## کلية العلوم و التقنيات فاس +٥٤ΣΔοΙ+ Ι +ΔοΘΟοΙΣΙ Λ +ΘΙΣΧΣ+ΣΙ Faculté des Sciences et Techniques de Fès



جامعة سيدي محمد بن عبد الله +٥٥٨٥ Ε ΑΝΣΙΕΟΛ ΘΙ ΗΘΛ8ΝΝοΦ Université Sidi Mohamed Ben Abdellah

# Master Mathématique et Application au Calcul Scientifique (MACS)

#### **MEMOIRE DE FIN D'ETUDES**

Pour l'obtention du Diplôme de Master Sciences et Techniques (MST)

# La conjecture d'Ulam dans les Tournois

Réalisé par : Youness MEZZAN

**Encadré par : Pr. Abdelmajid HILALI** 

Soutenu le: 18 Juin 2019

## Devant le jury composé de:

•Pr. Ghizlane CHAIBI	Faculté des Sciences et Techniques Fès	Examinateur
•Pr. Ahmed EL HILALI ALAOUI	Faculté des Sciences et Techniques Fès	Examinateur
•Pr. Mohammed EL KHOMSSI	Faculté des Sciences et Techniques Fès	Président
• Pr. Abdelmajid HILALI	Faculté des Sciences et Techniques Fès	Encadrant

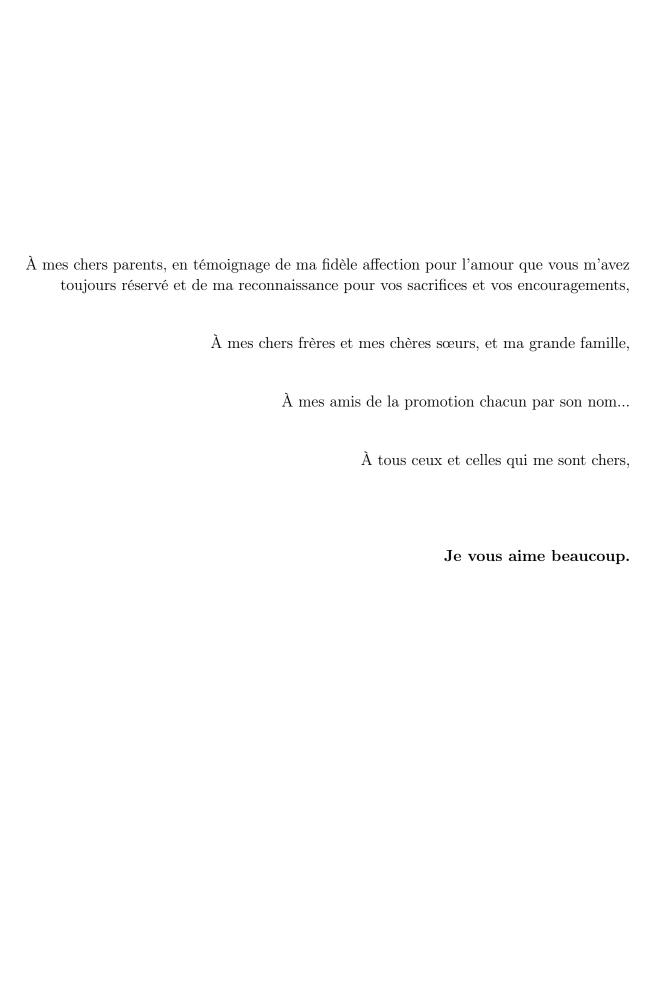
## Année Universitaire 2018 / 2019

#### Résumé

En 1942, Ulam conjectura que tout graphe simple fini, ayant au moins 3 sommets est uniquement déterminé par le multi-ensemble de tous ses sous-graphes obtenus en supprimant un sommet et les arêtes qui lui est incidentes, en 1964 Harary conjectura d'une manière analogue, que tout graphe ayant au moins 4 arêtes est uniquement déterminé par tous ses sous-graphes obtenus en supprimant une arête, cette conjecture s'appelle conjecture de l'arête-reconstruction, les deux conjectures sont encore ouvertes, dans ce mémoire nous aborderons certains travaux réalisés jusqu'à présent de ces conjectures pour les graphes et les tournois.

#### **Abstract**

In 1942 Ulam conjectured that any finite, simple, undirected graph having at least 3 vertices is uniquely determined by the multiset of all its subgraphs obtained by deleting a vertex and all edges adjacent to it. In 1964 Harary conjectured analogously that any graph having at least 4 edges is uniquely determined by all its subgraphs obtained by deleting a single edge, which is known as the edge reconstruction conjecture. Both conjectures are still open. In this memory we will discuss some of the work done so far of the reconstruction conjectures for graphs and tournaments.





Au terme de ce travail, je tiens avant tout à adresser mes remerciements les plus chaleureux et ma profonde reconnaissance à tout ceux qui ont contribué de prêt ou de loin à sa réalisation :

Qu'il me soit permis d'exprimer mes remerciements les plus distingués à mon encadrant, le Professeur **Abdelmajid HILALI**, qui grâce à ses orientations son inestimable aide et soutient, sa méthodologie, et ses conseils précieux, ses direction compétente de ce mémoire, sa disponibilité inconditionnelle, j'ai pu réaliser ce travail et s'initier à la recherche.

Je tiens également à exprimer toute ma gratitude et tout mon sentiment de reconnaissance aux professeurs **Ghizlane CHAIBI**, **Ahmed EL HILALI ALAOUI** et **Mohamed EL KHOMSSI** pour l'honneur qu'ils me font d'accepter d'être membres de jury de ce mémoire.

J'adresse mes sincères remerciements et ma grande reconnaissance à tous mes professeurs du cycle Master Mathématiques et Applications aux calculs scientifiques.

J'exprime ma gratitude à tous **mes collègues** du cycle Master pour leur soutien amical durant ces deux années d'étude.

# \_\_\_\_TABLE DES MATIÈRES

$\mathbf{A}$	bstra	ict.	1
$\mathbf{R}$	emer	ciements	3
Ta	ıble (	des figures	7
Li	$\operatorname{ste}$ d	les tableaux	9
In	$\operatorname{trod}$	uction générale	10
1	Not	ions de base	13
	1.1	Graphes et multigraphes orientés	13
		1.1.1 Graphes non orientés	13
		1.1.2 Graphes orientés	16
		1.1.3 Chemin, Chaîne et Circuit	19
		1.1.4 Opérations sur les graphes orientés	20
		1.1.5 Isomorphisme et automorphisme des graphes orientés	22
		1.1.6 Connexité et forte connexité	23
		1.1.7 Multi-graphe orienté	24
	1.2	Les tournois	24
		1.2.1 Tournoi et sous-tournoi	24
		1.2.2 Isomorphisme et demi-isomorphisme	26
		1.2.3 Intervalle et indécomparabilité des tournois	27
	1.3	Rappels sur les relations	28
		1.3.1 les relations binaires	28
		1.3.2 Propriétés d'une relation binaire	29
		1.3.3 Représentation d'une relation binaire	32
		1.3.4 Relation d'équivalence	33
		1.3.5 Relation d'ordre	35
		1.3.6 Relation n-aire et multirelation	37
		1.3.7 intervalle d'une relation binaire	38
$\overline{2}$	La	Conjecture d'Ulam dans les Graphes	39
	2.1	Introduction	39
	2.2	Conjecture d'ulam ou conjecture de la reconstruction	39

			40
			42
	2.3	Les paramètres reconstructibles	42
	2.4	Classes de graphes reconstructibles	46
	2.5	La conjecture de l'arête-reconstruction	50
		2.5.1 Résultats élémentaires de l'arête-reconstructibilité	50
	2.6	Nombre de reconstructions d'un graphe	53
	2.7	Algorithme et Calculs	55
		2.7.1 Description générale	55
		2.7.2 Algorithme de calcul	55
	2.8	Le cas des graphes orientés et multigraphes	59
		2.8.1 Pour les graphes orientés	59
		2.8.2 Pour les multigraphes	60
	2.9	Conclusion	60
0	т ••		0.1
3		<u> </u>	61
	3.1		61
	3.2	<u> </u>	62
		3.2.1 Intervalle d'un tournoi	62
		3.2.2 L'indécomposabilité des tournois	64
	2.2	3.2.3 Tournoi Critique	65
	3.3	Morphologie des Tournois (-1)-Critiques	67
	2.4	3.3.1 Graphe d'Indécomposabilité	69 71
	$\frac{3.4}{3.5}$	Les Tournois (-1)-chaînes	71
	5.0	Conclusion	73
4	Laı	reconstructibilité des tournois	74
	4.1	<u> </u>	74
	4.2	Contre-exemples de la (-1)-reconstruction des tournois	75
		4.2.1 Le tournoi $A_n$	75
		4.2.2 Contre-exemples d'ordre $2^n + 1$	76
		4.2.3 Contre-exemples d'ordre $2^n + 2$	78
	4.3	Classes des Tournois (-1)-reconstructible	79
		4.3.1 Cas des Tournois Sans Diamant	80
		4.3.2 Cas des Tournois $(-1)$ -Chaîne	83
	4.4	La (-3)-reconstruction des tournois	85
		4.4.1 Cas des tournois finis, décomposables et fortement connexes à au	
		moins 12 sommets	85
		4.4.2 Cas des tournois symétriques à au moins 12 sommets	88
		4.4.3 Cas des tournois finis et fortement connexes à au moins 12 sommets	89
		4.4.4 Cas des tournois finis, non fortement connexes à au moins 14 sommets	91
	4.5	Conclusion	93
5	Pro		94
		5.0.1 Quelques Problèmes Ouverts en reconstruction et arête-reconstruction	O 1
		des Graphes	94
		5.0.2 La reconstruction par Commutation	95
		5.0.3 La reconstruction Minouro	06

5.0.4 La reconstruction par Contraction	96
Conclusion générale	98
Bibliographie	100

# TABLE DES FIGURES

1.1	Exemple d'un graphe non orienté	14
1.2	(a) Un graphe complet, $(b)$ un graphe biparti complet, et $(c)$ une étoile.	15
1.3	Un chemin de longueur trois, et un cycle de longueur cinq	15
1.4	Deux arbres d'ordre 5 et 6	16
1.5	Un graphe orienté.	16
1.6	Exemple d'un graphe orienté.	17
1.7	Degrés des sommets de graphe G	18
1.8	Chemin et Chaîne d'un Graphe orienté.	19
1.9	Un graphe orienté G et son sous-graphe engendré par $\{2,3,5\}$	20
1.10	Exemple d'un graphe orienté et son sous-graphe partiel	20
1.11	La réunion de deux graphes $G_1$ et $G_2$	21
1.12	L'intersection de deux graphes $G_1$ et $G_2$	21
1.13	Le complémentaire de $G_1$	22
1.14	Le graphe inverse de $G_1$	22
1.15	Le graphe $H$ est le graphe inverse et isomorphe à $G$	23
1.16	Exemple d'un multi-graphe orienté	24
1.17	(a) Tournoi $T_5$ ; (b) Tournoi $T_6$	25
1.18	Les quatre tournois à 4 sommets non isomorphes	27
1.19	Tournoi indécomposable	28
1.20	Graphe représentatif de la relation $\Re$	32
1.21	Représentation matricielle du graphe de la figure (1.20)	33
0.1	An annui an annui an annui an Gartan danni àma annu an Iadada da Gl	4.0
2.1	Au premier rang : Le graphe $G$ , et au deuxième rang : Le deck de $G$	40
2.2	$K_2$ , et $2K_1$	41
	Graphe non connexe de la forme $3K_3$ avec $\exists nr(G) = 5$	55
2.4	Graphe $G$ et ses extensions.	57
2.5	Des paires de tournois non reconstructibles avec 5 et 4 sommets	59
3.1	Tournoi critique $U_{2h+1}$	66
3.2	Tournoi critique $T_{2h+1}$	66
3.3	Tournoi critique $V_{2h+1}$	66
4.1	La matrice d'adjacence de $A_3$	75
4.2	Matrices d'adjacences de $B_3$ et $C_3$ .	77

	4.3	Matrices d'adjacences de $D_3$ et $E_3$	78
	5.1	Chaque rang présente des graphes qui sont reconstructibles par commuta-	
		tion l'un de l'autre.	95
	5.2	Au premier rang : Le graphe $G$ , au deuxième rang le deck contraction $\mathcal{C}(G)$	
Г		de G	97

LISTE	DES	TABI	$\Gamma E A I$	IJX

2.1	$\exists rn(G) \text{ et } \forall rn(G) \text{ des graphes d'ordre compris entre 3 et 11.} \dots \dots$	58
2.2	Temps d'exécution nécessaire pour obtenir les résultats précédents	59

# INTRODUCTION GÉNÉRALE

La théorie des graphes est un très vaste domaine en évolution constante, tant du point de vue des recherches fondamentales que celui des applications, la théorie des graphes est aujourd'hui très présente dans notre société moderne, cette branche de mathématique, dont on fait remonter l'origine à Euler, a connu un essor spectaculaire au cours des cinquante dernières années, notamment grâce aux travaux de Claude Berge qui a grandement participé à sa diffusion, et les travaux de P.Seymour et de ses collaborateurs qui ont démontré récemment la conjecture des graphes parfaits formulée par Claude Berge, amélioré la preuve du théorème dit des quatre couleurs et surtout, développé la théorie des mineurs de graphes, parmi les autres travaux notables, citons les études de Thomas Kirkman et William Hamilton sur les cycles du polyèdre ainsi que les études d'Arthur Caucley et James Sylvester, qui avaient des liens avec la chimie théorique, en particulier avec la structure des molécules et c'était Sylvester en 1877 qui a suggéré le nom du graphe à la structure qu'elle étudiait.

Parce qu'elle permet de modéliser aussi bien des problématiques de réseaux informatiques que de réseaux routiers, de transport de marchandises que d'emplois de temps, d'électronique que de mécanique du solide, la théorie des graphes a bénéficié et bénéficie encore d'un engouement non seulement de la part des mathématiciens, mais également de la communauté scientifiques toute entière : on observe depuis quelques années un grand nombre de publications ayant trait à des problèmes en biochimie, en génétique..., en lien direct avec la théorie des graphes, le plus souvent, ces problèmes se modélisent en la recherche d'une structure optimal particulière dans un graphe, de telle sorte qu'il relève d'un problème de la théorie des graphes que nous savons résoudre.

En théorie des graphes, les raisonnements ont des composantes combinatoires et ensemblistes importantes, ainsi les preuves pouvant être longue et parfois compliquées, bien, que les techniques mathématiques utilisés ici sont souvent autre que celle des mathématiques du continu, pour cela nous invitons le lecture à lire attentivement les preuves et à consulter les références en cas d'ambiguïté afin de garantir une bonne compréhension.

Nous considérons que le monde est un lieu ou l'additivité règne généralement, en d'autres termes, nous pensons que le monde dans lequel nous vivons est un monde phy-

<sup>1.</sup> Cela conduit à la notion importante de graphes et cycles hamiltonien.

sique et que l'additivité est la propriété première du matériau, cela vient d'un simple fait que deux particules ne peuvent occuper la même position spatiale au même temps (en même moment), nous pouvons ainsi décomposer et recomposer les choses, ou nous pouvons les classifier en appliquant l'abstraction et la réduction dans les deux sens, cette opération est applicable non seulement aux choses mais, également aux processus, la division des travaux était le début de la civilisation sous la déclaration : "le tout est une somme de parties", cette propriété est apparemment vraie pour la théorie des ensembles, cependant elle n'est pas en général vraie dans la théorie des graphes, la paire de contre-exemples la plus simple est  $2K_1$  et  $K_2$ , ces graphes ont la même collection de sous-graphes obtenus en supprimant un sommet, mais ne sont pas isomorphes.

Au début des années 1942, Ulam a conjecturé la propriété précédente dans le cas des graphes simples non orientés et d'ordre  $\geq 3$ , qui est équivalente à la proposition : "Les graphes simples d'ordre  $\geq 3$  sont reconstructibles à partir de leurs sous-graphes obtenus en enlevant un sommet." et c'est pourquoi on l'appelle généralement conjecture de reconstruction.

En 1964, Frank Harary a posé la version d'arête de la conjecture d'Ulam qui affirme que tout graphe simple de taille  $\geq 4$ , est uniquement déterminé par la collection des sous-graphes de G obtenus en enlevant les arêtes de G, ce qui nous permet de dire que l'arête-reconstruction est plus facile que la conjecture de reconstruction, en fait Greenwell a montré que si G n'a pas de sommets isolés, alors il est arête-reconstructible, ce qui rend facile l'implication, si G est reconstructible alors il est arête-reconstructible, et dans ce même sens, les principaux résultats de ces conjectures sont obtenus par : Harary, Kelly, Bondy, Heminger, Nash-Williams, Ellingham..., et dans de nombreux articles, jusqu'à les années 2000 où Lauri écrit comme suit : "... la liste des graphes reconstructibles ou arêtereconstructibles est loin d'avoir toute les possibilités, si l'on ne considère que les efforts pas à pas pour obtenir la preuve de la reconstructibilité de tous les graphes, les perspectives sont sombres, les cas résolus sont peu nombreux et les techniques utilisées pour traiter une classe de graphes ne se généralisent pas à d'autres classes, il semble probable qu'en travaillant de cette manière avec laborieusement sur des classes de graphes successives, on puisse finalement prouver la conjecture de reconstruction pour tous les graphes, alors pourquoi les théoriciens des graphes persistent-ils à grignoter ce problème puissant et inflexible?...".

Le reste de ce mémoire est organisé comme suit :

Le premier chapitre est consacré aux notions de base, et les concepts utilisés dans toute la suite de ce mémoire, nous donnons des définitions et des rappels sur la théorie des graphes, et la théorie des tournois, et quelques classes particuliers des relation et leurs propriétés.

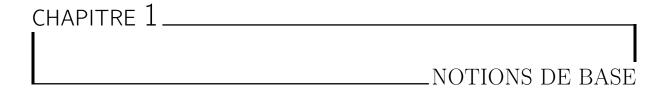
Le deuxième chapitre porte sur la reconstructibilité et l'arête-reconstructibilité des classes de graphes, et un bref aperçu des résultats concernant les nombres de reconstruction existentielle et universel pour les graphes d'ordre compris entre 3 et 11 sommets.

Le troisième chapitre concernes la présentation de quelques résultats sur l'indécomposabilité des tournois, la caractérisation des tournois critiques et (-1)-critique, ainsi les

tournois (-1)-chaîne et leurs liens avec la reconstructibilité des tournois.

Dans le quatrième chapitre, nous étudions la conjecture d'Ulam dans les tournois, dans un premier temps nous présentons la liste des contre-exemples liés à la (-1)-reconstruction des tournois, dans un second temps nous donnons un certain nombre de résultats concernant les classes des tournois (-1)-reconstructibles ( tournois sans diamant, non fortement connexe , et les tournois (-1)-chaîne), ainsi la troisième section est consacrée à l'étude des tournois (-3)-reconstructibles.

Nous terminons notre travail par le chapitre 5, qui présente un certain nombre de problèmes ouverts et d'autres types de reconstructions des graphes ( la reconstruction mineure, par contraction, et par commutation), ainsi une conclusion générale, dans laquelle nous résumons tout ce qui nous avons fait dans ce mémoire.



Ce premier chapitre sera consacré aux définitions utilisées dans toute la suite de ce travail, nous commençons bien sûr, par présenter quelques notions et définitions de base concernant la théorie des graphes, puis nous introduisons quelques notions et propriétés concernant les tournois, en suite nous terminons par quelques classes particulières des relations et leurs propriétés.

#### 1.1 Graphes et multigraphes orientés

Le terme **graphe**, ou plutôt **graph** en anglais, peut être attribué à **James Joseph Sylverster**, il est le premier en 1877 à l'utiliser dans le sens où nous le connaissons actuellement lorsque le graphe s'est détaché du modèle pour devenir un objet mathématique indépendant, ainsi le graphe peut en effet être considéré comme modèle d'une relation binaire.

#### 1.1.1 Graphes non orientés

De nombreuses situations peuvent se décrire commodément au moyen d'un diagramme fait de points et de lignes reliant certaines paires de ces points, par exemple les points peuvent être des centres de communication et les lignes représentent des liaisons entre les centres, il faut noter que dans un tel diagramme on s'intéresse principalement au fait que deux points sont reliés ou non par une ligne, et la façon de relier ces deux points est sans importance.

