كلية العلوم و التقنيات فاس
ⵜⴰⵖⵉⵡⴰⵏⵜ ⵏ ⵜⵙⴰⵙⵏⵉⵡⵉⵏ ⴷ ⵜⵉⵏⵉⵇⵉⵏ
Faculté des Sciences et Techniques de Fès

جامعة سيدي محمد بن عبد الله
Université Sidi Mohamed Ben Abdellah

Licence Sciences et Techniques (LST)

CALCUL SCIENTIFIQUE ET APPLICATIONS

MEMOIRE DE FIN D'ETUDES

Pour l'obtention du Diplôme de Licence Sciences et Techniques

Espace Hermitien

Présenté par :

- **Zaraoui Mohamed**

Encadré par :

- **Pr Najib Mahdou (FST Fès)**

Soutenu Le 12 Juin 2019 devant le jury composé de:

- **Pr Najib Mahdou (FST Fès)**
- **Pr Lahcen Oukhtite (FST Fès)**
- **Pr Rahmouni Hassani Aziza (FST Fès)**

Année Universitaire 2018 / 2019

FACULTE DES SCIENCES ET TECHNIQUES FES – SAISS
B.P. 2202 – Route d'Imouzzer – FES
☎ 212 (0)5 35 61 16 86 – Fax : 212 (0)5 35 60 82 14
Site web : http://www.fst-usmba.ac.ma

Remerciement

Au terme de ce travail, Je tiens à remercier mon encadrant le professeur **Najib Mahdou**, qui a proposé ce sujet, et qui a bien voulu encadrer ce modeste travail. Je lui exprime aussi ma gratitude pour son dévouement et le temps qu'il ma consacré.

Je remercie aussi messieurs les membres du jury :

. **Pr. Mahdou Najib FST Fès.**

. **Pr. Oukhtite Lahcen FST Fès.**

. **Pr. Rahmouni Hassani Aziza FST Fès.**

Mes remerciements vont également tous mes professeurs du département de mathématiques.

Enfin, je remercie ma famille, et surtout mes parents, qui mont toujours soutenu durant mes études.

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION

Dans le monde du mathématiques,un espace hermitien est un espace vectoriel sur le corps commutatif des complexes de dimension finie muni d'un produit scalaire hermitien.la géométrie d'un tel espace est analogue à celle d'un espace euclidien.De nombreuses propriétés sont communes aux deux structures.Ainsi les majorations caractéristiques comme l'inégalité de **Cauchy-Schwarz**, **inégalité triangulaire** et **l'algorithme de Gram-Schmidt** sont toujours valables, la projection orthogonale et l'existence d'isomorphisme canonique entre un espace vectoriel hermitien et son dual.

Un espace hermitien de dimension n est aussi un espace euclidien de dimension 2n, en conséquence les propriétés topologiques sont exactement les mêmes.Cette structure doit son nom au mathématicien français ***Charles Hermite*** .

Nous rappelons en premier chapitre des notions préliminaire de formes sesquilinéaires hermitiennes, formes quadratiques, et le produit scalaire hermitien ; Leurs définitions et propriétés.
Dans le deuxième chapitre on expose la notion d'espace hermitien,la notion d'orthogonalisation c'est-à-dire les familles, les bases orthogonale,la projection orthogonale et les deux méthodes fondamentaux dans la notion d'orthogonalisation : **Gauss** et **Gram-Schmidt** et l'existence d'un isomorphisme canonique entre un espace vectoriel hermitien et son dual, et les endomorphismes d'un espace hermitien, en particulier les endomorphismes adjoints, les endomorphismes unitaires, les endomorphismes normaux, et les endomorphismes hermitiens.

CHAPITRE 1

PRÉLIMINAIRE

1.1 forme sesquilinéaire

Dans tout ce chapitre E désigne un espace vectoriel de dimension fini sur $\mathbb{C}$

1.1.1 Définitions et exemples

Définition 1.1

• *on dit qu'une application* u *de* E *dans* E *est linéaire si pour* $x, y \in E$*, et* $\lambda \in \mathbb{C}$*, on a :*
$u(x + \lambda y) = u(x) + \lambda u(y)$
• *On dit qu'une application* u *de* E *dans* E *est semi-linéaire si pour* $x, y \in E$ *et* $\lambda \in \mathbb{C}$*, on a :*
$u(x + \lambda y) = u(x) + \bar{\lambda} u(y)$

Définition 1.2

On appelle une forme sesquilinéaire sur E *une application* f *de* $E \times E$ *dans* $\mathbb{C}$ *vérifiant les propriétés suivantes :*
• f *est linéaire à droite :*
$\forall x, y, y' \in E$*, et* $\lambda \in \mathbb{C}$ *on a :* $f(x, y + \lambda y') = f(x, y) + \lambda f(x, y')$
• f *est semi-linéaire à gauche :*
$\forall x, x', y \in E$*, et* $\lambda \in \mathbb{C}$ *on a :* $f(x + \lambda x', y) = f(x, y) + \bar{\lambda} f(x', y)$

Exemples :

1) Si f et g sont deux formes C-linéaires sur E,L'application :

$$\begin{aligned}\varphi : E \times E &\to \mathbb{C}\\ (x,y) &\longmapsto \overline{f(x)}g(y) + \overline{g(x)}f(y),\end{aligned}$$

est une forme sesquilinéaire sur E^2. En effet :

* $\varphi(x, y+\lambda y') = \overline{f(x)}g(y+\lambda y') + \overline{g(x)}f(y+\lambda y')$
$\qquad = \overline{f(x)}[g(y)+\lambda g(y')] + \overline{g(x)}[f(y)+\lambda f(y')]$(f et g sont linéaire).

  D'où, $\varphi(x, y+\lambda y') = \overline{f(x)}g(y) + \lambda\overline{f(x)}g(y') + \overline{g(x)}f(y) + \lambda\overline{g(x)}f(y')$
  $\qquad = \overline{f(x)}g(y) + \overline{g(x)}f(y) + \lambda[\overline{f(x)}g(y') + \overline{g(x)}f(y')]$
  $\qquad = \varphi(x,y) + \lambda\varphi(x,y')$.

  alors, pour $x \in E$ fixé : $\varphi(x,y)$ est linéaire par rapport à y .

* On a : $\varphi(x+\lambda x', y) = \overline{f(x+\lambda x')}g(y) + \overline{g(x+\lambda x')}f(y)$
$\qquad = \overline{f(x)}g(y) + \bar{\lambda}\overline{f(x')}g(y) + \overline{g(x)}f(y) + \bar{\lambda}\overline{g(x')}f(y)$
$\qquad = \overline{f(x)}g(y) + \overline{g(x)}f(y) + \bar{\lambda}[\overline{f(x')}g(y) + \overline{g(x')}f(y)]$
$\qquad = \varphi(x,y) + \bar{\lambda}\varphi(x',y)$.
  Donc,φ est semi-linéaire à gauche .

Alors φ est une forme sesquilinéaire.

2) Soit $E = \{f : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{C} : f\ continue\}$

$$\begin{aligned}Soit\ \psi : E \times E &\longrightarrow \mathbb{C}\\ (f,g) &\longmapsto \int_0^{2\pi} \overline{f(t)}g(t)dt,\end{aligned}$$

est une forme sesquilinéaire E. En effet :

* Pour $g \in E$
  Soient $f, f' \in E, \lambda \in \mathbb{C}$
  on a : $\Psi(f+\lambda f', g) = \displaystyle\int_0^{2\pi} \overline{(f+\lambda f')(t)}.g(t)\,\mathrm{d}t$
  $\qquad = \displaystyle\int_0^{2\pi} \overline{f(t)}g(t)\,\mathrm{d}t + \overline{\lambda}\int_0^{1} \overline{f'(t)}g(t)\,\mathrm{d}t$
  $\qquad = \Psi(f,g) + \overline{\lambda}\Psi(f',g)$.
  D'où : Ψ est semi-linéaire par rapport à la première variable.
* Pour $f \in E$
  Soient $g, g' \in E, \lambda \in \mathbb{C}$
  On a :$\Psi(f, g+\lambda g') = \Psi(f,g) + \lambda\Psi(f,g')$.
  Alors : Ψ est une forme linéaire par rapport à la deuxième variable.
  Donc ψ est une forme sesquilinéaire sur E

. 3) **Produit scalaire hermitien usuel**
Soit $E = \mathbb{C}^n$, $\Phi(x,y)$=$\sum_{i=1}^n \bar{x}_i y_i$ est une forme sesquilinéaire sur E.

* comme pour y fixé dans E On a : $\forall x, x' \in E$ et $\lambda \in \mathbb{C}$
  $\Phi(x+\lambda x', y)$=$\sum_{i=1}^n \bar{x}_i y_i + \bar{\lambda}\sum_{i=1}^n \bar{x}'_i y_i$
  $\qquad$=$\Phi(x,y) + \bar{\lambda}\Phi(x',y)$
  alors ϕ est semi-linéaire par rapport à la première variable .
* de même On a ϕ est linéaire par rapport à la deuxième variable.
  Alors Φ est sesquilinéaire sur E.

1.1.2 Représentation matricielle d'une forme sesquilinéaire

Définition 1.3

$\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base de E, f une forme sesquilinéaire sur E. Alors :
La matrice de f relativement à la bases $\mathcal{B}$ est :

$$M(f, B) = \begin{pmatrix} f(e_1, e_1) & \ldots & f(e_1, e_n) \\ \vdots & & \vdots \\ f(e_n, e_1) & \ldots & f(e_n, e_n) \end{pmatrix}$$

Remarque 1.1

: On a pour chaque $(x, y) \in E \times E$ avec : $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ et $y = \sum_{j=1}^{n} y_j e_j$

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(\textstyle\sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \sum_{j=1}^{n} y_j e_j) \\ &= \textstyle\sum_{j=1}^{n} f(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i, y_j e_j) \\ &= \textstyle\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} f(x_i e_i, y_j e_j). \end{aligned}$$

Et comme on a : f est une forme sesquilinéaire sur E, alors :

$$f(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \bar{x}_i y_j f(e_i, e_j)$$

Notons :
$f(e_i, e_j) = \alpha_{ij}$ et $A = M(f, B) = (\alpha_{ij}) \quad \forall i, j \in \{1, 2.., n\}$,
et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots y_n \end{pmatrix}$

D'où nous avons la relation :

$$f(x, y) = \overline{X^t} AY.$$

1.1.3 Forme sesquilinéaire hermitienne

Définition 1.4

On appelle forme hermitienne sur E une forme sesquilinéaire $f : E \times E \to \mathbb{C}$ telle que :
$\forall x, y \in E : f(x, y) = \overline{f(y, x)}$.

Remarque 1.2

Pour $x \in E$ on a : $f(x, x) = \overline{f(x, x)}$, et donc $f(x, x) \in \mathbb{R}$

Proposition 1.1

L'ensemble des formes sesquilinéaires hermitiennes sur E est un espace vectoriel réel.

Preuve 1. *L'ensemble des formes sesquilinéaires contient la forme sesquilinéaire nulle , stable par addition, et aussi par multiplication par les scalaires réels. Donc c'est un sous-espace vectoriel réel.*

Proposition 1.2

si f est une forme sesquilinéaire hermitienne sur E, Alors :

- $\forall (x,y) \in E^2 : f(x+y,x+y) = f(x,x) + f(y,y) + 2\,\mathrm{Re}(f(x,y))$
- $\forall (x,y) \in E^2 : f(x-y,x-y) = f(x,x) + f(y,y) - 2\,\mathrm{Re}(f(x,y))$
- $\forall (x,y) \in E^2 : f(x+iy,x+iy) = f(y,y) + f(x,x) - 2\,\mathrm{Im}(f(x,y))$
- $\forall (x,y) \in E^2 : f(x-iy,x-iy) = f(x,x) + f(y,y) + 2\,\mathrm{Im}(f(x,y))$

Preuve 2. *Soient $x, y \in E$*

- $$\begin{aligned} f(x+y,x+y) &= f(x,x) + f(y,y) + f(x,y) + \underline{f(y,x)} \\ &= f(x,x) + f(y,y) + f(x,y) + \overline{f(x,y)} \end{aligned}$$
  (f hermitienne)
  et comme on a : $\forall z \in \mathbb{C}, z + \bar{z} = 2\,\mathrm{Re}(z)$.
  Donc on aura :
  $\forall (x,y) \in E^2 : f(x+y,x+y) = f(x,x) + f(y,y) + 2\,\mathrm{Re}(f(x,y))$

- $$\begin{aligned} f(x-y,x-y) &= f(x,x) + f(y,y) - f(x,y) - \underline{f(y,x)} \\ &= f(x,x) + f(y,y) - f(x,y) - \overline{f(x,y)} (f \text{ hermitienne}) \\ &= f(x,x) + f(y,y) - 2Re(f(x,y)). \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} f(x+iy,x+iy) &= f(x,x) + f(iy,iy) + f(x,iy) + \underline{f(iy,x)} \\ &= f(x,x) - i^2 f(y,y) + f(x,iy) + \overline{f(x,iy)} \quad (f \text{ sesquilinéaire hermitienne}) \\ &= f(x,x) + f(y,y) + f(x,iy) + \overline{f(x,iy)} \\ &= f(x,x) + f(y,y) + 2Re(f(x,iy)) \\ &= f(x,x) + f(y,y) + 2Re(if(x,y)) \end{aligned}$$
  et comme on a : $\forall z \in \mathbb{C} \quad Re(iz) = -Im(z)$.
  Donc on aura :
  $\forall (x,y) \in E^2 : f(x+iy,x+iy) = f(x,x) + f(y,y) - 2Im(f(x,y))$.
- $$\begin{aligned} f(x-iy,x-iy) &= f(x,x) + f(iy,iy) - f(x,iy) - \underline{f(iy,x)} \\ &= f(x,x) - i^2 f(y,y) - f(x,iy) - \overline{f(x,iy)} \quad (f \text{ sesquilinéaire hermitienne}) \\ &= f(x,x) + f(y,y) - f(x,iy) - \overline{f(x,iy)} \\ &= f(x,x) + f(y,y) - 2Re(f(x,iy)) \\ &= f(x,x) + f(y,y) - 2Re(if(x,y)) \end{aligned}$$
  $\forall (x,y) \in E^2 : f(x-iy,x-iy) = f(x,x) + f(y,y) + 2Im(f(x,y))$.

<u>Exemples :</u>

1) Soient f, g deux éléments de $E = C([0,1], \mathbb{C})$ l'espace des fonctions continues sur $[0,1]$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$;
   alors $\phi(f,g) = \displaystyle\int_0^1 \alpha(t)\overline{f(t)}g(t)\,\mathrm{d}t$ est une forme hermitienne. En effet : il est claire que ϕ est une forme sesquilinéaire, alors on montre qu'elle est hermitienne. On a pour tous $f, g \in E$
   $\overline{\phi(g,f)} = \overline{\displaystyle\int_0^1 \alpha(t)\overline{g(t)}f(t)\,\mathrm{d}t} = \displaystyle\int_0^1 \alpha(t)\overline{f(t)}g(t)\,\mathrm{d}t = \phi(f,g)$.
   D'où : ϕ est hermitienne sur E.

2) Soient $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}$, $Z = (z_1, z_2, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$
   $\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n) \in \mathbb{C}^n$;
   Alors,
   $\psi(Z,\omega) \longmapsto \alpha_1 Z_1 \bar{\omega_1} + \ldots + \alpha_n Z_n \bar{\omega_n}$
   est une forme hermitienne en effet :
   $$\begin{aligned} \overline{\psi(\omega, Z)} &= \overline{\alpha_1 \omega_1 \bar{Z_1} + \ldots + \alpha_n \omega_n \bar{Z_n}} \\ &= \alpha_1 Z_1 \bar{\omega_1} + \ldots + \alpha_n Z_n \bar{\omega_n} \\ &= \psi(Z,\omega) \end{aligned}$$

3) $\forall X, Y \in \mathbb{C}^n$, on a

$\phi(X,Y)=\langle X,Y\rangle=\overline{X^t}Y=\sum_{i=1}^n \overline{x_i}y_i$ est une forme hermitienne.
En effet ; on a :

$$\begin{aligned}\phi(Y,X) &= \overline{Y^t}X=\sum_{i=1}^n \overline{y_i}x_i=\sum_{i=1}^n \overline{y_i\overline{x_i}}=\overline{\sum_{i=1}^n y_i\overline{x_i}}=\overline{<X,Y>}\\ &= \overline{\phi(X,Y)}.\end{aligned}$$

D'où ϕ est une forme hermitienne.

