UNIVERSITÉ SIDI MOHAMED BEN ABDELLAH
FACULTÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES

Département de Mathématiques

Licence mathématiques et applications

Mémoire de fin d'étude

Sous le thème :

La théorie des jeux

Réalisé par

AYOUB EL BIYADI

Encadré par

NAJIB MAHDOU

Présenté devant :

Professeur RACHID EL AYADI
Professeur NAJIB MAHDOU
Professeur LAHCEN OUKHTITE
Professeur MOHAMED SOBRANI

Table des matières

Remerciements

Je tiens à remercier mon encadrant le professeur NAJIB MAHDOU,qui a proposé ce sujet,et qui a bien voulu encadrer ce modeste travail. Je lui exprime aussi ma gratitude pour son dévouement et le temps qu'il m'a consacré .

Je remercie également les membres de jury Pr.RACHID EL AYADI, Pr. LAHCEN OUKHTITE, Pr.MOHAMED SOBRANI, d'avoir examiner notre modeste travail, sans oublier l'aide énorme des personnes travaillant à la bibliothèque de la FST.

Mes remerciements vont également à tous mes professeurs du département du mathématique.

Enfin, je remercie ma famille, et surtout mes parents, qui m'ont toujours soutenu durant mes études.

Introduction

La théorie des jeux peut être définie comme l'étude mathématiques des interactions stratégiques entre plusieurs agents rationnels.

Les mots important sont dans cette définition sont :

– Interaction : il y a plusieurs agents (appelés aussi joueurs, etc...),
– Stratégique : Les joueurs ont le choix entre plusieurs options.
– Rationnel : un joueur ne joue pas n'importe comment, il cherche à optimiser son paiement.

Historiquement, la théorie des jeux est née en 1928 dans une publication de vonn Neumann, son essor est dû principalement à John Nash, un économiste mathématicien qui a fait plusieurs études à propos de cette théorie, ses travaux ont été recompensés par le prix Nobel d'économie en 1994. Cette théorie a été mise en profit dans plusieurs domaines à savoir :

- Biologie (dynamique des populations)
-Informatique (théorie algorithmique des jeux)
-Economie,...

La théorie des jeux est un outil mathématique qui étudie des situations où des individus (les joueurs) sont conduits à faire des choix parmi un certain nombre d'actions possibles, et dans un cadre défini a l'avance (les règles du jeu). Les résultats de ces choix constituent une issue du jeu à laquelle est associe un gain pour chacun des participants. Ces résultats ne dépendent pas de la décision d'un seul joueur, mais également des décisions prises par d'autres participants.

La théorie des jeux, comme toute théorie, est formée par un ensemble d'hypothèses de bases à savoir :

1. Chaque joueur cherche à maximiser ses gains, le gain de chacun dépend autant des décisions des autres que de sa propre décision.

2. Les joueurs disposent d'une information complète, à savoir que chaque joueur connaît tous les détails du modèle et peut se mettre à la place du modélisateur

Le plan de Mémoire est le suivant. La première partie concerne les jeux dits "sous forme normale", dans lesquels les joueurs prennent chacun une seule décision, et ce indépendamment les uns des autres. On introduira dans cette partie deux notions fondamentales en théorie des jeux : la valeur (dans le cas de jeux à somme nulle) et les équilibres de Nash (dans le cas général). Dans la seconde partie nous étudierons les jeux dits "sous forme extensive" dans lesquels apparait une structure dynamique : les joueurs peuvent jouer plusieurs fois, les uns après les autres,etc. On verra l'importance de l'information des joueurs sur les coups précédents des autres et on introduira les notions d équilibres sous jeux parfaits et d'équilibres Bayesien parfaits.

Première partie
Jeux sous forme normale

Un jeu sous forme normale (on dit aussi forme stratégique) est un jeu dans lequel les joueurs jouent chacun une seule fois, et de manière simultanée (ou, ce qui revient au même, de manière indépendante). Une sous classe particulièrement intéressante est celle des jeux dans lesquels il n'y a que deux joueurs, qui ont des intérêts opposés. Ces jeux, appelés jeux à deux joueurs et à somme nulle (ou juste jeux à somme nulle) seront étudiés dans le premier chapitre, avant de passer au cas général dans le second.

Chapitre 1

Jeux à deux joueurs et à somme nulle

1.1 Jeux à somme nulle en stratégies pures

1.1.1 Modèle

Formellement, un jeu à deux joueurs et à somme nulle est un triplet $\Gamma = (A,\, B,\, g)$ où
– A est un ensemble non vide appelé ensemble d'actions (ou de stratégies) du joueur 1 (parfois noté J_1).
– B est un ensemble non vide appelé ensemble d'actions (ou de stratégies) du joueur 2 (parfois noté J_2).
– $g : A \times B \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction bornée qu'on appelle fonction de paiement du jeu (ou fonction de gain, fonction d'utilité). Le joueur 1 cherche à la maximiser et le joueur 2 à la minimiser.
Ceci modélise l'interaction stratégique suivante : J_1 et J_2 choisissent simultanément (sans savoir ce que fait l'autre) $a \in A$ et $b \in B$ respectivement. Les actions sont ensuite révélées, et le paiement est $g(a, b)$. Ce paiement modélise le contentement du joueur 1 et le mécontentement du joueur 2 : J_1 veut que $g(a, b)$ soit le plus élevé possible et J_2 veut qu'il soit le plus bas possible. L'interprétation la plus classique est que $g(a, b)$ est la quantité d'argent que J_2 doit à J_1 (ou l'inverse si $g(a, b)$ est négatif). D'autres interprétations sont possibles : g peut être vue comme l'espérance de vie qu'un lapin chassé veut maximiser (alors que le renard veut la minimiser), la probabilité de marquer un but que le tireur veut maximiser (et que le gardien veut minimiser), etc...

(Jeu du penalty).
Lors d'une séance de tir au but, le tireur (J_1) doit décider de tirer à gauche ou à droite et le gardien (J_2) doit décider de sauter à gauche ou à droite. Les deux joueurs sont supposés excellents : le tireur cadre toujours son tir, et le gardien arrête toujours le tir s'il part du bon côté. Évidemment le tireur cherche à maximiser la probabilité qu'il y ait un but, et le gardien veut la minimiser. On peut modéliser une telle séance de tir au but par le jeu matriciel suivant :
(Jeu du penalty avec tireur moins bon d'un côté).

