cases} u \in W^{2,p}(\Omega) \bigcap W_0^{1,p}(\Omega) \\ Lu = f \ \textit{p.p dans } \Omega \end{cases}$$

De plus, il existe $C = C(p, N, \Omega)$ tel que

$$||u||_{W^{2,p}} \leq C||f||_p.$$

Dans le cas p=1, on ne peut pas espérer une régularité $W^{1,2}$ pour les solutions de
$Lu = f \in L^1$. En particulier

$$\begin{cases} -\Delta u \in L^1 \\ u|_\Gamma = 0 \end{cases}$$

ne donne pas que $u \in W^{2,1}$
Le résultat correspondant est le suivant. Soit

$$D(A) = \{u \in W_0^{1,1}(\Omega);\ Lu \in L^1(\Omega)\}$$

$$Au = Lu \ \ (\textit{au sens des distribution}) \ \ \textit{Alors}$$

(I) A est m-accrétif de domaine dense dans $L^1(\Omega)$
(II) $\sup_\Omega (I + \lambda A)^{-1} f \leq \max(0, \sup_\Omega f) \quad \forall \lambda > 0l\ f \in L^1$
(III) $D(A) \subset W_0^{1,q} \quad \forall 1 \leq q < N/N-1$

et

$$(41) \quad \alpha||u||_{W_0^{1,q}} \leq ||Au||_1, \qquad \alpha = \alpha(q) > 0$$

Schéma de la démonstration : Commençons par le point essentiel qui est l'estimation (41). Nous allons l'établir d'abord pour les éléments $u \in D(A_2)$ (on peut remarquer que $A_p \subset A \;\; \forall p \geq 1$)
Soit $u \in H^2 \bigcap H_0^1$ avec $Lu = f \;\in L^2(\Omega)$
On introduit la solution v du problème dual

$$(42) \begin{cases} -\sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{i,j}\frac{\partial v}{\partial x_j}\right) - \sum_i a_i \frac{\partial v}{\partial x_i} + av = -\sum_i \frac{\partial h_i}{\partial x_i} \\ \hfill v \in H_0^1(\Omega) \bigcap L^\infty(\Omega) \end{cases}$$

où $h_1,\ h_2,\ ,....,h_r$ sont des fonctions arbitraires de $L^p(\Omega)$ *avec* $p > N$.
Cette condition sur p assure l'existence de v solution de (42) avec de plus

$$||v||_{L^\infty} \leq C \sum_i ||h_i||_{L^p}$$

Appliquant ceci à $w = u$ ce qui est lisible, on obtient

$$\int vLu = \sum_i \int h_i \frac{\partial u}{\partial x_i}$$

Ainsi

$$\left|\sum_i \int h_i \frac{\partial u}{\partial x_i}\right| \leq ||Lu||_{L^1}||v||_{L^\infty} \leq C||Lu||_{L^1} \sum ||h_i||_{L^p}$$

et par dualité

$$\max_i \left|\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|\right|_{L^q} \leq C||Lu||_{L^1}$$

pour $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$. Ceci est valable pour tout $p > N$, c'est-à-dire pour tout $q = \frac{p}{p-1} < \frac{N}{N-1}$.

Nous avons ainsi montré que

$$\forall u \in D(A_2), \quad \alpha||u||_{W_0^{1,q}} \leq ||A_2 u||_1$$

Il est clair que ceci s'étend à la fermeture $\overline{A_2}$ *de* A_2 *dans* $L^1 \times L^1$

La reste de la démonstration consiste à montrer que

a) $\overline{A_2}$ est m-accrétif dans $L^1(\Omega)$

b) $\overline{A_2} = A$

Pour a) étant donné $f \in L^1(\Omega)$, on l'approche dans $L^1(\Omega)$ par $f_n \in L^2(\Omega)$. D'après la maximalité de A_2, il existe u_n solution de

$$u_n + A_2 u_n = f_n$$

Si on sait que A_2 est accrétif dans L^1, on aura

$$|u_p - u_q|_1 \leq |f_p - f_q|_1$$

et donc $u_n \longmapsto u$ *avec* $u + \overline{A_2}u = f$.