4) φ *donnée par* : $x_1\bar{y_1}+ix_1\bar{y_2}+3x_3\bar{y_3}$ n'est pas une forme hermitiènne.
φ *donnée par* : $x_1\bar{y_1}+ix_1\bar{y_2}-ix_2\bar{y_2}+3x_3\bar{y_3}$ est une forme hermitiènne.en effet :
φest hermitienne$\Longleftrightarrow\begin{cases}\forall i \;\; a_{ii}\in\mathbb{R}\\ \forall i,j \text{ avec } i<j \;\; \bar{a_{ij}}=a_{ji}\end{cases}$

1.1.4 Représentation matriciel d'une forme sesquilinéaire hermitienne

Définition 1.5

Soient $n\in\mathbb{N}^*$ et $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On dit que A est hermitienne si $A^t=\overline{A}$.
Notons $A=(\alpha_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ cela signifie que : $\alpha_{ji}=\overline{\alpha_{ij}}$ pour tous $i,j\in\{1,\ldots,n\}$.

Définition 1.6

Soit f une forme hermitienne sur E, et $\mathcal{B}=(e_1,\ldots,e_n)$, une base de E. La matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est la matrice :
$A=(\alpha_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, où $\forall i,j\in\{1,2,\ldots,n\}$, $\alpha_{ij}=f(e_i,e_j)$.

Proposition 1.3

Soit f une forme hermitienne sur E, et A la matrice de f dans la base $\mathcal{B}=(e_1,e_2,\ldots,e_n)$ de E. On a :
- La matrice A est hermitienne.
- Soient $x=\sum_{i=1}^n x_ie_i$, et $y=\sum_{j=1}^n y_je_j$. On note : $X=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$ et $Y=\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}$. Alors on a :

$$f(x,y)=\sum_{j=1}^n\sum_{i=1}^n \alpha_{ij}\bar{x}_iy_j=\overline{X^t}AY.$$

Preuve 3. *Trivial.*
— *Soient $x,y\in E$ on a : $x=\sum_{i=1}^n x_ie_i$, et $y=\sum_{j=1}^n y_je_j$. Donc*

$$\begin{aligned}f(x,y) &= f(\sum_{i=1}^n x_ie_i,\sum_{j=1}^n y_je_j)\\ &= \sum_{j=1}^n\sum_{i=1}^n \alpha_{ij}\bar{x}_iy_j \quad \text{où } \alpha_{ij}=f(e_i,e_j)\\ &= \overline{X^t}AY.\end{aligned}$$

<u>Exemple :</u>

Soit la forme hermitienne définit sur $\mathbb{C}^2$ par :
$\phi(x,y)=\bar{x_1}x_2+\bar{x_2}x_1$.

La matrice de ϕ dans la base canonique de $\mathbb{C}^2$ est :
$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ puisque :$\bar{x_1}x_2 + \bar{x_2}x_1 = (\bar{x_1}\bar{x_2}) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.

Exemple d'une matrice hermitienne :

Soit $H = \begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 1-i & -4 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$. Donc H est hermitienne car :${}^t\overline{H} = H$

Exercice : Est-ce que les matrices hermitiennes forment un sous $\mathbb{C}$-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{C})$?, montrer qu'elles forment un sous-espace vectoriel réel, et calculer la dimension (sur $\mathbb{R}$) de ce sous-espace.

Réponse : L'ensemble des matrices hermitiennes de $M_n(\mathbb{C})$, contient la matrice nulle, stable par addition, mais n'est pas stable par multiplication par les scalaires complexes par exemple on a :
I_n est une matrice hermitienne mais iI_n n'est pas hermitienne.
Donc ce n'est pas un sous-espace vectoriel complexe de $M_n(\mathbb{C})$.
Par contre comme L'ensemble des matrices hermitiennes de $M_n(\mathbb{C})$ est stable par multiplication par les scalaires réels.
Donc c'est un sous-espace vectoriel réel.
Notons $E_{k,l}$ la matrice élémentaire qui a le coefficient 1 en k-ème ligne et l-ème colonne, et des coéfficients 0 partout .
Alors les $E_{k,k}$ pour $k = 1, ..., n$, les $E_{k,l} + E_{l,k}$, et les $i(E_{k,l} - E_{l,k})$ pour $1 \leqslant k < l \leqslant n$, forment ensemble une base de L'ensemble des matrices hermitiennes de $M_n(\mathbb{C})$ sur $\mathbb{R}$.
En effet toute matrice hermitienne $H = (h_{k,l})$, (avec $h_{k,k}$ réel et $h_{k,l} = \overline{h_{l,k}}$, pour $k \neq l$) s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire à coefficients réels de ces matrices :

$$H = \sum_{k=1}^{n} h_{k,k}E_{k,k} + \sum_{1 \leqslant k<l \leqslant n} Re(h_{k,l})(E_{k,l} + E_{l,k}) + \sum_{1 \leqslant k<l \leqslant n} iIm(h_{k,l})(E_{k,l} - E_{l,k}).$$

Le décompte des éléments de la base montre que la dimension de L'ensemble des matrices hermitiennes de $M_n(\mathbb{C})$ est n^2.

1.1.5 Changement de base

Rappel : Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n,et soient $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ et $S = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ deux bases de E.

— La matrice de passage de $\mathcal{B}$ à S noté : P est la matrice définit par :

$$P = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} f_1 & f_2 & \cdots & f_n \end{array} \\ \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ . \\ . \\ e_n \end{array} & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ . & & & . \\ . & & & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \end{array}$$

— Soit $x \in E$, ayant pour coordonnés les matrices colonne X, X' respectivement dans $\mathcal{B}, S$. Alors :

$$X = PX'$$

Proposition 1.4

Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie n, f une forme sesquilinéaire sur E,et Soient $\mathcal{B}$ et S deux bases de E , A, A' sont respectivement les matrices de f par rapport aux bases $\mathcal{B}$ et S, et P la matrice de passage de B à S. Alors on a :

$$A' = \overline{P^t}AP = P^*AP$$

Preuve 4. *Soient* $B = (e_1, .., e_n), S = (f_1, ..., f_n)$ *deux bases de* E. *Alors :* $\forall x \in E$ *avec* $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i = \sum_{i=1}^{n} x'_i f_i$. *On a :* $X = PX'$. *Comme on a :* $\forall (x, y) \in E \times E$ *:*
$f(x, y) = \overline{X'^t}A'Y' = \overline{X^t}AY = \overline{(P.X')^t}A(PY') = \overline{X'^t}\overline{P^t}APY'$.
Alors on aura : $\forall (X', Y') \in E \times E$ *:* $\overline{X'^t}.A'.Y' = \overline{X'^t}(\overline{P^t}A.P).Y'$. *D'où,*

$$A' = \overline{P^t}AP$$

1.2 Forme quadratique

1.2.1 Définitions et propriétés

Définition 1.7

Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel , f une forme sesquilinéaire hermitienne.
Alors, l'application :

$$\begin{array}{cccc} q & : & E & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & f(x, x) \end{array}$$

est appelée : la forme quadratique hermitienne associée à f.

Exemples :

* La fonction :

$$\begin{array}{cccc} q & : & \mathbb{C}^3 & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & & (x, y, z) & \mapsto & |x|^2 - |y|^2 + 3|z|^2 \end{array}$$

est une forme quadratique associée à la forme sesquilinéaire hermitienne :

$$\begin{array}{cccc} f & : & \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^3 & \rightarrow & \mathbb{C} \\ & & ((x_1, y_1, x_3), (x_2, y_2, y_3)) & \mapsto & \overline{x_1}y_1 - \overline{x_2}y_2 + 3\overline{x_3}y_3 \end{array}$$

* soit $E = \mathbb{C}^2$. On définit $\psi : E \longrightarrow \mathbb{C}$ par $\psi(x_1, x_2) = 4|x_1|^2 + 2Re((2 - i)\overline{x_1}x_2) - 5|x_2|^2$ dont la forme hermitienne associée est :

$$\begin{array}{cccc} \psi & : & \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 & \rightarrow & \mathbb{C} \\ & & (x_1, x_2), (y_1, y_2) & \mapsto & 4\overline{x_1}y_1 + (2 - i)\overline{x_1}y_2 + (2 + i)\overline{x_2}y_1 - 5\overline{x_2}y_2 \end{array}$$

Définition 1.8

Soit q une forme quadratique hermitienne sur E .
L'application $f : E \times E \rightarrow \mathbb{C}$ donnée par :

$$f(x, y) = \frac{1}{4}(q(x + y) - q(x - y) - iq(x + iy) + iq(x - iy))$$

est une forme sesquilinéaire hermitienne appelée forme polaire hermitienne de q.

Proposition 1.5

Soient f une forme hermitienne sur E, et q la forme quadratique hermitienne associée.
Alors, $\forall x, y \in E$, et $\lambda \in \mathbb{C}$:
- $q(\lambda x) = |\lambda|^2 q(x)$.
- $f(x,y) = \frac{1}{4}(q(x+y) - q(x-y) - iq(x+iy) + iq(x-iy))$.

Preuve 5. *Soient $x, y \in E$, et $\lambda \in \mathbb{C}$*
- *On a :* $$\begin{aligned} q(\lambda x) &= f(\lambda x, \lambda x) \\ &= \overline{\lambda}\lambda f(x,x) \\ &= |\lambda|^2 q(x). \end{aligned}$$
- *D'après la **proposition 1.6** on a :*
  - $q(x+y) = f(x+y, x+y) = q(x) + q(y) + 2Re(f(x,y))$
  - $q(x-y) = f(x-y, x-y) = q(x) + q(y) - 2Re(f(x,y))$
  - $q(x+iy) = f(x+iy, x+iy) = q(x) + q(y) - 2Im(f(x,y))$
  - $q(x-iy) = f(x-iy, x-iy) = q(x) + q(y) + 2Im(f(x,y))$

  Donc,on aura :
  $$\begin{aligned} q(x+y) - q(x-y) - iq(x+iy) + iq(x-i) &= 4(Re(f(x,y)) + iIm(f(x,y)) \\ &= 4f(x,y). \end{aligned}$$
  Alors : $\forall x, y \in E \quad f(x,y) = \frac{1}{4}(q(x+y) - q(x-y) - iq(x+iy) + iq(x-iy))$.

Remarque 1.3

La forme polaire hermitienne montre que si deux formes sesquilinéaires hermitiennes sont associées à une même forme quadratique hermitienne, alors elles sont égales.

Exemples :

Soient u_1,$u_2 \in \mathbb{C}^2$, avec : $u_1 = (x_1, y_1), u_2 = (x_2, y_2)$
$f(u_1, u_2) = \overline{x_1}x_2 - \overline{y_1}y_2 + \frac{1}{2}\overline{y_1}x_2 + \frac{1}{2}\overline{x_1}y_2$ est une forme sesquilinéaire hermitienne de forme quadratique :
$q : u = (x,y) \mapsto |x|^2 - |y|^2 + \frac{1}{2}\overline{y}x + \frac{1}{2}y\overline{x}$.

1.2.2 Représentation Matricielle d'une forme quadratique

Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension fini n, q une forme quadratique sur E et f la forme sesquilinéaire hermitienne associée à q
Soit $B = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base de E .
Alors $\forall x, y \in E$ on a :
$f(x,y) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \bar{x}_i y_j \alpha_{ij}$ où : $\alpha_{ij} = f(ei, ej)$ $\forall i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.
D'où :

$$\begin{aligned} q(x) &= f(x,x) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \bar{x}_i x_j \alpha_{ij} \qquad \text{où : } \forall x \in E \ \forall i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}. \\ &= \sum_{i=1}^{n} \overline{x_i} x_i \alpha_{ii} + \sum_{i,j=1, i\neq j}^{n} \bar{x}_i x_j \alpha_{ij} \\ &= \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \alpha_{ii} + \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (\bar{x}_i x_j \alpha_{ij} + \bar{x}_j x_i \alpha_{ji}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \alpha_{ii} + \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (\bar{x}_i x_j \alpha_{ij} + x_i \bar{x}_j \overline{\alpha_{ij}}) \qquad (f \text{ est hermitienne}). \end{aligned}$$

Et comme on a : $\bar{x}_i x_j \alpha_{ij} + \bar{x}_j x_i \overline{\alpha_{ij}} = 2Re(\bar{x}_i x_j \alpha_{ij})$,

donc : $\forall x \in E \quad q(x) = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \alpha_{ii} + 2\sum_{1 \leqslant i<j \leqslant n} Re(\bar{x}_i x_j \alpha_{ij})$

Remarque 1.4

Les coefficients diagonaux α_{ii} $\forall i \in \{1,\ldots,n\}$, sont réels.

Définition 1.9

Soit f une forme hermitienne et q la forme quadratique hermitienne associée.
- On appelle rang de q le rang de la matrice de f dans n'importe quelle base de E.
- On dit que f ou q est non dégénérée si f est de rang n.

Exemple :

La matrice de la forme quadratique $q : u = (x, y) \mapsto |x|^2 - |y|^2 + 2i\overline{y}x - 2iy\overline{x}$ est :

$$\begin{pmatrix} 1 & -2i \\ 2i & -1 \end{pmatrix}$$

Son rang est 2.

1.2.3 Produit scalaire hermitien :

Définition 1.10

Soit f une forme hermitienne sur E :
- On dit que : f est positive si $f(x, x) \geq 0 \qquad \forall x \in E$
- On dit que : f est définie si pour tout x dans E, $f(x, x) = 0$ si et seulement si $x = 0$.
- On dit que f est définie positive si $f(x, x) > 0$ pour tout $x \in E - \{0\}$.

Définition 1.11

- On appelle produit scalaire hermitien sur E une forme sesquilinéaire f de $E \times E \to \mathbb{C}$ hermitienne et définie positive.
  On le note généralement par $\langle . \mid . \rangle$, $\langle ., \rangle >$ ou $f(., .)$.
- Un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$, muni d'un produit scalaire hermitien est appelé **Espace préhilbertien complexe** .

Exemples :

1) $E = l^2$ ensemble des suites complexes, carrée sommables ie :$\sum |u_n|^2 \leq \infty$
E est un espace vectoriel et :

$$< x, y >= \sum_{i=1}^{+\infty} \overline{u_i} v_i$$

définit bien sur E un produit scalaire hermitien. En effet,

* On a déjà montré que $\sum_{i=1}^{+\infty} \overline{u_i} v_i$ est une forme sesquilinéaire hermitienne.
Alors il suffit de montrer qu'elle est définie positive.
* $\forall U \in E$
$< U, U >= \sum_{i=1}^{+\infty} \overline{u_i} u_i = \sum_{i=1}^{+\infty} \mid u_i \mid^2 \geq 0$ donc elle est positive,

et de plus $< U,U >= 0 \Leftrightarrow u_i = 0 \ \forall i \in \{1,..,+\infty\}$.
Alors est bien définie positive.
Donc $< .,. >$ est un produit scalaire.

2) Soit $E = \{x : [0,2\pi] \longrightarrow \mathbb{C} : x \; continue\}$
montrons que $< x,y >= \int_0^{2\pi} \overline{x(t)} y(t) \mathrm{d}t$, définit un produit scalaire sur E.
* on a déjà montrer que $< .,. >$ est une forme sesquilinéaire , alors il suffit de montrer qu'il est hermitien et défini positif.
* On a : $< y,x >= \int_0^{2\pi} \overline{y(t)} x(t) \mathrm{d}t$
$= \overline{< x,y >}$.
Alors $< .,. >$ est hermitienne.
* $< x,x >= \int_0^{2\pi} \overline{x(t)} x(t) \mathrm{d}t$
$= \int_0^{2\pi} |x(t)|^2 \mathrm{d}t \geq 0$
et de plus $< x,x >= 0 \Leftrightarrow \int_0^{2\pi} \overline{x(t)} x(t) \mathrm{d}t = 0 \Leftrightarrow \int_0^{2\pi} |x(t)|^2 \mathrm{d}t = 0$
et comme$|x(t)|^2$ continue positif sur E alors :$|x(t)|^2 = 0$ sur E
Donc on aura : $x(t) = 0 \ \ \forall t \in [0,2\pi]$.
Finalement $x = 0$.D'où $< .,. >$ définie un produit scalaire hermitien sur E.

3) Soit $\langle .,. \rangle : M(\mathbb{C}) \times M(\mathbb{C}) \to \mathbb{R}$, l'application définie par :

$$\forall A,B \in M(\mathbb{C}) \quad < A,B >= tr(\overline{A^t} B)$$

Montrer que $\langle .,. \rangle$ défini un produit scalaire hermitien.