#### Définition 1.1

Un graphe G est un couple (S(G), A(G)) composé d'un ensemble S(G) de sommets, et d'un ensemble A(G), disjoint de S(G) d'arêtes, accompagné d'une fonction d'incidence  $\psi_G$  qui associe à chaque arête de G, une paire de sommets (pas nécessairement distincts) de G.

Si e est une arête, et u et v des sommets tels que  $\psi_G(e) = \{u, v\}$ , alors on dit que e relie u et v, et les sommets u et v sont appelés les extrémités de e. Les nombres de sommets et d'arêtes de G sont notés ord(G) ou (|S(G)|) et tail(G), ces deux paramètres fondamentaux sont appelés l'ordre et la taille de G respectivement, et pour alléger les notations, nous écrivons uv pour la paire  $\{u, v\}$ .

Donnons un exemple de graphe pour aider à la compréhension de définition.

**Exemple 1.1.** Soit H = (S(H), A(H)), le graphe défini par  $S(H) = \{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$  et  $A(H) = \{e_1 = v_1v_2, e_2 = v_2v_3, e_3 = v_3v_4, e_4 = v_4v_5, e_5 = v_5v_1, e_6 = v_1v_0, e_7 = v_0v_2, e_8 = v_0v_3, e_9 = v_0v_4, e_{10} = v_0v_5\}$ 

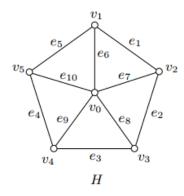


FIGURE 1.1 – Exemple d'un graphe non orienté.

Les positions relatives des points représentant les sommets et les formes des lignes représentant les arêtes, n'ont habituellement aucune importance, dans la figure (1.1), les arêtes de H sont représentées par des segments de droites, ce qui confirme qu'un diagramme de graphe représente uniquement la relation d'incidence entre ses sommets et ses arêtes.

#### Définition 1.2

Soient G = (S(G), A(G)) un graphe simple, et e = (u, v) une arête de G, on dit que u et v sont les extrémités de e, on dit aussi que e relie u et v, et les sommets u et v sont adjacents dans G, et l'ensemble des voisins d'un sommet v dans G est noté  $N_G(v)$ .

#### Graphes particuliers

Certains types de graphes jouent un rôle prépondérant en théorie des graphes.

#### Définitions 1.1

- 1. Un graphe **complet** est un graphe simple dans lequel deux sommets quelconques sont toujours adjacents.
- 2. Un graphe **vide** est un graphe dans lequel il n'y a pas de sommets adjacents (c'est-à-dire, un graphe dont l'ensemble d'arêtes est vide).
- 3. Un graphe est **biparti** si son ensemble de sommets peut être partitionné en deux sous-ensembles X et Y de façon à ce que toute arête du graphe ait une extrémité dans X et l'autre dans Y.

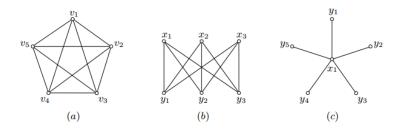


FIGURE 1.2 - (a) Un graphe complet, (b) un graphe biparti complet, et (c) une étoile.

Une telle partition (X,Y) est appelée bipartition du graphe, et X et Y ses parties, nous désignons un graphe biparti G de bipartition (X,Y) par G[X,Y], Si G[X,Y] est simple et tout sommet de X est relié à tout sommet de Y, alors G est dit un graphe biparti complet, alors qu'une **étoile** est un graphe biparti complet G[X,Y] avec |X|=1 ou |Y|=1.

#### Définitions 1.2

- Un chemin C dans un graphe simple G = (S(G), A(G)) reliant a à b est définie par une suite finie de sommets comme suit :  $C = [a = x_0, x_1, x_2, ..., x_{k-1}, x_k = b]$  où  $x_i x_{i+1} \in E(G)$  pour tout  $i \in \{0, 1, ..., k-1\}$ , et k est la longueur C.
- Un cycle est un chemin dont les extrémités se coïncident.
- Un chemin simple (resp. cycle simple) est un chemin (resp. cycle) dont toutes les arêtes sont distinctes.
- Un **chemin élémentaire** (resp. **cycle élémentaire**), est un chemin (resp. cycle), dont tous les sommets sont distinctes.
- Un graphe sans cycle élémentaire est appelé acyclique.

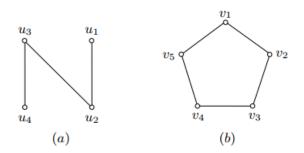


FIGURE 1.3 – Un chemin de longueur trois, et un cycle de longueur cinq.

#### Définition 1.3

Un graphe G = (S(G), A(G)) est dit **connexe**, s'il existe un chemin entre chaque paire de sommets x et y de S(G).

#### Degrés des sommets

Le degré d'un sommet v dans un graphe G, noté  $d_{G(v)}$ , est le nombre d'arêtes de G incidentes avec v, chaque boucle comptant comme deux arêtes, en particulier, si G est un graphe simple,  $d_{G(v)}$  est le nombre de voisins de v dans G, et un sommet de degré zéro est appelé sommet isolé, de plus on a :

Un graphe G est k-régulier si  $d_G(v) = k$  pour tout  $v \in S(G)$ , par exemple le graphe complet à n sommets est (n-1)-régulier.

Rappelons qu'un graphe acyclique est un graphe qui ne contient pas de cycle, ce qui nous permet d'introduire la notion d'arbre, qui représente le cas des graphes connexes acycliques, comme la montre la figure suivante :

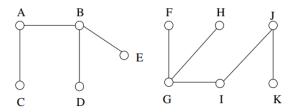


FIGURE 1.4 – Deux arbres d'ordre 5 et 6.

#### 1.1.2 Graphes orientés

Bien que de nombreux problèmes se prêtent à une formulation en termes de graphes, le concept de graphe n'est parfois pas tout à fait approprié, quand il s'agit de problèmes de flux de trafic, par exemple, il est nécessaire de connaître quelles routes dans le réseau sont à sens unique, et dans quelle direction le trafic est permis, et clairement un graphe du réseau n'est pas très utile dans une telle situation, ce dont nous avons besoin, c'est d'un graphe dans lequel chaque lien possède une orientation, autrement dit d'un graphe orienté.

#### Définition 1.4

Un **graphe orienté** fini G ou **digraphe** est défini par la données d'un ensemble S non vide dont les éléments sont appelés des **sommets** ou nœuds de G, et d'un ensemble A des couples d'éléments de S appelés **arcs** ou arêtes de G, et on le note par G = (S, A).

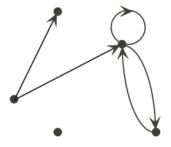


FIGURE 1.5 – Un graphe orienté.

Remarque 1.1. Dans un graphe orienté les arêtes sont à sens unique, on les représentes donc avec une flèche sur les dessins, le terme employé est donc arc et cela n'empêche en rien que deux nœuds puissent être reliés dans les deux sens.

Un arc e de l'ensemble A est défini alors par une paire ordonnée de sommets, lorsque e = (a, b), on dit que l'arc e relie a à b, de même on dit que a est **l'origine** ou **l'extrémité** initiale et b la destination ou l'extrémité finale de l'arc e, et on parle généralement d'un boucle lorsque a = b.

Exemple 1.2. Soit G = (S, A) le graphe orienté défini par :

$$S = \{A, B, C, D, E, F\}$$
 et  $A = \{(A, B); (B, C); (C, E); (E, F); (E, D); (D, B)\}$ 

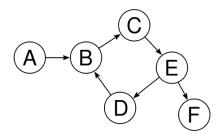


FIGURE 1.6 – Exemple d'un graphe orienté.

Soit u = (A, B), l'arc qui relie A à B on dit alors que B est un **successeur** de A et que A est un **prédécesseur** de B, on dit également que les sommets A et B sont **adjacents** ou voisins.

#### Définitions 1.3

Étant donné un graphe orienté G = (S, A), et s un sommet de S on appelle :

- 1. Le demi-degré extérieur ou sortant du sommet s, noté  $d_G^+(s)$  est le nombre d'arcs ayant s pour extrémité initiale.
- 2. Le demi-degré intérieur ou entrant du sommet s, noté  $d_G^-(s)$  est le nombre d'arcs ayant s pour extrémité finale.
- 3. Le degré du sommet s, noté  $d_G(s)$  est défini par :

$$d_G(s) = d_G^+(s) + d_G^-(s).$$

**Exemple 1.3.** Soit G = (S, A) un graphe orienté défini par :

$$S = \{1,2,3,4,5,6\} \quad et \quad A = \{(1,2); (1,4); (1,6); (2,6); (2,5); (2,4); (4,5); (3,4)\}$$
 celui-ci est représenté par :

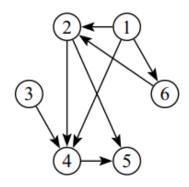


FIGURE 1.7 – Degrés des sommets de graphe G.

Alors comme  $d_G^+(2) = 2$  et  $d_G^-(2) = 2$  d'où  $d_G(2) = 4$ .

#### Théorème 1.1

Soit G = (S, A) un graphe orienté d'ordre n et de taille p, alors la somme des degrés des sommets de G est égale à deux fois la taille de G.

Démonstration: Il suffit de constater que chaque arcs est compté deux fois, une fois dans le demi-degré extérieur et une fois dans le demi-degré intérieur autrement dit on a :

$$d_G(s) = d_G^+(s) + d_G^-(s)$$

et comme G est fini alors

$$\sum_{s \in S} d_G(s) = \sum_{s \in S} d_G^+(s) + \sum_{s \in S} d_G^-(s)$$
$$= 2 \cdot \sum_{s \in S} d_G^+(s)$$
$$= 2 \cdot \sum_{s \in S} d_G^-(s)$$
$$= 2p$$

#### Corollaire 1.1

Dans un graphe orienté fini G = (S, A), le nombre des sommets de degrés impairs et pair.

Démonstration: Posons  $S_1$  l'ensemble des sommets de degré pair et  $S_2$  l'ensemble des sommets de degré impair tel que  $S=S_1\cup S_2$  alors on a :

$$\sum_{s \in S} d_G(s) = \sum_{s \in S_1} d_G(s) + \sum_{s \in S_2} d_G(s)$$

et d'après le théorème (1.1) on a  $2p = 2k + \sum_{s \in S_2} d_G(s)$  avec k un entier pair de plus il est claire que  $\sum_{s \in S_2} d_G(s) = 2u + card(S_2)$  d'où  $card(S_2) = 2p - 2k - 2u$  donc le nombre des sommets de degrés impair est pair. 

#### 1.1.3Chemin, Chaîne et Circuit

#### Définitions 1.4

- Soit G = (S, A) un graphe orienté fini, on appelle **chemin** C dans G, une suite alternée finie de sommets et d'arcs de G, telle que l'extrémité initiale (resp. finale) de chaque arc  $a_i$  pour  $i=2,\ldots,n-1$ , est l'extrémité finale de l'arc  $a_{i-1}$  (resp. l'extrémité initiale de l'arc  $a_{i+1}$ ).
- La **longueur** de chemin C est égale au nombre d'arcs qu'il comporte.
- Un chemin **élémentaire** C est un chemin dans lequel aucun sommet n'apparait plus d'une fois, sauf que les extrémités peuvent être les mêmes.
- Un chemin **simple** C est un chemin dans lequel aucun arc n'apparait plus d'une fois.
- Un **circuit** est un chemin dont les extrémités coïncident.

#### Définitions 1.5

Dans un graphe orienté G = (S, A), on appelle **chaîne** de longueur k relie  $s_1$  à  $s_k$ dans G, toute suite de sommets  $[s_1, s_2, \ldots, s_k]$  telle que pour tout  $i = 1, 2, \ldots, k-1$  $(s_i, s_{i+1}) \in A$  ou  $(s_{i+1}, s_i) \in A$  et  $s_1$  et  $s_k$  sont appelés extrémités de la chaine.

On dit qu'une chaine de longueur  $n \geq 1$  est élémentaire si  $\forall i \in \{1, 2, \dots, n-1\}; i \neq 1$  $j \Rightarrow s_i \neq s_j$  et dite simple lorsque  $\forall i \in \{1, 2, \dots, n-1\}; i \neq j \Rightarrow a_i \neq a_j$  et d'une façon analogue on définit un cycle simple et un cycle élémentaire.

#### Exemple 1.4. Considérons le graphe orienté suivant :

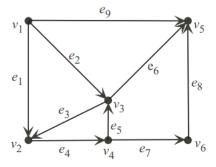


FIGURE 1.8 – Chemin et Chaîne d'un Graphe orienté.

Dans ce graphe on a:

 $-[v_1, v_2, v_4, v_3, v_5]$ : est un chemin élémentaire.

 $-[v_1, v_2, v_3, v_4, v_1, v_5]$ : est une chaîne simple non élémentaire.

#### 1.1.4 Opérations sur les graphes orientés

#### Définitions 1.6

Soient G = (S, A) un graphe orienté et T un sous-ensemble non vide de S, et B un sous-ensemble de A, on dit que G' = (T, B) est un **sous-graphe** de G si pour tout arc a de B, les extrémités de a sont dans T.

On appelle sous-graphe de G engendré par T le graphe défini par :

 $G[T] = (T, A \cap (T \times T))$  il a comme sommets les éléments de T et comme arcs les arcs de G ayant leurs extrémités dans T.

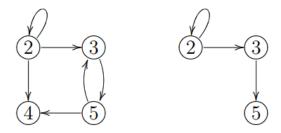


FIGURE 1.9 – Un graphe orienté G et son sous-graphe engendré par  $\{2,3,5\}$ 

#### Définitions 1.7

Un sous-graphe **partiel** (ou parfois graphe couvrant ) d'un graphe orienté G = (S, A) est un sous-graphe noté G = (S, A') c'est à-dire le graphe obtenu à partir de G en supprimant uniquement des arcs de G.

Un sous-graphe partiel H de G est dit **propre** s'il est non vide et différent du graphe G on le note alors par  $H \subset G$ .

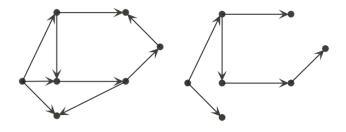
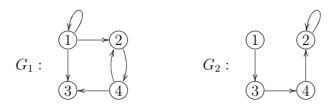


FIGURE 1.10 – Exemple d'un graphe orienté et son sous-graphe partiel

#### Opérations de base sur les graphes orientés

Dans cette section on va définir quelques opérations sur les graphes orientés qui s'appliquent aussi aux relations.

A des fins d'illustration, nous utiliserons les deux graphes orientés  $G_1=(S,A_1)$  et  $G_2=(S,A_2)$  définit par :



1. - Union : La réunion de deux graphes orientés  $G_1$  et  $G_2$  est définie par  $G_1 \cup G_2 = (S, A_1) \cup (S, A_2) = (S, A_1 \cup A_2)$  d'où

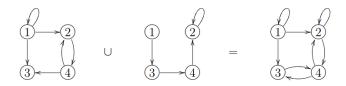


FIGURE 1.11 – La réunion de deux graphes  $G_1$  et  $G_2$ 

2. - Intersection : On définit l'intersection de  $G_1$  et  $G_2$  par  $G_1 \cap G_2 = (S, A_1) \cap (S, A_2) = (S, A_1 \cap A_2)$  d'où

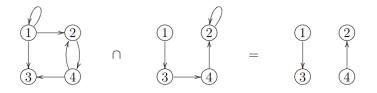


FIGURE 1.12 – L'intersection de deux graphes  $G_1$  et  $G_2$ 

3. - Complément : Le complémentaire d'un graphe orienté G=(S,A) est le graphe orienté noté  $\overline{G}=(S,\overline{A})$  défini par :

(x,y) arc de  $\overline{G}$  si et seulemet si (x,y) n'est pas un arc de G d'où le complémentaire de graphe  $G_1$  est comme suit :

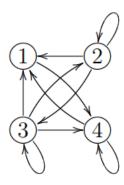


FIGURE 1.13 – Le complémentaire de  $G_1$ 

4. - L'inverse : l'inverse d'un graphe orienté est obtenu en faisant une inversion de l'orientation des arcs de G d'où le graphe inverse de  $G_1$  est :

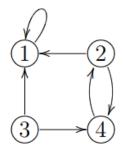


FIGURE 1.14 – Le graphe inverse de  $G_1$ 

#### 1.1.5 Isomorphisme et automorphisme des graphes orientés

Deux graphes G et H sont dit isomorphes, noté  $G \cong H$ , s'il existe une correspondance entre leurs sommets respectifs qui préserve l'adjacence de ces derniers, de façon plus formelle nous définissons un isomorphisme ainsi.

#### Définition 1.5

Un **isomorphisme** de G vers H est une bijection  $\psi: S_G \to S_H$  telle que (x, y) arc de G si et seulement si  $(\psi(x), \psi(y))$  est un arc de H, et nous disons alors que G et H sont **isomorphes**.

**Exemple 1.5.** Soient G et H deux graphes orientés définis par :

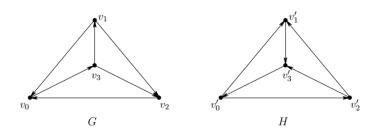


FIGURE 1.15 – Le graphe H est le graphe inverse et isomorphe à G.

Ces graphes sont isomorphes, nous pouvons exhiber l'isomorphisme : il suffit de considérer l'application bijectif  $\psi: S_G \to S_H$  telle que  $\psi(v_0) = v_1', \psi(v_1) = v_0', \psi(v_2) = v_3', \psi(v_3) = v_2'$ 

#### Définition 1.6

Soit G = (S, A) un graphe orienté, on appelle un **automorphisme** de G, un isomorphisme de G sur lui même

La notion d'automorphisme permet de décrire une propriété des graphes orientés : l'arc transitivité, en effet un graphe orienté est un arc-transitive si pour chaque paire d'arcs ((x,y);(u,v)) il existe un automorphisme projetant x sur u et y sur v.

#### 1.1.6 Connexité et forte connexité

#### Définition 1.7

Soit G = (S, A) un graphe orienté, on dit que G est connexe si, pour tout couple de sommets (u, v) il existe une chaîne reliant u à v.

On associe cette notion de connexité, une relation d'équivalence R définie par :

$$u\Re v \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} u=v\\ ou\\ \text{il existe une chaîne reliant u à v} \end{array} \right.$$

Les classes d'équivalences induites sur S par  $\Re$  forment une partition de S, ces classes s'appellent composantes connexes du G.

#### Proposition 1.1

Un graphe orienté G est connexe si et seulement s'il a une seule composante connexe.

Démonstration: Les sous-graphes  $G_1, \ldots, G_n$  engendrés par les sous-ensembles  $S_1, \ldots, S_n$  de S (les composantes connexes de G) sont des graphes connexes.

Un graphe orienté G = (S, A), est fortement connexe si pour tout couple de sommets (u,v) il existe un chemin de u à v.

On associe cette notion de forte connexité, une relation d'équivalence  $\Re$  définie par :

$$u\Re v \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} u=v \\ ou \\ \text{il existe un chemin de u à v et un chemin de v à u} \end{array} \right.$$

Les classes d'équivalences induites sur S par  $\Re$  forment une partition de S, ces classes s'appellent composantes fortement connexes du G.

#### Proposition 1.2

Un graphe orienté G est fortement connexe si et seulement s'il n'a qu'une seule composante fortement connexe.

#### 1.1.7Multi-graphe orienté

#### Définitions 1.8

- Un multi-ensemble est un ensemble au sien duquel, un même élément peut être répété plus d'une fois.
- Un multi-graphe orienté G = (S, A) est un graphe orienté pour lequel l'ensemble A des arcs est un multi-ensemble, autrement dit il peut exister plus d'un arc reliant deux sommets donnés.