Pour montrer que A_2 est accrétif dans L^1, il suffit de montrer que, $\forall p \in C^1(\mathbb{R}) \bigcap L^\infty(\mathbb{R})$ avec $p^{'} \geq 0,\ p(0) = 0$

$$\forall u \in D(A_2) \qquad \int p(u)A_2 u \geq 0.$$

De plus, ceci montrera que A_2 (et donc $\overline{A_2}$ vérifie (III) (voir la proposition 5.1). Or, si $u \in D(A_2) = H^2 \bigcap H_0^1$.

$$\int p(u)Lu = \int \sum_{i,j} a_{ij}p^{'}(u)\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j} + \int \sum_i a_i u\ p^{'}(u)\frac{\partial u}{\partial x_i} + \int ap(u)u.$$

D'après (40) et $p^{'}(u) > 0$, la première intégrale est ≥ 0. Si $\varphi(r) = \int_0^r sp^{'}(s)ds$, il reste s'écrit

$$-\int \sum_i a_i \frac{\partial}{\partial x_i}\varphi(u) + \int au\ p(u) = \int \varphi(u)\left(\sum_i \frac{\partial a_i}{\partial x_i} + a\right) + \int a(u\ p(u) - \varphi(u)).$$

Ces deux dernières intégrales sont ≥ 0 d'après (39) et le fait que $\varphi(r) \leq rp^{'}(r)$.

Pour le point b), on remarque d'abord que $\overline{A_2} \subset A$ d'après l'estimation (41). Pour montrer que $\overline{A_2} = A$, puisque $I + \overline{A_2}$ est surjectif, il suffit de montrer que $I + A$ est injectif. Ceci est un problème d'unicité. On peut en fait prouver que A lui-même est injectif, soit

$$\begin{cases} u \in W_0^{1,1} \\ Lu = 0 \end{cases}$$

donne que $u = 0$.
Pour cela, on considère la solution du problème adjoint

$$\begin{cases} v \in W_0^{1,p} \bigcap W^{2,p} \quad \forall p \\ L^*v = g \quad avec\ g \in L^p,\ p > N. \end{cases}$$

La condition $p > N$ assure que $v, \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^\infty$ d'après les injections de Sobolev. Ainsi la relation

$$\int \sum a_{ij}\frac{\partial w}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j} - \sum_i a_i w \frac{\partial v}{\partial x_i} + awu = \oint wg$$

Vraie pour $w \in D(\Omega)$ s'étend à tout $w \in W_0^{1,1}$ par densité et donc à $w = u$. On en déduit

$$0 =< Lu, v >= \int wg \quad \forall g \in L^p$$

D'où u=0.

Cas de $-\Delta\beta$ *dans* $\mathbb{R}^N$

Le problème de la résolution de $u - \Delta\beta(u) \ni f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ est plus ardu que lorsque Ω est un ouvert borné. La raison est que l'hypothèse (III) du théorème 5.1 n'est pas satisfaite pour $A = -\Delta$ où $D(A) = \{u \in L^1(\mathbb{R}^N);\ \Delta u \in L^1(\mathbb{R}^N)\}$ et en général, la solution de

$$(43) \quad \beta^{-1}w - \Delta w \ni f \in L^1(\mathbb{R}^N)$$

n'appartient pas à $L^1(\mathbb{R}^N)$.

Pour montrer que $(-\Delta)^{-1}$ n'envoie pas $L^1(\mathbb{R}^N)$ dans lui-même, on peut raisonner de la façon suivante :

$$soit \quad E_N(x) = \frac{1}{(N-2)b_N|x|^{N-2}} \quad pour\ N \geq 3$$

où b_N est le volume de la boule unité de $\mathbb{R}^N$. Alors une solution de

$$-\Delta w = f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$$

est donné par

$$w = E_N * f.$$

Supposons qu'on ait

$$\alpha|w|_1 \leq |f|_1.$$

Faisant tendre une suite f_n *de* $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ vers la masse de Dirac à l'origine, on aurait :

$$\alpha|E_N * \delta|_1 = \alpha|E_N|_1 \leq 1.$$

Or, on vérifie que $E_N \notin L^1$.