* on a déjà montrer que $< .,. >$ est hermitien , alors il suffit de montrer qu'il est défini positif.
* soit $A \in M(\mathbb{C}) \; avec \; A = (a_{ij}) \ \ \forall i,j \in \{1,..,n\}$.
On a : $< A,A >= tr(\overline{A^t}.A)$
$= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \overline{a_{ji}}.a_{ji}$
$= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ji}|^2$.
Alors $< .,. >$ est positif.
Supposons que $A \neq 0$ alors $\exists i_0, j_0 \in \{1,..,n\}$ tel que : $a_{i_0 j_0} \neq 0$,
et par suite $< A,A >= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \overline{a_{ji}}.a_{ji} \neq 0$, d'où par on obtient que si $< A,A >= 0 \Leftrightarrow A = 0$.
Alors $< .,. >$ est défini positif.

Donc $< .,. >$ est un produit scalaire hermitien.

CHAPITRE 2

ESPACES HERMITIENS

2.1 Définition et exemples

Définition 2.1

Soit E Un espace vectoriel de dimension fini sur $\mathbb{C}$, muni d'un produit scalaire hermitien. Alors E est appelé **Espace vectoriel hermitien**.

Exemples :

— L'espace vectoriel $\mathbb{C}^n$, muni du produit scalaire canonique défini, pour $x = (x_1, \ldots, x_n)$, et $y = (y_1, \ldots, y_n)$, par :

$\langle x, y \rangle = \overline{x_1}y_1 + \overline{x_2}y_2 + \ldots + \overline{x_n}y_n = \sum_{i=1}^{n} \overline{x_i}y_i$, est un espace hermitien appelé : Espace hermitien canonique de dimension n.

— $E = \{x : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{C} : x \; continue\}$ muni du produit scalaire $< x, y >= \int_0^{2\pi} \overline{x(t)}y(t)\mathrm{d}t$, est un espace hermitien.

— $\ell^2(\mathbb{C}) = \{(x_n)_{n\geq 0} \in \mathbb{C}^N : \sum_{n=0}^{+\infty} |x_n|^2 < \infty\}$
muni du produit scalaire :$\forall x \in \mathbb{C}^N, \forall y \in \mathbb{C}^N, f(x, y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \overline{x_n}y_n$est aussi un espace hermitien.
avec $x = (x_n)_{n\geq 0} \quad et y = (y_n)_{n\geq 0}$.
ici,f est bien définie car $\forall n \in \mathbb{N}, |\overline{x_n}y_n| = |x_n||y_n| \quad et, |x_n||y_n| \leq \frac{1}{2}(|x_n|^2 + |y_n|^2)$

On note que :
Les bonnes propriété du produit scalaire euclidien restent valable aussi pour la plut part pour le produit scalaire hermitien comme : Inégalité de Cauchy-Schwarz, Inégalité de Minkowski , Algorithme de Gram-Schmidt, théorème de Pythagore et la projection orthogonale

2.2 Inégalité de Cauchy-Schwarz

Théorème 2.1

Soient f une forme sesquilinéaire hermitienne sur E,et q sa forme quadratique. Si f est positive (et donc q aussi),alors :

$$\forall (x,y) \in E^2 \quad |f(x,y)| \leqslant \sqrt{q(x)}\sqrt{q(y)}.$$

Si de plus q est définie , il y a égalité si et seulement si x et y sont liée.

Preuve 6. *Considérons la fonction de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie pour tout complexe λ par :*
$g(\lambda) = q(\lambda x - y) = |\lambda|^2 q(x) - 2Re(\overline{\lambda} f(x,y)) + q(y) \geqslant 0.$
Cette fonction est à valeurs positive puisque la forme quadratique q est positive. En choisissant $\lambda = te^{i\theta}$, où : t est un réel ,et θ désigne un argument de f, on a :
$g(\lambda) = t^2 q(x) - 2t|f(x,y)| + q(y)$
Deux cas alors se présente :
** si $q(x) = 0$, alors on aura : $-2t|f(x,y)| + q(y) \geqslant 0$, ce qui entraine $f(x,y) = 0$.*
On en déduit l'inégalité de Cauchy-Schwarz, qui s'écrit $0 \leqslant 0$.
**Si $q(x) \neq 0$, la fonction g est un polynôme du second degré à valeurs positives, d'où : $\Delta = f(x,y)^2 - q(x)q(y) \leqslant 0$.*
On en déduit l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$|f(x,y)| \leqslant \sqrt{q(x)}\sqrt{q(y)}.$$

Supposons q et $x \neq 0$ (le cas $x = 0$ est trivial). Alors $q(x) \neq 0$, de sorte que l'inégalité de Cauchy-shwartz est une égalité si et seulement si le discriminant de g est nul ; c'est à dire si et seulement s'il existe λ_0, tel que $g(\lambda_0) = 0$ ce qui équivaut à $\lambda_0 x + y = 0$ (puisque q est définie), c'est à dire la famille (x,y) est liée.

Exemples :

* on considère $E = \ell^2(\mathbb{C})$, muni du produit scalaire usuel alors, L'inégalité de Cauchy-Schwarz se traduit par :
  $\forall (u,v) \in E^2, |\sum_{n=0}^{+\infty} \overline{u_n} v_n|^2 \leq (\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|^2)(\sum_{n=0}^{+\infty} |v_n|^2).$
* Soit $E = M_n(\mathbb{C})$, muni du produit scalaire $< A|B >= tr(\overline{A^t}B)$ alors,L'inégalité de Cauchy-Schwarz se traduit par :
  $|\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \overline{a_{ij}}.b_{ij}|^2 \leq \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2 |b_{ij}|^2$
* Soit $E = \{f : [0,2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}/f : continue\}$ muni du produit scalaire
  $\forall (f,g) \in E^2, < f,g >= \int_0^{2\pi} \overline{f(t)} g(t) \mathrm{d}t,.$
  alors,L'inégalité de Cauchy-Schwarz se traduit par :
  $\forall (f,g) \in E^2, |\int_0^{2\pi} \overline{f(t)} g(t) \mathrm{d}t|^2 \leq (\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 \mathrm{d}t)(\int_0^{2\pi} |g(t)|^2 \mathrm{d}t).$

Exercice : Soient E un espace hermitien, f endomorphisme de E, $x \in E$.Montrer :

$< x, f(x) >^2 \leq < x, f^2(x) > ||x||^2.$

Réponse : En effet, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz
$< x, f(x) >^2 \leq ||x||^2 ||f(x)||^2 = ||x||^2 < x, f^* \circ f(x) >= ||x||^2 < x, f^2(x) >.$

Exercice : Soient $n \in \mathbb{N}^*, A, B \in M_n(\mathbb{C}), X, Y \in M_{n,1}(\mathbb{C})$.Montrer :

$$|X^* A^* BY|^2 \leq (X^* A^* AX)(Y^* B^* BY)$$

Réponse En effet, On va appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz à AX,BY dans $M_{n,1}(\mathbb{C})$ muni de son produit scalaire canonique, ainsi, $|X^*A^*BY|^2 \leq (X^*A^*AX)(Y^*B^*BY)$

Proposition 2.1

Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, et $\langle .,. \rangle$ un produit scalaire hermitien sur E .
On peut définir une norme sur E dite norme hilbertienne ou hermitienne associée, en posant :

$$||x|| = \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

Preuve 7. ** $\forall x \in E$, Si $||x|| = 0_E$, alors : $x = 0_E$ (car $< .,. >$ est défini positif).*

** $\forall \lambda \in \mathbb{C},\ \forall x \in E,\ ||\lambda x|| = \sqrt{< \lambda x, \lambda x >} = \sqrt{|\lambda|^2 < x, x >} = |\lambda|.||x||$*

** Soient $x, y \in E$:*

$$\begin{aligned} ||x+y||^2 &= \sqrt{< x+y, x+y >} \\ &= ||x||^2 + 2Re(< x, y >) + ||y||^2 \end{aligned}$$

et comme : $Re(< x, y >) \leq |< x, y >|$

Alors, $||x+y||^2 \leq ||x||^2 + 2|< x, y >| + ||y||^2$

Et grâce à l inégalité de Cauchy-Shwarz on aura :

$$\begin{aligned} ||x+y||^2 &\leq ||x||^2 + 2||x||.||y|| + ||y||^2 \\ &\leq (||x|| + ||y||)^2. \end{aligned}$$

D'où : $< .,. >$ est bien une norme.

<u>Exemples :</u>

— Soit $\mathbb{C}^n$,muni du produit scalaire canonique,
pour $x = (x_1, .., x_n)$ et $y = (y_1, .., y_n)$, par :

$$\begin{aligned} \langle x, y \rangle &= \overline{x_1}y_1 + \overline{x_2}y_2 + \ldots + \overline{x_n}y_n \\ &= \sum_{i=1}^{n} \overline{x_i}y_i \end{aligned}$$

On défini la norme associé : $||x|| = \langle x, x \rangle = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}$.

— $E = \ell^2(\mathbb{C})$, muni du produit scalaire :
$\forall (u, v) \in E^2, < u|v >= \sum_{n=0}^{+\infty} \overline{u_n}v_n$
On définit la norme associée :$||u|| = \sqrt{\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|^2}$.

2.3 Inégalité de Minkowski

Théorème 2.2

pour tous $x, y \in E$ l'inégalité :

$$||x+y|| \leq ||x|| + ||y||.$$

Appelée **inégalité de Minkowski**.
Il y a égalité si et seulement si x, y sont positivement liées ;
c'est à dire $x = 0$ *ou* $x \neq 0$, et $y = \lambda x$ avec $\lambda \in \mathbb{R}^+$.

Preuve 8. *Soient $x, y \in E$, on a :*

$$\begin{aligned}||x+y||^2 &= <x+y, x+y> \\ &= <x,x> + <y,y> + 2Re((<x,y>) \\ &\leq ||x||^2 + ||y||^2 + 2|<x,y>| \quad (car : Re(<x,y>) \leq |<x,y>|. \\ &\leq ||x||^2 + ||y||^2 + 2||x||.||y|| \\ &\leq (||x| + ||y||)^2\end{aligned}$$

D'où :

$$||x+y|| \leq ||x|| + ||y||.$$

* *Si $||x+y|| = ||x|| + ||y||$; toutes les inégalités intermédiaires sont des égalité. Donc :*
$|<x,y>| = ||x||.||y||, \Leftrightarrow (x,y)$ est liée, et $Re(<x,y>) = |<x,y>|$.
Si $y = 0$, on a l'égalité. Sinon , $x = \lambda y$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Dans ces conditions :
$|<x,y>| = |\lambda| <y,y> = |\lambda| |y||^2$, et $Re(<x,y>) = Re(\overline{\lambda} <y,y>) = |y||^2.Re(\overline{\lambda})$
Donc,$Re(\overline{\lambda}) = |\lambda|$, D'où : $\lambda \in \mathbb{R}^+$.
* *Réciproquement, si $y = 0$ ou $x = \lambda y$ pour $\lambda \geq 0$, on a bien l'égalité.*

Exemples :

— Soit $E = \{f : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{C} / f : continue\}$ muni du produit scalaire $\forall (f,g) \in E^2, <f,g> = \int_0^{2\pi} \overline{f(t)} g(t) \mathrm{d}t$,.
L'inégalité de Minkowski s'écrit :
$\forall (f,g) \in E^2, \sqrt{\int_0^{2\pi} |f(t)+g(t)|^2 \mathrm{d}t} \leq \sqrt{\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 \mathrm{d}t} + \sqrt{\int_0^{2\pi} |g(t)|^2 \mathrm{d}t}$.
— Soit $E = \ell^2(\mathbb{C})$, muni du produit scalaire :
$\forall (u,v) \in E^2, <u|v> = \sum_{n=0}^{+\infty} \overline{u_n} v_n$.
L'inégalité de Minkowski s'écrit :
$\forall (U,V) \in E^2, \sqrt{\sum_{i=1}^{+\infty} |u_i + v_i|^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{+\infty} |u_i|^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{+\infty} |v_i|^2}$.

Exercice : Soit E un espace vectoriel hermitien, $(x,y) \in E^2$;

montrer : $||x+y|| ||x-y|| \leq ||x||^2 + ||y||^2$, et étudier le cas d'égalité.

Réponse : En notant $u = x+y$, $v = x-y$, on a :

$$||x||^2 + ||y||^2 - ||x+y|| \; ||x-y|| = \tfrac{1}{4}||u+v||^2 + \tfrac{1}{4}||u-v||^2 - ||u|| ||v||$$

$$= \tfrac{1}{2}||u||^2 + \tfrac{1}{2}||v||^2 - ||u|| ||v|| = \tfrac{1}{2}(||u|| - ||v||)^2.$$

Il y'a égalité si et seulement si $Re(<x,y>= 0)$.

2.4 Orthogonalité

2.4.1 Base orthogonale et orthonormale

Définition 2.2

Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, f une forme hermitienne sur E .
On dit que deux vecteurs $x, y \in E$ sont orthogonaux, et l'on note $x \perp y$; si $f(x, y) = 0$.

Définition 2.3

Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, f une forme hermitienne sur E, et q sa forme quadratique .

— un vecteur $x \in E$ est dit isotrope si $f(x, x) = 0$.
— On appelle cône isotrope de q l'ensemble $C_q = \{x \in E \ / \ q(x) = 0\}$.

Remarque 2.1

On dit que q est définie si $C_q = \{0\}$.

Définition 2.4

Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, f une forme hermitienne sur E .
On appelle famille orthogonale dans E toute famille $(e_i)_{i\in I}$ de vecteurs de E, tels que $f(e_i, e_j) = 0$, pour tout $i \neq j$ dans I. Si de plus $f(e_i, e_j) = \delta ij$ pour tout i, j, avec δij le symbole de Kronecker, on dit alors, que cette famille est orthonormée ou orthonormale.

Proposition 2.2

Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls $(e_i)_{i\in I}$ de E est libre. En particulier, toute famille orthonormale est libre.

Preuve 9. *Formons une combinaisons linéaire nulle de la famille orthogonale de vecteurs $(e_i)_{i\in I}$ de E : soit $(\lambda_i)_{i\in I}$ une famille de scalaires telle que :*

$\sum_{i\in I} \lambda_i e_i = 0_E$.

En faisant le produit scalaire par un vecteur e_j, avec $j \in I$, on a :
$< e_j, \sum_{i\in I} \lambda_i e_i >= \sum_{i\in I} \lambda_i < e_j, e_i >= 0$.
Par orthogonalité de la famille $(e_i)_{i\in I}$, il reste $\lambda_j < e_j, e_j >= 0$.
D'où $\lambda_j = 0$, car $e_j \neq 0_E \quad \forall j \in I$.

Définition 2.5

Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension fini n, f une forme hermitienne sur E.

— On dit qu'une base $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ de E est orthogonale pour f si : $f(e_i, e_j) = 0 \quad \forall i \neq j$.
— On dit qu'une base $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ de E est orthonormale pour f si : $f(e_i, e_j) = \delta ij \quad \forall i, j$.

Exemple :
Soit $n \in \mathbb{N}$ la base canonique de $\mathbb{C}^n$ est une base orthonormale pour le produit scalaire hermitien standard de $\mathbb{C}^n$.

Exercice : Soit $E = \{x : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}/x \, continue\}$ espace hermitien muni du produit scalaire : $< x, y >= \int_0^{2\pi} \overline{x(t)} y(t) \mathrm{d}t$,

Montrer que $e_k(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ik\theta}$, k entier $k \in [-n, n]$ est une base orthonormée pour ce produit scalaire.

Réponse : Soient $l, m \in \{1, \dots, n\}$.

On a : $$< e_l, e_m >= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-il\theta} e^{im\theta} \, \mathrm{d}\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i\theta(m-l)} \, \mathrm{d}\theta.$$

— Si $l = m$ on aura :$< e_l, e_m >= 1$.

— Si $l \neq m$ on aura : $< e_l, e_m >= 0$.

Donc $\forall l, m \in \{1, \dots, n\}$ on a : $\langle e_l, e_m \rangle = \delta_{lm}$

D'où, $e_k(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ik\theta}$ est une base orthonormée.

Exercice : On définit une application $\phi : \mathbb{C}_n[X] \longrightarrow \mathbb{C}_n[X]$ par

$\phi(P, Q) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{P(e^{it})} Q(e^{it}) \mathrm{d}t$.