**Exemple 1.6.** Un exemple de représentation d'un multi-graphe est donné à la figure (1.16)

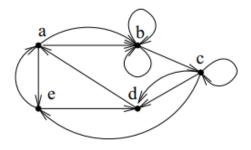


FIGURE 1.16 – Exemple d'un multi-graphe orienté

#### 1.2 Les tournois

#### 1.2.1 Tournoi et sous-tournoi

Un tournoi fini T est la donnée d'un couple (S, A), tels que S est un ensemble fini de sommets de T et A est un ensemble de couples de sommets distincts, appelés, arcs de T, vérifiant :

pour tous  $x, y \in S$  avec  $x \neq y; (x, y) \in A$  si et seulement si  $(y, x) \notin A$ 

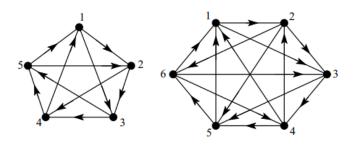


FIGURE 1.17 – (a) Tournoi  $T_5$ ; (b) Tournoi  $T_6$ 

Remarque 1.2. Un tournoi est donc une orientation d'un graphe complet, ainsi tout tournoi est:

\* antisymétrique :  $[(x,y) \in A \Longrightarrow (y,x) \notin A]$ 

\*  $irréflexive : [(x, x) \notin A]$ 

#### Définition 1.10

Un tournoi T est dit transitif s'il n'abrite pas le 3-cycle  $C_3: \{(1,2,3); \{(0,1); (1,2); (2,0)\}\}$ , autrement dit si  $\forall x,y,z \in S$  tel que :

$$(x,y) \in A \text{ et } (y,z) \in A \Longrightarrow (x,z) \in A$$

Dans un tournoi transitif, la notation x < y signifie  $x \longrightarrow y$  ( x domine y) et la notation  $T = a_0 < a_1 < \cdots < a_n$  signifie que T est un tournoi transitif définie par  $S = \{a_0, a_1, \dots, a_n\}$  et par  $A = \{(a_i, a_j) \text{ tq } i < j\}.$ 

**Exemple 1.7.** Pour  $E \subseteq \mathcal{R}$ , le tournoi transitif usuel E noté  $\underline{E}$  est défini par :

$$A(E) = \{(x,y) \in E \times E/x < y\}$$

#### Définition 1.11

Soient T un tournoi défini sur un ensemble fini S et X une partie de S, le sous-tournoi induit par X est défini par  $T(X) = (X, A \cap (X \times X))$ .

Un tournoi T = (S, A) est dit fortement connexe si pour tous  $x, y \in S$  avec  $x \neq y$ , il existe une suite des sommets  $(x_0 = x, x_1, \dots, x_p = y)$  telle que pour tout  $i \in \{0, 1, \dots, p-1\}$ , on a  $(x_i, x_{i+1}) \in A$ , autrement dit T est fortement connexe si et seulement s'il a un cycle hamiltonien.

#### 1.2.2 Isomorphisme et demi-isomorphisme

#### Inversion des arcs:

Une inversion d'un arc a = (x, y) dans un tournoi est l'opération qui consiste à remplacer (dans T) l'arc a par  $a^* = (y, x)$ .

P.Slater s'intéresse dans le cas d'un tournoi fini T au nombre minimum d'arcs qu'il faut inverser dans le tournoi pour le ramener à un tournoi transitif, ce nombre noté S(T), est appelé indice de Slater de T, cet indice correspond à la mesure d'une distance entre le tournoi T et l'ensemble des tournois transitifs obtenu en inversant ces S(T) arcs, est caractéristique d'un ordre total, appelé, "ordre médian" de T. L'ordre médian de T est donc un ordre à distance minimum de T.

M.Pouzet s'intéresse à l'opération qui consiste à inverser une partie X de l'ensemble des sommets d'un tournoi T (fini , ou non), c'est-à-dire à inverser tous les arcs  $(x,y) \in A(T)$  ayant leurs extrémités dans X.

Le tournoi obtenu à partir de T après l'inversion des arcs noté inv(X,T), et  $inv((x_1,x_2,\ldots,x_n),T)$  le tournoi obtenu après l'inversion d'une suite finie  $(x_i)_{i=1,\ldots,n}$  des parties de S.

#### Définition 1.13

- Le dual d'un tournoi T est le tournoi noté  $T^* = (S, A^*)$  défini par :

pour tous 
$$x, y \in S, (y, x) \in A^*$$
 si et seulement si  $(x, y) \in A$ 

- Un tournoi est dit auto-dual lorsque T est isomorphe à  $T^*$ .

#### Définition 1.14

Soient T = (S, A) et T' = (S', A') deux tournois, une bijection f de S dans S' est un isomorphisme de T dans T' lorsque :

$$\forall x, y \in S : (x, y) \in A \text{ si et seulement si } (f(x), f(y)) \in A'$$

lorsque un tel isomorphisme existe , on dit que T et  $T^\prime$  sont isomorphes.

Un demi-isomorphisme de T sur un tournoi T' est soit un isomorphisme de T sur T' ou soit un isomorphisme de  $T^*$  sur T'.









FIGURE 1.18 – Les quatre tournois à 4 sommets non isomorphes

Etant donnés deux tournois T et T' ayant le même ensemble S de sommets à n éléments et un ensemble F d'entiers positifs  $\leq n$ . T et T' sont F-demi-isomorphismes (resp. F-isomorphismes) si pour tout partie X de S telle que  $|X| \in F$ , les sous tournois T(X) et T'(X) sont demi-isomorphes(resp. isomorphes).

#### Définition 1.16

Un tournoi T est dit F-demi-reconstructible (resp. F-reconstructible), lorsque tout tournoi F-demi-isomorphe(resp. F-isomorphe) à T lui est demi-isomorphe(resp. isomorphe).

#### 1.2.3 Intervalle et indécomparabilité des tournois

#### Définition 1.17

Etant donné un tournoi T = (S, A), on dit qu'une partie I de S est intervalle de T lorsque pour tous les éléments a, b de I et x de S - I,

 $(a, x) \in A$  si et seulement si  $(b, x) \in A$ 

autrement dit si  $\forall x \in S \setminus I$ , x domine ou dominé par tous les éléments de I.

Soit T = (S, A) un tournoi défini sur un ensemble fini S alors, l'ensemble vide, les singletons de S et l'ensemble S sont des intervalles de T, appelés, intervalles triviaux.

#### Définition 1.18

Un tournoi T ayant au moins 3 sommets est dit indécomposable lorsque tous ses intervalles sont triviaux dans le cas contraire il est dit décomposable.

Exemple 1.8. Un tournoi non transitif à 3 sommets défini par :

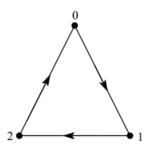


FIGURE 1.19 – Tournoi indécomposable

est indécomposable car ces intervalles sont tous triviaux.

#### Définition 1.19

Soient  $T_1, \ldots, T_m$  des tournois définis sur des ensembles  $S_1, \ldots, S_m$  deux à deux disjoints et R un tournoi défini sur l'ensemble  $\{1, \ldots, m\}$ , la dilatation de R par les tournois  $T_1, \ldots, T_m$  est le tournoi noté  $R(T_1, \ldots, T_m)$  et défini sur  $S = S_1 \cup S_2 \cdots \cup S_m$  par (x, y) arc de  $R(T_1, \ldots, T_m)$  si et seulement si (x, y) est un arc de l'un des tournois  $T_1, \ldots, T_m$ , et s'il existe  $i \neq j \in \{1, \ldots, m\}$  tel que  $x \in S_i, y \in S_j$ , on a (i, j) est un arc de R.

#### Définition 1.20

- Un diamant est un tournoi de 4 sommets  $\{a, b, c, d\}$  contenant un seul 3-cycle, si  $\{b, c, d\}$  est ce 3-cycle alors a est dit le sommet (ou la pointe) de ce diamant.
- Un double-diamant est un tournoi à 5 éléments obtenu à partir d'un diamant en dilatant son sommet par une chaîne de cardinal 2.

## 1.3 Rappels sur les relations

#### 1.3.1 les relations binaires

De nombreux problèmes courants, en informatique, en ingénierie, en sciences sociales, en intelligence artificielle, peuvent se représenter en termes de relations (binaires) entre objets.

On peut citer par exemple : réseaux de communications, routiers, ferroviaires, machines en réseaux, circuits intégrés ...

#### Définition 1.21

Une **relation binaire**  $\Re$  sur un ensemble d'éléments E, est une application de  $E \times E$  dans un ensemble arbitraire à deux éléments, qui pour toute la suite sera la paire  $\{+,-\}$ , où  $\Re(x,y) = +$  signifie que x est en relation avec y et  $\Re(x,y) = -$  signifie que x n'est pas en relation avec y.

Dans une relation binaire les éléments de la base E sont appelés des sommets, et les paires d'éléments de E, sont appelées arêtes ou arcs et qui sont notée par (x, y).

Remarque 1.3. Le lien entre ce concept (relation binaire) et la théorie des graphes est évident, à toute relation binaire  $\Re$  définie sur un ensemble E est associé le graphe défini par :

$$G = (E, A)$$
 avec  $A = \{(x, y) / x\Re y\}$ 

autrement dit, dire que  $(x,y) \in A$  correspond à "x et y vérifient la relation  $\Re$ ".

**Exemple 1.9.** Soit E l'ensemble de trois éléments  $\{1,2,3\}$ , et  $\Re$  la relation définie par :

$$x\Re y \Leftrightarrow x < y$$
.

nous avons que, 1 < 2 et 1 < 3, 2 < 3 donc le graphe associé à  $\Re$  est défini comme suit :

$$G = (E, A)$$
 où  $A = \{(1, 2); (2, 3); (1, 3)\}$ 

#### Définitions 1.9

Étant donnée une relation binaire  $\Re$  de base E, alors on définit.

- Une arête (x,y) est dite **neutre** si  $\Re(x,y) = \Re(y,x)$ , et dans le cas où  $\Re(x,y) \neq \Re(y,x)$ , l'arête est dite **orientée**.
- -Une arête (x,y) est dite **pleine** si  $\Re(x,y) = \Re(y,x) = +$  on la représentera par une arête pleine sans flèche.
- -Une arête (x, y) est dite **vide** si  $\Re(x, y) = \Re(y, x) = -$  et cela ne sera pas représenter graphiquement.

On appellera **nature**, le caractère vide, plein ou orienté d'une arête, des arêtes sont dites de même nature si elles sont toutes orientées ou toutes pleines ou toutes vides.

#### 1.3.2 Propriétés d'une relation binaire

Dans cette section, nous nous présentons quelques propriétés d'une relation binaire définie sur un seul ensemble.

Soit  $\Re$  une relation binaire sur un ensemble E, alors  $\Re$  est :

- 1 : **Réflexive** si pour tout x élément de E on a  $x\Re x$ , et **irréflexive** dans le cas contraire.
- 2: Antisymétrique si pour tout  $x, y \in E$  on a :  $x\Re y$  et  $y\Re x \Rightarrow x = y$ .
- 3 : **symétrique** si pour tout x, y éléments de E on a :  $x\Re y \Rightarrow y\Re x$ .
- 4: transitive si pour tout  $x, y, z \in E$  on a:  $x\Re y$  et  $y\Re z \Rightarrow x\Re z$ .

- 5 : **négativement transitive** si pour tout x, y, z éléments de de E on a :  $x \Re y \ et \ y \Re z \Rightarrow x \Re z.$
- 6: **semi-transitive** si pour tout  $x, y, z, t \in E$  on a:  $x\Re y$  et  $y\Re z \Rightarrow x\Re t$  ou  $t\Re z$ .
- 7: **connexe** si pour tout x, y deux éléments distingue de E on a  $x\Re y$  ou  $y\Re x$ , (ou bien les deux).
- 8: complète si pour tout x, y éléments de E on a  $x\Re y$  et, (ou)  $y\Re x$ .

**Exemple 1.10.**  $E = \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$  et  $\Re$  la relation définie sur E par :

$$x\Re y \Leftrightarrow x \ divise \ y$$

Alors  $\Re$  est à la fois réflexive, antisymétrique et transitive En effet,

- i) La Réflexivité Soit  $x \in E$ , a-t-on  $x\Re x$ ? On a  $x = 1 \cdot x$ , donc x divise x et par suite  $x\Re x$ .
- ii) antisymétrique Soient  $x \in E$  et  $y \in E$ , tels que  $x\Re y$  et  $y\Re x$ , a-t-on x = y? On a xRy et yRx, donc il existe  $k \in \mathbb{N}$  et il existe  $k' \in \mathbb{N}$ , tels que y = kx et x = k'y, donc y = kk'y et comme  $y \neq 0$ , alors kk' = 1 avec  $k \in \mathbb{N}$  et  $k' \in \mathbb{N}$ , donc k = k' = 1, par suite x = y.
- iii) transitive Soient  $x \in E$ ,  $y \in E$  et  $z \in E$ , tels que  $x\Re y$  et  $y\Re z$ , a-t-on  $x\Re z$ ? On a xRy et yRz, donc il existe  $k \in \mathbb{N}$  et il existe  $k' \in \mathbb{N}$ , tels que y = kx et z = k'y, donc z = kk'x, par suite,  $x\Re z$ .

Remarque 1.4. Puisque les relations binaires correspond à une propriété des éléments d'une partie de produit cartésienne  $E \times E$ , on peut leurs appliquer les opérations habituelles de la théorie des ensembles.

Etant données deux relations binaires  $\Re_1$  et  $\Re_2$  sur une même base E, on définit :

1-La réunion de deux relations par :

$$\forall (x,y) \in E \times E, x(\Re_1 \cup \Re_2)y \text{ si et selement si } x\Re_1 y \text{ ou } x\Re_2 y \text{ (ou bien les deux)}$$

2-L'intersection de deux relations :

$$\forall (x,y) \in E \times E, x(\Re_1 \cap \Re_2)y \Leftrightarrow x\Re_1 y \ et \ x\Re_2 y.$$

3-L'inclusion de deux relations :

$$\Re_1 \subset \Re_2$$
 si et selement si  $x\Re_1 y \Rightarrow x\Re_2 y, \forall x, y \in E$ 

4-Le produit de deux relations : le produit  $\Re_1 \cdot \Re_2$  est défini par :

$$x(\Re_1 \cdot \Re_2)y \Leftrightarrow \exists z \in E \ tel \ que \ x\Re_1 z \ et \ z\Re_2 y.$$

On notera  $\Re^2$  la relation  $\Re$ .  $\Re$  c'est à-dire le produit de la relation avec elle même. 5-L'inverse d'une relation : l'inverse d'une relation  $\Re$  est la relation noté  $\Re^-$  défini par :

$$x\Re^-y$$
 si et selement si  $y\Re x$ .

6-Le duale d'une relation : le duale d'une relation  $\Re$  est la relation noté  $\Re^d$  définie par :

$$x\Re^d y$$
 si et selement si  $y \Re x$ .

#### Définition 1.22

soient  $\Re_1$  une relation qui relié les éléments de E à des éléments de F, et  $\Re_2$  relié les éléments de F à des éléments de T, on peut alors construire une relation sur  $E \times F$  qui relié directement les éléments de E à des éléments de T en composant les arcs de  $\Re_1$  et  $\Re_2$  d'où la composition de deux relations est définie par :

$$\Re_1 \circ \Re_2 = \{(x,t) \in E \times T / \exists y \in F, (x,y) \in \Re_1 \ et \ (y,t) \in \Re_2 \}.$$

Remarque 1.5. Les propriétés des relations binaires ne sont pas indépendantes, on pourra vérifier simplement que :

- Une relation binaire  $\Re$  est complète si et seulement s'il est connexe et réflexive.
- Une relation binaire  $\Re$  complète et transitive est négativement transitive.
- Une relation asymétrique et négativement transitive est transitive.
- Une relation est asymétrique si et seulement s'elle est irréflexive et antisymétrique.

Remarque 1.6. Étant donnée une relation binaire  $\Re$ , il est possible de reformuler les propriétés qui nous introduisons ci-dessus par :

- 1-  $\Re$  est complte  $\Leftrightarrow \Re \cup \Re^- = E \times E$ .
- 2-  $\Re$  est transitive  $\Leftrightarrow \Re^2 \subset \Re$ .

Démonstration: 1-  $\Rightarrow$ ) comme  $\Re$  est complète alors  $\forall (x,y) \in E \times E$  on a  $x\Re y$  et/ou  $y\Re x$ , ce qui équivalent à dire que  $x\Re y$  ou  $x\Re^-y \Rightarrow (x,y) \in \Re \cup \Re^-$  d'où  $E \times E \subseteq \Re \cup \Re^-$  et d'après la définition de la réunion de deux relations on a  $\Re \cup \Re^- = E \times E$ . ( $\Leftarrow$  évident.

2-  $\Rightarrow$ ) soit  $(x,y) \in \Re^2 = \Re \cdot \Re = \{(x,y) \in E \times E/\exists z \in E \text{ tel que } x\Re z \text{ et } z\Re y\}$  et comme  $\Re$  est transitive  $\Rightarrow x\Re y \Rightarrow (x,y) \in \Re$ . (  $\Leftarrow$  soit x,y,z des éléments de E tels que  $x\Re y$  et  $y\Re x$ , a-t-on  $x\Re z$ ? donc comme  $\Re$  est transitive, alors  $x\Re y$  et  $y\Re x \Rightarrow (x,y) \in \Re^2 \subset \Re$ .

#### 1.3.3 Représentation d'une relation binaire

Toute relation binaire sur une base d'éléments E peut être représentée par l'une des méthodes suivantes :

#### La représentation graphique :

Étant donnée une relation binaire  $\Re$  sur un ensemble E, les propriétés remarquables de R peuvent s'exprimer à l'aide d'une représentation graphique :

$$G = (E, A)$$
 avec  $A = \{(x, y)/x\Re y\}$ 

- -La réflexivité de la relation binaire R se traduit par la présence d'une boucle sur chaque sommet.
- -La transitivité de la relation binaire R signifie que s'il existe un chemin de longueur 2 de x vers y, alors il existe un arc de x vers y.
- -La symétrie de la relation  $\Re$  impose que s'il existe un arc de x vers y implique l'existence d'un arc de y vers x.
- -La relation inverse  $\Re^-$  de  $\Re$  obtenue en inversant l'orientation de tous les arcs de G.
- -La relation complémentaire consiste à ajouter tous les arcs qui manque dans G et de supprimer les arcs qui existe.

**Exemple 1.11.** Soit  $E = \{1, 2, 3, 4\}$  et  $\Re$  la relation définie sur E par :  $\Re = \{(2,2); (2,1); (4,1); (3,1); (3,3); (3,2); (3,4); (4,3); (4,2)\}\ d'où le graphe représentatif$  $de \Re est$ :

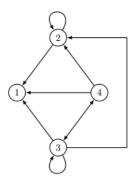


FIGURE 1.20 – Graphe représentatif de la relation  $\Re$ .

#### La représentation matricielle :

La représentation matricielle d'une relation binaire  $\Re$  sur un ensemble E consiste à associé à chaque élément de E une ligne et une colonne à condition que les éléments de E sont dans le même ordre aux lignes et aux colonnes, à fin d'obtenir une matrice carrée noté  $M_{\Re}$  de dimension cardinal de E telle que :

$$\forall x, y \in E, \quad m_{xy} = \begin{cases} 1 & x \Re y \\ 0 & sinon \end{cases}$$

-La réflexivité de  $\Re$  est signifié par la présence de 1 sur la diagonale de  $M_{\Re}$ .

-La symétrie de la relation binaire  $\Re$  se traduit par la symétrie de  $M_\Re$  .

-La relation inverse de  $\Re$  consiste à transposer la matrice  $M_{\Re}$  .

**Exemple 1.12.** La représentation matricielle de la relation définie dans l'exemple précédant est donnée par :

FIGURE 1.21 – Représentation matricielle du graphe de la figure (1.20).

#### 1.3.4 Relation d'équivalence

Les relations dites d'équivalences sont des outils fondamentales pour créer des nouveaux objets mathématiques, à savoir les ensembles quotient de E par  $\Re$  qu'on note  $E/\Re$ .

#### Définition 1.23

On appelle relation d'équivalence sur un ensemble E, une relation binaire sur E qui est à la fois réflexive, symétrique, et transitive.

**Exemples 1.1.** (1) - Soit E un ensemble non vide et F un sous-ensemble de E la relation sur l'ensemble  $\mathcal{P}(E)$  des sous-ensembles de E définie par :

$$A\Re B \Leftrightarrow A \cap F = B \cap F$$
.

est une relation d'équivalence.

- (2) La relation d'égalité sur un ensemble E est une relation d'équivalence sur E.
- (3) Soient E l'ensemble définie par  $E = \{u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}, u_n \in \mathbb{Q}\}$ , et  $\Re$  une relation de base E définie par :

$$u\Re v \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} (u_n - v_n) = 0$$

alors  $\Re$ , est une relation d'équivalence sur E.