Théorème 5.2 *Soit* $N \geq 3$, β *un graphe maximal de* $\mathbb{R}$ *avec* $0 \in \beta 0$. *Alors, pour tout* $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$, *il existe une unique solution de*

$$(44) \qquad \begin{cases} u \in M^{N/(N-2)}(\mathbb{R}^N), \quad \Delta u \in L^1(\mathbb{R}^N) \\ \qquad -\Delta u + \beta u \ni f \quad p.p\ sur \mathbb{R}^N \end{cases}$$

Remarque
Il existe des résultats analogues pour $N = 1, 2...$

Définition 5.1 *Soit* $u : \mathbb{R}^N \longmapsto \mathbb{R}$ *mesurable avec* $1 < p < \infty$ *et* $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. *Alors*

$$||u||_{M^p} = \min\{C \in [0, \infty]; \quad \int_K |u(x)|dx \leq C(mes\ K)^{1/P}\ pour\ tout\ ensemble\ mesurable\ K\}.$$

$$M^p(\mathbb{R}^N) = \{u;\ ||u||_{M^p} < \infty\}.$$

Remarque
On vérifie immédiatement que

$$L^p(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow M^p(\mathbb{R}^N).$$

En effet :

$$\int_K |u(x)|dx \leq \left(\int_K |u(x)|^p\right)^{1/p} \left(\int_K 1\right)^{1/p'}$$
$$\leq ||u||_{L^p}.(mes\ K)^{1/p'}.$$

Ces espaces dites "de Marcin Kiewibe" sont des cas particuliers d'espaces type L^p-faible ou $L(p, q)$ avec ici, $q = \infty$.

Proposition 5.3 *Soit* $1 \leq q < p < \infty$. *Alors, pour toute fonction mesurable* u *sur* $\mathbb{R}^N$.

$$(45) \quad \frac{(p-1)^p}{p^{p+1}}||u||^p_{M^p} \leq \sup_{\lambda>0}\{\lambda^p mes[|u| > \lambda]\} \leq ||u||^p_{M^p}.$$

De plus

$$(46) \quad \int_K |u|^q \leq \frac{p}{p-q}\left(\frac{p}{q}\right)^{q/p} ||u||^q_{M^p}(mes\ K)^{(p-q)/p}.$$

Remarque
L'estimation (46) prouve que si $p > q$, alors

$$M^p(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^q_{loc}(\mathbb{R}^N).$$

L'estimation (45) montre que l'espace $M^p(\mathbb{R}^N)$ peut être aussi défini comme

$$\{u:\ \mathbb{R}^N \longmapsto \mathbb{R}\ mesurable;\ \ mes[|u| > \lambda] < \frac{C}{\lambda^p}\ \ \forall\lambda > 0\}.$$

On a aussi :

Corollaire 5.3

$$\frac{1}{|x|^\alpha} \in M^{N/\alpha}(\mathbb{R}^N)\ \forall\alpha \in]0, N[.$$

En particulier le noyau $E_N = \frac{1}{(N-2)b_N|x|^{N-2}}$ *associé à* $(-\Delta)$ *est dans* $M^{\frac{N}{N-2}}(\mathbb{R}^N)$.

Preuve 5.6 *Commençons par l'inégalité de droite dans (45).*

$$Soit\ \lambda > 0\ et\ K_n = \{x \in \mathbb{R}^N;\ |x| \leq n\ et\ |u(x)| > \lambda\}.$$

D'après la définition de M^p *:*

$$\lambda\ mes\ K_n \leq \int_{K_n} |u(x)|dx \leq ||u||_{M^p}(mes\ K_n)^{1/p'}$$

$$\Longrightarrow \lambda(mes\ K_n)^{1-\frac{1}{p'}} \leq ||u||_{M^p}$$

pour conclure.

Pour l'autre partie de (45), on procédé de la manière suivante : soit K *mesurable, alors*

$$\int_K |u(x)|dx = \int_{K\cap[|u|>\lambda_0]} |u(x)|dx + \int_{K\cap[|u|\leq\lambda_0]} |u(x)|dx$$

$$\leq \int_{[|u|>\lambda_0]} |u(x)|dx + \int_{K\cap[|u|\leq\lambda_0]} |u(x)|dx \leq \int_{[|u|>\lambda_0]} |u| + \lambda_0\ mes\ K.$$

Si $\alpha(\lambda) = mes(|u| > \lambda|)$, *on a*

$$\int_{[|u|>\lambda_0]} |u(x)|dx = -\int_{\lambda_0}^{\infty} \lambda d\alpha = \lambda_0\alpha(\lambda_0) + \int_{\lambda_0}^{\infty} \alpha(\lambda)d\lambda.$$