1) Démontrer que ϕ définit un produit scalaire sur $\mathbb{C}_n[X]$
2) Démontrer que la famille $(X^k)_k \in \mathbb{N}$ est une base orthonormée pour le produit scalaire précédent.
3) Soit $Q = X^n + a_{n-1} X^{n-1} + ... + a_0$
   Calculer $||Q||^2$.
4) On pose $M = \sup_{|z|=1} |Q(z)|$. Démontrer que $M \geq 1$ et étudier le cas d'égalité.

Réponse :

1) Soient $P, Q, P_1, P_2 \in \mathbb{C}_n[X]$,et $\alpha \in \mathbb{C}$:

* $$< P_1 + \alpha \, P_2, Q >= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{(P_1 + \alpha P_2)(e^{it})} Q(e^{it}) \mathrm{d}t$$
$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2pi} \overline{P_1(e^{it})} Q(e^{it}) + \frac{\overline{\alpha}}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{P_2(e^{it})} Q(e^{it}) \mathrm{d}t$$
$$=< P_1, Q > + \overline{\alpha} < P_2, Q >$$

D'où : $< P, Q >$ semi-linéaire par rapport à P $\quad \forall Q \in \mathbb{C}_n[X]$.

et de m me on montre que $< P, Q >$ linéaire par rapport à Q, $\forall P \in \mathbb{C}_n[X]$.

et donc $< ., . >$ est une forme sesquilinéaire sur $\mathbb{C}_n[X]$.

* on a : $$< Q, P >= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{Q(e^{it})} P(e^{it}) \mathrm{d}t$$
$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{Q(e^{it})} . \overline{\overline{P(e^{it}}} \mathrm{d}t$$
$$= \overline{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{P(e^{it})} Q(e^{it}) \mathrm{d}t}$$
$$= \overline{< P, Q >}$$

Alors : $<>$ est hermitien.

* Soit $P \in \mathbb{C}_n[X]$:

$$< P, P >= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{P(e^{it})} P(e^{it}) \mathrm{d}t$$
$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |P(e^{it})|^2 \mathrm{d}t$$ et comme : $|P(e^{it})|^2 \geq 0 \ \forall t \in [0, 2\pi]$

Donc :$< P, P > \geq 0$ et de plus :

$< ., . >$est défini .

En effet : $< P, P >= 0$, alors : $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |P(e^{it})|^2 \mathrm{d}t = 0$

et $t \mapsto |P(e^{it})|^2$ est une fonction continue positive.

L'intégrale d'une fonction continue positive étant nulle si et seulement si la fonction est identiquement nulle, on en déduit que $P(e^{it}) = 0$ pour tout $t \in [0, 1]$.
Ainsi P admet une infinité de racines ,c'est donc le polynôme nul.
D'où,pour tous $P, Q \in \mathbb{C}_n[X]$ $< P, Q >= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{P(e^{it})} Q(e^{it}) \mathrm{d}t$
définit un produit scalaire hermitien

2) Soient $k, l \in \mathbb{N}$. On a

$$\phi(X^k, X^l) = \tfrac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(l-k)} \mathrm{d}t = \delta_{k,l}.$$

3) Puisque la suite X^k est orthonormé, on en déduit immédiatement

$$||Q||^2 = 1 + |a_{n-1}|^2 + ... + |a_0|^2.$$

4) On a

$$\phi(Q, Q) = \tfrac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |Q(e^{it})|^2 \mathrm{d}t \leq M^2.$$

Or,d'après la question précédente $\phi(Q, Q) \geq 1$ et donc $1 \leq M$.Si on a égalité, alors nécessairement on doit avoir $a_0 = ... = a_n - 1 = 0$ et donc $Q = X^n$.
Réciproquement, si $Q = X^n$ alors,on a bien $M = 1$.

Définition 2.6

soient f une forme hermitienne sur E,et A une partie non vide de E , on définit l'orthogonale de A par rapport à f noté $A^\perp$ par :
$A^\perp = \{y \in E \diagup \forall x \in A,\ f(x, y) = 0\}$.

Proposition 2.3

- Soient A, B deux parties de E, telle que $A \subseteq B$,Alors : $B^\perp \subseteq A^\perp$.
- Pour toutes partie non vide A de E on a : $A^\perp =< A >^\perp$.
- Soit A une partie de E,Alors : $A^\perp$ est un sous espace vectoriel sur E

Preuve 10.

- *Soit $y \in B^\perp$, Alors :$\forall x \in B$, $f(x, y) = 0$, et comme on a : $A \subseteq B$, Alors :$\forall x \in A$, $f(x, y) = 0$*
  Donc : $y \in A^\perp$
  c'est à dire : $B^\perp \subseteq A^\perp$
- *On doit montrer double inclusion :*
  i) *Soit $y \in A^\perp$*
  On a : $< A >= \{\sum_{finie} a_i\alpha_i \diagup a_i \in A, \alpha_i \in \mathbb{C}\}$
  Alors $\forall x \in A$ $x = \sum_{finie} a_i\alpha_i \diagup a_i \in A, \alpha_i \in \mathbb{C}$
  On a : $f(x, y) = f(\sum_{finie} a_i\alpha_i, y)$
  $\quad = \sum_{finie} \overline{\alpha_i} f(a_i, y)$
  comme : $a_i \in A$, et $y \in A^\perp$
  Alors ; $f(a_i, y) = 0$, $\forall i \in I$ finie.
  Donc : $\forall x \in< A >$ $f(x, y) = 0$
  D'où : $y \in< A >^\perp \Rightarrow A^\perp \subseteq< A >^\perp$
  ii) *On a par définition : $A \subseteq< A >$ Alors : $< A >^\perp \subseteq A^\perp$*
  Et donc : $< A >^\perp = A^\perp$.
- *Soit A une partie de E*
  i) *$f(x, 0) = 0$ $x \in A$*
  C'est à dire : $0 \in A^\perp$; Donc : $A^\perp \neq 0$.
  ii) *Soient $x, y \in A^\perp$ $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ et $z \in A$*
  On a : $f(z, \alpha x + \beta y) = f(z, \alpha x) + f(z, \beta y)$
  $\quad = \alpha f(z, x) + \beta f(zy) = 0 + 0 = 0$.
  D'où : $\alpha x + \beta y \in A^\perp$ Et par conséquence : $A^\perp$ est un sous espace vectoriel.

Exercice : Soient $E, < .,. >$ un espace hermitien, $f \in \mathcal{L}(E)$, F un sous espace vectoriel de E.on suppose : $\begin{cases} \forall x \in F, ||f(x)|| = ||x|| \\ \forall x \in F^{\perp}, \quad f(x) = 0. \end{cases}$
Montrer que : $Ker(f) = F^{\perp}$

Réponse :

. $(\forall x \in F^{\perp}, \quad f(x) = 0)$, donc $F^{\perp} \subset Ker(f)$

. Soit $x \in Ker(f) \bigcap F$ alors $f(x) = 0$ et $||f(x)|| = ||x||$, d'ou $x = 0$. Ceci montre : $Ker(f) \bigcap F = \{0\}$.

. $dim(E) \geq dim(Ker(f) \bigoplus F) = dim(Ker(f)) + dim(F)$

$$= dim(E) + (dim(Ker(f)) - dim(F^{\perp})).$$

Ainsi : $dim(Ker(f)) \leq dim(F^{\perp})$,
et finalement : $Ker(f) = F^{\perp}$.

Exercice :

— Soient $E, < .,. >$ un espace hermitien.Pour deux sous espace vectoriel F,G de E,on dit que :

. F est orthogonal à G, et on note $F \perp G \iff \forall (f,g) \in F \times G, < f,g >= 0$

. F est faiblement orthogonal à G et on note $F \top G \iff F \subset G^{\perp}$ *ou* $G^{\perp} \subset F$.

a) Montrer que les propriétés suivantes sont deux à deux équivalentes, pour tout sous espace vectoriel F, G de E :

$$(i)\ F \perp G,\ (ii)\ F \subset G^{\perp},\ (iii)\ G \subset F^{\perp}$$

b) Montrer que les relation $\perp$ et $\top$ sont symétrique.

c) Montrer pour tous sous espace vectoriel F, G de E :$F \top G \iff F^{\perp} \top G^{\perp}$.

d) Établir, pour tous sous espace vectoriel F, G de E : $\left.\begin{cases} F \top G \\ F \bigcap G = 0 \end{cases}\right| \implies F \perp G$

Réponse :

a) $F \perp G \iff (\forall f \in F, \forall g \in G, < f,g >= 0)$
$\iff (\forall f \in F, f \in G^{\perp} \iff F \subset G^{\perp}$,

et rôles symétrique de F et G.

b) La symétrie de $\perp$ est évidente.

$$F \top G \iff \begin{cases} F \subset G^{\perp} \\ ou \\ G^{\perp} \subset F \end{cases} \implies \begin{cases} F^{\perp} \supset G^{\perp\perp} \\ ou \\ G^{\perp\perp} \supset F^{\perp} \end{cases} \iff \begin{cases} G \subset F^{\perp} \\ ou \\ F^{\perp} \subset G. \end{cases} \iff G \top F$$

c) $F \top G \iff \begin{cases} F \subset G^{\perp} \\ ou \\ G^{\perp} \subset F \end{cases} \implies \begin{cases} F^{\perp} \supset (G^{\perp})^{\perp} \\ ou \\ (G^{\perp})^{\perp} \supset F^{\perp} \end{cases} \iff F^{\perp} \top G^{\perp}$.

d) On suppose $\begin{cases} F \subset G^{\perp} \\ ou \\ G^{\perp} \subset F \end{cases}$, et $F \bigcap G = 0$

Si $F \subset G^{\perp}$, alors $F \perp G$.
Supposons $G^{\perp} \subset F$.

Alors :$dim(E) - dim(G) = dim(G^{\perp}) \leq dim(F)$, d'ou $dim(F) + dim(G) \geq dim(E)$.

Comme $F \bigcap G = 0$, on déduit : $dim(F \bigoplus G) = dim(F) + dim(G) \geq dim(E)$,
donc $F \bigoplus G = E$.

Ainsi $dim(G^{\perp}) = dim(E) - dim(G) = dim(F)$, et finalement $G^{\perp} = F$, $F \perp G$.

Théorème 2.3

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension fini . Alors E possède au moins une base orthogonale.

Preuve 11. *On procède par récurrence sur la dimension n de E.*
Pour $n = 1$, il n'y a rien à montrer, supposons le résultat vrai au rang n-1, et montrons le au rang n .
Si q est identiquement nulle , alors toute base de E est orthogonale. Sinon il existe $v \in E$, tel que $q(v) \neq 0$ dans ce cas, l'application $f(v, x)$ définie par $\phi(x) = f(x, v)$ est une forme linéaire non nulle sur E, son noyau H est un hyperplan de E, et comme $v \in E$, on a $E = H \bigoplus Vect(v)$. Puisque $dim(H) = n - 1$, d'après l'hypothèse de récurrence, il existe une base $(e_1, .., e_{n-1})$ de H orthogonale pour $q/_H$.
On voit alors facilement que $(e_1, .., e_{n-1}, v)$ est une base orthogonale de E.

Proposition 2.4

Soient F un sous espace vectoriel de dimension fini de E, q une forme quadratique définie, et f sa forme polaire . Alors : $E = F \bigoplus F^{\perp}$.

Preuve 12. *D'après le **théorème 2.1.1**, il existe une base $(e_1, \ldots, e_p)$ de F orthogonale pour la restriction de q à F.*
Soit $x \in E$, on cherche à écrire $x = y + z$ avec $y \in F$ et $z \in F^{\perp}$.
Écrivons $y = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i$, alors $z = x - y \in F^{\perp}$ si et seulement si $\forall j \in \{1, .., p\}$, $f(e_j, z) = 0$.
i.e : si pour tout j, $f(e_j, x) - \lambda_j f(e_j, e_j) = 0$, en choisissons $\lambda_i = \frac{f(e_i,x)}{f(e_i,e)}$, on voit donc que :
$x = y + z$ avec $y \in F$ et $z \in F^{\perp}$.
D'où $E = F + F^{\perp}$.

2.4.2 Méthode de Gausse pour la réduction d'une forme quadratique hermitienne

Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension fini n,et q une forme quadratique sur E,alors **théorème 2.1.1** assure l'existence d'une base $B = (e_1, \ldots, e_n)$
orthogonale, et On a $\forall x \in E$ $q(x) = q(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i |x_i|^2$, avec :$\alpha_i = q(e_i)$.
En d'autre termes, on écrit q comme combinaison linéaire de carrées de formes linéaires indépendantes.
Dans la pratique,ces formes linéaire peuvent être calculées grâce à la méthode qui suit .
Méthode de GAUSSE :
On sait que q s'écrit sous la forme :

$$\forall x \in E \quad q(x) = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \alpha_{ii} + 2Re(\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \bar{x}_i x_j \alpha_{ij}).$$

Nous allons procédé par récurrence sur n, en distinguant deux cas :

* Il existe $i_0 \in \{1, 2, ..., n\}$, tel que :$\alpha_{i_0} \neq 0$,Alors quitte à réordonner les α_i. On peut supposer que $\alpha_{11} \neq 0$, en regroupant les termes contenant x_1.
  donc on aura : $\forall x \in E$

  $$\begin{aligned} q(x) &= \alpha_{11}\ |x_1|^2 + 2Re(\textstyle\sum_{j=2}^{n} \alpha_{1j} \overline{x_1} xj) + \sum_{i=2}^{n} \alpha_{ii} |x_i|^2 + 2Re(\sum_{2 \leqslant i < j \leqslant n}^{n} (\alpha_{ij} \overline{x_i} xj)) \\ &= \alpha_{11}[\ |x_1|^2 + 2Re(\overline{x_1} \textstyle\sum_{j=2}^{n} \frac{\alpha_{1j}}{\alpha_{11}} xj)] + \sum_{i=2}^{n} \alpha_{ii} |x_i|^2 + 2Re(\sum_{2 \leqslant i < j \leqslant n}^{n} (\alpha_{ij} \overline{x_i} xj)) \end{aligned}$$

  Posons : $\beta_j = \frac{\alpha_{1j}}{\alpha_{11}}$ $\forall j \in \{2, 3, .., n\}$
  Alors :
  $q(x) = \alpha_{11}[\ |x_1|^2 + 2Re(\overline{x_1} \sum_{j=2}^{n} \beta_j xj)] + \sum_{i=2}^{n} \alpha_{ii} |x_i|^2 + 2Re(\sum_{2 \leqslant i < j \leqslant n}^{n} (\alpha_{ij} \overline{x_i} xj))$.
  On sait déjà que :
  (* $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C} : |z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2Re(\overline{z_1} a_2)$*).

  Donc,$\forall x \in E$:

  $$\begin{aligned} q(x) &= \alpha_{11} |x_1 + \textstyle\sum_{j=2}^{n} \beta_j xj)|^2 - |\sum_{j=2}^{n} \beta_j xj|^2 + \sum_{i=2}^{n} \alpha_{ii} |x_i|^2 + 2Re(\sum_{2 \leqslant i < j \leqslant n}^{n} (\alpha_{ij} \overline{x_i} xj). \\ &= \alpha_{11} |x_1 + \textstyle\sum_{j=2}^{n} \beta_j xj|^2 + Q(x_2, x_3, .., x_n). \end{aligned}$$

Où :
$Q(x_2, x_3, .., x_n) = -|\sum_{j=2}^{n} \beta_j xj|^2 + \sum_{i=2}^{n} \alpha_{ii}|x_i|^2 + 2Re(\sum_{2\leqslant i<j\leqslant n}^{n} (\alpha_{ij}\overline{x_i}xj)$
et comme on a : $Q(x_2, x_3, .., x_n)$ est une forme quadratique sur $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension fini $n-1$;
On applique l'hypothèse de récurrence à Q.