Même exemple mais le tireur ne tire pas très bien à gauche. S'il tire à gauche, et même si le gardien part du mauvais côté, il y a une chance sur deux que le tir soit raté et sorte du cadre. Cela correspond au jeu suivant :

	S_g	S_d
T_g	0	1
T_d	1	0

	S_g	S_d
T_g	0	1/2
T_d	1	0

(Jeu du penalty avec gardien manchot).
Pareil que l'exemple 1.1.1 mais le gardien a un bras en moins : il ne peut pas arrêter les tirs à gauche quoi qu'il fasse. Il est toujours très bon par contre pour les tirs à droite. Cela correspond au jeu suivant :

	S_g	S_d
T_g	1	1
T_d	1	0

(Jeu du penalty avec tir puissant).
Pareil que l'exemple 1.1.1 mais le tireur a une option supplémentaire : il peut faire un tir puissant qui a deux chance sur trois de sortir du cadre, mais n'est jamais arrêté. Cela correspond au jeu suivant :

Des questions naturelles sont
– Quelles actions doivent jouer les joueurs ?
– A quel point le jeu est il favorable à chaque joueur ? Dans les exemples ci dessus, peut on dire que certains jeux sont plus favorables pour J_1 que d'autres ?
– Plus précisément, quelle est la "valeur" du jeu ? Dans les exemples précédents, supposons que le gardien donne 1 euro au tireur si celui ci marque. Dans chaque exemple, y a t-il une quantité v telle qu'il soit équitable que J_2 donne v euros à J_1 plutôt que de jouer ? Autrement dit, quel est le paiement attendu "si les joueurs jouent bien" ?

1.1.2 Valeur en stratégies pures

***Définition* 1.1.1.** *Le supinf en stratégies pures du jeu* Γ *, noté* $\underline{v}\,(\Gamma)$ *(ou simplement* v *quand il n'y a pas d'ambiguité sur le jeu joué) est la quantité*

$$\underline{v} = \sup_{a\in A}(\inf_{b\in B} g(a,b))$$

Lorsque le sup et l' inf sont atteint dans la définition (par exemple si le jeu est fini), $\underline{v}$ *est également appelé maxmin du jeu.*

	S_g	S_d
T_g	0	1
T_d	1	0
T_p	1/3	1/3

supinf $\underline{v}$ représente le paiement maximal que J_1 peut s'assurer quelque soit l'action de J_2.
La caractérisation suivante de $\underline{v}$ se vérifie facilement en utilisant la définition du sup et de l' inf

$\underline{v}$ est caractérisé par

$$\begin{cases} \text{"}J_1 \textit{ garantit } \underline{v} \textit{ à } \varepsilon \textit{ près"} & \forall\varepsilon > 0, \exists a \in A, \forall b \in B, g(a,b) \geq \underline{v} - \varepsilon \\ \text{"}J_2 \textit{ défend } \underline{v} \textit{ à } \varepsilon \textit{ près "} : & \forall\varepsilon > 0, \forall a \in A, \exists b \in B, g(a,b) \leq \underline{v} + \varepsilon \end{cases}$$

Quand il y a un maxmin (par exemple si le jeu est fini), ces inégalités sont vraies pour $\varepsilon = 0$.

Interprétation : $\underline{v}$ est la "valeur" du jeu dans lequel le joueur 1 choisit d'abord son action a, qui est annoncée à J_2, celui-ci choisissant alors son action b en fonction de a.
De manière symétrique.

***Définition* 1.1.2.**

L' $infsup$ en stratégies pures du jeu Γ , noté $\overline{v}(\Gamma)$ (ou simplement $\overline{v}$ quand il n'y a pas d'ambiguité sur le jeu joué) est la quantité

$$\overline{v} = \inf_{b \in B}(\sup_{a \in A} g(a,b))$$

Lorsque le sup et l' inf sont atteint dans la définition (par exemple si le jeu est fini), $\overline{v}$ est également appelé minmax du jeu.
L' $infsup$ $\overline{v}$ représente le paiement minimal que J_2 peut assurer quelque soit l'action de J_1.

$\overline{v}$ est caractérisé par

$$\begin{cases} \text{"}J_2 \textit{ garantit } \overline{v} \ \varepsilon\textit{ès "} : \forall\varepsilon > 0, \exists b \in B, \forall a \in A, g(a,b) \leq \overline{v} + \varepsilon \\ \quad \text{"}J_1 \textit{ défend } \overline{v} \ \varepsilon\textit{ès"} : \forall\varepsilon > 0, \forall b \in B, \exists a \in A, g(a,b) \geq \overline{v} + \varepsilon \end{cases}$$

Quand il y a un minmax (par exemple si le jeu est fini), ces inégalités sont vraies pour $\varepsilon = 0$.

De même, $\underline{v}$ est la "valeur" du jeu dans lequel le joueur 2 choisit d'abord son action b, qui est annoncée à J_1 , celui-ci choisissant alors son action a en fonction de b.

Pour tout jeu, $\underline{v} \leq \overline{v}$.

Démonstration.

Pour tout $a \in A$ et $b \in B$, on a

$$g(a,b) \leq \sup_{a' \in A} g(a',b)$$

. En fixant a et en prenant l'infimum sur b de cette inégalité, on trouve

$$\inf_{b \in B} g(a,b) \leq \inf_{b \in B}(\sup_{a' \in A} g(a',b)) = \overline{v}$$

Puisque ceci est vrai pour tout $a \in A$, en prenant le *sup* sur a de cette inégalité on trouve

$$v = \sup_{a \in A}(\inf_{b \in B} g(a,b)) \leq \overline{v}$$

□

***Définition* 1.1.3.**

Si $\underline{v} \leq \overline{v}$, on dit que le jeu a une valeur v en stratégies pures avec $v = \underline{v} \leq \overline{v}$.

Autrement dit, le jeu a une valeur v si chaque joueur peut garantir v (à ε près) quelque soit ce que fait l'autre. Si les joueurs "jouent bien", le résultat devrait être v.

1.1.3 Stratégies optimales

On va définir rigoureusement la notion de "bien jouer" dont on a parlé de façon informelle précédemment.