Soit  $\Re$  une relation d'équivalence sur un ensemble non vide E, on appelle classe d'équivalence de x, le sous-ensemble de E formé des éléments de E équivalents à x on le note en général  $C_x$  ou  $\bar{x}$  et on a :

$$C_x = \{ y \in E/y \Re x \}$$

et comme  $\Re$  est réflexive, la classe d'équivalence  $C_x$  de x est non vide, il contient au moins x.

#### Théorème 1.2

Etant donnée une relation d'équivalence  $\Re$  sur un ensemble E, pour tous x et y éléments de E on a :

- 1.  $x\Re y$  si et seulement si  $C_x = C_y$
- 2.  $x \Re y$  si et seulement si  $C_x \cap C_y = \emptyset$

Démonstration: 1.  $\Rightarrow$ ) Soient x et y deux éléments de E où  $x\Re y$ , montrons que

 $C_x \subset C_y$  et  $C_y \subset C_x$ ?

soit  $t \in C_x \Rightarrow t\Re x$ , et comme  $\Re$  est transitive et  $x\Re y \Rightarrow t\Re y$  d'où  $C_x \subset C_y$  l'inclusion réciproque se montre de la même manière.

 $(\Leftarrow \text{ \'evident}.$ 

2. par contraposée il suffit de montrer que :

 $C_x \cap C_y \neq \emptyset$  si et seulement si  $x\Re y$ 

 $\Rightarrow$ ) $C_x \cap C_y \neq \emptyset \Rightarrow \exists t \in C_x$  et  $t \in C_y$  et par symétrie sur la première relation on a,  $x\Re t$  et  $t\Re y$  et comme  $\Re$  est transitive on a  $x\Re y$ .

( $\Leftarrow$  Réciproquement, si  $x\Re y$  alors d'après 1. on a :  $C_x = C_y$  et comme la classe d'équivalence d'un élément de E est non vide d'où  $C_x \cap C_y \neq \emptyset$ .

#### Définition 1.25

 $(E_i)_{i\in I}$  une famille indexée par I de sous-ensembles non vide de E, on dit que la famille  $(E_i)_{i\in I}$  forme une partition de E si les sous-ensembles de cette famille sont deux à deux disjoints et si leurs réunion est E.

Autrement dit,

$$\forall (i,j) \in I \times I, i \neq j \Rightarrow E_i \cap E_j = \emptyset \ et \bigcup_{i \in I} E_i = E.$$

Remarque 1.7. Soit  $\Re$  une relation d'équivalence sur un ensemble E, les classes d'équivalences de E modulo  $\Re$  forme une partition de E. En effet :

- (i)- on  $a \ \forall x \in E, C_x \neq \emptyset$
- (ii)- soient  $x, y \in E$  alors on a soit  $C_x = C_y$  soit  $C_x \cap C_y = \emptyset$
- (iii)- les classes recouvrent E

#### 1.3.5 Relation d'ordre

Dans cette partie on va s'intéresser aux ordres et d'en présenter quelques propriétés, qui nous ont paru les plus importantes.

#### Définition 1.26

Soit  $\Re$  une relation binaire sur un ensemble E, on dit que  $\Re$  est une relation d'ordre ou ordre sur E, si  $\Re$  est à la fois réflexive, antisymétrique et transitive.

**Notation** :Dans toute la suite, toute relation d'ordre  $\Re$  sur un ensemble E, sera désignée par le signe  $\leq$ .

Si E est muni d'une relation d'ordre  $\leq$  on dit que  $(E, \leq)$  est un ensemble ordonné.

Exemples 1.2.  $1- pour E = \mathbb{Z} muni de la relation \leq définie par :$ 

$$x \le y \Leftrightarrow y - x \in \mathbb{N}$$

est une relation d'équivalence et  $(E, \leq)$  est un ensemble ordonné.

2- pour  $n \in \mathbb{N}$ , avec  $n \geq 2$  on munit  $\mathbb{R}^n$  de la relation définie par :

$$(x_{1}, x_{2}, \dots, x_{n}) \leq (y_{1}, y_{2}, \dots, y_{n}) \Leftrightarrow \begin{cases} (x_{1} < y_{1}) \\ (x_{1} = y_{1} & et & x_{2} < y_{2}) \\ ou \\ \vdots \\ ou \\ (x_{1} = y_{1} & et & x_{2} = y_{2} & et \dots & et & x_{n} \leq y_{n}) \end{cases}$$

est une relation d'ordre et  $(\mathbb{R}^n, \leq)$  est un ensemble ordonné, cet ordre s'appelle l'ordre lexicographique sur  $\mathbb{R}^n$ , il est équivalent à l'ordre pour lequel les mots sont classés dans un dictionnaire.

#### Définitions 1.10

Soient E un ensemble non vide et  $\leq$  une relation d'ordre sur E, alors :

1. - La relation d'ordre  $\leq$  est dite **totale**, si pour tout  $x \in E$  et pour tout  $y \in E$ , on a

$$x \le y$$
 ou  $y \le x$ .

- 2.  $-(E, \leq)$  est dite **totalement ordonné** lorsque la relation d'ordre  $(\leq)$  est totale.
- 3. -Si  $(E, \leq)$  n'est pas totalement ordonné, on dit qu'il est partiellement ordonné.

**Exemples 1.3.** 1. - Soit  $E = \mathbb{C}$  muni de la relation  $\leq$  définie pour z = a + ib et z' = a + ib' par :

$$x \le y \Leftrightarrow \begin{cases} a < a' \\ ou \\ a = a' \ et \ b \le b' \end{cases}$$

est une relation d'ordre totale d'où  $(\mathbb{C}, \leq)$  est totalement ordonné cet ordre s'appelle l'ordre lexicographique sur  $\mathbb{C}$ .

2. -  $(\mathbb{Z}, \leq)$  l'ordre naturel défini par

$$x \le y \Leftrightarrow y - x \in \mathbb{N}$$
 est totalement ordonné.

Remarque 1.8. Les définitions que nous venons d'introduire correspondent à l'ordre large mais pas à l'ordre strict.

 $(\mathbb{R},<)$  où < est l'ordre strict usuel sur les réels n'est pas un ensemble ordonné mais il est strictement ordonné.

#### Définition 1.27

Soit E un ensemble non vide, une relation binaire est un ordre **strict** ou relation d'ordre strict quand elle est irréflexive et transitive.

Remarque 1.9. Une relation d'ordre strict est nécessairement antisymétrique mais ceci est superflu dans la définition

Une relation d'ordre strict est un cas particulier de relation d'ordre au sens où nous l'avons défini ci-dessus.

### Définitions 1.11

- 1. Soit E un ensemble non vide et (<) une relation d'ordre strict sur E, on dit alors que (E,<) est un ensemble **strictement ordonné**.
- 2. Deux élément x et y de E sont dits **incomparables** quand on a ni x < y ni y < x.
- 3. -L'antichaîne est un ensemble ordonné dans lequel chaque deux éléments distingue sont toujours incomparables.
- 4. Un ordre strict (<) sur E est dit strict total si deux éléments différents sont toujours **comparables** :

$$\forall x, y \in E$$
, tel que  $x \neq y$  on a  $x < y$  ou  $y < x$ 

sinon elle est partielle.

**Remarque 1.10.** On peut toujours passer d'un ordre à un ordre strict, et réciproquement  $si(E, \leq)$  est un ensemble ordonné, la relation (<) définie par :

$$x < y \Leftrightarrow (x \neq y \ et \ x \leq y) \ est \ un \ ordre \ strict.$$

réciproquement si (E, <) est un ensemble strictement ordonné, la relation  $\leq$  définie par :

$$x < y \Leftrightarrow (x = y \text{ ou } x < y) \text{ est une relation } d' \text{ ord} re.$$

### Définition 1.28

Soit  $\Re$  une relation sur un ensemble E,  $\Re$  est dite un **préordre** sur E s'elle est réflexive et transitive.

**Exemple 1.13.** Soit E un ensemble fini tel que  $E = \{1, 2, 3\}$  et  $\Re$  la relation sur E donnée par :

$$\Re = \{(1,1); (2,2); (3,3); (1,3); (1,2); (2,3); (3,2)\}$$

dons il est claire que la relation est réflexive et transitive d'où  $\Re$  est un préordre.

### 1.3.6 Relation n-aire et multirelation

Nous rappelons ici juste les notions primitive, les autres étant introduites suivant les besoins

#### Définition 1.29

Étant donné un ensemble E et un entier n, nous appelons **relation n-aire** de base E toute application R de l'ensemble  $E^n$  des n-uplets  $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$  extrait de E dans un ensemble aux deux valeurs + et -

pour n=1, on parle d'une relation unaire et pour n=2 binaire et ternaire pour n=3

Etant données deux relations  $\Re_1$  et  $\Re_2$  de même arité n, et de base respectivement  $E_1$ ,  $E_2$ , alors :

1. Une bijection f de  $E_1$  sur  $E_2$  est un **isomorphisme** de  $\Re_1$  sur  $\Re_2$ , lorsque pour tout n-upltes  $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$  extrait de  $E_1$  on :

$$\Re_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = \Re_2(f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n))$$

2. Nous appelons un **isomorphisme locale** de  $\Re_1$  vers  $\Re_2$  tout isomorphisme d'une restriction de  $\Re_1$  sur  $\Re_2$ , plus précisément lorsque pour tous p-upltes  $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$  avec  $p \leq n$  d'éléments d'une partie de  $E_1$  nous avons :

$$\Re_1(x_1, x_2, \dots, x_p) = \Re_2(f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_p)).$$

3. Dans le cas ou on a  $\Re_1 = \Re_2$  nous disons que f est un **automorphisme local** de  $\Re_1$ .

#### Définition 1.30

Étant données une famille  $\alpha = (n_i)_{i \in I}$  d'entiers  $n_i$ , nous appelons **structure relationnelle** ou **multirelation**  $\alpha$ - aire de base E lorsque I est un ensemble fini, toute

famille  $M = (\Re_i)_{i \in I}$  formée des relations  $n_i$ -aires  $\Re_i$  de base E appelées ses composantes.

Les notions qu'on a introduit ci-dessus s'étendent directement à ces structures.

### isomorphisme d'une multirelation

Soient  $M_1 = (\Re_1, \Re_2, \dots, \Re_n)$  et  $M_2 = (\Re'_1, \Re'_2, \dots, \Re'_n)$  deux structure relationnelles  $(\alpha = (n_i)_{i \in I})$ -aires de base respectives  $E_1$  et  $E_2$ , alors

 $M_1$  et  $M_2$  sont dites isomorphes, s'il existe une bijection f de  $E_1$  sur  $E_2$  qui est un isomorphisme de  $\Re_i$  sur  $\Re'_i$  pour tout  $i=1,2,\ldots n$ , et même généralisation pour l'automorphisme.

### 1.3.7 intervalle d'une relation binaire

La notion d'intervalle d'une relation, remonte aux années 1950, elle est exposée par **Fraïsse** en 1971, et parmi les auteurs qui ont utilisé d'une manière intéressante l'intervalle de relation, citons **Fodès** 1973 et **Lopez** en 1978, **M.Pouzet** en 1979.

#### Définition 1.31

Soit  $\Re$  une relation binaire sur un ensemble E, une partie I de E est un  $\Re$ -intervalle, ou intervalle de  $\Re$  lorsque tous éléments a,b de I et pour tout x de  $E\setminus I$  on a :

$$\Re(a,x) = \Re(b,x)$$
 et  $\Re(x,a) = \Re(x,b)$ 

Exemple 1.14. L'ensemble vide, et les singletons de l'ensemble E et E lui même sont des  $\Re$ -intervalle dites intervalles triviaux

Pour une relation  $\Re$  de base E et I une partie de E, alors I est dit  $\Re$ -intervalle ou intervalle de  $\Re$ , lorsque tout automorphisme local de la restriction  $\Re_{|I}$ , étendu par l'identité sur  $E \setminus I$ , donne un automorphisme local de  $\Re$ , disons alors que tout automorphisme local de  $\Re_{|I}$  est extensible par l'identité sur  $E \setminus I$ .



## 2.1 Introduction

La conjecture d'Ulam ( ou la conjecture de la reconstruction des graphes), est l'un des problèmes célèbres de la théorie des graphes, cette conjecture affirme que tout graphe simple d'ordre supérieur ou égale à trois est uniquement déterminé à un isomorphisme près (reconstruit) à partir de sa famille de ses sous-graphes induits propres maximaux, cette conjecture a été prouvée pour plusieurs classes de graphes et aucune contre exemple n'a été trouvé, une étude détaillée de ce problème est donnée par Bondy en 1977 dans [4], Ulam a énoncé sa conjecture uniquement pour les graphes simples non orientés et finis, mais certains ont également étudié d'autres types de graphes, cette conjecture n'est certainement pas vraie pour les graphes infinis, et les graphes orientés, une famille infinis de contre exemples a été trouvée et qu'on trouve dans [56], et dans la plupart des publications dans ce domaine les auteurs ont cherché à prouver que certaines classes de graphes sont reconstructibles.

Un autre problème sur la reconstruction de graphes et qui semble plus abordable que celui d'Ulam est celui appelé "Conjecture de l'arête-reconstruction", énoncé par Harary en 1964 [21] et qui affirme que tout graphe simple avec au moins 4 arêtes peut être reconstruit à partir de ses sous-graphes partiels propres maximaux.

De même, une autre conjecture qui généralise celle d'Ulam a été proposée par **P.Kelly** en 1957 qu'on trouve dans [29] et qui affirme que pour tout entier k > 0, il existe un entier  $s_k$  tel que tout graphe simple d'ordre supérieur ou égale à  $s_k$ , est uniquement déterminé à un isomorphisme prés par la famille des sous-graphes obtenus en enlevant k sommets du graphe. Dans ce chapitre nous faisons un résumé des résultats relatifs aux conjectures présentées ci-dessus.

# 2.2 Conjecture d'ulam ou conjecture de la reconstruction

Le problème le plus ancien que l'on trouve dans la littérature concernant la caractérisation d'un graphe par une famille de ses sous-graphes est considéré comme l'un des

problèmes ouverts les plus connus de la théorie des graphes.

Un graphe simple est-il caractérisé, à un isomorphisme prés par la liste de ses sous-graphes?

### 2.2.1 La reconstructibilité

Conjecture (Reconstruction Conjecture) [58]:

Soient G et H deux graphes simples d'ordre  $\geqslant 3$  s'il existe une bijection  $\varphi: V(G) \to V(H)$  telle que G-v est isomorphe à  $H-\varphi(v)$  pour tout  $v \in V(G)$ , alors G et H sont isomorphes.

Rappelons que G - v ou  $G_v$  est le sous-graphe de G obtenu en supprimant le sommet v et toutes les arêtes qui lui sont incidentes, et qu'on appelle **carte** de G.

Un **deck** de graphe G, noté  $\mathcal{D}(G)$  est le multi-ensemble contenant tous les cartes de G, et il est considéré comme multi-ensemble car il est possible d'avoir  $G - v_i \cong G - v_j$ , mais les deux sous-graphes ont été crées en supprimant des sommets différents et sont donc définis comme des cartes différentes.

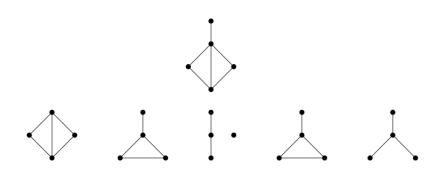


FIGURE 2.1 – Au premier rang : Le graphe G, et au deuxième rang : Le deck de G

Une formulation alternative de la conjecture d'Ulam proposée par Harary dans [22] et qu'on note brièvement par **HC** consiste à dire, que tout graphe simple G d'ordre  $\geqslant 3$  est uniquement déterminé à un isomorphisme près par la collection de ses sous-graphes  $\mathcal{D}(G) = \{G - v/v \in V(G)\}.$ 

### Définitions 2.1

Soient G et H deux graphes simples d'ordre n,

- deux sommets u et v de V(G) sont appelés **hypomorphes** si la carte associée à u est identique à celle associée à v, c'est-à-dire que  $G v \cong G u$ .
- H et G sont **hypomorphes** si  $\mathcal{D}(G)$  et  $\mathcal{D}(H)$  sont identiques en tant que multi-ensemble.

Proposition 2.1 (22 27)

RC est vraie si et seulement si HC est vraie.

Démonstration: Soient G et H deux graphes simples d'ordre  $\geq 3$ , laissez d'abord  $\mathbf{RC}$  être vraie et considérons  $\mathcal{D}(G)$  le deck de G, supposons que  $\mathcal{D}(G)$  est aussi le deck de H alors G et H sont hypomorphes et d'après  $\mathbf{RC}$ , G et H sont isomorphes d'où G est uniquement déterminé par son  $\mathcal{D}(G)$ .

Réciproquement, supposons que chaque graphe G est uniquement déterminé par son  $\mathcal{D}(G)$ , et soit H un graphe hypomorphe à G c'est-à-dire  $\mathcal{D}(G) = \mathcal{D}(H)$  donc G et H son isomorphes ce qui montre que  $\mathbf{RC}$  est vraie.

La version  $\mathbf{RC}$ , qui parle simplement de l'existence d'un isomorphisme, et la version  $\mathbf{HC}$  qui traite la détermination de la structure de G, sont logiquement, équivalentes bien qu'elles semblent très différentes au premier abord, ainsi tout en travaillant sur une preuve globale de ce problème il est acceptable de chercher une solution à tout énoncé du problème qui soit logiquement équivalent à l'un ou l'autre de ces problèmes.

## Définitions 2.2

Soient G et H deux graphes simples d'ordre  $n \ge 3$ ,

- On dit que H est une **reconstruction** de G si  $\mathcal{D}(G) = \mathcal{D}(H)$ .
- G est dit **reconstructible** si toute reconstruction de G est isomorphe à G.

La conjecture d'Ulam affirme en utilisant la définition ci-dessus que tous les graphes simples d'ordre  $\geq 3$  sont reconstructibles.

Remarque 2.1. La condition que l'ordre de G soit  $\geqslant 3$  est nécessaire comme nous pouvons voir en utilisant l'exemple :

- $G = K_2$ , le graphe complet de deux sommets.
- $H = 2K_1$ , deux copies de graphe complet d'un seul sommet.



FIGURE  $2.2 - K_2$ , et  $2K_1$ 

Ces deux graphes sont des reconstructions l'un de l'autre, mais ne sont pas isomorphes et RC affirme que ce sont les seuls graphes simples non reconstructibles.

### 2.2.2 k-reconstructibilité

Kelly a proposé dans [30] que la conjecture de reconstruction peut être généralisé en considérant dans ce cas la reconstructibilité des graphes à partir de ses sous-graphes crées en enlevant k sommets au lieu d'un seul, et le deck de G qu'on note par  $\mathcal{D}_k(G)$  est constitué des cartes obtenues en supprimant une combinaison unique de k sommets.

## Conjecture de Kelly 30 29:

Pour tout entier k > 0, il existe un entier  $s_k$  tel que tout graphe simple G d'ordre  $n \ge s_k$  est caractérisé à un isomorphisme près par la famille de ses sous-graphes G - V avec |V| = k de  $\mathcal{D}_K(G)$ .

## Définitions 2.3

Soient S un ensemble à n éléments et k un entier naturel inférieur ou égale à n,

- Deux graphes simples  $G_1$  et  $G_2$  définis sur l'ensemble S sont (k)—hypomorphes si pour toute partie A de S de cardinal k, les sous-graphes  $G_1[A]$  et  $G_2[A]$  sont isomorphes.
- Un graphe simple G est (k)-reconstructible si tout graphe (k)-hypomorphe à G lui est isomorphe.

Dans [35], **G.Lopez** a prouvé que tout graphe à au moins 13 sommets est (6)—reconstructible, par contre pour k = 2, 3, 4 ou 5 les graphes ne sont pas en général (k)—reconstructibles.

# 2.3 Les paramètres reconstructibles

La reconstruction des paramètres d'un graphe a un rapport très étroit avec la reconstruction des classes de graphes, l'objectif de cette section est de présenter quelques paramètres reconstructibles.

#### Définition 2.1

Soit G un graphe simple d'ordre  $\geqslant 3$ , un **paramètre** ou n'importe quelle **fonction** définie sur une classe de graphe est dit reconstructible, si pour chaque graphe G de cette classe, ce paramètre ou fonction prend la même valeur quelque soit la reconstruction de G.

De nombreux paramètres d'un graphe peuvent être déterminés à partir de son deck  $\mathcal{D}(G)$ .