** $\forall i \in \{1, 2, ..., n\}, \alpha_{ii} = 0$, alors : q s'écrit sous la forme de :

$$q(x) = 2Re(\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}^{n} (\alpha_{ij}\overline{x_i}xj).$$

comme $q \neq 0$, donc $\exists \alpha_{i_0 j_0}$, telle que : $i_0, j_0 \in \{1, 2, \ldots, n\}$.
Alors, on regroupe tous les termes contenant x_{i_0} et x_{j_0}.
Pour simplifier on suppose que : $\alpha_{i_0 j_0} = \alpha_{12}$; Alors on aura :
$q(x) = 2Re(\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}^{n} (\alpha_{ij}\overline{x_i}xj)$
$= 2Re(\alpha_{12}\overline{x_1}x_2 + \sum_{j=3}^{n} \alpha_{1j}\overline{x_1}xj + \sum_{j=3}^{n} \alpha_{2j}\overline{x_2}xj) + 2Re(\sum_{3\leqslant i<j\leqslant n}^{n} (\alpha_{ij}\overline{x_i}xj)$
On a : $Re(\sum_{j=3}^{n} \alpha_{2j}\overline{x_2}xj) = Re(\sum_{j=3}^{n} x_2\overline{\alpha_{2j}x_j})$ $\quad (Re(z) = Re(\overline{z}))$.
Posons : $y_1 = \sum_{j=3}^{n} \frac{\overline{\alpha_{2j}}}{\overline{\alpha_{12}}} x_j$, $y_2 = \sum_{j=3}^{n} \alpha_{1j}x_j$
Alors on aura :$\forall x \in E$:

$$\begin{aligned}
q(x) &= 2Re(\alpha_{12}\overline{x_1}x_2 + \overline{x_1}y_2 + \alpha_{12}\overline{y_1}x_2) + 2Re(\sum_{3\leqslant i<j\leqslant n}^{n} \alpha_{ij}\overline{x_i}xj) \\
&= 2Re(\alpha_{12}x_2\overline{x_1} + \alpha_{12}x_2\overline{y_1} + y_2\overline{x_1} + y_2\overline{y_1} - y_2\overline{y_1}) + 2Re(\sum_{3\leqslant i<j\leqslant n}^{n} \alpha_{ij}\overline{x_i}xj) \\
&= 2Re((\overline{x_1} + \overline{y_1})(\alpha_{12}x_2 + y_2) - y_2\overline{y_1}) + 2Re(\sum_{3\leqslant i<j\leqslant n}^{n} \alpha_{ij}\overline{x_i}xj) \\
&= 2Re((\overline{x_1 + y_1})(\alpha_{12}x_2 + y_2) - y_2\overline{y_1}) + 2Re(\sum_{3\leqslant i<j\leqslant n}^{n} \alpha_{ij}\overline{x_i}xj) \\
&= 2Re((\overline{x_1 + y_1})(\alpha_{12}x_2 + y_2)) - 2Re(y_2\overline{y_1}) + 2Re(\sum_{3\leqslant i<j\leqslant n}^{n} \alpha_{ij}\overline{x_i}xj)
\end{aligned}$$

pour tous $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ $\quad 2Re(\overline{z_1}z_2 = 2Re(\overline{z_2}z_1) = \frac{1}{2}|z_1 + z_2|^2 - \frac{1}{2}|z_1 - z_2|^2$.

Donc : $q(x) = \frac{1}{2}|x_1 + y_1 + \alpha_{12}x_2 + y_2|^2 - \frac{1}{2}|x_1 + y_1 - \alpha_{12}x_2 - y_2|^2 + Q(x3, .., x_n)$. avec :
$Q(x_3, .., x_n) = -2Re(y_2\overline{y_1}) + 2Re(\sum_{3\leqslant i<j\leqslant n}^{n} \alpha_{ij}\overline{x_i}xj)$
est une forme quadratique en $x_3, ...x_n$, alors : on applique l'hypothèse de récurrence à Q.

Définition 2.7

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension fini n, muni d'une forme quadratique q de rang r . On note p et m le nombre de coefficients respectivement positifs et négatifs apparaissant dans la réduction de q . La signature de q est le couple d'entiers (p, m).On la note sign(q) :

$$sign(q) = (p, m).$$

Proposition 2.5

Soit (p, m) la signature de q alors

- — Le rang de q est $p + m$.
- — q est non dégénérée si et seulement si $p + m = n$.
- — q est positive si et seulement si $m = 0$.
- — q est définie positive si et seulement si $(p, m) = (n, 0)$.

Exercices : Soit q une forme quadratique hermitienne définie sur $\mathbb{C}^3$ par :

$$q(x, y, z) = |x|^2 - |z|^2 - i\overline{x}y + i\overline{y}x + (i+1)\overline{x}z + (1-i)\overline{z}x + (2-i)\overline{y}z + (2+i)\overline{z}y$$

1) déterminer la matrice de q dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{C}^3$.
2) Décomposer en somme de carrés de modules q à l'aide de la méthode de Gauss.
3) En déduire le rang et la signature de q.

Réponse :

1) $M_1 = Mat(q, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 1 & -i & i+1 \\ i & 0 & 2-i \\ 1-i & 2+i & -1 \end{pmatrix}$.

2) $$\begin{aligned} q(x) &= |x|^2 + 2Re(-i\overline{x}y + (i+1)\overline{x}z) + 2Re((2-i)\overline{y}z) - |z|^2 \\ &= |x|^2 + 2Re(\overline{x}(-iy + (i+1)z)) + 2Re((2-i)\overline{y}z) - |z|^2 \\ &= |x - iy + (i+1)z|^2 - |-iy + (i+1)z|^2 + 2Re((2-i)\overline{y}z) - |z|^2 \\ &= |x - iy + (i+1)z|^2 - |y|^2 - 2Re(\overline{y}(i-1)z) - 3|z|^2 + 2Re((2-i)\overline{y}z) - |z|^2 \\ &= |x - iy + (i+1)z|^2 - |y + (2i-3)z|^2 + 8|z|^2 \end{aligned}$$

3) $sig(q) = (2, 1)$ et $rg(q) = 2 + 1 = 3$

Exercice : Déterminer une décomposition de Gauss et en déduire noyau, rang, signature pour la forme hermitienne ϕ sur $\mathbb{C}^3$, dont la matrice dans la base canonique :

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2i \\ 2 & 5 & 4i \\ 2i & -4i & 5 \end{pmatrix}$$

Réponse : On a
$$\begin{aligned} \phi(x, y, z) &= 2x\overline{x} + (2\overline{x}y + 2\overline{y}x) + (-2i\overline{x}z + 2i\overline{z}x) + 5y\overline{y} + (4i\overline{y}z - 4i\overline{z}y) + 5z\overline{z}z \\ &= 2(\overline{x} + \overline{y} + i\overline{z})(x + y - iz) + 3y\overline{y} + (6i\overline{y}z - 6i\overline{z}y) + 3z\overline{z} \\ &= 2|x + y - iz|^2 + 3(\overline{y} - 2i\overline{z})(y + 2iz) - 9z\overline{z}. \\ &= 2|x + y - iz|^2 + 3|y + 2iz|^2 - 9|z|^2. \end{aligned}$$

$$Ker(\phi) = 0, \ \ rg(\phi) = 3, \ \ sgn(\phi) = (2, 1)$$

Exercices : Soit q une forme quadratique sur $\mathbb{C}^3$ définie par :
$\forall x \in \mathbb{C}^3 \quad q(x) = |x_1|^2 - 2|x_2|^2 - 2i\overline{x_1}x_3 + 2ix_1\overline{x_3} + i\overline{x_2}x_3 - ix_2\overline{x_3}$.
1) Appliquer l'algorithme de Gauss à q.
2) donner le signature, et le rang de q .
3) q est-t-elle dégénérée ? ?
4) q définie -t-elle un produit scalaire ,si oui construire une base orthogonale de $\mathbb{C}^3$ pour q.

Réponse :

1) $$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{C}^3\ q(x) &= |x_1|^2 - 2Re(2i\overline{x_1}x_3) + |2ix_3|^2 - |2ix_3|^2 - 2[|x_2|^2 - 2Re(\tfrac{i}{2}\overline{x_2}x_3) + |\tfrac{i}{2}x_3|^2 - |\tfrac{i}{2}x_3|^2].\\ &= |x_1 - 2ix_3|^2 - 2|x_2 - \tfrac{i}{2}x_3|^2 + \tfrac{3}{2}|x_3|^2.\end{aligned}$$
2) la signature de q est : $sign(q) = (2, 1)$, et $rg(q) = 3$.
3) On a : $rg(q) = dim(\mathbb{C}^3)$ alors q est non dégénérée.
4) comme on a : $p = 2 \neq dim(\mathbb{C}^3)$, alors q ne présente pas un produit scalaire.

Exercices : Appliquer la méthode de Gauss à la forme hermitienne ψ définie sur $\mathbb{C}^4$ par :
$\psi(x_1, x_2, x_3, x_4) = \overline{x_1}x_2 + \overline{x_2}x_1 + \overline{x_2}x_3 + x_2\overline{x_3} + \overline{x_3}x_4 + \overline{x_4}x_3$,

et en déduire noyau, rang, signature de ψ.

Réponse : En utilisant l'identité $\overline{u}v + \overline{v}u = \frac{1}{2}(|u + v|^2 - |u - v|^2)$ dans $\mathbb{C}$, on a :

$$\begin{aligned}\psi(x_1, x_2, x_3, x_4) &= ((\overline{x_1} + \overline{x_3})x_2 + \overline{x_2}(x_1 + x_3)) + (\overline{x_3}x_4 + \overline{x_4}x_3)\\ &= \tfrac{1}{2}(|x_1 + x_3 + x_2|^2 - |x_1 + x_3 - x_2|^2) + \tfrac{1}{2}(|x_3 + x_4|^2 - |x_3 - x_4|^2)\\ &= \tfrac{1}{2}|x_1 + x_3 + x_2|^2 - \tfrac{1}{2}|x_1 + x_3 - x_2|^2 \tfrac{1}{2}|x_3 + x_4|^2 - \tfrac{1}{2}|x_3 - x_4|^2\end{aligned}$$

On a donc : $sign(\psi) = (2, 2)$, et $rg(\psi) = 4, Ker(\psi) = 0$.

2.4.3 Procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt

Théorème 2.4 (procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt)

Soit $(f_i)_{i=1,..,d}$ une famille libre d'un espace préhilbertien complexe E.
Posons $e_1 = f_1$, et $e_{k+1} = f_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \frac{<e_i, f_{k+1}>}{<e_i, e_i>} e_i$, pour tout $k \in \{1, \ldots, d-1\}$.
Alors :
La famille $(e_i)_{i=1,\ldots,d}$ est orthogonale et de plus pour tout entier $k \in \{1, \ldots, d-1\}$, on a :
$$vect\{e_1, \ldots, e_k\} = vect\{f_1, \ldots, f_k\}.$$

Preuve 13. *Montrons que nous pouvons construire e_k possédant les propriétés voulues par récurrence.*
Pour $k = 1$ c'est évident.
Supposons la construction faite jusqu'au k.
Puisque $\dim Vect\{e_1, \ldots, e_k\} = \dim Vect\{f_1, \ldots, f_k\} = k$ *; la famille $(e_i)_{i=1,\ldots,k}$ est libre et donc* $< e_i, e_i > \neq 0$.
Le vecteur e_{k+1} est bien défini par la formule de l'énoncé.
Pour $j \in \{1, \ldots, k\}$,on a :
$$\begin{aligned}< e_j, e_{k+1} > &=< e_j, f_{k+1} - \textstyle\sum_{i=1}^{k} \frac{<e_i, f_{k+1}>}{<e_i, e_i>} < e_j, e_i > >\\ &=< e_j, f_{k+1} > - \textstyle\sum_{i=1}^{k} \frac{<e_i, f_{k+1}>}{<e_i, e_i>} < e_j, e_i >\\ &=< e_j, f_{k+1} > - < e_j, f_{k+1} >= 0.\end{aligned}$$
La famille $(e_i)_{i=1,\ldots,k+1}$ est orthogonale. Par définition f_{k+1} appartient à $Vect\{e_{k+1}, e_1, \ldots, e_k\}$ qui est par hypothèse de récurrence, égal à $Vect\{f_{k+1}, f_1, \ldots, f_k\}$.
Donc $Vect\{e_1, \ldots, e_{k+1}\} \subseteq Vect\{f_1, \ldots, f_{k+1}\}$.

Comme on a également $f_{k+1} = \sum_{i=1}^{k} \frac{<e_i, f_{k+1}>}{<e_i, e_i>} e_i + e_{k+1}$,
on déduit de même l'inclusion inverse.

Remarque 2.2

Il suffit de poser $e'_i = \frac{e_i}{||e_i||}$, pour obtenir une base $(e'_i)_{i=1,\ldots,d}$ orthonormale.

Exercice : Dans $\mathbb{C}^3$ muni du produit scalaire hermitien usuel, appliquer la méthode de Gram-Shmidt à la famille formée des vecteurs suivantes :

$$v_1 = (i, 2, -2i),\ v_2 = (0, -i, 2), v_3 = (-i, 3, i)$$

Réponse : $v_1 = (i, 2, -2i)$, $v_2 = (0, -i, 2), v_3 = (-i, 3, i)$
On vérifie que (v_1, v_2, v_3) est une base de $\mathbb{C}^3$ $det_B(v_1, v_2, v_3) = -11i \neq 0$.

On applique Gram-Shmidt à la basse (v_1, v_2, v_3)
$\longrightarrow e_1 = \frac{v_1}{||v_1||} = \frac{v_1}{3} = \frac{1}{3}(i, 2, -2i)$
$\longrightarrow v'_2 = v_2 - < e_1, v_2 > e_1$

$= v_2 - \frac{1}{9} < v_1, v_2 > v_1$

$= \frac{1}{9}(2, -13i, 14)$

$e_2 = \frac{v'_2}{||v'_2||} = \frac{1}{\sqrt{369}}(2, -13i, 14) = \frac{1}{3\sqrt{41}}(2, -13i, 14)$

$\longrightarrow v'_3 = v_3 - < e_1, v_3 > e_1 - < e_2, v_3 > e_2$

$= v_3 - \frac{1}{9} < v_1, v_3 > v_1 - \frac{1}{369} < v'_2, v_3 > v'_2$

$e_3 = \frac{v'_3}{||v'_3||} = \frac{1}{\sqrt{41}}(-6i, 2, -i)$

Exercice : On pose $E = \mathbb{C}^3$, et on définit l'application q de E dans E par :

$q(x) = |x_1^2| + 3|x_2|^2 + 6|x_3|^2 + i\overline{x_1}x_2 - i\overline{x_2}x_1 + 2ix_2\overline{x_3} - 2i\overline{x_2}x_3$

a) Démontrer qu'il existe une forme hermitienne $f : E \times E \longmapsto E$ telle que pour tout x, $f(x, x) = q(x)$.
b) Calculer la matrice de f dans la base canonique.
c) Calculer une base orthonormale de f obtenue à partir du procédé de Gram-Schmidt

Réponse :

a) Directement, ou formule de polarisation.On obtient :
$f(x, y) = x_1\overline{y_1} + 3x_2\overline{y_2} + 6x_3\overline{y_3} + i\overline{x_1}x_2 - i\overline{x_2}x_1 + 2ix_2\overline{x_3} - 2i\overline{x_2}x_2$.
La forme f est évidement hermitienne (vu son expression).

b) La matrice de f est : $\begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ -i & -3 & -2i \\ 0 & 2i & 6 \end{pmatrix}$

c) On part de la base canonique, et on applique Gram-Schmidt :

$e_1 = (1, 0, 0)$ est le premier vecteur de la base.
Pour calculer e_2 on projette $(0, 1, 0)$ sur l'orthogonal de e_1 Donc on cherche $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $(0, 1, 0) + \lambda(1, 0, 0) = (\lambda, 1, 0)$ soit orthogonal à $(1, 0, 0)$.On résoud $f((\lambda, 1, 0), (1, 0, 0)) = 0$ et on trouve $\lambda = -i$.