***Définition* 1.1.4.**

Pour $\varepsilon \geq 0$, on dit que $a \in A$ est ε-optimale pour J_1 si a lui garantit $\underline{v}$ - ε c'est à dire si

$$\forall b \in B, g(a,b) \geq \underline{v} - \varepsilon$$

Symétriquement, on dit que $b \in B$ est ε-optimale pour J_2 si a lui garantit $\underline{v} + \varepsilon$ c'est à dire si

$$\forall a \in A, g(a, b) \leq \overline{v} + \varepsilon$$

D'après la proposition 1.1.5, pour ε ¿ 0 il existe toujours une stratégie ε-optimale pour J_1 , et c'est la même chose pour J_2 . Il n'existe pas nécessairement de stratégie 0-optimale en général, mais il en existe forcément dès que les sup et inf sont atteints (par exemple si le jeu est fini)..

***Définition* 1.1.5.**

Un couple de stratégies $(a', b') \in A \times B$ est un point selle si

$$\forall a \in A, \forall b \in B, g(a, b') \leq g(a', b') \leq g(a', b)$$

Interprétation : aucun des deux joueurs n'a de déviation profitable.

S'il existe un point selle (a', b') alors le jeu a une valeur, a' et b' sont des stratégies optimales, et $v = g(a', b')$.

Démonstration. On a $g(a', b') \geq g(a, b')$ pour tout $a \in A$, donc

$$g(a', b') \geq \sup_{a \in A} g(a, b') \geq \inf_{b \in B} (\sup_{a \in A} g(a, b) = \overline{v}$$

Symétriquement, $g(a', b') \leq \underline{v}$. Or $\underline{v} \leq \overline{v}$ d'après la proposition 1.1.7, donc le jeu possède une valeur et $v = g(a', b')$. De plus pour tout $b \in B$, $g(a', b) \geq g(a', b') = v$ donc a'est optimale, et symétriquement b'est optimale.On peut également prouver une réciproque : □

Si un jeu a une valeur v , et si a' et b' sont des stratégies optimales , alors (a', b') est un point selle et $v = g(a', b')$.

Démonstration. Puisque le jeu a une valeur et comme a' est optimale, $g(a', b) \geq v$ pourtout b, et en particulier $g(a', b') \geq v$. Symétriquement $g(a', b') = v$ donc $g(a', b') = v$. En remplaçant v par $g(a', b')$ dans les définitions d'optimalité de a' et b' on retrouve alors la définition d'un point selle. □

L'intérêt des deux propositions ci-dessus est qu'elles relient une propriété jointe (être un point selle) à des propriétés unilatérales (être une stratégie optimale). On verra dans le chapitre suivant que quand on sort du cadre particulier des jeux à somme nulle une telle correspondance est impossible.

1.1.4 Stratégies dominées

***Définition* 1.1.6.**

$a' \in A$ est strictement(ou fortement) dominée par $a \in A$ si pour toute stratégie $b \in B$ du second joueur, $g(a', b) < g(a, b)$.
$a' \in A$ est faiblement dominée par $a \in A$ si pour toute stratégie $b \in B$ du second joueur, $g(a', b) \leq g(a, b)$ et si il existe une stratégie $b \in B$ telle que $g(a', b) < g(a, b)$.

Autrement dit : une stratégie a' est strictement dominée par a si a' est toujours strictement moins bonne que a. Elle est faiblement dominée si elle ne fait jamais strictement mieux, et fait parfois moins bien. Bien sûr une stratégie strictement dominée est faiblement dominée, mais l'inverse n'est pas forcément vrai.
On définit symétriquement le concept de stratégies dominées pour le second joueur 2 (il faut bien sûr renverser les inégalités).

1.2 Jeux à somme nulle en stratégies mixtes

Comme on l'a vu dans les exemples de la section précédente, des jeux très simples peuvent ne pas avoir de valeur en stratégies pures. Pour remédier à cela on va dans cette section permettre aux joueurs de choisir aléatoirement, selon la probabilité qu'il souhaite, l'action qu'ils vont jouer. Sauf mention explicite du contraire, tous les jeux considérés dans cette section sont des jeux finis.

1.2.1 Modèle

Soit donc $L = (A, B, g)$ un jeu avec A et B finis, de cardinaux k et l respectivement.
On note $X = \triangle (A)$ l'ensemble des stratégies mixtes sur A :

$$X = \{x_1 a_1 + x_2 a_2 + ... + x_k a_k, x_i \geq 0 \forall i, x_1 + ... + x_k = 1)$$

On définit de la même manière $Y = \triangle(B)$ l'ensemble des stratégies mixtes sur A.
Interprétation de la stratégie mixte $x_1\ a_1 = +\ x_2\ a_2 + ... +\ x_k\ a_k$: le premier joueur tireau hasard, selon la probabilité $(x_1, x_2, ... , x_k)$, l'action qu'il va jouer.On étend bilinéairement la fonction g à $X \times Y$

$$g(x, y) = \sum_{i,j} x_i y_j g(a_i, b_j)$$

En particulier

$$g(a,y) = \sum_j y_j g(a,b_j)$$

et

$$g(x,b) = \sum_i x_i g(a_i,b)$$

Interprétation : g représente l'espérance de gain lorsque les stratégies mixtes x et y sont jouées.

***Définition* 1.2.1.**

L'extension mixte de Γ est le jeu $\Gamma_\triangle = (X,Y,g)$.
Interprétation : les joueurs ont le droit de choisir aléatoirement leur action, et cherchent à maximiser (ou minimiser) l'espérance de gain.

Nous ferons toujours implicitement cette hypothèse d'utilité linéaire mais il faut avoir conscience qu'elle n'est pas toujours vérifiée en pratique. Si lors d'un tir au but il semble assez juste que les joueurs cherchent à maximiser (ou minimiser) la probabilité que le but soit marqué, les gens sont rarement indifférents entre les deux événements "gagner à coup sûr dix millions d'euros" et "avoir une chance sur deux de gagner 20 millions d'euros" .

1.2.2 Valeur en stratégies mixtes

***Définition* 1.2.2.**

Le maxmin de Γ en stratégies mixtes est $\underline{V}(\Gamma) = \underline{v}(\Gamma_\triangle)$. De même le minmax de Γ en stratégies mixtes est $\overline{V}(\Gamma) = \overline{v}(\Gamma_\triangle)$. Si $\underline{V}(\Gamma) = \overline{V}(\Gamma)$ on dit que le jeu Γ a une valeur $V(\Gamma)$ en stratégies mixtes, avec
$\underline{V}(\Gamma) = \overline{V}(\Gamma) = V(\Gamma)$.

On peut bien parler de maxmin et de minmax puisque X et Y sont compacts et g est continue.