Exemples 2.1. - Le nombre de sommets d'un graphe G est reconstructible En effet,

Soit  $v \in V(G)$  et G - v l'une des cartes de G, alors comme G - v contient tous les sommets de G sauf v on a

$$|V| = |V(G - v)| + 1$$

par conséquent V(G) est un paramètre reconstructible.

- Le nombre d'arête de G est reconstructible. En effet,

Soit G un graphe simple d'ordre n et de taille p et  $\mathcal{D}(G)$  sont deck, alors comme  $|E(G-v_i)|$  est le nombre d'arête dans la carte  $C_i$  de  $\mathcal{D}(G)$ , et soit uv une arête de G, cette arête est visible dans tous les cartes sauf  $C_u$  et  $C_v$  d'où :

$$p(n-2) = \sum_{i=1}^{n} |E(G - v_i)|$$
$$p = \sum_{i=1}^{n} \frac{|E(G - v_i)|}{n-2}$$

alors il claire que |E(G)| est reconstructible.

Dans 30, Kelly a donné un lemme très simple qui à été l'outil le plus utilisé dans les méthodes de reconstruction comme on le remarquera tout au long de cette section. Dans la suite de cette section G est un graphe simple fini et d'ordre  $\geq 3$ 

## Lemme 2.1

Soient G et H deux graphes tels que |V(H)| < |V(G)| alors le nombre s(H,G) de sous-graphes de G isomorphes à H est reconstructible.

Démonstration: Soit G et H deux graphes d'ordre n et m tels que m < n. Alors il est claire que  $\sum_{s \in V(G)} s(H, G - v)$  compte tous les sous-graphes de G isomorphes à

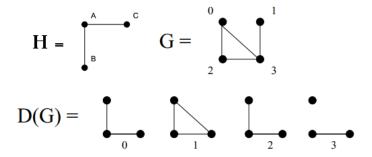
H dans le deck de G.

Soit maintenant F un sous-graphe de G isomorphe à H alors |V(F)| = m, et donc F ne se trouve pas dans les cartes de G obtenues en supprimant les m sommets de F, par conséquent F apparaît exactement dans (n-m) cartes de G, et puisque F est arbitraire alors tout sous-graphe de G isomorphe à H apparaît exactement dans |V(G)|-|V(H)|cartes en  $\mathcal{D}(G)$  ce qui nous permet d'écrire

$$s(H,G) = \sum_{v \in V(G)} \frac{s(H,G-v)}{|V(G)| - |V(H)|}$$

et comme V(G) et V(H) sont connus et la valeur de s(H, G - v) peut être déterminée pour chaque carte de G, donc le nombre de sous-graphes de G isomorphes à H est reconstructibles. 

**Exemple 2.1.** Considérons les graphes G et H suivants d'ordre respectivement 4 et 3 et  $\mathcal{D}(G)$  le deck de G.



Donc on a:

$$s(H,G) = \frac{1}{4-3} * (s(H,G-v_0) + s(H,G-v_1) + s(H,G-v_2) + s(H,G-v_3))$$
  
= 1 \* (1+0+1+0)  
= 2

d'où tout sous-graphe de G isomorphe à H apparaît exactement dans 2 deux cartes de  $\mathcal{D}(G)$ 

Le lemme de Kelly est généralement utilisé pour déterminer le nombre de sous-graphes généraux de G isomorphes à H, mais en remplaçant sous-graphe par **sous-graph induit** dans le lemme (2.1) nous voyons qu'il est possible de déterminer le nombre de sous-graphes induits de G isomorphes à H.

### Corollaire 2.1

Soient G et F deux graphes tels que |V(F)| < |V(G)| alors, le nombre de sous-graphes de G isomorphes à F et qui possèdent un sommet donné v est reconstructible.

Démonstration: Ce nombre est s(F,G)-s(F,G-v), avec s(F,G-v) est le nombre de sous-graphes de G isomorphes à F qui ne contient pas le sommet v, et selon le lemme de Kelly s(F,G) est reconstructible, et s(F,G-v) peut être clairement déterminé à partir de  $\mathcal{D}(G)$ , donc le nombre de sous-graphes de G isomorphes à F et qui possèdent le sommet v est reconstructible.

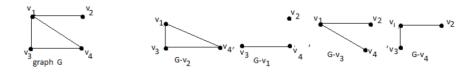
En prenant  $H = K_2$  dans le lemme de kelly (2.1) et  $F = K_2$  dans le corollaire (2.1), nous trouvons que le nombre d'arête et la séquence des degrés respectivement, sont des paramètres reconstructibles.

### Théorème 2.1

La séquence des degrés d'un graphe G est reconstructible.

Démonstration: Soient G un graphe simple d'ordre n et de taille p et G-v une carte dans le deck de G, le degré de v dans G est clairement égale à p-|E(G-v)| et comme p est reconstructible et |E(G-v)| est connu à partir de G-v d'où le degré de v dans G est reconstructible, ainsi la séquence des degrés de G est reconstructible

**Exemple 2.2.** Considérons le deck  $\mathcal{D}(G)$  de graphe G donné par :



 $ici \ on \ a \ n = 4 \ et \ p = 4 \ alors$ 

$$d_G(v_1) = p - |E(G - v_1)| = 4 - 1 = 3$$

$$d_G(v_2) = p - |E(G - v_2)| = 4 - 3 = 1$$

$$d_G(v_3) = p - |E(G - v_3)| = 4 - 2 = 2$$

$$d_G(v_4) = p - |E(G - v_4)| = 4 - 2 = 2$$

Ainsi la séquence des degrés de G est reconstructible.

### Corollaire 2.2

La séquence des degrés des voisins d'un sommet donné est reconstructible.

Démonstration: Considérons la carte G-v de  $\mathcal{D}(G)$ , et soit d la suite des degrés des sommets de la carte G-v, avec le degré de v soit inséré dans sa position correcte alors les composantes non nulle da la différence vectorielle  $d_G-d$ , (avec  $d_G$  la séquence des degrés de G) apparaissent aux position correspondant aux voisins de v dans G, et comme  $d_G$  est reconstructible d'après le théorème (2.1) et la séquence des degrés des sommets de G-v est reconstructible, d'où la séquence des degrés des voisins d'un sommet donné est reconstructible.

# Lemme 2.2

La connexité d'un graphe simple G d'ordre supérieur ou égale à 3 est reconstructible.

Démonstration: Supposons que G est non connexe et v un sommet de G alors, G-v est connexe si et seulement si G a précisément deux composantes et G=v+(G-v). Donc  $\mathcal{D}(G)$  ne contient qu'une seule carte connexe .

d'autre part supposons que G est un graphe connexe, alors G contient au moins deux sommets qui ne sont pas d'articulation, donc  $\mathcal{D}(G)$  contient au moins deux cartes connexe, et puisque l'ordre de G est au moins égale à 3, cela implique que la connexité de G peut être déterminée à partir de  $\mathcal{D}(G)$ 

Rappelons qu'un graphe G est dit k-connexe avec  $k \ge 0$  si et seulement si |G| > k et pour tout sous-ensemble  $S \subset V(G)$  de cardinal inférieur strictement à k, le graphe G - S est connexe.

La 1-connexité se confonde avec la connexité usuelle lorsque G n'est pas un sommet isolé, et la connectivité k(G) de G est le plus grand entier k tel que G est k-connexe.

### Corollaire 2.3

La connectivité k(G) d'un graphe G est reconstructible.

Démonstration: Si k(G) = 0 alors G est non connexe et le résultat découlera du lemme (2.2).

et si nous supposons que G est connexe, alors il est facile de voir que  $k(G) = 1 + \min_{v \in V(G)} k(G - v)$  d'où k(G) peut être déterminé à partir de  $\mathcal{D}(G)$ 

# 2.4 Classes de graphes reconstructibles

Nous savons que plusieurs graphes sont reconstructibles, dans cette section on va examiner quelques graphes et les preuves qu'il sont reconstructible, mais avant nous devrions également faire une remarque c'est que : prouver que ces graphes sont reconstructible et trouver une méthode pour reconstruire ces graphes sont deux problèmes très différents, les preuves suivantes montreront simplement que si nous reconstruisons ces types de graphes alors la reconstruction est unique à un isomorphisme près.

#### Définition 2.2

Soit  $\mathcal{C}$  une classe de graphes, alors on dit que  $\mathcal{C}$  est reconstructible si chaque graphe de  $\mathcal{C}$  est reconstructible.

L'approche la plus largement utilisée pour prouver qu'une classe est reconstructible est de montrer que les deux conditions suivantes sont vérifiés :

- (a) : C est **reconnaissable**, c'est-à-dire que pour tout G de C, chaque reconstruction de G est un membre de C.
- (b) : C est faiblement reconstructible, c'est-à-dire que pour tout G de C, chaque reconstruction de G est isomorphe à G.

Il est claire que si (a) et (b) sont vérifiés alors  $\mathcal{C}$  est reconstructible, cette approche sera utilisé pour montrer la reconstructibilité des graphes réguliers et les graphes non-connexes.

# Théorème 2.2 (48)

pour tout entier k>0, la classe des graphes k-réguliers est reconstructible

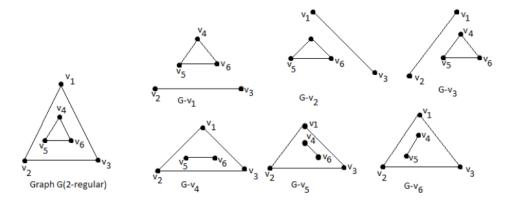
Démonstration: Soient  $\mathcal{C}$  la classe des graphes k-réguliers et  $\mathcal{D}(G)$  le deck d'un graphe G de  $\mathcal{C}$ , on sait d'après le théorème (2.1) que la séquence des degrés de G est reconstructible, donc il est identique à toute reconstruction de G, d'où toute reconstruction de G est k-régulier ce qui implique que  $\mathcal{C}$  est reconnaissable.

Considérons maintenant une carte G-v dans le deck  $\mathcal{D}(G)$  de G, et puisque G est k-régulier alors G-v contient exactement k sommets de degré k-1 et le reste des sommets a un degré k.

maintenant G peut être obtenu uniquement en ajoutant un nouveau sommet à G-v et

en le joignant à tous les k sommets de degré k-1, dans G-v, par conséquent, la classe des graphes k-réguliers est faiblement reconstructible et ceci complète la preuve.

**Exemple 2.3.** Etant donné le graphe G 2-régulier et son deck  $\mathcal{D}(G)$ , tel que  $\mathcal{D}(G) = \{G - v_i/i = 1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$ 



Le graphe G peut être obtenu à partir de la carte  $G - v_1$  en ajoutant un nouveau sommet v et en joignant v aux sommets  $v_2$  et  $v_3$  de degrés 1.

Théorème 2.3 (38)

Les graphes complets sont reconstructibles.

Démonstration: Soit G un graphe d'ordre  $n \ge 3$  d'après la définition d'un graphe complet, G est (n-1)-régulier et on sait que les graphe k-régulier sont reconstructible d'après le théorème (2.2), d'où G est reconstructible.

Une autre classe de graphes qui a été reconstruite est la classe des graphes non connexes et qu'on trouve dans [21] et [29], plusieurs démonstrations de ce résultat ont été faites dans la littérature (Harary 1969, Bondy 1968, Geenwell et Hemminger 1969, Chatrand et Kronk 1970, Schuster 1973), qui montrent comment reconstruire les composantes connexes d'un graphe non connexe, nous allons aussi énoncer un théorème dû à Bondy et Hemminger [4] qui permet d'obtenir des démonstrations plus courtes de quelques résultats principales dans la reconstruction en particulier, pour les graphes non connexes, mais avant on aura besoin des définitions suivantes.

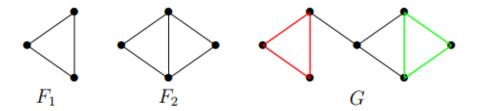
#### Définitions 2.4

Soit  $\mathcal{C}$  une classe de graphes et G et F deux graphes tels que  $F \in \mathcal{C}$  et s(F,G) > 0, alors

- Un sous-graphe de G qui appartient à  $\mathcal{C}$  sera appelé un  $\mathcal{C}$ -sous-graphe de G.
- Un C-sous-graphe maximal de G est un C-sous-graphe de G qui n'est pas un sous-graphe d'aucun autre C-sous-graphe de G.
- Une (F,G)-chaîne de longueur n est une suite  $(F_0,F_1,F_2,\ldots,F_n)$  des C-sous-graphes de G telle que  $F\cong F_0\subset F_1\subset F_2\cdots\subset F_n\subset G$ .
- Deux (F, G)-chaînes sont isomorphes s'elle ont la même longueur et les termes correspondants sont des graphes isomorphes.
- $\bullet$  Le rang de F dans G est la longueur de la plus longue (F,G)-chaîne, noté

### rang de F.

**Exemple 2.4.** Considérons le cas où C est constitué des graphes  $F_1$  et  $F_2$  présentés cidessous.



Alors les deux triangles vert et rouge sont des C-sous-graphes de G, cependant seul le triangle rouge qu'est un C-sous-graphe maximal de G car le triangle vert est contenu dans le sous-graphe recouvert par les quatre sommets les plus à droite, et qui est isomorphe à  $F_2$ .

# Théorème 2.4 (Bondy et Hemminger 4)

Soit  $\mathcal{C}$  une classe reconnaissable de graphes et soit  $\mathcal{F}$  une classe quelconque de graphes, telle que pour tout G dans  $\mathcal{C}$ , chaque  $\mathcal{F}$ -sous-graphe de G est :

- (i): Sommet propre.
- (ii) : Contenu dans un seul  $\mathcal{F}$ -sous-graphe maximal de G.

Alors le nombre m(F,G) des  $\mathcal{F}$ -sous-graphes maximaux de G isomorphes à F est reconstructible pour tout  $F \in \mathcal{F}$  et G dans  $\mathcal{C}$ .

Démonstration: On a d'après (i) tout  $\mathcal{F}$ -sous-graphe de G est sommet propre alors aucun  $\mathcal{F}$ -sous-graphe maximal n'aura |V(G)| sommets donc  $|V(F)| < |V(G)| \quad \forall F \in \mathcal{F}$ . Montrons par récurrence sur le rang de F légalité suivante :

$$m(F,G) = \sum_{n=0}^{rang(F)} \sum_{n=0}^{rang(F)} \sum_{n=0}^{rang(F)} (-1)^n s(F, F_1) s(F_1, F_2) \cdots s(F_n, G)$$
 (2.1)

où la somme interne est prise sur les (F,G)-chaînes non isomorphes à  $(F_0,F_1,F_2,\cdots,F_n)$ . Si nous supposons que le rang de F égale à 0, alors la longueur de la plus longue (F,G)-chaîne égale à 0, donc toute (F,G)-chaîne est de longueur 0 c'est-à-dire tout sous-graphe de G isomorphe à F est un  $\mathcal{F}$ -sous-graphe maximal de G d'où m(F,G) = s(F,G). alors (2.1) est clairement vérifiée pour rang(F) = 0 et supposons qu'il est vraie pour tout  $F \in \mathcal{F}$  avec rang(F) < r.

Soit maintenant  $F \in \mathcal{F}$  tels que rang(F) = r, et soit  $(F_1, F_2, \ldots, F_p)$  la liste des  $\mathcal{F}$ -sous-graphes maximaux de G, et d'après la condition (ii) on a tout sous-graphe de G isomorphe à F appartient à un seul  $F_i$ , ( tout  $\mathcal{F}$ -sous-graphe de G isomorphe à F est contenu dans un  $\mathcal{F}$ -sous-graphe maximal de G) d'où  $s(F,G) = \sum_{i=1}^p s(F,F_i)$  qui peut s'écrit sous la forme :

$$s(F,G) = \sum_{X} s(F,X)m(X,G)$$
(2.2)

où la somme est prise sur l'ensemble des graphes X isomorphe aux  $\mathcal{F}$ —sous-graphes maximaux de G et on peut négliger la condition de maximalité de X dans l'égalité (2.2) car m(X,G)=0 s'il n'existe pas de  $\mathcal{F}$ —sous-graphes maximal de G isomorphe à X d'où l'égalité (2.2) peut s'écrire sous la forme :

$$m(F,G) = s(F,G) - \sum_{X} s(F,X)m(X,G)$$
 (2.3)

où la somme est prise sur l'ensemble des graphes X isomorphes aux  $\mathcal{F}-$ sous-graphes de G non isomorphes à F.

On peut considérer dans (2.3) uniquement les X tels que s(F,G) > 0, dans ce cas le rang de X est inférieur strictement à r donc on peut appliquer l'hypothèse de récurrence à m(X,G) dans (2.3), et on obtient l'égalité (2.1).

Alors soit maintenant H une reconstruction de G, et comme  $\mathcal{C}$  est reconnaissable, H satisfait aux condition (i) et (ii) ainsi l'égalité (2.1) s'applique au graphe H, et on a pour toute (F,G)-chaîne il existe une (F,H)-chaîne isomorphe à celle-là et vice versa de plus on a |V(F)| < |V(G)| pour tout  $F \in \mathcal{F}$  d'où d'après le lemme de Kelly le coté droit de l'égalité (2.1) est égale pour G et H donc m(F,G) est reconstructible.

### Corollaire 2.4

La classe des graphes non connexes est reconstructible.

Démonstration: On sait qu'un graphe G est non connexe si et seulement s'il a au plus une carte de  $\mathcal{D}(G)$  connexe, et par conséquence toute reconstruction de G est non connexe, d'où la classe  $\mathcal{C}$  des graphes non connexes est reconnaissable.

Donc, dans le cas où  $\mathcal{F}$  est la classe des graphes connexes, il est claire que les composantes connexes de G sont exactement les  $\mathcal{F}$ —sous-graphes maximaux de G, alors le théorème de dénombrement (3.3) montre que nous pouvons reconstruire les composantes connexes de G d'où la faible reconstruction de C donc la classe des graphes non connexes est reconstructibles.

La classe des **arbres** a été prouvée pour la première fois comme étant reconstructible par Kelly [29] la preuve est basée essentiellement sur la propriété des arbres qui sont centrés (un seul centre ) ou bicentrés (deux centres), ainsi son but a été de chercher l'isomorphisme entre les branches de deux reconstruction quelconques, sa démonstration est trop longue car il doit considérer plusieurs cas séparement, mais Bondy dans [4] montre que tout arbre T est reconstructible à partir d'un sous-deck  $S \subset \mathcal{D}(G)$  où chaque carte en S est obtenue en enlevant un sommet périphérique (un sommet qui est extrémité d'une plus longue chaîne de l'arbre).

Pour les classes des graphes (k)—reconstructibles, on trouve que dans le cas k=2, **W.Giles** [17] a vérifié que les arbres sont (2)—reconstructibles et **Manvel** [37] montre que les graphes non connexes satisfont à la conjecture.

# 2.5 La conjecture de l'arête-reconstruction

L'arête-reconstruction est un problème naturel issu de la conjecture de reconstruction, les auteurs qui travaillaient sur cette conjecture ont essayé de prouver que plusieurs résultats sont identiques pour les deux problèmes et il ressort de la discution précédente, que malgré les efforts considérables, peu de progrès à été réalisé dans l'étude de la conjecture d'Ulam, ainsi les classes de graphes reconstructibles sont peu nombreuses et de structure assez simple, même les classes de graphes suffisamment connues comme les graphes bipartis n'ont pas été encore reconstructible.

Un graphe simple est-il caractérisé, à un isomorphisme près par la liste de ses sous-graphes obtenus en enlevant l'une des ses arêtes?

### 2.5.1 Résultats élémentaires de l'arête-reconstructibilité

D'une manière analogue à ce qui précède G-e ou  $G_e$  est le sous-graphe de G obtenu en supprimant l'arête e de E(G) de plus nous avons les définitions analogues suivantes.

### Définitions 2.5

Etant donné un graphe simple G = (V(G), E(G)) alors

- Le multi-ensemble de tous les sous-graphes G e de G est appelé **arête-deck** de G.
- ullet Une arête-reconstruction d'un graphe G est un graphe H tel qu'il existe une bijection

$$\varphi: E(G) \to E(H)$$
 telle que  $G - e \cong H - \varphi(e)$  pour toute  $e$  dans  $E(G)$ .

• Nous disons que G est **arête-reconstructible** si toute arête-reconstruction de G est isomorphe à G.

Les définitions des **paramètres** arête-reconstructibles, classe de graphes **arête-reconnaissable** et **faiblement** arête-reconstructible sont analogue à celles du première section.