Pour e_3 on projette $(0,0,1)$ sur l'orthogonal de e_1 et e_2.Donc on cherche λ et ν tels que $(0,0,1)+\lambda e_1+\nu e_2$ soit orthogonal à e_1 et e_2.On résoud comme précédemment (sauf que là, on a deux équations au lieu d'une) et on obtient $\lambda = 0$ et $\nu = \frac{i}{2}$.Finalement on normalise les trois vecteurs obtenu, et on trouve la base orthonormée suivante :

$e_1 = (1,0,0)$ $e_2 = (\frac{-i}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$ $e_3 = \frac{3}{\sqrt{2}}(\frac{1}{2}, \frac{i}{2}, 1)$

Exercice : Soient E un espace hermitien de dimension n, et $B = (e_1,\dots,e_n)$une base de E. Montrer que :

$$\forall u_1,\dots,u_n \in E,\ |\det(u_1,\dots,u_n)| \leqslant ||u_1||.||u_2||\dots||u_n||.$$

Réponse : Lorsque la famille $(u_1,\dots,u_n)$ est liée, $\det_B(u_1,\dots,u_n) = 0$, donc le résultat est évident.
Si la famille $(u_1,\dots,u_n)$ est libre, d'après le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt,il existe une base orthonormale $B' = (e'_1,\dots,e'_n)$ de E telle que
pour tout $k \in [1,n]$,$u_k \in Vect(e'_1,\dots,e'_n)$. On a :
$|\det_B(u_1,\dots,u_n)| = |\det_B(B')||\det_{B'}(u_1,\dots,u_n)| = |\det_{B'}(u_1,\dots,u_n)|$.
Ce dernier déterminant est celui d'une matrice triangulaire supérieure, donc égale au produit des éléments de sa diagonale.Or le $k^{ième}$ coefficients de sa diagonale est la $k^{ième}$ coordonnée de u_k dans la base orthonormale B', c'est-à-dire $< e'_k, u_k >$,donc :

$$|det_{B'}(u_1,\dots,u_n)| = \prod_{k=1}^{n} |< e'_k, u_k >|.$$

En utilisant l'inégalité de Caushy-Schwarz, $|< e'_k, u_k >| \leqslant ||u_k||$,d'où :

$$|\det(u_1,\dots,u_n)| \leqslant ||u_1||.||u_2||\dots||u_n||.$$

2.4.4 Projection orthogonale

Dans ce paragraphe, E désigne un espace hermitien.

Définition 2.8

Soit F un sous-espace de E non réduit à $\{0\}$ de dimension m, On appelle projection orthogonale sur F la projection sur F parallèlement à $F^\perp$.On notera p_F cette projection.

Théorème 2.5

Soit $(e_1,\dots,e_m)$,une base orthonormale de F, alors :

$$\forall x \in E\ p_F(x) = \sum_{i=1}^{m} < e_i, x > e_i.$$

En outre $p_F + p_{F^\perp} = Id_E$.

Remarque 2.3

— Si $F = \{0\}$, on peut définir p_F, c'est l'application nulle. On suppose donc, a priori, F non réduit à $\{0\}$.
Dans le cas où $F = E$,alors p_F est l'application identité.
— Soient M_{p_F} la matrice du p_F, et $M_{p_{F^\perp}}$ la matrice du $p_{F^\perp}$.
Comme on a : $p_F = Id_E - p_{F^\perp}$ Alors : $M_{p_F} = Id - M_{p_{F^\perp}}$.

Exemples :

Soit $a \neq 0_E$.
— Soit $F = Vect(a)$.
On a : $\{\frac{a}{||a||}\}$ forme une base orthonormée de F.
Donc $\forall x \in E,\ p_F(x) = \frac{<a,x>}{||a||^2} a$.

— Soit $H = Vect(a)^\perp$.
comme on a : $F = H^\perp$ alors : $p_H = Id - p_F$
D'où : $\forall x \in E$, $p_H(x) = x - \frac{<a,x>}{||a||^2} a$.

Exercice : Soit p un projecteur de E.
Montrer que les affirmations suivantes sont équivalentes

(i) p est orthogonal.
(ii) $\forall (x, y) \in E^2$, $< p(x), y >=< x, p(y) >$.
(iii) $||p(x)|| \leqslant ||x||$

Réponse : *(i)* $\Longrightarrow$ *(ii)*, Soient x et y deux vecteurs de $E.p(y) \in Im(p)$ et $x - p(x) \in Ker(p)$ car p est un projecteur orthogonal. Par conséquent,
$< x - p(x), p(y) >= 0$ donc $< x, p(y) >=< p(x), p(y) >$.
Symétriquement, on a $< p(x), y - p(y) >= 0$ puis, $< p(x), y >=< p(x), p(y) >$.Finalement,$< x, p(y) >=< p(x), y >$.

(ii) $\Longrightarrow$ *(iii)*, pour tout $x \in E$, en utilisant successivement la définition de la norme, l'affirmation (ii), la définition d'un projecteur et l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$||p(x)||^2 =< p(x), p(x) >=< x, p(p(x)) >=< x, p(x) >\leq ||x||||p(x)||$.
Ce qui entraine $||p(x)|| \leqslant ||x||$ dés que, $||p(x)|| \neq 0$.La propriété est évidente dans le cas $||p(x)|| = 0$.

(iii) $\Longrightarrow$ *(i)*, soit $x \in Ker(p)$, $y \in Im(p)$, $t \in \mathbb{R}$.On a $p(x + ty) = p(x) + tp(y) = ty$, et on écrit :
$t^2||y||^2 = ||ty||^2 = ||p(x + ty)||^2 \leq ||x + ty||^2 = ||x||^2 + 2tRe(< x, y >) + t^2||y||^2$ (3.2),
o'u l'inégalité est due à l'affirmation (iii). Ainsi, on obtient :$0 \leq ||x||^2 + 2tRe(< x, y >)$. t étant un réel quelconque, ceci implique nécessairement$Re(< x, y >) = 0$.Si $\Bbbk = \mathbb{C}$ on réécrit l'inégalité (3.2) avec $x + ity$ pour obtenir $Im(< x, y >) = 0$.
Finalement $< x, y >= 0$ et $Ker(p) \perp Im(p)$,i.e. p est un projecteur orthogonal.

Exercice : Soit E un espace vectoriel hermitien, $p, q \in \mathcal{L}(E)$ deux projecteurs orthogonaux.
Démontrer l'équivalence entre :

1 $Im(p) \subset Im(q)$;
2 Pour tout $x \in E, ||p(x)|| \leq ||q(x)||$.

Réponse : On va se simplifier la vie en travaillant avec les noyaux plutôt que les images.il est en effet clair que, si F et G sont deux-espaces de E,alors

$$F \subset G \Longleftrightarrow G^{\perp} \subset F^{\perp}.$$

De plus s'agissant de projections orthogonales,$Im(p)^{\perp} = Ker(p)$.L'assertion 1 est donc équivalente à

(3) $Ker(q) \subset Ker(p)$.

Démontrons alors que $2 \Longrightarrow 3$.Supposons 2 et prenons $y \in Ker(q)$.Alors on a

$$||p(x)|| \leq ||q(x)|| = 0$$

et donc $p(y) = 0$.Réciproquement, supposons $Keer(q) \subset Ker(p)$ et prouvons 2.Soit $x \in E$, que l'on décompose en $x = x_1 + x_2$ dans $Ker(q) \bigoplus Im(q)$.Alors
$q(x) = x_2$ et $p(x) = p(x_1) + p(x_2) = p(x_2)$. de plus, $||p(x_2)|| \leq ||x_2||$ .Ainsi, on bien prouvé que $||p(x)|| \leq ||q(x)||$.

Exercice : Soient E un espace hermitien,p,q deux projecteurs orthogonaux de E.Montrer :

$$p \circ q = q \circ p \Longleftrightarrow p \circ q \circ p = q \circ p \circ p.$$

Réponse : Un sens est évident.
Notons la loi de composition par l'absence de symbole et supposons $pqp = qpp = qp$. En notant $f = qp - pq$, on a :

$$f^*f = (p^*q^* - q^*p^*)(qp - pq) = (pq - qp)(qp - pq) = pqp - qpqp - pqpq + qpq$$

$$= pqp - q(qp) - (qp)q + qpq = 0.$$

$d'où\ f = 0,\ pq = qp$

Exercice : Soient p et q deux projecteurs d'un $\mathbb{C}$ espace vectoriel.
Montrer que ($p + q$ est projecteur)$\Longleftrightarrow$ $(p \circ q = q \circ p = 0) \Leftrightarrow (\mathrm{Im}(p) \subset \mathrm{Ker}(q)$ et $\mathrm{Im}(q) \subset \mathrm{Ker}(p))$
Dans le cas où $p + q$ est un projecteur, déterminer $\mathrm{Ker}(p + q)$ et $\mathrm{Im}(p + q)$.

Réponse : $\Rightarrow$ Si $p + q$ est un projecteur alors l'égalité $(p + q)^2 = p + q$ fournit $pq + qp = 0$.En composant par p à droite ou à gauche , on obtient $pqp + qp = 0 = pq + pqp$ et donc $pq = qp$.

Cette égalité jointe à l'égalité $pq + qp = 0$ fournit $pq = qp = 0$.
$\Leftarrow$ Si $pq = qp = 0$, alors $(p + q)^2 = p^2 + pq + qp + q^2 = p + q$ et $p + q$ est un projecteur.

Pour tous projecteurs p et q, ($p + q$ projecteur $p \circ q = q \circ p = 0 \Leftrightarrow \mathrm{Imq} \subset Kerp$ et $Imp \subset Kerq$)
Dorénavant, $p + q$ est un projecteur ou ce qui revient au même $pq = qp = 0$.
On a $\mathrm{Kerp} \cap \mathrm{Ker}\, q \subset \mathrm{Ker}(p + q)$ Inversement, pour $x \in E$,

$$x \in \mathrm{Ker}(p + q) \Rightarrow (p + q)(x) = 0 \Rightarrow p(p(x) + q(x)) = 0 \Rightarrow p(x) = 0,$$

et de même $q(x) = 0$.Ainsi, $\mathrm{Ker}(p + q) \subset \mathrm{Kerp} \cap \mathrm{Kerq}$ et donc $\mathrm{Ker}(p + q) = \mathrm{Kerp} \cap \mathrm{Kerq}$
On a $\mathrm{lm}(p + q) \subset \mathrm{Im}\, p + \mathrm{Im}\, q$.Inversement, pour $x \in E$,

$$x \in \mathrm{Im}\, p + \mathrm{Im}\, q \Rightarrow \exists\, (x_1, x_2) \in E^2 / x = p\,(x_1) + q\,(x_2).$$

Mais alors, $(p + q)(x) = p^2\,(x_1) + pq\,(x_1) + qp\,(x_2) + q^2\,(x_2) = p\,(x_1) + q\,(x_2) = x$ et donc $x \in Im(p + q)$. Ainsi, $\mathrm{Im}\, p + \mathrm{Im}\, q \subset \mathrm{Im}(p + q)$ et donc, $\mathrm{Im}(p + q) = \mathrm{Im}\, p + \mathrm{Im}\, q$.En résumé, si p et q sont deux projecteurs tels que $p + q$ soit un projecteur, alors

$\mathrm{Ker}(p + q) = \mathrm{Ker}\, p \cap \mathrm{Ker}\, q$ et $\mathrm{Im}(p + q) = \mathrm{Im}\, p + \mathrm{Im}\, q$

Théorème 2.6 (Pythagore)

$\forall (x,y) \in E^2$, $< x, y >= 0 \Rightarrow ||x+y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2$.

Remarque 2.4

La réciproque est fausse contrairement au cas réel,on n'a pas l'équivalence car, d'après les formules de polarisation $||x+y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2 \Rightarrow < x, y > \in i\mathbb{R}$, possibilité qui ne se présente pas dans un espace préhilbertien réel.
endrem **contre exemple :** $||1+i||^2 = ||1||^2 + ||i||^2$, mais $< 1, i > \neq 0$.

Exercice : Soit E un espace préhilbertien complexe et(e_n) une famille orthonormé totale de E.Démontrer que, pour tout $x \in E$, on a
$$\sum_{n\geq 1} < x, e_n >^2 = ||x||^2.$$

Réponse : Pour $N \geq 1$, notons p_N la projection orthogonale sur l'espace vectoriel $vect(e_1, ..., e_N)$. Alors puisque la famille $(e_n)_{n\geq 1}$ est totale, on sait que $||x - p_N(x)|| \longrightarrow 0$ lorsque $N \longrightarrow +\infty$.Mais par le théorème de Pythagore,

$$||x||^2 = ||x - p_N(x)||^2 + ||p_N(x)||^2 = ||x - p_N(x)||^2 + \sum_{n=1^N} < x, e_n >^2$$

Faisant tendre N vers $+\infty$, on trouve bien le résultat demandé.

Théorème 2.7 (Pythagore Généralisé)

si $(e_1, e_2, ..., e_n)$ est une famille orthogonale, alors :
$||e_1 + .. + e_n||^2 = ||e_1||^2 + ... + ||e_n||^2$.

Preuve 14. *Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$. Pour $n = 1$,on a : $||e_1||^2 = ||e_1||^2$*
Supposons la propriété établie au $n \geq 1$.
Soit $(e_1, ..., e_n, e_{n+1})$ une famille orthogonale.
En exploitant $||a+b||^2 = ||a||^2 + 2Re(f(a,b)) + ||a||^2$ avec :$a = e_1 + ... + e_n$, et $b = e_{n+1}$, on obtient :
$||e_1 + ... + e_n + e_{n+1}||^2 = ||e_1 + ... + e_n||^2 + ||e_{n+1}||^2$ *(car $f(a,b) = 0$).*
Par hypothèse de récurrence on aura :
$||e_1 + ... + e_n + e_{n+1}||^2 = ||e_1||^2 + ... + ||e_n||^2 + ||e_{n+1}||^2$.
Récurrence établie.

Définition 2.9

Soit F un sous espace vectoriel de dimension fini de E, non réduit à $\{0\}$.
Pour tout vecteur $x \in E$ on définit la distance de x à F par :

$$d(x,F) = \inf ||x - y|| \quad \forall y \in F.$$

Proposition 2.6

Soit $x \in E$.

$$d(x,F) = ||x - p_F(x)||.$$

Preuve 15. *Soit $x \in E$.*
$d(x,F) = \inf_{y\in F} ||x - y|| = min_{y\in F}||x - y|| = ||x - p_F(x)||$.

Exemples :

* Soit F un sous espace vectoriel d'un espace hermitien E, $F^{\perp} = vect(\omega)$ avec $||\omega|| = 1$ montrons que : $d(x, F) = | < \omega, x > |$

  $d(x, F) = ||x - p_F(x)|| = ||p_{F^{\perp}}(x)|| = || < \omega, x > .\omega|| = | < \omega, x > |$.
* Soit $a \neq 0_E$. Soit $H = Vect(a)^{\perp}$. $\forall x \in E$, $d(x, H) = \frac{|<a,x>|}{||a||}$.

Corollaire 2.1

pour tout $x \in E$, on a : $||x||^2 = ||p_F(x)||^2 + (d(x, F))^2$.

Preuve 16. *Comme* $x = p_F(x) + (x - p_F(x))$,*et* $p_F(x) \perp (x - p_F(x))$. *alors d'après Pythagore* $||x||^2 = ||p_F(x)||^2 + ||(x - p_F(x))||^2$, *d'où le résultat.*

Corollaire 2.2

Si $(e_1, .., e_n)$ est une famille orthonormée de vecteurs de E,alors :

$$\forall x \in E, \sum_{i=1}^{n} | < e_i, x > |^2 \leqslant ||x||^2.$$

appelée : **Inégalité de Bessel**.

Preuve 17. *Soit* $x \in E$ *on a* $p_F(x) = \sum_{i=1}^{n} < e_i, x > e_i$
alors , $||p_F(x)||^2 = \sum_{i=1}^{n} | < e_i, x > |^2 = ||x||^2 - (d(x, F))^2 \leqslant ||x||^2$.

Exemples :

Si $(e_n)_{n\in N}$ est une famille orthonormée de vecteurs de E alors pour tout $x \in E$, la série numérique $\sum | < e_n, x > |^2$, converge et $\sum_{n=0}^{\infty} | < e_n, x > |^2 \leqslant ||x||^2$.
En effet, par ce qui précède, les sommes partielles de la série à termes positifs $| < e_n, x > |^2$ sont majorées par $||x||^2$.

Exercice : Soient E un espace hermitien et p un endomorphisme de E tel que $p \circ p = p$:

Montrer : $p^* = p \Longleftrightarrow (\forall (x, y) \in Ker(p) \times Im(p), < x, y >= 0)$.

Réponse :

1) Supposons $p^* = p$.
   Soient $x \in Ker(p)$, $y \in Im(p)$ (donc $p(y) = y$).

   On a : $< x, y >=< x, p(y) >=< p^*(x), y >=< p(x), y >= 0$.
2) Réciproquement supposons : $\forall (x, y) \in Ker(p) \times Im(p), < x, y >= 0$.

   Soit $(u, v) \in E^2$.On a : $\begin{cases} p(u) \in Im(p) \\ v - p(v) \in Ker(p) \end{cases}$, donc :$< p(u), v - p(v) >= 0$,
   d'où : $< p(u), v >=< p(u), p(v) >$.
   En changeant les rôles de u et v, on aussi :

   $$< p(v), u >=< p(v), p(u) >= \overline{< p(u), p(v) >} = \overline{< p(u), v >} =< v, p(u) >=< p^*(v), u >.$$

   Ainsi : $(\forall u \in E, < p(v) - p^*(v), u >= 0)$, d'où : $p = p^*$.