1.2.3 Propriétés des stratégies optimales

Les propriétés suivantes sont vraies.
a) Tout jeu fini admet un point selle (en stratégies mixtes) :

$\exists(x', y') \in X \times Y$ tel que

$$g(x, y') \leq g(x', y') \leq g(x', y)\forall x \in X, \forall y \in Y$$

b) Tout point selle vérifie $g(x', y') = V$.
c) (x', y') est un point selle si et seulement si

$$g(a, y') \leq g(x', y') \leq g(x', b)\forall a \in A, \forall b \in B$$

d) Si (x', y') est un couple de stratégies optimales, et si x'_i¿ 0, alors
$g(a_i, y') = V$.
e) Si (x', y') est un couple de stratégies optimales, et si x'_i¿ 0 et x'_j¿ 0, alors
$g(a_i; y') = g(a_j, y')$.

1.2.4 Stratégies dominées par une stratégie mixte

La proposition suivante permet d'éliminer une infinité de stratégies mixtes d'un coup lorsqu'une stratégie pure est dominée par une stratégie mixte.

Supposons la stratégie pure $a_i \in A$ dominée strictement par la stratégie mixte $x \in X$

$$g(a_i, y) \leq g(x, y)\forall y \in Y$$

Alors le jeu Γ et le jeu $\Gamma' = (A \backslash a_i, B, g)$ dans lequel on a éliminé l'action pure a_i ont la même valeur en stratégies mixtes, et les mêmes stratégies optimales.

Chapitre 2

Jeux à n joueurs

Dans ce chapitre on considère le cadre plus vaste des jeux à n joueurs ; on va voir que certaines notions du chapitre précédent peuvent se généraliser et d'autres non. Comme dans le chapitre précédent, on commencera par étudier le cas des jeux en stratégies pures avant de s'intéresser aux stratégies mixtes.

2.1 Jeux en stratégies pures

2.1.1 Modèle

Formellement, un jeu sous forme normale $\Gamma = (N, (A^i)_{i \in N}, (g^i)_{i \in N})$ est la donnée
– d'un ensemble de joueurs N , que l'on supposera toujours fini. Par abus de notation on notera également N son cardinal ,
– de N ensembles non vides A^i, A^i étant l'ensembles d'actions du joueur i
– de N fonctions bornées $g^i : \prod_{j \in N} A^j \to \mathbb{R}, g^i$ étant la fonction de paiement du joueur i.
Interprétation : chaque joueur joue une fois, et indépendamment des autres, en choisissant une stratégie dans son ensemble d'actions. Il cherche à maximiser sa fonction de On verra plus loin que pour que les concepts mathématiques que l'on va définir fassent sens d'un point de vue pratique, il faut généralement supposer de plus que chaque joueur connait le jeu, est rationnel, sait que tout le monde est rationnel, sait que tout le monde sait que tout le monde est rationnel, et ainsi de suite.

2.1.2 Exemples

Lorsque $N = 2$ et A^1 et A^2 sont des ensembles finis, on peut représenter le jeu par une matrice comme dans le cas d'un jeu à somme nulle , la différence étant qu'il faut écrire dans chaque case de la matrice à chaque fois le paiement du joueur 1 et celui du joueur 2.

(La guerre des sexes).
Amandine et Bernard doivent décider de manière indépendante s'ils vont voir un match de Football ou à l'Opéra. Ils sont amoureux transis et l'objectif principal de chacun est donc de retrouver l'autre : s'ils ne font pas le même choix ils ont tous deux une utilité de 0. Amandine préfère le Foot à l'Opéra : son utilité est de 2 si elle va au Foot avec Bernard, et de 1 s'ils vont à l'Opéra. Bernard a des préférences inverses. Le jeu se met sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} F^B & O^B \end{array} \\ \begin{array}{c} F^A \\ O^A \end{array} & \begin{pmatrix} 2,1 & 0,0 \\ 0,0 & 1,2 \end{pmatrix} \end{array}$$

(La guerre des sexes avec préférence commune).
Même situation que dans l'exemple précédent mais Bernard et Amandine préfèrent tous les deux le Foot.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} F^B & O^B \end{array} \\ \begin{array}{c} F^A \\ O^A \end{array} & \begin{pmatrix} 2,2 & 0,0 \\ 0,0 & 1,1 \end{pmatrix} \end{array}$$

(La guerre des sexes avec préférence commune et très marquée).
Même situation que dans l'exemple précédent mais Bernard et Amandine n'aiment vraiment pas l'Opéra.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} F^B & O^B \end{array} \\ \begin{array}{c} F^A \\ O^A \end{array} & \begin{pmatrix} 2,2 & 0,0 \\ 0,0 & 0,0 \end{pmatrix} \end{array}$$

(La guerre des sexes avec amour non réciproque).
Les paiements de Bernard sont les mêmes que dans le premier exemple mais désormais on suppose qu'Amandine est indifférente à ce que fait Bernard : son paiement est de 2 si elle va au Foot, et de 1 à l'Opéra.

(La guerre des sexes avec amour/haine).
Les paiements de Bernard sont les mêmes que dans le premier xemple mais Amandine commence à en avoir vraiment assez de voir Bernard : son paiement est de 0 si elle se trouve avec lui.

(Dilemme du prisonnier).
Pour financer leurs nombreuses activités culturelles des exemples précédents, Amandine et Bernard ont fait un braquage qui a mal tourné et se retrouvent en cellule en de Dénoncer leur complice. S'ils se taisent tous les deux les juges ne peuvent rien prouver et ils prennent chacun juste une peine de six mois de prison pour port d'arme (utilité de3). Si chacun dénonce l'autre, ils prennent tous deux 5 ans de prison (utilité de 1). Si un seul dénonce l'autre, il est récompensé en étant libéré sur le champ pour sa coopération avec la justice (utilité de 4) tandis que son complice prend une peine de 8 ans de prison (utilité de 0).

(Dilemme du prisonnier avec mesures de rétorsion).
Même situation que dans l'exemple précédent mais les gens qui dénoncent s'expose à de menus désagréments à leur sortie... Si l'un (ou les deux) dénonce son complice il a une utilité de 2 de

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} F^B & O^B \end{array} \\ \begin{array}{c} F^A \\ O^A \end{array} & \begin{pmatrix} 2,1 & 2,0 \\ 1,0 & 1,2 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} F^B & O^B \end{array} \\ \begin{array}{c} F^A \\ O^A \end{array} & \begin{pmatrix} 0,1 & 2,0 \\ 1,0 & 0,2 \end{pmatrix} \end{array}$$

moins par rapport à l'exemple précédent.