En 1964 Harary a conjecturé dans [21] une conjecture analogue à celle d'ulam.

#### Conjecture de Harary 21 4 :

Tout graphe simple ayant au moins 4 arêtes est arête-reconstructible.

Remarque 2.2. La condition sur le nombre d'arêtes de G est nécessaire comme le montrent les deux exemples suivants :



ici  $G_1$  et  $G_2$ ,  $H_1$  et  $H_2$  ont même arête-deck, donc il sont arête-reconstructions l'un de l'autre, mais ne sont pas isomorphes ce qui montre qu'il ne sont pas arête-reconstructibles

Dans la suite de cette section, nous nous limitons aux graphes simples finis et non orientés comportant au moins quatre arêtes.

La conjecture de l'arête-reconstruction est plus faible que celle d'ulam car Hemminger dans [25] montre qu'un graphe est arête-reconstructible si et seulement si le graphe adjoint de ce graphe est reconstructible, et d'une façon analogue nous avons le lemme de Kelly et le théorème de dénombrement pour l'arête-reconstruction de graphes :

## Lemme 2.3

Soient G et F deux graphes tels que |E(H)| < |E(G)| alors le nombre s(F,G) de sousgraphes partiels de G isomorphes à F est arête-reconstructible.

Démonstration: Ce nombre égale à :

$$\sum_{e \in E(G)} \frac{s(F, G - e)}{|E(G)| - |E(F)|}$$

qui est bien sur arête-reconstructible.

# Théorème 2.5 (Bondy et Hemminger cas des arêtes 427)

Soient  $\mathcal{C}$  une classe arête-reconnaissable et  $\mathcal{F}$  une classe de graphes quelconque, telle que pour tout G dans  $\mathcal{C}$ , chaque  $\mathcal{F}$ -sous-graphe de G est :

- (i): Arête propre.
- (ii) : Contenu dans un seul  $\mathcal{F}$ -sous-graphe maximal de G.

Alors pour tout  $F \in \mathcal{F}$  et G dans  $\mathcal{C}$ , le nombre m(F, G) des  $\mathcal{F}$ -sous-graphes maximaux de G isomorphe à F est arête-reconstructible.

Le théorème (2.5) peut être utilisé pour prouver que, la reconstructibilité d'un graphe G implique l'arête-reconstructibilité de G, lorsque G n'a pas de sommet isolé pour ce la on aura besoin de lemme suivant.

# Lemme 2.4

Le nombre de sommets isolés d'un graphe G est arête-reconstructible.

Démonstration: D'après la version d'arête de lemme de kelly (2.3), nous pouvons déduire si G contient ou non un chemin ou un cycle de longueur 3, si ce n'est pas le cas nous pouvons également savoir si G contient ou non un chemin de longueur 2.

Soit maintenant m le nombre maximal de sommets isolés dans un sous-graphe de G obtenu en supprimant une arête, alors G a au plus m sommets isolés.

Si G contient un chemin ou un cycle de longueur 3 donc m correspond au nombre de sommets isolés de G, car le fait de supprimer l'arête médian du chemin ou l'un des arêtes de cycle n'augmentera pas le nombre de sommets isolés, de même G a m-1 sommets isolés s'il contient un chemin de longueur 2, ainsi G a m-2 sommets isolés dans le cas contraire.

D'où le nombre des sommets isolés de G est uniquement déterminé à partir de  $\mathcal{D}(G)$  ce qui le rendre arête-reconstructible.

### Théorème 2.6

Soit G un graphe sans sommets isolés donc, si G est reconstructible alors G est arêtereconstructible

Démonstration: Soit  $\mathcal{C}$  la classe de toutes les reconstructions de G et  $\mathcal{F}$  la classe de tous les graphes d'ordre |V(G)|-1, il est claire d'après le lemme (2.4) que toutes les arêtes-reconstructions de G n'ont pas de sommet isolé, ce qui prouve que  $\mathcal{C}$  est arête-reconnaissable, et tous les  $\mathcal{F}$ -sous-graphes sont arête propres, on peut donc appliquer le théorème de dénombrement (2.5).

Les  $\mathcal{F}$ —sous-graphes maximaux de G sont précisément les sous-graphes induits propres maximaux de G ( c'est-à-dire les  $G-v,v\in V(G)$ ), et comme toute arête-reconstruction de G a les même G-v car les  $\mathcal{F}$ —sous-graphes maximaux de G sont arête-reconstructibles, et de plus on a G est reconstructible d'où G isomorphe à toutes ses arêtes-reconstructions et ça implique que G est arête-reconstructible.

En combinant le théorème ci-dessus avec les résultat donnés dans les paragraphes précédentes, on en déduit immédiatement que plusieurs classes de graphes sont arêtereconstructibles, à s'avoir les graphes réguliers, les graphes non connexes avec au moins deux composantes d'ordre  $\geq 2$ , les arbres...

Il suffit donc de regarder la liste des graphes et des paramètres reconstructibles donnés dans la première partie de ce chapitre, mais il y a des paramètres qui sont arêtereconstructibles mais pas reconstructibles, comme le nombre chromatique, le nombre d'arbres couvrants.

D'autre part on trouve dans [43] que Nash-williams généralise les résultats de Lovàsz et Muler et qui sont sous cette forme que nous allons présenter ci-dessous

## Définition 2.3

Soient G et H deux graphes simples et F un sous-graphe partiel de G, on note par  $(G \longrightarrow H)_F$  l'ensemble des applications injectives :

$$\varphi:V(G)\to V(H)$$

telles que uv arête de G,  $\varphi(u)\varphi(v)$  arête de H si et seulement si uv est une arête de F

Notons par  $|G \longrightarrow H|_F = |(G \longrightarrow H)|_F$  le cardinal de  $(G \longrightarrow H)_F$  et  $|G \longrightarrow H| = (G \longrightarrow H)_G$ .

## Théorème 2.7 (Nash-Williams 43)

Un graphe G est arête-reconstructible si l'une des conditions suivantes est vérifiée :

- (i) : Il existe un sous-graphe partiel F de G tel que  $|G \longrightarrow H|_F = |G \longrightarrow G|_F$  pour toute arête-reconstruction H de G.
- (ii) : Il existe un sous-graphe partiel F de G tel que |E(G)|-|E(F)| est pair et  $|G \longrightarrow G|_F = 0$ .

### Corollaire 2.5

Un graphe G d'ordre n et de taille m est arête-reconstructible lorsque  $m > \frac{1}{2} \binom{n}{2}$ .

Démonstration: Soient G un graphe d'ordre n et de taille m, H une arête-reconstruction de G et F un sous-graphe partiel sans arêtes de G ( le sous-graphe nul de G). Il est donc claire que  $|G \longrightarrow H|_F = |G \longrightarrow H^c|$  et si  $m > \frac{1}{2} \binom{n}{2}$  on aura  $|G \longrightarrow H^c| = 0$  pour tout arête-reconstruction de G, et donc F satisfait au condition (i) de théorème (2.7) d'où G est arête-reconstructible.

# 2.6 Nombre de reconstructions d'un graphe

Un autre problème lié à la conjecture d'Ulam ou de reconstruction, est celui de nombre de reconstructions, et comme la conjecture de reconstruction traite la possibilité de reconstruire les graphes à partir de leurs deck  $\mathcal{D}(G)$ , le nombre de reconstructions peut être considéré comme une mesure de la facilité avec laquelle un graphe peut être reconstruit, et dans la plupart des cas, on peut avoir des graphes reconstructibles à partir d'un sous-ensemble de  $\mathcal{D}(G)$ , et dans ce sens **Bollobàs** à prouvé dans  $\mathfrak{A}$  d'une manière probabiliste que presque tous les graphes peuvent être reconstruits seulement avec 3 cartes de  $\mathcal{D}(G)$ . Dans cette section on va s'intéresser à deux types de nombres de reconstruction : **nombre de reconstruction existentielle** et **nombre de reconstruction universel**.

## Définitions 2.6

Etant donné un graphe simple G d'ordre n alors :

- 1- Le nombre de reconstruction existentielle noté  $\exists nr(G)$ , est le nombre minimum des cartes de  $\mathcal{D}(G)$  nécessaires pour reconstruire d'une façon unique G à un isomorphisme près.
- 2- Le **nombre de reconstruction universel** noté  $\forall nr(G)$ , est le nombre minimum n des multi-sous-ensembles de  $\mathcal{D}(G)$  de taille n reconstruisant G d'une façon unique à un isomorphisme près.

Notons que lorsque  $\exists nr(G)$  existe pour un graphe G alors ce dernier est reconstructible et dans le cas contraire nous avons  $\exists nr(G) = \forall nr(G) = \infty$ . Dans ce chapitre on ne considère que les graphes d'ordre  $\geq 3$  ce qui nous permet de déduire que le nombre minimum de reconstruction existentielle égale à 3.

## Proposition 2.2

Si G est un graphe d'ordre  $\geq 3$  alors  $\exists nr(G) > 2$ .

Démonstration: Soit G un graphe simple d'ordre  $\geqslant 3$ , alors pour que G ait 2 comme nombre de reconstruction existentielle, nous devons choisir deux cartes de  $\mathcal{D}(G)$  et qui nous permet de créer un sous-ensemble de  $\mathcal{D}(G)$  unique pour la classe d'automorphisme de G, cependant soit u et v deux sommets de G, nous pouvons donc produire un graphe H qui partage le même sous-deck  $\{G-v, G-u\}$  en copiant G et en inversant u et v.  $\square$ 

Beaucoup des résultats ont été prouvés concernant le nombre de reconstruction existentielle des graphes non connexes, grâce au travail effectué par W. Myrvold et R. Molina et qu'on trouve dans [41] et [42].

# Théorème 2.8 (41 42)

Si G est un graphe non connexe dont toutes les composantes connexes ne sont pas isomorphes alors  $\exists nr(G) = 3$ . :

W. Myrvold [42] a déterminé un moyen de choisir les 3 cartes en fonction des propriétés des graphes non connexes et de leurs sous-graphes induit.

# Théorème 2.9 (42)

Si G est un graphe non connexe composé des composantes isomorphes d'ordre c, alors  $\exists nr(G) \leqslant c+2$ . :

Toujours dans [42] on trouve que l'utilisation de théorème ci-dessus [2.9], nous permet de trouver une méthode de calcul de  $\exists nr(G)$  pour un G non connexe composé entièrement des cliques de même taille.

# Proposition 2.3

Un graphe G non connexe de la forme  $pK_c$  a un nombre de reconstruction existentielle égale à c+2.

Démonstration: Soit G un graphe simple non connexe de la forme  $pK_c$ , alors il est claire donc que le deck  $\mathcal{D}(G)$  de G est constitué de |V(G)| = p \* c cartes de la forme  $(p-1)K_c \cup K_{c-1}$ , et soit maintenant un graphe non connexe  $H = K_{c+1} \cup (p-2)K_c \cup K_{c-1}$ . La suppression de chaque sommet de  $K_{c+1}$  de H nous permet de recréer le seul multisous-deck de G de taille c+1, et cela signifie que  $\exists nr(G) > c+1$  l'application de théorème (2.9)  $(\exists nr(G) \leq c+2)$  implique que  $\exists nr(G) = c+2$ .

**Exemple 2.5.** En utilisant le graphe non connexe  $G = 3K_3$  comme exemple, la preuve ci-dessus est illustrée dans la figure ci-dessous, alors la suppression de chaque sommet numéroté de graphe H nous permet de recréer les 4 cartes de  $\mathcal{D}(G)$  et la proposition (2.3)

implique que  $\exists nr(G) = 5$ . :

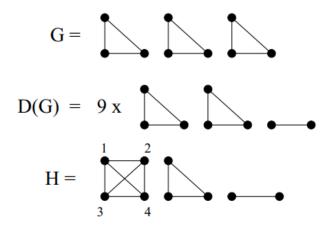


FIGURE 2.3 – Graphe non connexe de la forme  $3K_3$  avec  $\exists nr(G) = 5$ .

En 2002, **Asciak** et **Lauri** ont prouvé qu'il s'agissait de la seule classe de graphes non connexe ayant un nombre de reconstruction existentielle élevé.

# 2.7 Algorithme et Calculs

# 2.7.1 Description générale

Brian McMullen et Jennifer Baldawin [45] sont parmi les premiers auteurs qu'on trouve dans la littérature de la théorie des graphes qu'ont introduit le calcul et l'analyse des nombres de reconstruction existentielle et universelle des graphes, les calculs ont été effectués pour tous les graphes G où  $3 \leq |V(G)| \leq 8$  et certains graphe d'ordre 9, jusqu'à l'ordre dix, et pour une classe de graphes d'ordre 11, le nombre de graphes analysés est d'environ 12294000, de plus dans cette partie on va concentrer sur les raisons pour lesquelles certains graphes ont des nombres de reconstruction anormalement élevé et d'organiser ces graphes en classes afin d'identifier les graphes de tous les ordres qu'ont un nombre de reconstruction élevé.

Bien qu'aucun code source n'ait été utilisé lors de la mise en ouvre originale de **Baldawin**, le même algorithme de base a été utilisé avec de nombreuse améliorations pour des raisons d'efficacité.

# 2.7.2 Algorithme de calcul

L'algorithme de calcul des nombres de reconstruction de graphes consiste à comparer les deck  $\mathcal{D}(G)$  de G et ceux d'un ensemble de graphes afin de déterminer le nombre de reconstruction minimaux de G, l'ensemble des graphes considérés ici est l'ensemble des **extensions** des cartes de  $\mathcal{D}(G)$  qu'on va définit ci-dessous.

### Définitions 2.7

Etant donné un multi-ensemble  $\mathcal S$  on définit :

- (a) : m(S; X) est la multiplicité d'un élément X dans le multi-ensemble S,( le nombre de fois que X apparaît dans S.
- (b) :  $|\mathcal{S}| = \sum_{X \in \mathcal{S}} m(\mathcal{S}; X)$  est le cardinal de multi-ensemble  $\mathcal{S}$ .
- (c) :  $\mathbb{B}(S;q) = \{X/m(S;X) \ge q\}$  est l'ensemble des éléments de S ayant au moins une multiplicité q.

L'intersection  $\cap$  et l'union  $\cup$  des multi-ensemble préserve la multiplicité minimale et maximale d'éléments correspondants, tandis que l'union additive  $\uplus$  additionne les multiplicités d'éléments correspondants, ainsi nous avons :

- $m(\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2; X) = \min(m(\mathcal{S}_1; X), m(\mathcal{S}_2; X)).$
- $m(\mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2; X) = \max(m(\mathcal{S}_1; X), m(\mathcal{S}_2; X)).$
- $m(S_1 \uplus S_2; X) = m(S_1; X) + m(S_2; X)$ .

Dans ce qui suit, un ensemble sera considéré comme un cas particulier de multiensemble, c'est le cas où la multiplicité de chaque éléments est 1.

Pour déterminer à la fois le nombre de reconstruction universelle et existentielle d'un graphe G, la même question primitive est posée :" un sous-deck  $\mathcal{S}$  peut-il reconstruit G?", alors pour que  $\mathcal{S}$  ne reconstruise pas G, il doit exister un autre graphe H qui a également  $\mathcal{S}$  comme sous-deck, et par conséquent pour répondre à la question précédente il faut soit trouver un exemple de graphe partageant le même sous-deck, soit de prouver qu'il n'existe aucun graphe de ce type.

Afin de restreindre l'espace de recherche des graphes qui peuvent partager un même sous-deck, seuls les graphes qu'ont au moins une carte commune avec G qu'on va prendre en compte.

### Définition 2.4

Les extensions (F) d'un graphe G sont les ensembles non isomorphes résultant de l'ajout d'un sommet au graphe F et l'ajout des arêtes incidentes à ce sommet de toutes les manières possibles.

**Exemple 2.6.** La figure ci-dessous représente le graphe G et les graphes d'extensions générés à partir de  $\mathcal{D}(G)$ , de plus les carrés d'extensions contient l'ensemble des graphes d'extension à prendre en compte lors du calcul des nombres de reconstruction de G

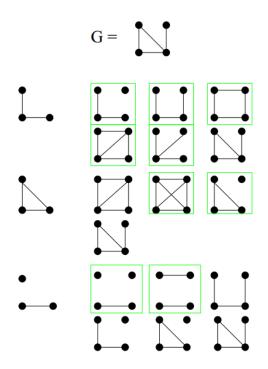


FIGURE 2.4 – Graphe G et ses extensions.

L'algorithme suivant, inspiré de celui de Brian McMullen [45] a été utilisé pour calculer les nombres de reconstruction de quelques graphes ainsi les résultats qu'on va présenter ci-dessous seront basés sur cet algorithme :

- 1.  $\mathcal{D}_G \leftarrow \mathcal{D}(G)$ .
- 2. Pour chaque carte  $C \in \mathcal{D}_G$ :
  - (a):  $\mathcal{H}_G \leftarrow Extension(C) G$ .
  - (b): Pour chaque  $H \in \mathcal{H}_C$ :

$$m(\mathcal{H}_C; H) \leftarrow \min(m(\mathcal{D}(H); C), m(\mathcal{D}_G; C))$$

- 3.  $\mathcal{H} \leftarrow \uplus_{C \in \mathcal{D}_G} \mathcal{H}_C$ .
- 4.  $\forall rn(G) \leftarrow 1 + \max(m(\mathcal{H}; H); H \in \mathcal{H})$
- 5.  $\exists rn(G) \leftarrow 1 + \min(m(|\mathcal{S}|: (\mathcal{S} \subseteq \mathcal{D}_G) \land (\cup_{C \in \mathcal{S}} \mathbb{B}(\mathcal{H}_C; m(S, C)) = \emptyset.))$

Les multi-ensembles  $\mathcal{H}_C$  sont construit de façon à ce que chaque  $H \in \mathcal{H}_C$  ait une multiplicité égale au nombre de fois que C est figuré dans  $\mathcal{D}(G)$  et  $\mathcal{D}(H)$ , ainsi  $\mathcal{H}$  a des multiplicités pour chaque  $H \in \mathcal{H}$  égales au nombre total de cartes figurés à la fois dans G et dans H.

#### Logiciels utilisés

Deux outils ont été utilisés pour aider au calcul des nombres de reconstruction l'un de ceux-ci est le package **Condor** [40] installé sur plusieurs machines, qui répartit la charge de travail de calcul entre les machines, et cela fournissait un traitement parallèle pour effectuer les calculs dans des délais raisonnables.

Le deuxième outil utilisé était le logiciel **Nauty** développé par **Berndan Mckay** [39], **Nauty** offre des fonctionnalités pour la génération exhaustive de graphes sans isomorphes,

de plus il offre une représentation compacte et lisible de graphes simple, ainsi que d'autre fonctionnalités de base, et c'est actuellement le logiciel le plus efficace pour identifier les isomorphismes des graphes.

Les graphes manipulés dans le package **Nauty** étaient généralement présenter dans ce qu'on appelle **graph6**, il s'agit d'une chaine de caractères *ASCII* utilisée pour indiquer l'ordre de graphe dans le premier caractère et une matrice d'adjacence compacte dans tous les caractères suivants, et chaque représentation graphique valide d'un graphe à un seul étiquetage canonisé, également représenter dans **graph6**, par conséquent deux graphes ont même étiquetage canonique si et seulement s'il sont isomorphes.

#### Résultats

Le tableau suivant représente le nombre de graphes avec un  $\exists rn(G)$  et un  $\forall rn(G)$  pour les graphes d'ordre compris entre 3 et 11 sommets, les résultats présentées ci-dessous sont inspirés de la recherche effectuée par **McMullen** et qu'on trouve dans  $\boxed{45}$ :

		Ordre de Graphe								
		3	4	5	6	7	8	9	10	11
N.de Graphes		4	11	34	156	1044	12346	274668	12005168	1018997864
	3	4	8	34	150	1044	12334	274666	12005156	1018997864
	4		3		4		8		6	
$\exists rn(G)$	5				2		2	2	4	
	6					2				
	7								2	
	3	4	2	7	8	16	266	45186	6054148	815604300
	4		9	19	56	496	8208	199247	5637886	199382868
	5			8	90	520	3584	28781	301530	3922130
$\forall rn(G)$	6				2	12	284	1434	10686	83730
	7						4	20	914	4824
	8								4	12

Table  $2.1 - \exists rn(G)$  et  $\forall rn(G)$  des graphes d'ordre compris entre 3 et 11.