Soit

$$C = \sup_{\lambda>0}\{\lambda^p\ mes[|u| > \lambda]\}.$$

Alors

$$\int_{[|u|>\lambda_0]} |u(x)|dx \leq \frac{C}{\lambda_0^{p-1}} + \int_{\lambda_0}^{\infty} \frac{C}{\lambda^p}d\lambda = \frac{p}{p-1}\ \frac{C}{\lambda_0^{p-1}}.$$

Ainsi

$$\int_K |u(x)|dx \leq \frac{p}{p-1}\ \frac{C}{\lambda_0^{p-1}} + \lambda_0 mes\ K.$$

Ceci étant vrai pour tout $\lambda_0 > 0$, *on minimise le membre de droite par rapport à* λ_0 *en choisissant*

$$\lambda_0^p mes\ K = Cp$$

. On obtient

$$\int_K |u(x)|dx \leq \frac{p^{1+\frac{1}{p}}}{p-1} C^{1/p} (mes\ K)^{1/p'}.$$

$$\Longrightarrow ||u||^p_{M^p} \leq \frac{p^{p+1}}{(p-1)^p} C$$

Pour (46), on procède comme suit : il s'agit d'estimer $||\ |u|^q\ ||_{M^{\frac{p}{q}}}$.

$$\lambda^{p/q} mes[|u|^q > \lambda] = \lambda^{p/q} mes[|u| > \lambda^{1/q}] = \alpha^p mes[|u| > \alpha]$$

si $= \lambda^{1/q}$. *Donc*

$$\begin{aligned} \sup_{\lambda>0}\{\lambda^{p/q} mes[|u|^q > \lambda]\} &= \sup_{\alpha>0} \alpha^p mes[|u| > \alpha] \\ &\leq ||u||^p_{M^p} \\ \Longrightarrow ||\ |u|^q\ ||_{M^{p/q}} &\leq \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{p+q}{p}} \frac{q}{p-q} ||u||^q_{M^p} \end{aligned}$$

ce qui est (46).

Proposition 5.4 *Si* $E \in M^p(\mathbb{R}^N),\ 1 < p < \infty$ *et* $f \in L^1(\mathbb{R}^N),$ *alors* $E * f \in M^p(\mathbb{R}^N)$ *et*

$$||E * f||_{M^p} \leq ||E||_{M^p}\ ||f||_{L^1}.$$

Remarque
Ceci prouve en particulier que, si $N \geq 3$ *et* $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$, alors la solution de $-\Delta w = f$ donnée par $w = E_N * f$ appartient à $M^{N/(N-2)}(\mathbb{R}^N)$.

Preuve 5.7 *(Démonstration de la proposition 5.4)*

$$\begin{aligned} \int_K |E * f(x)| &\leq \int_K \left(\int_{\mathbb{R}^N} |E(x-y)||f(y)|dy\right) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} |f(y)| \left(\int_K |E(x-y)|dx\right) dy\ \leq \int_{\mathbb{R}^N} |f(y)|\ ||E||_{M^p} \left(mes\ K\right)^{1/p}. \\ \Longrightarrow \int_K |E + f(x)| &\leq ||f||\ ||E||\ (mes\ K)^{1/p'}. \end{aligned}$$

Proposition 5.5 *Soit* $N \geq 3,\ u \in M^{N/(N-2)}(\mathbb{R}^N)$ *avec* $\Delta u \in L^1(\mathbb{R}^N)$. *Alors*

$$(47) \quad u = E_N * (-\Delta u)$$

$$(48) \quad ||u||_{M^{N/(N-2)}} \leq C_N ||\Delta u||_{L^1(\mathbb{R}^N)}$$

où $C_N,\ D_N$ *sont des constantes ne dépendent que de N.*

Preuve 5.8 *Si on admet (47), alors (48) sont des conséquences de la proposition 5.4 et du fait que*

$$E_N = \frac{C_N}{|x|^{N-2}} \in M^{N/(N-2)},$$

$$\frac{\partial E_N}{\partial x_i} = \frac{C'_N x_i}{|x|^N} \in M^{N/(N-1)}\ et\ \frac{\partial}{\partial x_i} u = \frac{\partial E_N}{\partial x_i} * f$$

Le résultat (47) est un résultat d'unicité. On a bien sûr

$$-\Delta(E_N * (-\Delta u)) = -\Delta u.$$

Il s'agit donc de montrer

$$\left\{ \begin{array}{r} v \in M^{N/(N-2)}(\mathbb{R}^N) \\ \Delta v = 0 \end{array} \right.$$

implique que v=0.