Quand il y a 3 joueurs, on peut représenter le jeu de manière similaire mais il y a 3 paiements par case (celui de chaque joueur) et il y a plusieurs matrices (le joueur 3 choisit la matrice).

(Jeu de minorité)
Amandine, Bernard et Camille choisissent simultanément de réviser à la Bibliothèque ou dans la salle Informatique. Si quelqu'un est tout seul il peut réviser (utilité de 1), sinon il est distrait et n'y arrive pas (utilité de 0).

2.1.3 Équilibres en stratégies dominantes

Comme pour les jeux à somme nulle, on dira que
– $b^i \in A^i$ est strictement (ou fortement) dominée par $a^i \in A^i$ si pour tout profil de stratégie des autres joueurs $a^{-i} \in A^{-i}, g^i(b^i, a^{-i}) < g^i(a^i, a^{-i})$.
– $b^i \in A^i$ est faiblement dominée par $a^i \in A^i$ si pour toute profil de stratégie des autres joueurs $a^{-i} \in A^{-i}, g^i(b^i, a^{-i}) \leq g^i(a^i, a^{-i})$ et pour un profil des autres joueurs, $g^i(b^i, a^{-i}) < g^i(a^i, a^{-i})$.
La notion suivante est également très importante :

***Définition* 2.1.1.**

La stratégie $a^i \in A^i$ est une meilleure réponse du joueur i au profil de stratégie des autres joueurs $a^i \in A^i$ si pour toute autre stratégie $b^i \in A^i$, $g^i(b^i, a^{-i}) \leq g^i(a^i, a^{-i})$, c'est à dire si

$$g^i(a^i, a^{-i}) = \max_{b^i \in A^i} g^i(b^i, a^i)$$

Si le jeu est fini il y a toujours au moins une meilleure réponse à un profil donné mais il n'y a aucune raison pour qu'il y en ait une seule. Une stratégie d'un joueur est dite dominante si elle est toujours meilleure réponse, ou, ce qui est équivalent, si elle domine faiblement toutes les autres stratégies

***Définition* 2.1.2.**

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} T^B & D^B \end{array} \\ \begin{array}{c} T^A \\ D^A \end{array} & \begin{pmatrix} 3,3 & 0,4 \\ 4,0 & 1,1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} T^B & D^B \end{array} \\ \begin{array}{c} T^A \\ D^A \end{array} & \begin{pmatrix} 3,3 & 0,2 \\ 2,0 & -1,-1 \end{pmatrix} \end{array}$$

La stratégie $a^i \in A^i$ est dominante si $g^i(b^i, b^{-i}) \leq g^i(a^i, b^{-i})$ pour tout profil de stratégies $b \in A$. Un équilibre en stratégies dominantes est un profil d'action $a \in A$ tel que pour tout joueur i , a^i est dominante.

Un joueur n'a pas forcément de stratégie dominante (et il n'y a donc pas forcément d'équilibre en stratégies dominantes). Si un joueur a une stratégie dominante elle est en un certain sens unique : si a^i et b^i sont toutes deux dominantes il est immédiat qu'elles donnent le même paiement pour tout profil d'actions des autres joueurs, elles sont donc stratégiquement équivalentes.

Interprétation pratique : si un équilibre en stratégie dominante existe il est clair que ce devrait être l'issue du jeu dès que les joueurs sont rationnels et connaissent leur propre fonction de paiement. Cependant, un tel équilibre existe rarement : il faut que chaque joueur ait une stratégie qui soit la meilleure quelque soit le choix des autres.

2.1.4 Équilibres de Nash

La notion suivante, qui généralise celle de point-selle vue dans le chapitre précédent, joue un rôle central en théorie des jeux

***Définition* 2.1.3.**

Un équilibre de Nash(en stratégies pures) est un profil d'actions $a \in A$ tel que pour tout joueur i, l'action a^i soit une meilleure réponse au profil a^{-i} :

$$\forall i, \forall b^i \in A^i, g^i(a^i, a^{-i}) \geq g^i(b^i, a^{-i})$$

Interprétation pratique : les équilibres de Nash sont les seuls profils sur lesquels les joueurs peuvent se mettre d'accord. Ce sont les seuls profils stables : a est un équilibre de Nash si chaque joueur est content de son action a posteriori. Une autre interprétation est celle d'un médiateur extérieur qui recommande de manière publique un profil a. Si a est un équilibre de

$$\begin{array}{ccc} & B^B & I^B \\ \begin{array}{c} B^A \\ I^A \end{array} & \multicolumn{2}{c}{\begin{pmatrix} 0,0,0 & 0,1,0 \\ 1,0,0 & 0,0,1 \end{pmatrix}} \\ & \multicolumn{2}{c}{B^C} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} & B^B & I^B \\ \begin{array}{c} B^A \\ I^A \end{array} & \multicolumn{2}{c}{\begin{pmatrix} 0,0,1 & 1,0,0 \\ 0,1,0 & 0,0,0 \end{pmatrix}} \\ & \multicolumn{2}{c}{I^C} \end{array}$$

Nash et si chaque joueur pense que les autres vont suivre la recommandation, il n'a pas intérêt à dévier lui non plus : il n'y a pas de déviation unilatérale profitable.

Tout équilibre en stratégie dominantes est un équilibre de Nash.

***Théorème* 2.1.1.** *(Glicksberg-Nash)*
Soit $\Gamma = (N, (A^i)_{i\in N}, (g^i)_{i\in N})$ un jeu tel que pour chaque joueur i,
– A^i est un sous ensemble convexe et compact d'un espace euclidien.
– La fonction de paiement g^i est continue.
– Pour tout profil $a^{-i} \in A^{-i}$, la fonction $a^i \to g^i(a^i, a^{-i})$ est concave.
Alors possède un équilibre de Nash en stratégies pures.
Il faut bien voir que ce théorème ne s'applique pas au cas fini, puisque les ensembles d'actions ne sont alors pas convexes.

2.1.5 Élimination des stratégies dominées

Soit Γ un jeu et b^i une stratégie faiblement dominée du joueur i .Soit Γ' le jeu obtenur à partir de en éliminant la stratégie b^i. Alors tout équilibre de Γ' est un équilibre de Γ . Si de plus b^i est strictement dominée, alors Γ et Γ' ont les mêmes équilibres.

Démonstration.