2.5 Endomorphisme d'un espace hermitien

2.5.1 Généralité (Espace dual)

Définition 2.10

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel. On appelle forme linéaire sur E toute application linéaire de E dans $\mathbb{C}$.

Définition 2.11

On appelle espace vectoriel dual de E, qu'on note E^*, l'espace vectoriel de toutes les formes linéaire sur E. pour $x \in E$ et $\phi \in E^*$,
on pose : $\phi(x) =< x, \phi >$

Remarque 2.5

Si E est de dimension finie, alors $dim(E) = dim(E^*)$, et pour cela : E est isomorphe à son espace dual E^*.

Proposition 2.7

Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension fini n,
$(e_1, \dots, e_n)$ une base quelconque de E.
Pour chaque $i \in \{1, 2, .., n\}$, on définit $e^* \in E^*$, par :

$$\forall j \in \{1, 2, .., n\}, \ < e_j, e_i^* >= \delta_{ij}$$

. Alors $(e_1^*, .., e_n^*)$ est une base de E^* ,appelée base duale de E

Preuve 18. *Puisque* dim $E^* = n$,*alors il suffit de montrer que* $(e_1^*, \dots, e_n^*)$ *est libre .Pour cela ,soit* $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{C}^n$,*tel que* $\alpha_1 e_1^* + \alpha_2 e_2^* + \dots + \alpha_n e_n^* = 0$.
On a : $\sum_{i=1}^n \alpha_i e_i^* = 0 \Leftrightarrow \forall j \in \{1, 2, \dots, n\}, \ < e_j, \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i^* >= 0$
$\Leftrightarrow \forall j \in \{1, 2, \dots, n\}, \ \sum_{i=1}^n \alpha_i < e_j, e_i^* >= 0$
$\Leftrightarrow \forall j \in \{1, 2, \dots, n\}, \ \alpha_j = 0$ *car* $< e_j, e_i^* >= \delta_{ij}$

Proposition 2.8

Soient E un $\mathbb{C} =$ espace vectoriel de dimension finie n ,
$(e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E et $(e_1^*, e_2^*, \dots, e_n^*)$ sa base duale, alors
- $\forall x \in E, \ x = \sum_{i=1}^n < x, e_i^* > e_i$.
- $\forall \phi \in E^*, \ \phi = \sum_{i=1}^n < e_i, \phi > e_i^*$.

Preuve 19.
- *Soit* $x \in E$, *avec* $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$,*alors pour tout* $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, *on a :* $< x, e_j^* >= x_j$.
- *Soit* $\phi \in E^*$ *avec* $\phi = \sum_{i=1}^n y_i e_i^*$,*alors pour tout* $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, *on a :* $< e_j, \phi >= y_j$.

Proposition 2.9

Soient E un $\mathbb{C}$ espace vectoriel de dimension finie n , et $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E et $(e_1^*, e_2^*, \dots, e_n^*)$ sa base duale. Soit u un endomorphisme de E et $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ la matrice de u par rapport à la base $(e_1, e_2, \dots, e_n)$.
Alors
$$\forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\}, \ a_{ij} =< u(e_j), e_i^* > .$$

Preuve 20. *D'après la proposition précédente, on a :*
$\forall j \in \{1, 2, \dots, n\}, u(e_j) = \sum_{i=1}^n < u(e_j), e_i^* > e_i$. *Donc , si* $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ *la matrice de* u *par rapport à la base* $(e_1, \dots, e_n)$, *alors*
$$\forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\}, \ a_{ij} =< u(e_j), e_i^* > .$$

Théorème 2.8 (Isomorphisme sesquilinéaire entre E et E^*)

Soit E un espace hermitien de produit scalaire hermitien noté $< ., . >$.
L'application : $\begin{array}{cccc} i: & E & \to & E^* \\ & x & \mapsto & < ., x > \end{array}$ est un isomorphisme sesquilinéaire entre E et son dual E^*.

Preuve 21. *Soit* $x \in E$
Si $i(x) = 0 \quad (x \in \ker i)$
on a : $< ., x >= 0 \Rightarrow \forall y \in E, \ < y, x >= 0$
$\Rightarrow < x, x >= 0$
$\Rightarrow x = 0.$
Donc i *est injective, et Comme* E *et* E^* *ont même dimension.*
Alors i *est un isomorphisme sesquilinéaire.*

2.5.2 Endomorphisme adjoint

Proposition 2.10

Soit E un espace hermitien. Alors pour tout endomorphisme u de E,
il existe un unique endomorphisme v de E, tel que :

$$\forall x, y \in E, \ < u(x), y > = < x, v(y) >$$

Dans ce cas, v s'appelle l'adjoint de u noté $u*$.

Preuve 22. *Pour chaque $y \in E$, on considère la forme linéaire ϕ sur E définie par :*
$\forall x \in E, \phi_y(x) = < y, u(x) >$.
Puisque tout produit hermitien est non dégénéré et puisque E est de dimension finie, alors l'application :ψ : $E \to E^*$

$$z \mapsto \psi(z) \ , \text{ Où } \forall x \in E, \psi(z)(x) = < z, x >.$$

est un isomorphisme d'espace vectoriels.
On a : $\phi_y \in E^*$,donc il existe un unique $z_y \in E$,tel que : $\psi(z_y) = \phi_y$,donc si pour chaque $y \in E$,$u^*(y) = z_y$, considérons l'application $u^* : E \to E$. Alors u^*,est linéaire.
en effet, soient $y_1, y_2 \in E$, et $\lambda \in \mathbb{C}$, alors on a :

$$\begin{aligned}\forall x \in E, \ < x, u^*(y_1 + \lambda y_2) > &= < u(x), y_1 + \lambda y_2 > \\ &= < x, u^*(y_1) > + \lambda < x, u^*(y_2) > \\ &= < x, u^*(y_1) > + < x, \lambda u^*(y_2) >\end{aligned}$$

Donc $\forall x \in E, \ < x, u^*(y_1 + \lambda y_2) - \lambda u^*(y_2) - u^*(y_2) > = 0$,
par suite $u^*(y_1 + \lambda y_2) - u^*(y_1) - \lambda u^*(y_2) = 0$.
Donc u^* est linéaire.
Et on a :

$$\begin{aligned}\forall x, y \in E, \ \phi_y(x) = \psi(z_y)(x) &\Leftrightarrow \forall x, y \in E, \ < y, u(x) > = < z_y, x > \\ &\Leftrightarrow \forall x, y \in E, \ < y, u(x) > = < u^*(y), x > \\ &\Leftrightarrow \forall x, y \in E, \ \overline{< u(x), y >} = \overline{< x, u^*(y) >} \\ &\Leftrightarrow \forall x, y \in E, \ < u(x), y > = < x, u^*(y) >.\end{aligned}$$

montrons L'unicité de u^* :
Soit w un autre endomorphisme de E,tel que : $\forall x, y \in E, \ < u(x), y > = < x, w(y) >$ alors , on aura :
$\forall x, y \in E, \ < x, u^*(y) > = < x, w(y) >$
Ainsi on deduit que $\forall y \in E, w(y) = u^*(y)$.

Proposition 2.11

Soit E un espace hermitien. Alors on a ;
- $\forall u \in L(E), \ u^{**} = u$.
- $\forall u, v \in L(E), \ (u + v)^* = u^* + v^*$.
- $\forall u \in L(E), \forall \lambda \in \mathbb{C}, \ (\lambda u)^* = \overline{\lambda} u^*$.
- $\forall u, v \in L(E), \ (v \circ u)^* = u^* \circ v^*$.
- Si β est une base orthonormale de E et si $A = Mat(u, \beta)$, alors on a

$$M(u^*, \beta) = A^*$$

Preuve 23.
- *Soit $w = u^{**} = (u^*)^*$, alors w est l'unique endomorphisme de E vérifiant $\forall x, y \in E, < u^*(x), y > = < x, w(y) >$, Or, par définition de l'adjoint, on a $\forall x, y \in E, < u^*(x), y > = < x, u(y) >$*
  Donc $u^{**} = u$.
- $\forall x, y \in E, , < (u + v)^*(x), y > = < x, (u + v)(y) >$
  $$\begin{aligned}&= < x, u(y) > + < x, v(y) > \\ &= < u^*(x), y > + < v^*(x), y > \\ &= < (u^* + v^*)(x), y >\end{aligned}$$
  Donc $(u + v)^* = u^* + v^*$.
- *Se démontre de la même manière que 2.*
- $\forall x, y \in E$, *on a* $< (v \circ u)^*(x), y > = < x, (v \circ u)(y) > = < x, v(u(x)) > = < v^*(x), u(y) > = < u^*(v^*(x)), y > = <$

$(u^* \circ v^*)(x), y >$

Donc $(v \circ u)^* = u^* \circ v^*$.

— *Posons* $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$, *et* $B = M(u^*, \beta) = (b_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$, *alors on sait que* $\forall i, j \in \{1, \ldots, n\}$, $a_{ij} =< e_i, u(e_j) >$, *et* $b_{ij} = \overline{< e_i, u^*(e_j) >}$

, *on aura* $b_{ij} =< e_i, u^*(e_j) >=< u(e_i), e_j >= \overline{< e_j, u(e_i) >} = \overline{< a_{ij} >}$

Donc, $B = \overline{A}^t = A^*$.

Proposition 2.12

Soient E un espace hermitien et u un endomorphisme de E, alors

— $ker(u^*) = Im(u)^\perp$.

— $Im(u^*) = ker(u)^\perp$.

— Si F est un sous-espace de E stable par u, alors $F^\perp$ est stable par u^*.

Preuve 24. — *Soit* $y \in E$, *alors on a*

$$\begin{aligned} y \in ker(u^*) &\Leftrightarrow u^*(y) = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall x \in E, < u^*(y), x >= 0 \\ &\Leftrightarrow \forall x \in E, < y, u(x) >= 0 \\ &\Leftrightarrow y \in Im(u)^\perp. \end{aligned}$$

Donc $ker(u^*) = Im(u)^\perp$.

— *D'après* 1., *on a* $ker(u) = ker(u^*) = Im(u^*)^\perp$

Donc, on aura

$ker(u)^\perp = Im(u^*)$.

— *Soit* F *un sous-espace vectoriel de*E *stable par* u. *Vérifions que* $F^\perp$ *est stable par* u^*, *pour cela soient* $y \in F^\perp$, *et* $x \in F$,

alors on a $< u^*(y), x >=< y, u(x) >= 0$ *(car* $u(x) \in F$*et* $y \in F^\perp$*).*

Donc $F^\perp$ *est stable par* u^*.

Exercice : Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$, $A \in M_n(\mathbb{C})$, $B \in M_p(\mathbb{C})$, $f \in \mathcal{L}(M_{n,p}(\mathbb{C}))$ défini par :

$$\forall X \in (M_{n,p}(\mathbb{C}), \ f(X) = AX - XB.$$

Déterminer f^*. $(M_{n,p}(\mathbb{C})$ est muni du psh canonique).

Réponse Il est clair que f est linéaire.

On a pour tout (X, Y) de $M_{n,p}(\mathbb{C})$:

$$\begin{aligned} < f(X), Y >=< AX - XB, Y >&= tr((AX - XB)^* Y) \\ &= tr(X^* A^* Y) - tr(B^* X^* Y) \\ &= tr(X^* A^* Y - X^* Y B^*) \\ &= tr(X^*(A^* Y - Y B^*)) \\ &=< X, A^* Y - Y B^* > . \end{aligned}$$

$$\textit{Soit} \ \ g : \begin{array}{rcl} M_{n,p}(\mathbb{C}) & \longrightarrow & M_{n,p}(\mathbb{C}) \\ X & \longrightarrow & A^* X - X B^*, \end{array}$$

il est clair que g est linéaire et :

$$\forall (X, Y) \in (M_{n,p}(\mathbb{C}))^2, < f(X), Y >=< X, g(Y) >,$$

donc g est l'adjoint de f

Ainsi,

$$f^* : \begin{array}{rcl} M_{n,p}(\mathbb{C}) & \longrightarrow & M_{n,p}(\mathbb{C}) \\ X & \longrightarrow & A^* X - X B^*, \end{array}$$

Exercice : Soit E un espace préhilbertien complexe $f \in \mathcal{L}(E)$ admettant un adjoint et un polynôme minimal.Montrer que f^* admet un polynôme minimal et que $\pi_{f^*} = \overline{\pi_f}$

Réponse : Soit $P = a_0 + a_1 X + ... + a_N X^N \in \mathbb{C}[X]$ tel que $p(f) = 0$.Alors

$\overline{P}(f^*) = \overline{a_0}e + \overline{a_1}f^* + ... + \overline{a_N}(f^*)^N = (a_0 e + a_1 f + ... + a_N f^N)^*$.
Ainsi : $\forall P \in \mathbb{C}[X], \ (P(f) = 0 \Longrightarrow \bar{P}(f^*) = 0)$.

En appliquant ce résultat à f^*,on déduit l'équivalence logique :

$\forall P \in \mathbb{C}[X], \ (P(f) = 0 \Longleftrightarrow \overline{P}(f^*) = 0)$.

Comme f admet un polynôme minimal $\pi_f (\neq 0)$, on conclut que f^* admet aussi un polynôme minimal, et : $\pi_{f^*} = \overline{\pi_f}$.

2.5.3 Endomorphisme unitaire

Dans ce paragraphe, n est un entier strictement positive.On suppose que $\mathbb{C}^n$ est muni de son produit scalaire canonique .

Définition 2.12

Soient E un espace hermitien et u un endomorphisme de E.
On dit que u est unitaire, si $u^* u = Id_E$.

Remarque 2.6

— Une matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$ est dite unitaire, si $A^* A = Id_n$.
— Soit B une base orthonormale de E et soit $A = Mat(u, B)$,
alors u est unitaire $\Leftrightarrow$ A est unitaire.
— Tout endomorphisme unitaire est inversible et on a : $u^{-1} = u^*$.

Exercice : Soient $n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}, \ \omega = \exp\left(\frac{2i\pi}{n}\right), A = \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\omega^{(k-1)(j-1)}\right)_{1 \le k,j \le n}$
Montrer que A est unitaire.

Réponse : $.A^* = (b_{jl})_{jl}$, où $b_{jl} = \overline{a_{lj}} = \frac{1}{\sqrt{n}}\omega^{-(l-1)(j-1)}$.
$AA^* = (c_{kl})_{kl}$, où :

$c_{kl} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\omega^{(k-1)(j-1)-(l-1)(j-1)} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\omega^{(k-l)(j-1)} = \begin{cases} 0 \ \ si \ \ \omega^{k-l} \neq 1 \\ 1 \ \ si \ \ \omega^{k-l} = 1 \end{cases}$,

et : $\omega^{k-l} = 1 \Longleftrightarrow \exp\left(\frac{2i(k-l)\pi}{n}\right) = 1 \Longleftrightarrow \frac{2(k-l)\pi}{n} \equiv 0[2\pi] \Longleftrightarrow k - l \in n\mathbb{Z} \Longleftrightarrow k = l$,

car $(k, l) \in \{1, ., ., n\}^2$.
Finalement $AA^* = I_n$, A est unitaire.

Proposition 2.13

Soient E un espace hermitien et u un endomorphisme de E. Alors les propositions suivantes sont équivalentes :
- u est unitaire,
- $\forall x \in E$, $||u(x)|| = ||x||$,
- $\forall x \in E$, $< u(x), u(y) >=< x, y >$.

Preuve 25. 1. $\Rightarrow$ 2. *Supposons que u est unitaire, donc pour tout $x \in E$, $u^*(u(x)) = x$.*
Soit $x \in E$, alors on a : $||u(x)||^2 =< u(x), u(x) >=< u^*(u(x)), x >=< x, x >= ||x||^2$.
2. $\Rightarrow$ 3. *Supposons que* $\forall x \in E$, $||u(x)|| = ||x||$.
Soient $x, y \in E$, alors, d'après l'identité de polarisation, on a :

$$\begin{aligned} < u(x), u(y) > &= \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} i^k ||u(x) + i^k u(y)||^2 \\ &= \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} i^k ||u(x) + u(i^k y)||^2 \\ &= \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} i^k ||u(x + i^k y)||^2 \\ &= \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} i^k ||x + i^k y||^2 =< x, y >. \end{aligned}$$

3. $\Rightarrow$ 1. *Supposons que :*
$\forall x, y \in E$, $< u(x), u(y) >=< x, y >$.
Soient $x, y \in E$, alors on a :

$$\begin{aligned} \forall x, y \in E, < u(x), u(y) >=< x, y > &\Rightarrow \forall x, y \in E, < u^*(u(x)), y >=< x, y > \\ &\Rightarrow \forall x, y \in E, < (u^*u)(x), y >=< x, y > \\ &\Rightarrow \forall x, y \in E < (u^*u)(x) - x, y >= 0. \end{aligned}$$

Fixons $x \in E$, alors on aura
$\forall y \in E, < (u^*u)(x) - x, y >= 0$
Le produit hermitien est non dégénérée, donc on aura $x \in E$, $(u^*u)(x) - x = 0$.
Donc pour tout $x \in E$, on a $(u^*u)(x) = x$. D'où le résultat

Remarque 2.7

soit u un endomorphisme unitaire de E et $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de u, alors $|\lambda| = 1$.
En effet : $||u(x_0)|| = |\lambda|||x_0|| = |||x_0||$.
D'où $|\lambda| = 1$.