Soit $\chi \in D(\mathbb{R}^N)$, $\chi \geq 0$ *avec* $\chi = 1$ *sur* $[0,1]$; $\chi = 0$ *sur* $]1,\infty]$, $\eta \in D(\mathbb{R}^N)$ *arbitraire. On a*

$$< -\Delta v, (E_N * \eta).\chi\left(\frac{|x|}{n}\right) >= 0$$

Soit

$$0 = \int v \left[\eta\chi\left(\frac{|x|}{n}\right) + \frac{2}{n}(\nabla E_N * \eta).\nabla\chi\left(\frac{|x|}{n}\right) + \frac{1}{n^2}(E_N * \eta)\Delta\chi\left(\frac{|x|}{n}\right)\right]$$

$$\Longrightarrow \left|\int v\eta\ \chi\left(\frac{|x|}{n}\right)\right| \leq \frac{2C}{n}\int_{n\leq|x|\leq 2n}|v|\ |\Delta E_N * \eta| + \frac{C}{n^2}\int_{n\leq|x|\leq 2n}|v|\ |E_N * \eta|$$

où

$$C = ||\nabla\chi||_\infty + ||\Delta\chi||_\infty.$$

Mais

$$|E_N * \eta|(x) \leq \frac{C(\eta, N)}{|x|^{N-2}}. \quad , |\nabla E_N * \eta| \leq \frac{C(\eta, N)}{|x|^{N-1}}$$

Pour $|x|$ *assez grand. Donc pour* n *assez grand*

$$\left|\int v\eta\ \chi\left(\frac{|x|}{n}\right)\right| \leq \frac{2C'}{n^N}\int_{n\leq|x|\leq 2n}|v| + \frac{C}{n^N}\int_{n\leq|x|\leq 2n}|v|$$

Puisque $|v| \in M^{N/(N-2)}$, *on a :*

$$\int_{n\leq|x|\leq 2n} \leq ||v||_{M^{N/(N-2)}} \quad (mes\ \{x;\ n \leq |x| \leq 2n\})^{2/N})$$

$$\approx \quad ||v||_{M^{N/(N-2)}}.n^2.$$

$$Ainsi, \quad \lim_{n\longmapsto\infty}\left|\int v\eta\ \chi\left(\frac{|x|}{n}\right)\right| = 0.$$

On en déduit :

$$\int v\eta = \lim_{n\longmapsto\infty}\int v\eta\chi\left(\frac{|x|}{n}\right) = 0.$$

Comme η *est arbitraire,* $v \equiv 0$.

Preuve 5.9 *(Démonstration du théorème 5.2)*

On remarque d'abord que, $\forall\lambda > 0$, $\forall f \in L^1(\mathbb{R}^N)$, *il existe* $u \in L^1(\mathbb{R}^N)$ *solution de*

$$(51) \quad u - \lambda\Delta u = f \quad dans\ D'(\mathbb{R}^N)$$

$$et \quad ||u||_{L^1} \leq ||f||_{L^1}.$$

En effet, si $f \in L^2$, *par transformée de Fourier, on obtient* $\hat{u} = \frac{\hat{f}}{1+\lambda|x|^2}$ *et donc, il existe* $u \in L^2$ *unique solution de (51). Multipliant (51) par* $\rho(u)$ *où* $\rho \in C^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$, $\rho' \geq 0$, $\rho(0) = 0$. *On a :*

$$\int u\rho(u) - \lambda \int \rho(u)\Delta u = \int \rho(u) f.$$

Mais $u \in H^2(\mathbb{R}^N)$ *et* $\rho(u) \in H^1(\mathbb{R}^N)$. *Ainsi*

$$-\int \rho(u)\Delta u = \int \rho'(u)|\nabla u|^2 \geq 0. \text{ Donc}$$

$$(52) \qquad -\int \rho(u)\Delta u \geq 0$$

Comme déjà vu plusieurs fois, si $f \in L^1 \cap L^2$, *on en déduit*

$$(53) \qquad \int |u| \leq \int |f|.$$

Si $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$, *on l'approche par* $f_n \in L^1(\mathbb{R}^N) \cap L^2(\mathbb{R}^N)$ *dans* $L^1(\mathbb{R}^N)$. *A la limite, on obtient une solution de (51) satisfaisant (52), (53). L'unicité se montre par régularisation.*