On suppose que b^i est faiblement dominée par c^i . Soit a un équilibre de Γ' et supposons que a n'est pas un équilibre dans Γ . Un joueur a donc une déviation profitable. Si ce n'est pas le joueur i, alors il a également une déviation profitable dans Γ' d'où la contradiction. Donc le joueur i a une déviation profitable, qui est nécessairement b^i puisque les autres actions peuvent être jouées dans Γ'. On a donc

$$g^i(a^i, a^{-i}) < g^i(b^i, a^{-i}) \leq g^i(c^i, a^{-i})$$

et c^i est donc une déviation profitable dans le jeu Γ', d'où la contradiction.Supposons maintenant que b^i est strictement dominée par c^i . Soit a un un équilibre deΓ et montrons que a est un équilibre de Γ'. On a nécessairement $a^i \neq b^i$ car sinon c^i serait une déviation profitable dans Γ . Donc le profil a est jouable dans le jeu Γ', et il ne peut pas y avoir de déviation profitables

puisqu'il n'y en a pas dans le jeu Γ et qu'il y a moins de déviations possibles dans Γ' que dans Γ .
Ceci permet d'appliquer ce qu'on appelle l'élimination itérée des stratégies strictement dominées. Quand on cherche l'ensemble des équilibres d'un jeu, on peut éliminer toutes les stratégies strictement dominées d'un joueur ; puis toutes les stratégies strictement dominées dans ce nouveau jeu, et ainsi de suite.

□

2.2 Jeux en stratégies mixtes

Comme dans le cas des jeux à somme nulle, nous allons désormais permettre aux joueurs de choisir leur action de manière aléatoire. Dans toute cette section les jeux considérés sont finis.

2.2.1 Modèle

Soit $\Gamma = (N, (A^i)_{i\in N}, (g^i)_{i\in N})$ un jeu. Pour tout i on suppose A^i fini et on note $X^i = \triangle(A^i)$ l'ensemble des probabilités sur A^i. On écrit un élément de X^i comme $x^i = \sum_{a^i \in A^i} x^i(a^i)a^i$ et on étend multilinéairement chaque g^i (hypothèse d'utilité linéaire) :

$$g^i(x^1, ..., x^N) = \sum_{(a\in A)} x^1(a^1)....x^N(a^N)g^i(a^1, ..., a^N)$$

On note $X = \prod_{i\in N} X^i = \prod_{i\in N} \triangle(A^i)$ l'ensemble des profils de stratégies mixtes, et $X^i = \prod_{j\in N, j\neq i} X^j$ l'ensemble des profils de stratégies mixtes des joueurs autres que i.

***Définition* 2.2.1.**

L'extension mixte de Γ est le jeu $\Gamma_\triangle = (N, (X^i)_{i\in N}, g^i)_{i\in N})$. Un équilibre de Nash en stratégies mixtes de Γ est un équilibre de Nash en stratégies pures de$\Gamma_\triangle$.
Interprétation : chaque joueur, s'il connait les probabilités choisies par ses adversaires, est content de la probabilité qu'il a choisie. Bien entendu cela ne veut pas dire que chaque joueur sera content pour toutes les réalisations possibles, seulement qu'aucun joueur n'a intérêt à dévier avant de connaître les réalisations des différentes stratégies mixtes

2.2.2 Théorème de Nash

Le but de cette section est de démontrer le

***Théorème* 2.2.1.**

(Théorème de Nash, 1950) Tout jeu fini admet un équilibre en stratégies mixtes.

Commençons par quelques définitions. Si Y et Z sont deux ensembles, une correspondance F de Y dans Z , notée $F : Y \rightrightarrows Z$, est une fonction de Y dans $P(Z)$, l'ensemble des parties *de Z . pour tout $y \in Y$, $F(y) \subset Z$. Le graphe d'une correspondance F est $Gr(F) = f(y, z) \in Y \times Z, z \in F(y))$.*

Pour tout jeu et pour tout joueur $i \in N$, on définit la correspondance de meilleure réponse (en stratégies mixtes) du joueur i, $BR^i : X^{-i} \rightrightarrows X^i$ par :

$$BR^i(x^{-i} = y^i \in X^i, g^i(y^i, x^{-i}) = \max_{z^i \in X^{-i}} g^i(z^i, x^{-i})$$

On admettra le théorème de point fixe suivant :

***Théorème* 2.2.2.**

Soit Y un convexe compact non vide d'un espace euclidien,
et $F : Y \rightrightarrows Y$ une correspondance telle que
– son graphe $Gr(F)$ est compact.
– Pour tout $y \in Y$, $F(y)$ est un convexe compact non vide.
Alors F admet un point fixe : il existe $y' \in Y$, $y' \in F(y')$.
On peut maintenant démontrer le théorème de Nash.

Démonstration. Démonstration du théorème de Nash.

Soit X l'ensemble des profils de stratégies mixtes. On définit la correspondance de meilleure réponse $BR : X \rightrightarrows X$ par

$$BR(x) = y \in X, \forall i \in N, y^i \in BR^i(x^i) = \prod_{i \in N} BR^i(x^i)$$

où BR^i est la correspondance de meilleure réponse du joueur i définie dans l'exemple .$BR(x)$ est donc l'ensemble des profils de stratégies y tel que pour tout joueur i,y^i est une meilleure réponse à x^{-i} . Un point fixe de BR est donc un profil x tel que pourtout joueur i, x^i est une meilleure réponse à x^{-i}, c'est à dire un équilibre de Nash (enstratégies mixtes). Le théorème de Nash sera donc démontré pour vu qu'on vérifie que la correspondance BR satisfait les hypothèses du théorème de Kakutani. Notons tout d'abord que pour tout i, $X^i = \triangle\ (A^i)$ est un convexe compact ; X est donc un produit fini d'ensembles convexes compact et par conséquent convexe et compact également. On remarque en suite que pour tout i et tout x^{-i} , la fonction $y^i \to g^i(y^i, x^{-i})$ est une forme linéaire continue et définie sur un ensemble compact. Par conséquent, l'ensemble $BR^i(x^i)$ sur lequel elle prend son maximum est compact convexe et non vide. L'ensemble produit $BR(x)$ est donc également compact convexe et non vide. Il reste à démontrer que le graphe de BR est fermé. Soit donc une suite $(x_n, y_n) \in Gr(BR)$ telle que $x_n \to_{n \mapsto +\infty} x$ et $y_n \to_{n \to +\infty} y$. Par définition de BR, pour tout tout entier n, tout joueur i, et toute stratégie mixte $z^i \in X^i$,

$$g^i(y^i_n, x^{-i}_n) \geq g^i(z^i, x^{-i}_n)$$

Par continuité, en faisant tendre n vers $+\infty$, on trouve que pour tout joueur i et pour toute stratégie mixte $z^i \in X^i$,

$$g^i(y^i, x^{-i}) \geq g^i(z^i, x^{-i})$$

et $(x, y) \in Gr(BR)$.