Il convient de noter que les nouveaux résultats sur 11 sommets ne montrent aucun graphe avec un  $\exists rn(G) > 3$ , toutes les constructions connues pour des graphes avec  $\exists rn(G) > 3$  nécessite un nombre non premier de sommets [45]41].

Le tableau 2 représente le temps d'exécution nécessaire pour obtenir les résultats présentés dans le tableau ci-dessus, les graphes considérés ici sont uniquement les graphes de taille  $\leq \frac{1}{2} \binom{|V(G)|}{2}$ .

Les résultats ont été calculés principalement à l'aide de processeurs AMD opteron 248, bien que les résultats sur 11 sommets aient été calculés à l'aide de cluster de centre d'avancement de la cyberinfrastructure (CASCI) de l'institue Rochester de thechnologie (RIT), USA qui est composé de 94 processeurs intel pentium à 1,4GHZ, dans tous les temps d'éxécution présentés ci-dessous, les temps calculés sur le cluster

Graphes de taille  $\leq \frac{1}{2} {|V(G)| \choose 2}$ |V(G)|Total des graphes Le temps d'exécution 156  $0.02\ seconds$ 6 78 7 522 1044  $0.52\ seconds$ 8 12346 6996  $16.8 \ seconds$ 9 274668 154354  $14.0 \ minutes$ 10 12005168 6002584  $20.9 \ heures$ 1018997864 509498932  $174 \ jours$ 11

CASCI sont normalisés à l'équivalent des performances de l'opteron 248.

Table 2.2 – Temps d'exécution nécessaire pour obtenir les résultats précédents.

# 2.8 Le cas des graphes orientés et multigraphes

Tout naturellement, on se pose le problème de l'étude des conjectures d'Ulam et de l'arête-reconstruction concernant les graphes orientés et les multigraphes.

## 2.8.1 Pour les graphes orientés

La conjecture d'Ulam n'est pas vraie en général pour tous les graphes orientés d'ordre  $\geq 3$ , comme la montre la figure suivante :

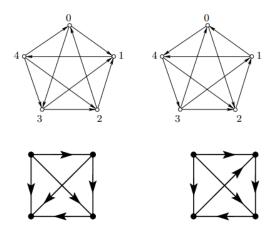


FIGURE 2.5 – Des paires de tournois non reconstructibles avec 5 et 4 sommets

De plus Harary et Palmer [24] ont confirmé la conjecture pour les tournois non fortement connexes d'ordre ≥ 5, il avaient conjecturé aussi que les tournois fortement connexes sont reconstructible, mais Stockmyer [57] [54] a trouvé une classe infinie de tournois fortement connexes non reconstructibles, on trouve aussi dans [23] que Harary et Palmer ont observé que leur démonstration concernant la reconstruction des arbres à partir des sous-arbres maximaux s'applique directement aux arbres orientés ayant au moins trois sommets pendants, de même dans [48] Ramachandran reprend la même démonstration de Bondy pour démontrer que les graphes orientés séparable d'ordre ≥ 3 sans sommets

pendants sont reconstructible.

En sait que dans le cas des graphes orientés on parle des arcs au lieu des arêtes, alors en ce qui concerne l'arc-reconstruction, les techniques employées dans l'arête-reconstruction peuvent s'appliquer à l'arc-reconstruction.

## 2.8.2 Pour les multigraphes

Ce cas a été très peu étudié, en fait c'est un problème beaucoup plus compliqué, et on peut voir que la conjecture d'Ulam pour les multigraphes est équivalente à la conjecture d'Ulam pour les graphes simples avec arête colorée [59]:

Etant donné la liste des sous-graphes induits propres maximaux d'un multigraphe, on construit une autre liste en remplaçant les arêtes multiples par une seule arête colorées de sorte que deux arêtes sont de couleurs différentes si le nombre d'arête multiples qui correspond à chacune de ces deux arêtes dans le graphe original sont différents, et de cette façon la nouvelle liste des sous-graphes induits propre maximaux des graphes simples colorés correspondant aux reconstruction d'un multigraphe.

Les multigraphes non connexes sont reconstructibles, ainsi la démarche suivie par Harary et Palmer [23] pour reconstruire les arbres est employée pour reconstruire les multigraphes connexes dont les cycles sont de longueur  $\leq 2$ , les multigraphes séparables sans sommets pendants sont aussi reconstructibles [4].

De plus tous les paramètres reconstructibles présentés dans la troisième partie de ce chapitre sont reconstructibles pour le cas des multigraphes.

# 2.9 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons étudié le problème de reconstruction des graphes, et plus particulièrement la conjecture d'Ulam ou de la reconstruction, et celle de Harary ainsi quelques résultats élémentaires liés à ce problème à s'avoir les classes des graphes reconstructibles, les paramètres reconstructibles.

D'autre part nous avons présenté aussi un certain nombre de résultats concernant les nombres de reconstruction existentielle et universel pour les graphes d'ordre compris entre 3 et 11 sommets.



# 3.1 Introduction

Le travail de ce chapitre porte sur **l'indécomposabilité** des tournois, la notion d'indécomposabilité est basé sur celle **d'intervalles**, rappelons qu'une restriction I d'une relation binaire  $\Re$  de base E est un  $\Re$ -intervalle si pour tout élément x de  $E \setminus I$ , chacune des valeurs  $\Re(x,i)$  et  $\Re(i,x)$  est indépendante du choix de i dans I, et pour toute structure relationnelle, les singletons, le vide et la base E sont des intervalles dits **triviaux**, de plus s'il n'y en a pas d'autre, la structure est dite indécomposable.

La notion d'intervalles est l'extension aux graphes de la notion familière d'intervalles de la droite réelle, elle a été introduite sous d'autres noms (partie homogène, partie autonome, module [52],...) en théorie des graphes et en théorie des des relations ( les ordres ) par divers auteurs, Gallai [16], Fraïssé [15], son importance tient à celle de la notion de somme lexicographique qu'elle remonte aux travaux de G.Cantor et F.Hausdroff [12].

"Somme lexicographique. Etant donnée une relation S de base  $I = \{1, \ldots, k\}$ , associons à chaque  $i \in I$ , une relation  $\Re_i$  de base  $I_i$  de telle sorte que les bases  $I_i$  soient deux à deux disjointes, la S-somme des  $\Re_i$ , notée  $S(\Re_1, \ldots, \Re_k)$ , est la relation définie sur la réunion des  $I_i$  de la façon suivante :  $S(\Re_1, \ldots, \Re_k)(x, y) = \Re_i(x, y)$  si  $x, y \in I_i$  et  $S(\Re_1, \ldots, \Re_k)(x, y) = S(i, j)$  si  $x \in I_i$  et  $y \in I_j$ , nous dirons aussi que la S-somme des  $\Re_i$  (somme lexicographique) est obtenue à partir de la relation S en dilatant chaque  $i \in I$  par la relation  $\Re_i$ ."

Lorsque on étudie une propriété de graphes ou d'ordres, il est naturel d'étudier son comportement vis à vis les somme lexicographiques, et dans ce cas on est alors amené à considérer les structures dont les décompositions en somme lexicographiques sont triviales, ainsi comme les intervalles d'un graphe sont exactement les blocs apparaissant dans les décompositions de celui-ci en somme lexicographiques, ces structures sont exactement les graphes indécomposables définis ci-dessus.

Les notions d'intervalles et de graphe ou tournoi indécomposable sont au centre de l'article de **T.Gallai** [16] caractérisant les graphes de **comparablité** (un graphe est un graphe de comporabilité s'il existe un ordre partiel " < " sur ses sommets tel que deux sommets x et y sont adjacents dans le graphe si et seulement x < y ou y < x), depuis cet article,

l'importance de ces notions s'est affirmée dans de nombreux travaux, citons par exemple les travaux de **M.Habib** [20], **Kelly** [28], rassemblant les résultats obtenus en se plaçant dans le cadre des structures relationnelles binaires, on trouve que **J.H.Schmerl** et **W.Trotter** ont montré qu'un tournoi ou plus généralement une structure relationnelle binaire indécomposable sur une base de cardinal  $\geq 7$  a au moins une restriction indécomposable à n-2 éléments.

On restant dans le cadre de présentation des résultats, on trouve que l'une des notions à coté de l'indécomposabilité et qui nous donne des informations sur la reconstruction des tournois est la structure **critique**, celles pour lesquelles la suppression de n'importe quel sommet détruit l'indécomposabilité, **Y.Bouddabous** et **P.Ille** en 2006 ont introduit la notion de structure (-1)-critique : structure indécomposable telle que la suppression de tout sommet sauf un, détruit l'indécomposabilité.

D'autre part **G.Gnanvo** a étudié les tournois (-1)—chaîne qu'ont aussi un effet sur la reconstructibilité des tournois, et qu'on trouve dans un article publié en 1991 par G.Gnanvo [18]

Dans ce chapitre nous présentons quelques résultats élémentaires des tournois indécomposables, la deuxième section porte sur la caractérisation des tournois (-1)-critique avec une description morphologique de ces tournois [2], et la troisième partie contient des résultats sur la (-1)-chaîne des tournois.

Les définitions et les objets de base de notre travail sont introduits dans la  $3^{\text{\'e}me}$  partie du chapitre 1.

# 3.2 Tournoi indécomposable

Ces dernières années, le concept d'indécomposabilité est devenu fondamental dans l'étude des structures finies, ce concept et d'autres notions voisines ont fait l'objet de plusieurs articles par exemples [[2] [1] [11]], et en 2012 M.Chudnovsky et P.Seymour ont présenté une méthode de construction des graphes indécomposables à partir des sous-graphes indécomposables qu'ils abritent, le résultat principal de cet article est une classification des tournois indécomposables à partir des tournois indécomposables à six sommets qu'ils abritent.

### 3.2.1 Intervalle d'un tournoi

Les tournois considérés dans cette partie sont finis, nous rappelons d'abord les définitions suivantes :

# Définition 3.1

Soient T=(S,A) un tournoi fini et I une partie de S, I est dite intervalle de T lorsque pour tous  $a,b\in I$  et  $x\in S\setminus I$  on a :

$$(a, x) \in A \Leftrightarrow (b, x) \in A.$$

Autrement dit I est un intervalle de T lorsque les liaisons éventuelles d'un élément x de  $S\setminus I$  à un sommet y de I est indépendante de y.

Notations: Nous utilisons les notations suivantes:

- $x \longrightarrow y$  signifie que  $(x, y) \in A$  et  $(y, x) \notin A$ .
- $x \longrightarrow Y$  signifie que  $x \longrightarrow y$  pour tout  $y \in Y$ .
- $X \longrightarrow Y$  signifie que  $x \longrightarrow Y$  pour tout  $x \in X$ .

à chaque tournois T=(S,A), on associe son dual  $T^*=(S,A^*)$  défini pour tous  $x,y\in S$  par,  $(x,y)\in A^*$  si et seulement si  $(y,x)\in A$ , donc on peut observer facilement que T et  $T^*$  ont les même intervalles.

## Définition 3.2

Un tournoi T = (S, A) est dit indécomposable (ou **premier** ou **primitif**), si tous ses intervalles sont triviaux, sinon il est décomposable.

**Exemple 3.1.** 1) Le 3-cycle  $T_3$  défini sur  $\{0,1,2\}$  par :  $0 \longrightarrow 1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 0$  est indécomposable.

- 2) Un tournoi ayant un ou deux sommets est indécomposable.
- 3) Un ordre total ayant au moins trois sommets est décomposable, car la pair constituée de ses deux premiers éléments forme un intervalle non trivial.
- 4) Les deux diamants  $D = (\{0,1,2,3\}, \{(0,1); (1,2); (2,0)\} \cup \{(3,0); (3,1); (3,2)\})$  et  $D^*$  sont décomposables puisque  $\{0,1,2\}$  est un intervalle non trivial de D et de  $D^*$  et le sommet 3 appelé centre de D et de  $D^*$ .

Remarque 3.1. Etant donné un tournoi T, il est claire que T et  $T^*$  sont tous décomposables ou indécomposables.

La notion d'intervalle d'un tournoi généralise la notion d'intervalle pour un ordre total, d'ailleurs les intervalles d'un tournoi ont les mêmes propriétés que ceux d'un ordre total.

## Proposition 3.1

Etant donnés un tournoi T = (S, A) et une partie X de S alors :

- 1- Si I est un intervalle de T alors  $T \cap X$  est un intervalle de sous-tournoi induit T[X].
- 2- Si I et J sont deux intervalles de T, alors  $I \cap J$  est un intervalle de T.
- 3- Si I et J sont deux intervalles de T et si  $I \cap J \neq \emptyset$ , alors  $I \cup J$  est un intervalle de T.
- 4- Si I et J sont deux intervalles de T tels que  $I \setminus J \neq \emptyset$  alors  $J \setminus I$  est un intervalle de T.

**Remarque 3.2.** Pour un tournoi T = (S, A), chaque composante fortement connexe C de T est un intervalle de T.

Démonstration: Considérons deux éléments a et b dans C, et  $c \in S$  tels que  $a \longrightarrow c \longrightarrow b$ , et puisque  $a, b \in C$  alors il existe une suite des sommets  $[b = b_0, b_1, \ldots, b_n = a]$  reliant b à a tel que  $b_i \longrightarrow b_{i+1}$  pour tout  $i = 0, \ldots, n-1$ , et si nous considérons les séquences suivantes :  $b = b_0, b_1, \ldots b_n, b_{n+1} = c$  et  $c = c_0, c_1 = b$ , on obtient  $c \in C$ , donc pour tout  $c \in S \setminus C$  on a soit  $c \in C$  soit  $c \in C$ .

Soit maintenant D une autre composante fortement connexe distingue de C de T, il est claire qu'on a soit  $D \longrightarrow C$  soit  $C \longrightarrow D$  par conséquent T induit un ordre total sur ses composantes fortement connexes d'où chaque composante fortement connexe est un intervalle de T.

## 3.2.2 L'indécomposabilité des tournois

Dans cette section, nous présentons les principaux résultats sur les tournois indécomposables, et d'autres concernant l'existence des sous-tournois indécomposables dans un tournoi indécomposable, nous commençons par l'existence des sous-tournois indécomposables ayant trois ou quatre sommets.

## Proposition 3.2

Soit T = (S, A) un tournoi indécomposable d'ordre  $\geq 3$ , alors il existe un sousensemble X de S telle que |X| = 3 ou 4, et T[X] est indécomposable.

Et pour montrer l'existence des sous-tournois indécomposables de cardinal supérieur, on aura besoin des définitions suivantes :

### Définitions 3.1

Soient T = (S, A) un tournoi et X une partie stricte de S telle que  $|X| \ge 3$  et T[X] est indécomposable, on considère les sous-ensembles de  $S \setminus X$  suivants :

- < X >est l'ensemble des  $x \in S \setminus X$  tels que X est un intervalle de  $T[X \cup \{x\}]$ .
- Ext(X) est l'ensemble des  $x \in S \setminus X$  tels que  $T[X \cup \{x\}]$  est indécomposable.
- Pour tout  $u \in X$ , X(u) est l'ensemble des  $x \in S \setminus X$  tels que,  $\{x, u\}$  est un intervalle de  $T[X \cup \{x\}]$ .
- La famille  $\{Ext(X), < X >\} \cup \{X(u); u \in X\}$  est appelée la **partition externe** notée  $p_{T[X]}$ .

La proposition (3.1) nous permet d'établir le lemme suivant :

## Lemme 3.1

Soient T=(S,A) un tournoi et X une partie stricte de S telle que  $|X|\geqslant 3$  et T[X] est indécomposable alors :

- 1- La famille  $p_{T[X]}$  forme une partition de  $S \setminus X$ .
- 2- Pour chaque  $x \in X > \text{et } y \in S \setminus (X \cup X >)$ , si  $T[X \cup \{x,y\}]$  est décomposable, alors  $X \cup \{y\}$  est un intervalle de  $T[X \cup \{x,y\}]$ .
- 3- Soit  $u \in X$ , pour un  $x \in X(u)$  et un  $y \in S \setminus (X \cup X(u))$ , si  $T[X \cup \{x,y\}]$  est décomposable, alors  $\{x,y\}$  est un intervalle de  $T[X \cup \{x,y\}]$ .
- 4- Etant donnés  $x \neq y \in Ext(X)$ , si  $T[X \cup \{x,y\}]$  est décomposable, alors  $\{x,y\}$  est un intervalle de  $T[X \cup \{x,y\}]$ .

Le résultat ci-dessous découle de lemme (3.1) lorsque il est supposé vrai et T tournoi indécomposable.

# Proposition 3.3 (Ehrenfeucht et Rozenberg [13])

Etant donnés un tournoi indécomposable T = (S, A) et une partie X de S telle que  $|X| \ge 3$ ,  $|S \setminus X| \ge 2$  et T[X] est indécomposable, alors il existe deux éléments distingue x et y de  $S \setminus X$  tels que  $T[X \cup \{x,y\}]$  est indécomposable.

D'après la proposition (3.2), le 3-cycle  $C_3$  s'abrite dans tous les tournois indécomposables d'ordre  $\geqslant 3$ , d'où d'après la proposition (3.3) tout tournoi indécomposable d'ordre  $\geqslant 5$  admet un sous-tournoi indécomposable à 5 sommets.

### Corollaire 3.1

Soit T=(S,A) un tournoi indécomposable d'ordre pair et  $\geqslant 6$  alors pour chaque  $x\in S$  il existe un  $y\in S\setminus \{x\}$  tel que T-y est indécomposable.

Démonstration: Soit T=(S,A) un tournoi indécomposable d'ordre pair et  $\geqslant 6$ , on sait d'après la proposition (3.2) qu'il existe une partie stricte X de S tel que  $T[X]\cong C_3$  car sinon pour chaque  $x\in X$  on a  $d_T^+(x)=\{y\in S/x\longrightarrow y\}$  ou  $S-(\{x\}\cup d_T^+(x))$  seraient des intervalles non triviaux de T ce qui est contredit avec l'hypothèse que T est indécomposable, et comme |S| est pair alors, en appliquant maintenant la proposition (3.3) pour le sous-tournoi T[X], nous obtenons un sommet  $y\in S\setminus X$  tel que T-y est indécomposable.

# 3.2.3 Tournoi Critique

La description des tournois critiques nous conduit à étudier l'indécomposabilité des sous-tournois obtenus en enlevant un seul sommet à un tournoi indécomposable, dans cette section on va caractériser quelques tournois critiques.

### Définitions 3.2

Soit T = (S, A) un tournoi fini et indécomposable alors :

Un sommet x de T est dit **critique** lorsque T-x est décomposable.

On dit que T est un tournoi critique lorsque tout ses sommets sont critiques.

Les tournois critiques présentés ici, sont les tournois caractériser par **J.H.Schmerl** et **W.T.Trotter** en 1993 50, et qui sont définis pour chaque entier h > 2 par :

$$U_{2h+1}: \begin{cases} U_{2h+1}[\{0,1,\ldots,h\}] = \mathcal{O}_{h+1}; \\ U_{2h+1}[\{h+1,h+2,\ldots,2h\}] = (\mathcal{O}_{\{h+1,\ldots,2h\}})^*; \\ pour \ 0 \leq i \leq h-1; 0 \leq k \leq i \ et \ i+1 \leq j \leq h; \\ j \longrightarrow i+h+1 \ et \ i+h+1 \longrightarrow k \ dans \ U_{2h+1} \end{cases}$$

où  $\mathcal{O}_h$  est l'ordre usuel sur l'ensemble  $\{0,1,\ldots,h-1\}$ , la figure suivante représente le tournoi critique  $U_{2h+1}$ :

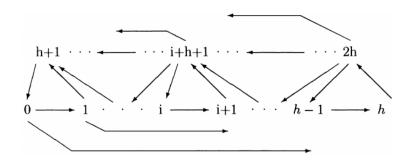


FIGURE 3.1 – Tournoi critique  $U_{2h+1}$ 

$$T_{2h+1}: \begin{cases} T_{2h+1}[\{0,1,\ldots,h\}] = \mathcal{O}_{h+1}; \\ T_{2h+1}[\{h+1,h+2,\ldots,2h\}] = \mathcal{O}_{\{h+1,h+2,\ldots,2h\}}; \\ pour \ 0 \leqslant i \leqslant h-1; \ 0 \leqslant k \leqslant i \ et \ i+1 \leqslant j \leqslant h; \\ j \longrightarrow i+h+1 \ et \ i+h+1 \longrightarrow k \ dans \ T_{2h+1} \end{cases}$$

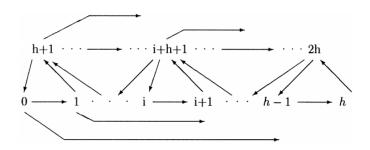


FIGURE 3.2 – Tournoi critique  $T_{2h+1}$ 

$$V_{2h+1}: \begin{cases} V_{2h+1} - 2h = \mathcal{O}_{2h}; \\ pour \quad 0 \leq i \leq h-1; \\ 2h \longrightarrow 2i \quad et \quad 2i+1 \longrightarrow 2h \quad dans \quad V_{2h+1} \end{cases}$$

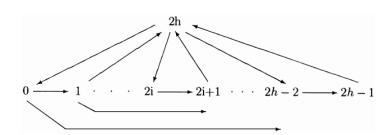


Figure 3.3 – Tournoi critique  $V_{2h+1}$ 

Les tournois indécomposables à 5 sommets sont critiques : car les quatre tournois à 4 sommets sont décomposables, ce qui signifie que la suppression de l'un de ses sommets rend le tournoi décomposable, notons alors la remarque suivante :

- Remarque 3.3. 1)- Les tournois indécomposables à 5 sommets sont à des isomorphisme près, les trois tournois critiques  $T_5$ ,  $U_5$  et  $V_5$ .
  - 2)- Il n'y a pas de tournoi indécomposable d'ordre  $n \ge 5$  en omettant chacun des tournois  $T_5$ ,  $U_5$  et  $V_5$ .