Soit maintenant $\epsilon > 0$ *et* A_ϵ *l'opérateur de* $L^1(\mathbb{R}^N)$ *définie par*

$$D(A_\epsilon) = \{u \in L^1(\mathbb{R}^N); \quad \Delta u \in L^1(\mathbb{R}^N)\}.$$

$$A_\epsilon u = \epsilon u - \Delta u.$$

il existe $w_n \in L^1(\Omega)$ *avec*

$$w_n = \varphi(u_n) \quad p.p$$

$$\text{et} \quad (65) \quad \frac{u_{n+1}(x) - u_n(x)}{\lambda} - \Delta\varphi(u_{n+1})(x) = 0 \quad p.p$$

$$(66) \quad ||u_{n+1}||_{L^\infty} \leq ||u_n||_{L^\infty} \leq ......||u_0||_{L^\infty}.$$

Si $v_\lambda(t,x)$ *est la fonction affine par morceaux construite sur la suite* (u_n) *soit*

$$\forall t \in]n\lambda, (n+1)\lambda], \quad v_\lambda(t,x) = \frac{t - n\lambda}{\lambda}(u_{n+1} - u_n) + u_n,$$

la relation (65) s'écrit encore

$$(67) \quad \frac{\partial}{\partial t} v_\lambda - \Delta\varphi(u_\lambda) = 0 \quad \text{dans } D'(]0,T[\times\Omega)$$

où $u_\lambda = u_n$ *sur* $]n\lambda, (n+1)\lambda]$. *Soit* $Q =]0,T[\times\Omega$. *Mais*

$$.u_\lambda \overset{C([0,T];L^1)}{\to} \Longrightarrow u_\lambda \overset{D'(Q)}{\to} u \Longrightarrow \frac{\partial u_\lambda}{\partial t} \overset{D'(Q)}{\to} \frac{\partial u}{\partial t}$$

$$u_{\lambda_n} \overset{C([0,T]);L^1}{\to} u \quad p.p \text{ sur } Q \quad \text{et } ||u_{\lambda_n}||_\infty \leq ||u_0|| \Longrightarrow \varphi(u_{\lambda_n}) \overset{L^1(]0,T[\times\Omega)}{\to} \varphi(u)$$

$$\Longrightarrow \Delta\varphi(u_{\lambda_n}) \overset{D'(Q)}{\to} \Delta\varphi(u)$$

On obtient ainsi une solution de (62).

CONCLUSION

Dans notre travail de projet de fin d'études, nous avons développé et détaillé dans un premier temps le module intitulé Équation d'évolution et semi-groupes.

Le chapitre 3 et 4 contient des résultats plus clairs et précise que nous trouvons dans des articles sans détailles, voire des passages des preuves difficiles à comprendre.

Notre contribution essentiel été de mettre en application les résultats de la théorie accrétif, s-accrétif et m-accrétif sur des exemples physiques intéressants notamment le problème de chaleur non linéaire comme problème de Stéfan, et les problèmes des opérateurs elliptiques d'ordre 2 qui modélise aux certains problèmes physiques bien connu dans la littérature.

Pour ce qui concerne le dernier point, nous avons proposé les estimations et inégalités liées aux contrôles de la solution, ainsi que la fonction d'énergie.

PERSPECTIVES

A partir de (62), il reste encore 2 problèmes importants à résoudre

1. *Le problème de l'unicité des solutions de (63) ($u = 0$ sur $\partial\Omega$). On sait qu'il y a unicité de la solution au sens des semi-groupes puisqu'on a même*

$$|u(t) - \hat{u}(t)|_{L^1} \leq |u_0 - \hat{u}_0|_{L^1}.$$

Mais, on ne sait pas à priori, si toute solution au sens des distribution comme dans (62) est encore une solution au sens des semi-groupe.