$\square$

Deuxième partie
Jeux sous forme extensive

On a vu que les jeux sous forme normale modélisaient des situations dans lesquelles les joueurs jouaient une seule fois et tous en même temps. Dans cette partie on cherche à modéliser des interactions avec une structure dynamique (c'est à dire que le temps joue un rôle) :
– Les joueurs peuvent jouer plusieurs fois
– Ils peuvent jouer en même temps ou non
– Ils peuvent avoir des informations (ou non) sur les coups précédents des autres joueurs, sur les objectifs des autres joueurs.
La plupart des jeux usuels peuvent être modélisés comme des jeux sous forme extensive : échecs, backgammon, monopoly, poker etc...

Chapitre 3

Jeux à information parfaite

Sauf mention explicite du contraire tous les ensembles de ce chapitre sont supposés finis.

3.1 Modèle

Un jeu à information parfaite est un jeu dans lequel les joueurs jouent les uns après les autres, et où tout le monde sait tout, observe tout, et se rappelle de tout. Pour simplifier on suppose également pour le moment que le hasard ne joue aucun rôle .
Par exemple : les échecs, les dames. Par contre le poker n'est pas un jeu à information parfaite (information privée sur les cartes en main), pas plus que le jeu du penalty de la première partie (les joueurs jouent simultanément). Le monopoly ou le backgammon sont des jeux à information parfaite mais avec hasard, donc n'entrent pas non plus dans le modèle ci-dessous.

3.1.1 Arbre

Un arbre $\mathcal{A}$ est un triplet (Z, r, θ) où :
– Z est un ensemble fini de nœuds,
– r est un nœud particulier appelé racine,
– $\theta : Z \backslash r \ \rightarrow Z$ est l'application prédécesseur,
– tous les nœuds sont reliés à la racine : $\forall z \in Z, \exists n \in N, \theta^n(z) = r$ (où dit d'une manière équivalente : il n'y a pas de cycle).
On note $\mathcal{S}\ (z) = (z\text{'} \in P, \theta(z\text{'}) = z\ )$ l'ensemble des successeurs de p. L'ensemble des nœuds sans successeurs est notés T : c'est l'ensemble des nœuds terminaux. L'ensemble $Z \backslash T$ des nœuds non terminaux est noté Q.

3.1.2 Arbre de décision

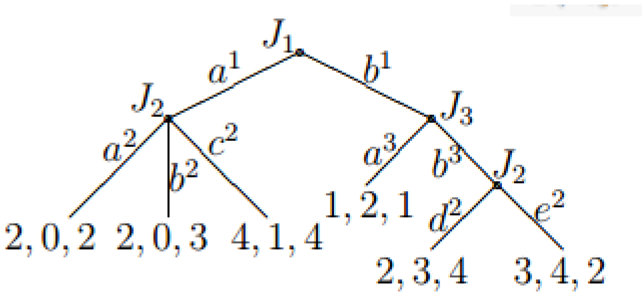
Un jeu sous forme extensive à information parfaite Λ est un arbre de décision, c'est à dire :
– un ensemble fini **N** de joueurs,

– un arbre $\mathcal{A}$,
– une partition des nœuds non terminaux $Q = \bigsqcup_{i=1}^{N} Q^i$,
– pour chaque joueur i une fonction de paiement $g^i : T \to \mathbb{R}$.

3.1.3 Déroulement du jeu

Le jeu commence à la racine : le joueur i_1 tel que $r \in Q^{i_1}$ joue en choisissant unsuccesseur $z_1 \in \mathcal{S}(r)$. C'est ensuite au tour du joueur i_2 tel que $z_1 \in Q^{i_2}$ de jouer en choisissant un successeur $z_2 \in \mathcal{S}(z_1)$ et ainsi de suite. Lorsqu'on atteint un nœud terminal $z_k \in$ T le jeu s'arrête. Le paiement du joueur i est alors donné par $z^i(p_k)$.

L'arbre de décision ci-dessous représente un jeu à trois joueurs sous forme extensive.



3.2 Réduction sous forme normale

On va voir dans cette section que, bien que les jeux à information parfaite font intervenir le temps, on peut les exprimer comme des jeux sous forme normale. L'idée est que chaque joueur, avant que le jeu ait commencé, peut décider ce qu'il va faire dans chacun des nœuds qu'il contrôle.
Formellement, une stratégie du joueur i est une fonction σ_i de Q_i dans Z telle que pour tout $z \in Q^i$, $\sigma^i(z) \in \mathcal{S}(z)$; on note σ^i l'ensemble de telles stratégies du joueur i. On associe à tout profil de stratégies $\sigma = (\sigma^1, ..., \sigma^N)$ un nœud terminal $\widetilde{z}$ (le nœud auquel on arrive si les joueurs jouent suivant σ) et pour tout i on définit g^i (σ) comme étant égalà $g^i(\widetilde{z})$. Ceci permet d'associer à tout jeu sous forme extensive à information parfaite le jeu sous forme normale $\Gamma = (N, (\sigma^i)_{i\in N}, (g^i)_{i\in N})$. On appelle la forme normale associée, ou la réduction sous forme normale.
La forme normale associée est toujours un jeu fini, mais pour certains jeux usuels, cette forme normale associée peut être gigantesque ! Par exemple dans le cas des échecs, un joueur a en moyenne nettement plus de dix actions possibles à chaque coup. Même en obligeant le jeu à se terminer après 50 coups par joueur, cela fait 1050 actions pour chaque joueur dans la forme normale associée, soit le nombre d'atomes constituant la Terre...

3.3 Equilibres de Nash

***Définition* 3.3.1.**

Un équilibre de Nash d'un jeu sous forme extensive est un équilibre de Nash de sa forme normale associée.

Tout jeu sous forme extensive à information parfaite et sans hasard admet un équilibre en stratégies pures.