Exercice : Soient $(G, +)$ un groupe fini commutatif d'ordre n ($n \in \mathbb{N}^*$), et $E = \mathbb{C}^G$, qui est un $\mathbb{C}$-ev de dimension n.

a) Montrer que $(f, g) \longmapsto \frac{1}{n}\sum_{x\in G} \overline{f(x)}g(x)$ est un produit scalaire hermitien sur E, qu'on notera $< ., . >$.
b) Pour $u \in G$ fixé, on note $T_u : E \longrightarrow E$ l'application défini par :
$$\forall f \in E, \forall x \in G, (T_u(f))(x) = f(x - u).$$
Montrer que T_n est un endomorphisme unitaire de $(E, < ., . >)$.

Réponse : a) $\forall (f, g) \in E^2, < g, f >= \frac{1}{n}\sum_{x\in G} \overline{g(x)}f(x) = \overline{\frac{1}{n}\sum_{x\in G} \overline{f(x)}g(x)} = \overline{< f, g >}$.

$\cdot\ \forall \alpha \in \mathbb{C}, \forall (f, g, h) \in E^3,$

$$\begin{aligned} < f, \alpha g + h >&= \frac{1}{n}\sum_{x\in G} \overline{f(x)}(\alpha g(x) + h(x)) = \frac{1}{n}\alpha\sum_{x\in G} \overline{f(x)}g(x) + \frac{1}{n}\sum_{x\in G} \overline{f(x)}h(x) \\ &= \alpha < f, g > + < f, h >. \end{aligned}$$

$\cdot\ \forall f \in E, < f, f >= \frac{1}{n}\sum_{x\in G} |f(x)|^2 \in \mathbb{R}_+$.

$\cdot\ \forall f \in E, \Big(< f, f >= 0 \Longleftrightarrow \sum_{x\in G} |f(x)|^2 = 0 \Longleftrightarrow \forall x \in G, f(x) = 0 \Longleftrightarrow f = 0\Big)$

b) T_u est linéaire : $\forall \alpha \in \mathbb{C}, \forall (f,g) \in E^2, \forall x \in G, (T_u(\alpha f+g))(x) = (\alpha f+g)(x-u) = \alpha f(x-u)+g(x-u) = \alpha T_u(f)(x)+T_u(g)(x) = (\alpha T_u(f)+T_u(g))(x)$

T_u est unitaire :$\forall f \in E$,

$||T_u(f)||^2 = \frac{1}{n}\sum_{x\in G} \overline{T_u(f)(x)} T_u(f)(x) = \frac{1}{n}\sum_{x\in G} \overline{f(x-u)} f(x-u) = \frac{1}{n}\sum_{x\in G} \overline{f(y)} f(y) = ||f||^2$.

(car $x \longmapsto x-u$ est une permutation du groupe G).

2.5.4 Endomorphisme normal

Définition 2.13

Soit E un espace hermitien.
On dit qu'un endomorphisme u de E est normal,si $u^* \circ u = u \circ u^*$.

Remarque 2.8

- Une matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$ est dite normale, si $A^*A = AA^*$.
- Soient E un espace hermitien,$B = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base orthonormale de E, u un endomorphisme de E et $A = Mat(u, B)$, alors
  u est normal $\Leftrightarrow$ A est normale.
- Si u est un endomorphisme normal, alors pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda Id_E - u$ est normal.

Exercice : Soient $n \in \mathbb{N}^*, A \in M_n(\mathbb{C})$ normale, $\lambda \in \mathbb{C}, X \in M_{n,1}(\mathbb{C})$.Montrer :
$AX = \lambda X \Longleftrightarrow X^*A = \lambda X^*$.

Réponse : .Supposons $AX = \lambda X$.On a :
$$\begin{aligned}
||A^*X - \bar{\lambda}X||^2 &= (A^*X - \bar{\lambda}X)^*(A^*X - \bar{\lambda}X) = (X^*A - \lambda X^*)(A^*X - \bar{\lambda}X)\\
&= X^*AA^*X - \bar{\lambda}X^*AX - \lambda X^*A^*X + \lambda\bar{\lambda}X^*X\\
&= X^*A^*AX - \bar{\lambda}X^*AX - \lambda X^*A^*X + \bar{\lambda}\lambda X^*X\\
&= (X^*A^* - \bar{\lambda}X^*)(AX - \lambda X) = (AX - \lambda X)^*(AX - \lambda X) = ||AX - \lambda X||^2 = 0.
\end{aligned}$$
d'où $A^*X = \bar{\lambda}X$, puis $X^*A = A^*X = (\bar{\lambda}X)^* = \lambda X^*$.
. Pour la réciproque, appliquer le résultat précédent à $(A^*, \bar{\lambda}, X)$ au lieu de(A, λ, X).

Proposition 2.14

Soit u un endomorphisme normal de E, alors
- $\forall x \in E$, $||u(x)|| = ||u^*(x)||$.
- $ker(u) = ker(u^*)$.
- $\forall \lambda \in \mathbb{C}$, $ker(\lambda Id_E - u) = ker(\lambda Id_E - u^*)$.

- Si F un sous-espace stable par u, alors $F^\perp$ est aussi stable par u.

Preuve 26.
- *Soit $x \in E$, alors on a*
  $||u(x)|| =< u(x), u(x) >=< u^*(u(x)), x >=< u(u^*(x)), x >=< u^*(x), u^*(x) >= ||u^*(x)||^2$.

- *Soit $x \in E$, alors on a*
  $x \in ker(u) \Leftrightarrow u(x) = 0 \Leftrightarrow ||u(x)|| = 0 \Leftrightarrow ||u^*(x)|| = 0 \Leftrightarrow u^*(x) = 0$
  $\Leftrightarrow x \in ker(u^*)$.
- *Soit $\lambda \in \mathbb{C}$, puisque $u^*(u) = u(u^*)$, alors on voit facilement, par un simple calcul, qu'on a aussi $(\lambda Id_E - u)^*(\lambda Id_E - u) = (\lambda Id_E - u)(\lambda Id_E - u)^*$, donc pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, l'endomorphisme $(\lambda Id_E - u)$est normal.*

Donc d'après 2., *on a le résultat.*

Exercice : Soient E un espace hermitien, f un endomorphisme normal de E.
$im(u) = (ker(u))^{\perp}$

Si v es un autre endomorphisme normal de E, Démontrer que $v \circ u = 0 \Longleftrightarrow u \circ v = 0$.

Réponse : Il suffit clairement de démontrer une seule implication.On prend u et v normaux, et on suppose $u \circ v = 0$.Alors, $im(v) \subset ker(u) = (im(u))^{\perp}$. On passe à l'orthogonal dans cette relation, ce qui inverse l'ordre de l'inclusion :$im(u) \subset im(v)^{\perp} = ker(v)$.Donc $v \circ u = 0$.

Exercice : Soient E un espace hermitien, f un endomorphisme normal de E, λ, ν deux valeurs propres de f telles que $\lambda \neq \nu, x \in SEP(f, \lambda), y \in SEP(f, \nu)$.Montre : $< x, y >= 0$.

$SEP(f, \lambda)$ est le sous espace propre pour f associé à la valeur propre λ.
$SEP(f, \nu)$ est le sous espace propre pour f associé à la valeur propre ν

Réponse : . Puisque $f - \lambda e$ est normal, on a, d'après la proposition 2.14 :
$||(f - \lambda e)^{*}(x)|| = ||(f - \lambda e)(x)|| = 0$, d'où $f^{*}(x) = \bar{\lambda} x$.
$\begin{cases} < f^{*}(x), y >=< \bar{\lambda} x, y >= \lambda < x, y > \\ < f^{*}(x), y >=< x, f(y) >=< x, \nu y >= \nu < x, y > \end{cases}$,d'où, puisque $\lambda \neq \nu :< x, y >= 0$

Théorème 2.9

Soit Eun espace hermitien. Alors pour tout endomorphisme normal de E, il existe une base orthonormale de E formée de vecteurs propres de u.

2.5.5 Endomorphisme hermitien

Définition 2.14

Soient E un espace hermitien et u un endomorphisme de E.
On dit que u est hermitien (ou auto-adjoint), s'il vérifié les conditions équivalents :
- $u^{*} = u$.
- $\forall x, y \in E, < u(x), y >=< x, u(y) >$.

Remarque 2.9

Soit β une base orthonormale de E, et soit $A = Mat(u, \beta)$,alors
u est hermitien $\Leftrightarrow$ A est hermitienne $(A^{*} = A)$.
Tout endomorphisme hermitien est normal.

Proposition 2.15

Soient E un espace hermitien et u un endomorphisme
hermitien de E. Alors toutes les valeurs propres de u sont réelles. ‘

Preuve 27. *Soit* $\lambda \in \mathbb{C}$ *une valeur propre de* u,
alors il existe $x_0 \in E$*, tel que* $u(x_0) = \lambda x_0$*. Donc, on aura*

$$
\begin{aligned}
< u(x_0), x_0 >=< x_0, u^*(x_0) > \quad & \Rightarrow < u(x_0), x_0 >=< x_0, u(x_0) > \qquad \textit{(car } u^* = u\textit{)}\\
& \Rightarrow < \lambda x_0, x_0 >=< x_0, \lambda x_0 >\\
& \Rightarrow \overline{\lambda}||x_0||^2 = \lambda ||x_0||^2\\
& \Rightarrow \overline{\lambda} = \lambda \ \textit{(car } ||x_0||^2 \neq 0\textit{)}\\
& \Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

Exercice : Soient $n \geq 3$, $G = \{1, \omega, \omega^2, ..., \omega^{n-1}\}, \omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$, et $E = F(G, \mathbb{C})$ pour $f, g \in E^2$ on pose $< f, g >= \sum_{k=0}^{n-1} \overline{f(\omega^k)} g(\omega^k)$

Pour $k \in \{0, ..., n-1\}$, soit $f_k \in E$ définie par :$\forall z \in G$, $f_k(z) = \frac{z^k}{\sqrt{n}}$.On considère l'application U de E dans E définie par :$\forall f \in E, \forall z \in G$, $U(f)(z) = f(\omega z)$.

— Pour $\lambda \in [0, 1]$ on pose :$A_\lambda = Id_E - \lambda U - (1-\lambda)U^*$

a) Montrer que pour tout $\lambda \in [0,1]$ A_λ est un endomorphisme normal de E.
b) Pour quelle valeur de λ, A_λ est-il un endomorphisme hermitien ?
c) Si A_λ est hermitien montrer que A_λ est positif.

Réponse :

a) Montrons que $A_\lambda A_\lambda^* = A_\lambda^* A_\lambda$
On a $A_\lambda^* = Id_E - \lambda U^* - (1-\lambda)U$, car λ est réel.

Donc, $A_\lambda A_\lambda^* = Id_E - \lambda U^* - (1-\lambda)U - \lambda U + \lambda^2 UU^* + (1-\lambda)\lambda U^2 - (1-\lambda)U^* + \lambda(1-\lambda)U^{*2} + (1-\lambda)^2 U^* U$

$$= (1 + \lambda^2 + (1-\lambda)^2)Id_E - U^* - U + \lambda(1-\lambda)(U^2 + U^{*2})$$

On trouve de la même façon que :

$$
\begin{aligned}
A_\lambda^* A_\lambda &= (1 + \lambda^2 + (1-\lambda)^2)Id_E - U^* - U + \lambda(1-\lambda)(U^2 + U^{*2})\\
&= A_\lambda A_\lambda^*
\end{aligned}
$$

b) $\lambda \in [0, 1]$
A_λ hermitien si $A_\lambda = A_\lambda^*$

$$
\begin{aligned}
&\Longleftrightarrow Id_E - \lambda U - (1-\lambda)U^* = Id_E - \lambda U^* - (1-\lambda)U\\
&\Longleftrightarrow (1-2\lambda)U = (1-2\lambda)U^*
\end{aligned}
$$

Supposons que $1 - 2\lambda \neq 0$

Donc $U = U^* \Longrightarrow U(f_1(z)) = U^*(f_1(z)), \forall z \in G$
Alors, $\frac{z\omega}{\sqrt{n}} = \frac{z}{\omega\sqrt{n}}, \forall z \in G \Longrightarrow \omega^2 = 1$
ce qui est absurde car $n \geq 3$

En fin, $\lambda = \frac{1}{2} \Longleftrightarrow A_\lambda$ hermitien

c) On suppose que $\lambda = \frac{1}{2}$
Pour $k \in \{0, ..., n-1\}$, $A_\lambda(f_k) = f_k - \frac{1}{2}\omega^k f_k - \frac{1}{2\omega^k} f_k$ car

$U(f_k) = \omega^k f_k$ et $U^*(f_k) = U^{-1}(f_k) = \frac{1}{\omega^k} f_k$

$$
\begin{aligned}
\text{Par conséquent, } A_\lambda(f_k) &= (1 - \tfrac{1}{2}(\omega^k + \tfrac{1}{\omega^k}))f_k\\
&= (1 - \tfrac{1}{2}(e^{\frac{i2k\pi}{n}} + e^{-\frac{i2k\pi}{n}}))f_k\\
&= (1 - \cos(\tfrac{2k\pi}{n}))f_k
\end{aligned}
$$

Donc, $< A_\lambda(f_k), f_k >= 1 - \cos(\frac{2k\pi}{n}) \geq 0 \ \forall k$
Soit $f \in E$, $f = \sum_{k=0} \alpha_k f_k$, $\alpha_k \in \mathbb{C}$

$$< A_\lambda(f), f >=< \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k(1-\cos(\tfrac{2k\pi}{n}))f_k, \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k f_k >$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} |\alpha_k|^2(1-\cos(\tfrac{2k\pi}{n})) \geq 0$$

Exercice : Montrer que pour toute matrice unitaire U, il existe une matrice hermitienne A telle que $U = e^{iA}$
.

Réponse : $(e^{iA})^* = {}^t(\overline{e^{iA}}) = {}^t(e^{-i\overline{A}}) = e^{-i{}^t\overline{A}} = e^{-iA}$, Donc, $(e^{iA})^*(e^{iA}) = (e^{-iA})(e^{iA}) = I_n$,
puisque iA et $-iA$ commutent.

CONCLUSION :

Notre travail a été consacré à clarifier les notions les plus importantes dans les espaces hermitiens comme :

— Inégalité de Cauchy-Schwarz, inégalité de Minkowski.
— La notion des bases orthogonales et des bases orthonormales
— Projection orthogonale.

En fin, j'ai terminé par introduire la notion d'isomorphisme entre un espace hermitien et son dual,puis les différents endomorphismes d'un espace hermitien.

BIBLIOGRAPHIE :

[1] G.Lefort, *Exercice D'ALGÈBRE et PROBABILITÉ* , Tom 2, 350 page.

[2] Anne Moreau, *Espaces euclidiens et hermitiens*,Université de Poitiers,L2PR,2012-2013.

[3] Cloude deschamps, André warusfel, *Mathématique tout-en-un* $2^{ème}$ *année PC-PSI.*

[4] Mohamed Houimdi, *Algèbre bilinéaire* , Université Cadi Ayyad Faculté des sciences-Semlalia, Département de Mathématique.

[5] Paul Broussous, *Algèbre linéaire Réduction des endomorphismes*,Université De Poitiers Agrégation 2008/2009.

[6] *Espaces préhilbertiens complexes Espaces hermitiens.*, PSI Paul Valéry.

[7] Jean-Marie MONIER, *Algèbre 2 cours et 400 exercices corrigés* , Tom 6.

[8] `https://fr.wikipedia.org/wiki/`.