2. *Que se passe t-il si $u_0 \in L^1(\Omega)$ et non plus à $L^1(\Omega) \bigcap L^\infty(\Omega)$?. Nous avons vu que, pour passer à la limite au sens des distributions, on utilisait de manière intensive que les solutions approchées u_λ restaient bornées (et donc aussi $\varphi(u_\lambda)$). Ceci est dans la nature du problème et une difficulté réelle se pose par exemple pour l'équation*

$$\left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta(u^3) = 0 \\ u(0) = u_0 \in L^1(\Omega). \end{array} \right.$$

Il est clair que la convergence de u_λ dans $C([0,T]; L^1)$ et pp n'implique pas la convergence de u_λ^3 vers u^3 au sens des distributions, car, sans plus d'information, $u^3 \notin L^1_{loc}(Q)$.

Ce problème est résolue à l'aide d'une propriété d'un type nouveau, à savoir l'existence d'un effet régularisant de L^1 dans L^∞. On peut montrer que, au moins pour $m > 1$, la solution de

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta(u^m) = 0$$

vérifie :

$$||u(t)||_\infty \leq \frac{C}{t^\lambda} ||u(0)||_{L^1}.$$

Ainsi, même si la donnée initiale n'est pas bornée, elle devient immédiatement bornée pour $t > 0$ et donc on peut par passage à la limite (62) admet une solution unique même si $u_0 \in L^1$. (Ceci pour $\varphi(u) = u|u|^{m-1}$ avec $m > (N-2)^+/N$ et aussi pour une classe assez large de fonctions φ telles que $\lim\limits_{|u| \longmapsto \infty} \frac{\varphi(u)}{u^{\frac{N-2}{N}}} = +\infty$).

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. Pazy, Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations, Springer-Verlag, 1983.

[2] EDWARDS- Functional Analysis.

[3] E. Hille, R. Phillips : Functional Analysis ans Semigroups. American Mathematical Society, 1957.

[4] H. Brezis, Analyse Fonctionnelle, Theorie et Applications, Masson, Paris, 1983.

[5] H. Brezis and A. Pazy. Convergence And Approximation of semigroups of Nonlinear Operators in Banach Spaces. J. Func. Anal.,9 :63-74, 1972.

[6] H. Brezis. Opérateurs Maximaux Monotones et Semi-Groupes de Contractions dans les espaces de Hilbert. North-Holland, Amsterdam-London, 1973.

[7] H. Tanabe : Equations of Evolution. Pitman Publishing, 1979.

[8] Introduction aux problèmes d'évolution semi-linéaire, Thierry Cazenave, Alain Haraux, Ellipses, 1990.

[9] J. A. Goldstein : Semigroups of Linear Operators. Oxford University Press, 1985.

[10] J. C.W. ROGERS and A.E. BERGER. Some properties of the nonlinear semigroup for the problem $u_t - \Delta f(u) = 0$. Nonlin. Anal. TMA, 8 :909-939, 1984.

[11] K.-J. Engel, R. Nagel : One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations. Springer, 2000.

[12] K. Yoshida : Functional Analysis, Springer, Berlin (1968).

[13] N. Dunford, J.T. Schwartz : Linear Operators, Vol. I, Interscience, New York (1958).

[14] N.Th.Varopoulos : Hardy-Littlewood theory for semigroups ; J. Func. Analysis, 63 (1985).

[15] Ph. BÉNILAN and M.G Crandall. Completely accretive operators. In Semigroup theory and evolution equations (Delft, 1989), volume 135 of Lecture Notes in Pure and Appl. Math., pages 41-75. Dekker, New York, 1991.

[16] Ph. BÉNILAN and M.G CRANDALL. The Continuous Dependence on φ of Solutions of $u_t - \Delta\varphi(u) = 0$. Ind. Uni. Math. J., 2(30) :162-177, 1981.

[17] Ph. BÉNILAN. Équation d'évolution dans un Espace de Banach Quelconque et Applications. Thesis. Orsay 1972.

[18] Ph. BÉNILAN, M.G CRANDALL and A. Pazy, Evolution equations governed by accretive operators. (book to appear).

[19] R. Dautray, J.-L. Lions, Analyse mathématique et calcul numérique, Évolution : semi-groupe, variationnel, Vol. 8, Masson, Paris 1988.

[20] R.Reinhard : Lectures on Nonlinear Evolution Equations ; Konstanz, April 2015