On va montrer un résultat plus fort dans la section suivante, on se passe donc de démonstration pour le moment. Un corollaire trivial mais intéressant est

Soit un jeu sous forme extensive à deux joueurs, à somme nulle, à information parfaite et sans hasard. Alors le jeu a une valeur, et cette valeur est le paiement d'un des nœuds terminaux. En particulier :

– si les seules issues du jeu sont "J_1 gagne" et "J_2 gagne", alors un des joueurs a unestratégie gagnante à coup sûr.
– si les seules issues du jeu sont "J_1 gagne" , "J_2 gagne" et "match nul", alors soit un des joueurs a une stratégie gagnante à coup sûr, soit chaque joueur peut s'assurer de faire au moins match nul.

3.4 Équilibres sous-jeux parfaits

***Définition* 3.4.1.**

Pour tout $z \in Q$, le sous-jeu Λ_z de Λ est le jeu sous forme extensive dans lequel on ne garde que l'arbre issu de p :
– l'ensemble de joueurs N est le même que dans Λ,
– l'ensemble des nœuds $Z_z$est constitué de z , de ses successeurs, des successeurs de ses successeurs...
– la racine est z ,
– $T_z = T \bigcap Z_z$, $Q_p = Q \bigcap Z_z$, $Q^i_p = Q^i \bigcap Z_z$, $g^i_z = g^i_{|T_z}$.

On remarque qu'en particulier $\Lambda_r = \Lambda$: le jeu est un sous-jeu de lui même.
Tout profil de stratégies pures dans Λ induit naturellement un profil de stratégies pures dans chaque sous-jeu (en considérant la restriction au sous-jeu de chaque stratégie)

***Définition* 3.4.2.**

Un profil de stratégies pures de Λ est un sous-jeu parfait (ou parfait en sous-jeux) si c'est un équilibre de Nash dans chaque sous-jeu de Λ .

A cause de la remarque précédente, tout équilibre sous-jeu parfait est nécessairement un équilibre de Nash, mais la réciproque est fausse en général.

(Kuhn Zermelo 1913)

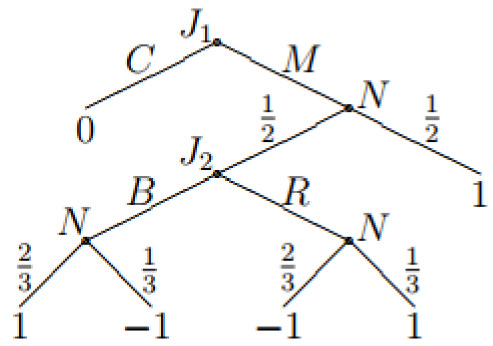
Tout jeu sous forme extensive à information parfaite et sans hasard admet un équilibre sous-jeu parfait en stratégies pures.

Démonstration. La démonstration se fait par récurrence sur le nombre k de nœuds. Si $k = 1$ personne ne joue et le résultat est trivial. Supposons donc le résultat vrai pour tout jeu avec strictement moins de k nœuds et soit Λ un jeu avec k nœuds. On note $i_0$le joueur qui joue à la racine ($r \in Q^i$). On considère les sous-jeux issus des successeurs de la racine : pour tout $z_j \in \mathcal{S}(r)$, soit σ_{z_j} un équilibre sous-jeu parfait de Λ_{z_j} (il existe d'après l'hypothèse de récurrence) et notons $g^{i_0}(z_j)$ le paiement du joueur i_0 dans cet équilibre.
D'après les hypothèses faites sur l'arbre (un seul prédécesseur, et tout les nœuds sonts reliés à la racine), chaque nœud autre que r appartient à un et un seul de ces sous-jeux. On peut donc définir un profil de stratégie σ de la manière suivante :
– Pour tout joueur i et tout nœud autre que la racine $z \in Q^i$, soit $z_j$tel que z est unnœud de Λ_{z_j}. Au nœud σ_{z_i} choisit le même successeur que $\sigma^i_{z_j}$.
– A la racine, σ^{i_0} choisit z_j qui maximise $g^{i_0}(z_j)$.
Montrons que ce profil σ est un équilibre sous-jeu parfait de Λ. Soit donc $z \in Q$ un nœud non terminal, et montrons que σ est un équilibre de Nash de Λ_z . Si z n'est pas laracine, soit z_j tel que $z \in \Lambda_{z_j}$. La restriction de σ à Λ z_j est σ_{z_j} par construction, et on a supposé que σ_{z_j} est un équilibre sous-jeu parfait de Λ_{z_j} , σ est donc bien un équilibre de Nash de Λ_z .
Il reste donc juste à démontrer que σ est un équilibre de Nash du jeu Λ. Puisqu'on vient de démontrer que σ induit un équilibre de Nash dans tout sous-jeu strict, aucun joueur ne peut avoir de déviation profitable dans un nœud autre que la racine. Et d'autre part, la construction de σ à la racine implique que le joueur i_0 n'a pas de déviation profitable à la racine.
La construction utilisée dans la démonstration est appelée "induction en amont" ou "induction à rebours", elle permet de calculer explicitement les équilibres sous-jeux parfaits en partant des nœuds terminaux et en remontant l'arbre. □

3.5 Avec hasard

Pour de nombreuses modélisations il peut être utile d'introduire des aléas exogènes. Ceci se fait en rajoutant dans l'arbre le joueur 0, appelé "Hasard" ou "Nature". Ce joueur n'a pas de fonction de paiement, et aux nœuds qu'il contrôle joue selon une loi de probabilité connue de tous. Tous les concepts de ce chapitre s'étendent facilement (pour la réduction sous forme normale la fonction de paiement d'un joueur est bien entendu son espérance de gain), et tous les résultats sont encore vrais .

On considère le jeu à deux joueurs et à somme nulle suivant. Le joueur 1 choisit de se Coucher (partie nulle) ou de Miser. S'il mise, on tire à pile ou face : si c'est pile le jeu s'arrête et le Joueur 1 gagne. Si c'est face, c'est au joueur 2 de jouer en choisissant Blanc ou Rouge. On mélange ensuite une boule blanche et deux rouges et onen tire une au hasard. Si le Joueur 2 avait deviné juste il gagne, sinon c'est le Joueur 1 qui gagne. La forme extensive de ce jeu est représentée ci-dessous.



Bibliographie

[1] J.VON NEUMANN, O.MORGENSTERN *La théorie des jeux et le comportement économique.*

[2] JOHN F. NASH JR : *Non Cooperatif Games..*

[3] MURAT YILDIZOGLU : *Introduction à la théorie des jeux (*$2^{éme}$ *édition)...*

[4] Abdelhamid hamoudi : *Application de la théoreme de jeux à l'économie publiée et industrielle .*

Bibliographie.