Le résultat principal de cette section est le théorème suivant qui est démontrer par **Schmerl** et **Trotter** [50] en 1993.

## Théorème 3.1 (Schmerl et Trotter 50)

Les tournois critiques d'ordre  $n \ge 5$ , à isomorphisme près sont les tournois  $T_{2h+1}$ ,  $U_{2h+1}$  et  $V_{2h+1}$  où  $h \ge 2$ .

Une nouvelle caractérisation des tournois critiques présentée par **Y.Boudabbous** et **J.Dammak** 8 fait l'objet de cette partie.

# Proposition 3.4 (8)

Etant donné un tournoi fini et indécomposable T d'ordre  $n \ge 5$ , alors T est critique si et seulement si T ne contient pas des tournois indécomposables d'ordre 6.

Démonstration: Les tournois indécomposables d'ordre 5 sont critiques car les quater tournois d'ordre 4 sont décomposables, par conséquent seuls les tournois indécomposables T = (S, A) d'ordre  $n \ge 6$  peuvent être considérés.

Si T n'est pas critique, alors par la définition des tournois critiques, il existe un  $x \in S$  tel que T-x est indécomposable, et dans les deux cas où |S| est pair ou impair il existe un sous-ensemble  $X \subset S$  tel que |X| est pair et supérieur ou égale à 6, et T[X] est indécomposable, en suite en appliquant plusieurs fois le corollaire (3.2) on obtient un sous-ensemble Y de S tel que |Y| = 6 et T[Y] est indécomposable, d'où la première implication.

Inversement, supposant qu'il existe  $X \subset S$  tel que |X| est pair et T[X] est indécomposable, alors dans le cas où |S| est impair, l'utilisation de la proposition (3.3) pour X implique qu'on peut obtenir un sommet x de T tel que T-x soit indécomposable donc T n'est pas critique et d'où ce qu'il faut montrer, et si |S| est pair alors la conclusion est atteinte sans utiliser le fait que T contient un tournoi indécomposable d'ordre 6

En effet, puisque T est indécomposable, alors T abrite un 3-cycle à partir duquel, en utilisant plusieurs fois la proposition (3.3) pour X, donc il est claire qu'un sous-ensemble Y de S peut etre construit de telle sorte que |S-Y|=1 et T[Y] soit indécomposable ce qui implique qu'il existe un sommet x de T tel que T-x est indécomposable d'où T n'est pas critique.

# 3.3 Morphologie des Tournois (-1)-Critiques

La caractérisation des **graphes** (-1)-critiques est une question posée par **Y.Boudabbous** et **P.Ille** dans un article récent publié en 2008 dans lequel ces auteurs étudient le comportement des sommets critiques dans un graphe indécomposable  $[\mathfrak{Q}]$ , dans cette section on va répandre à cette question dans le cas des tournois finis et non vides.

### Définition 3.3

Etant donné un tournoi T = (S, A), T est dit (-1)-critique (resp. (-k)-critique), lorsque il admet exactement un (resp. k) sommets non critiques.

Dans ce qui suit nous caractérisons les tournois (-1)-critiques, répondant ainsi, dans le cas des tournois à la question de **Y.Boudabbous** et **P.Ille**. Contrairement aux tournois  $T_{2n+1}$ , les tournois  $U_{2n+1}$  et  $V_{2n+1}$  apparaissent dans la morphologie de ces tournois que nous présentons à partir de leur unique sommet non critique, à cet effet nous définissons pour tout entier  $n \geq 3$  et pour tout entier  $k \in \{1, 2, \ldots, n-2\}$  les tournois  $E_{2n+1}^{2k+1}$ ,  $F_{2n+1}^{2k+1}$ ,  $G_{2n+1}^{2k+1}$  et  $H_{2n+1}^{2k+1}$  définis sur  $\{0, 1, \ldots, 2n\}$  comme suit :

$$E_{2n+1}^{2k+1}: \begin{cases} E_{2n+1}^{2k+1}[d_{E_{2n+1}}^{-1}(2k+1)] = \mathcal{O}_{2k+1}; \\ E_{2n+1}^{2k+1}[d_{E_{2n+1}}^{+1}(2k+1)] = 2k+2 < \cdots < 2n; \\ pour tout (x,y) \in d_{E_{2n+1}}^{+1}(2k+1) \times d_{E_{2n+1}}^{-1}(2k+1); \\ x \longrightarrow y \text{ si et seulement si } x \text{ et } y \text{ sont pairs.} \end{cases}$$

$$F_{2n+1}^{2k+1} : \begin{cases} F_{2n+1}^{2k+1}[d_{F_{2n+1}}^{-2k+1}(2k+1)] = U_{2k+1}; \\ F_{2n+1}^{2k+1}[d_{F_{2n+1}}^{+}(2k+1)] = 2k+2 < \cdots < 2n; \\ pour tout (x,y) \in d_{F_{2n+1}}^{+}(2k+1) \times d_{F_{2n+1}}^{-}(2k+1); \\ x \longrightarrow y \text{ si et seulement si } x \text{ et } y \text{ sont pairs.} \end{cases}$$

$$G_{2n+1}^{2k+1}: \left\{ \begin{array}{l} G_{2n+1}^{2k+1}[d_{G_{2n+1}^{2k+1}}^{-1}(2k+1)] = U_{2k+1}; \\ G_{2n+1}^{2k+1}[d_{G_{2n+1}^{2k+1}}^{+}(2k+1)] = V_{2n-2k-1} \ avec \ 2k+2 < \cdots < 2n-1; \\ pour \ tout \ (x,y) \in d_{G_{2n+1}^{2k+1}}^{+}(2k+1) \times d_{G_{2n+1}^{2k+1}}^{-}(2k+1); \\ x \longrightarrow y \ si \ et \ seulement \ si \ x=2n \ et \ y \ est \ pair. \end{array} \right.$$

$$H_{2n+1}^{2k+1}: \begin{cases} H_{2n+1}^{2k+1}[d_{H_{2n+1}}^{-2k+1}(2k+1)] = V_{2k+1}; \\ H_{2n+1}^{2k+1}[d_{H_{2n+1}}^{+2k+1}(2k+1)] = V_{2n-2k-1} \ avec \ 2k+2 < \cdots < 2n-1; \\ pour \ tout \ (x,y) \in d_{H_{2n+1}}^{+k}(2k+1) \times d_{H_{2n+1}}^{-k}(2k+1); \\ x \longrightarrow y \ si \ et \ seulement \ si \ x=2n \ et \ y=2k. \end{cases}$$

Pour tout entier  $n \ge 3$ , on désigne par  $\mathcal{E}_{2n+1}$  (resp.  $\mathcal{F}_{2n+1}$ ,  $\mathcal{F}_{2n+1}^*$ ,  $\mathcal{G}_{2n+1}$ ,  $\mathcal{G}_{2n+1}^*$ ,  $\mathcal{H}_{2n+1}$ ), la classe des n-2 tournois  $\{E_{2n+1}^{2k+1}\}_{1 \le k \le n-2}$  (resp.  $\{F_{2n+1}^{2k+1}\}_{1 \le k \le n-2}$ ,  $\{(F_{2n+1}^{2k+1})^*\}_{1 \le k \le n-2}$ ,  $\{(G_{2n+1}^{2k+1})^*\}_{1 \le k \le n-2}$ ,

Remarque 3.4. Etant donné un entier  $n \geq 3$ , si T est un tournoi de la classe  $\mathcal{E}_{2n+1}$  (resp.  $\mathcal{H}_{2n+1}$ ) alors  $T^*$  est aussi un tournoi de la classe  $\mathcal{E}_{2n+1}$  (resp.  $\mathcal{H}_{2n+1}$ .)

Démonstration: Il suffit de remarquer que pour  $k \in \{1, \ldots, n-2\}$ , la permutation  $\sigma$  de  $\{0, \ldots, 2n\}$  définie par :

pour 
$$q \in \{0, ..., 2n\}, \sigma(q) = 2n - q$$
, (resp. $\sigma(q) = 2n - q - 1$  si  $q \in \{0, ..., 2n\} \setminus$ 

 $\{2n,2k,2k+1\} \text{ et } \sigma(2n) = 2(n-k-1), \sigma(2k) = 2n \text{ et } \sigma(2k+1) = 2(n-k-1)+1) \text{ est un isomorphisme de } (E_{2n+1}^{2k+1})^* \text{ (resp. } (H_{2n+1}^{2k+1})^*) \text{ sur } E_{2n+1}^{2(n-k-1)+1} \text{ (resp. } H_{2n+1}^{2(n-k-1)+1}.)$ d'où le dual d'un tournoi de  $\mathcal{E}_{2n+1}$  (resp.  $\mathcal{H}_{2n+1}$ ) est un élément de  $\mathcal{E}_{2n+1}$  (resp.  $\mathcal{H}_{2n+1}$ .)

La caractérisation suivante des tournois (-1)-critiques, est le principal résultat de cette section:

## Théorème 3.2 (9)

A un isomorphisme près, les tournois (-1)-critiques sont les tournois  $E_{2n+1}^{2k+1}$ ,  $F_{2n+1}^{2k+1}$ ,  $(F_{2n+1}^{2k+1})^*$ ,  $G_{2n+1}^{2k+1}$ ,  $(G_{2n+1}^{2k+1})^*$ ,  $H_{2n+1}^{2k+1}$ , où  $n \geqslant 3$  et  $1 \leqslant k \leqslant n-2$  de plus le sommet 2k + 1, est l'unique sommet non critique de chacun de ces tournois.

## Corollaire 3.2

Pour tout  $n \ge 3$ , les 6(n-2) tournois T = (S, A) de la classe  $\mathcal{D}_{2n+1} = \mathcal{E}_{2n+1} \cup \mathcal{F}_{2n+1} \cup \mathcal{F}_{2n+1}$  $\mathcal{F}_{2n+1}^* \cup \mathcal{G}_{2n+1} \cup \mathcal{G}_{2n+1}^* \cup \mathcal{H}_{2n+1}$  sont deux à deux non isomorphes.

Démonstration: Soient T et T' deux tournois isomorphe de la classe  $\mathcal{D}_{2n+1}$ , d'après le théorème (3.2) T et T' sont (-1)-critiques, désignons alors par a et a' leurs sommets non critiques respectifs.

La construction des différentes classes implique que le tournoi T est dans  $\mathcal{E}_{2n+1}$  (resp.  $\mathcal{F}_{2n+1}, \mathcal{F}_{2n+1}^*, \mathcal{G}_{2n+1}, \mathcal{G}_{2n+1}^*, \mathcal{H}_{2n+1}$  si et seulement si  $T(d_T^-(a))$  et  $T(d_T^+(a))$  sont des chaînes (resp.  $T(d_T^+(a))$  est une chaîne et  $T(d_T^-(a))$  n'est pas une chaîne,  $T(d_T^+(a))$  n'est pas une chaîne et  $T(d_T^-(a))$  est une chaîne, il existe un sommet de  $d_T^+(a)$  qui domine au moins deux sommets de  $d_T^-(a)$ , il existe un unique sommet de  $d_T^-(a)$  qui soit dominé par au moins deux sommets de  $d_T^+(a)$ ,  $|A \cap (d_T^-(a) \times d_T^+(a))| = 1$ ) il Il s'ensuit que si T est un tournoi de la classe  $\mathcal{E}_{2n+1}$  (resp. $\mathcal{F}_{2n+1}$ ,  $\mathcal{F}_{2n+1}^*$ ,  $\mathcal{G}_{2n+1}$ ,  $\mathcal{G}_{2n+1}^*$ ,  $\mathcal{H}_{2n+1}$ ), il en est de même pour le tournoi T'.

Si T et T' sont dans la même classe  $\mathcal{E}_{2n+1}$  (resp.  $\mathcal{F}_{2n+1}$ ,  $\mathcal{G}_{2n+1}$ ,  $\mathcal{H}_{2n+1}$ ), alors il existe deux entiers  $k, k' \in \{0, 1, \dots, n-2\}$  tels que  $T = E_{2n+1}^{2k+1}$  (resp.  $E_{2n+1}^{2k+1}$ ,  $E_{2n+1}^{2k+1}$ ,  $E_{2n+1}^{2k+1}$ ) et  $E_{2n+1}^{2k+1}$  (resp.  $E_{2n+1}^{2k+1}$ ,  $E_{2n+1}^{2k+1}$ ,  $E_{2n+1}^{2k+1}$ ), et on a d'après le théorème (3.2),  $E_{2n+1}^{2k+1}$ ,  $E_{2$ a = 2k' + 1 ainsi :  $|d_T^-(a)| = 2k + 1$  et  $|d_{T'}^-(a')| = 2k' + 1$ , or comme un isomorphisme de T sur T' envoie a sur a' on a  $|d_T^-(a)| = |d_{T'}^-(a')|$  il s'ensuit alors que k = k' et donc T = T', et si enfin T et T' sont dans la même classe  $\mathcal{F}_{2n+1}^*$  (resp.  $\mathcal{G}_{2n+1}^*$ ), alors  $T^*$  et  $T'^*$  sont dans la même classe  $\mathcal{F}_{2n+1}$  (resp.  $\mathcal{G}_{2n+1}$ ) de sorte que d'après ce qui précède,  $T^* = T'^*$  et donc T = T', d'où les tournois de la classe  $\mathcal{D}_{2n+1}$  sont deux à deux non isomorphes.

#### 3.3.1Graphe d'Indécomposabilité

La notion de graphe d'indécomposabilité a été introduite par P.Ille [5] 26] de la façon suivante:

### Définition 3.4

Le **graphe d'indécomposabilité I(T)** d'un tournoi T=(S,A) peut etre défini sur S par :

pour tout  $x \neq y \in S$ ,  $\{x, y\}$  est une arête de I(T) si T- $\{x, y\}$  est indécomposable.

Remarque 3.5. Comme un tournoi T et son dual  $T^*$  ont les mêmes intervalles, il s'ensuit que T et  $T^*$  ont les mêmes sommets critiques ainsi que le même graphe d'indécomposabilité.

Dans la suite de ce paragraphe, nous étudions le graphe d'indécomposabilité d'un tournoi (-1)-critique.

Rappelons d'abord, les deux lemmes suivantes :

## Lemme 3.2

Soit T=(S,A) un tournoi indécomposable et x un sommet critique de T alors  $|d_{I(T)}(x)| \leq 2$  et on a :

- a) Si  $d_{I(T)}(x) = \{y\}$ , où  $y \in S$ , alors  $T \{x, y\}$  est un intervalle de T x.
- b) Si  $d_{I(T)}(x) = \{y, z\}$ , où  $y \neq z \in S$ , alors  $\{y, z\}$  est un intervalle de T x.

Démonstration: Prouvons d'abord que  $|d_{I(T)}(x)| \leq 2$  pour un x sommet critique de T, tel que  $d_{I(T)}(x) \neq \emptyset$ .

Soit  $y \in d_{I(T)}(x)$  notons par  $X = S \setminus \{x, y\}$  un sous-ensemble de S, et puisque T - x est décomposable alors  $y \notin Ext(X)$ , nous distinguons alors les deux cas suivante :

- (a :) Supposons que  $y \in X$ , alors pour tout  $z \in X$ , il est claire que  $X \setminus \{z\}$  est un intervalle non trivial de  $T \{x, y\}$ , et cella implique  $T \{x, y\}$  est décomposable, par conséquent  $z \notin d_{I(T)}(x)$  et d'où  $d_{I(T)}(x) = y$ .
- (b:) Supposons qu'il existe un  $u \in X$  tel que  $y \in X(u)$ , pour tout  $z \in X \setminus \{u\}$ , on a  $\{u, y\}$  est un intervalle non trivial de  $T \{x, z\}$  par conséquent  $T \{x, z\}$  est décomposable donc  $z \notin d_{I(T)}(x)$  d'où  $d_{I(T)}(x) \subseteq \{y, u\}$  et comme  $\{u, y\}$  est un intervalle de  $T[X \cup \{y\}]$ , la fonction définie sur  $X \to (X \setminus \{u\}) \cup \{y\}$  par  $u \longrightarrow y$  et  $v \longrightarrow v$  pour tout  $v \in X \setminus \{v\}$ , est un isomorphisme de  $T \{x, y\}$  vers  $T \{x, u\}$ , il en résulte que  $u \in d_{I(T)}(x)$  donc  $d_{I(T)}(x) = \{y, u\}$ , il résulte donc des deux cas que  $d_{I(T)}(x) \leq 2$ .

Supposons maintenant que  $|d_{I(T)}(x)| = 1$  et notons y l'élément unique de  $d_{I(T)}(x)$ , d'où d'après (b) on a  $y \notin X(u)$  pour tout  $u \in X$  par conséquent ,  $y \in X > 0$  d'une manière équivalente,  $S \setminus \{x,y\}$  est un intervalle de T-x.

Enfin supposons que  $d_{I(T)}(x) = 2$  et notons les éléments de  $d_{I(T)}(x)$  par x et z, il résulte de (a) que  $y \notin X >$  et donc par (b),  $u \in d_{I(T)}(x)$ , et nécessairement u = z, car  $|d_{I(T)}(x)| = 2$  donc  $\{x, y\}$  est un intervalle de T - x.

## Lemme 3.3

Le graphe d'indécomposabilité d'un tournoi (-1)-critique admet une unique composante connexe de cardinal  $\geq 2$ .

La proposition suivante précise l'ordre d'un tournoi (-1)-critique :

# **Proposition 3.5** ( [9] [5] )

L'ordre d'un tournoi (-1)-critique est impair et supérieur ou égal à 7.

Démonstration: Les tournois à 4 sommets sont, à un isomorphisme près, au nombre de quatre et sont tous décomposables, ainsi il n'existe aucun tournoi (-1)-critique d'ordre 5.

Soit maintenant T un tournoi indécomposable à au moins 3 sommets, pour tout sommet x de T, il existe deux sommets  $y \neq z$  de T - x tels que  $T(\{x, y, z\}) \cong U_3$ .

En effet, autrement il existe un sommet  $\alpha$  de T tel que  $d_T^-(\alpha) \longrightarrow d_T^+(\alpha)$ , alors si  $|d_T^-(\alpha)| = |d_T^+(\alpha)| = 1$  alors  $T \cong \mathcal{O}_3$ , ce qui contredit avec l'indécomposabilité de T, sinon  $d_T^-(\alpha)$  ou  $d_T^+(\alpha)$  est un intervalle non trivial de T ce qui contredit autrefois avec l'indécomposabilité de T.

Supposons à présent, que le tournoi T est (-1)-critique et désignons par a son unique sommet non critique, d'après ce qui précède, il existe deux sommets  $b \neq c$  de T - a tel que  $T(\{a,b,c\}) \cong U_3$ , si le tournoi est d'ordre pair, alors par une suite finie d'application de la proposition (3.3), on obtient un sommet  $y \in S - \{a\}$  tel que le tournoi T - y est indécomposable ce qui contredit avec l'unicité de sommet non critique de T, par conséquent l'ordre d'un tournoi T (-1)-critique est impair et supérieur ou égale à 7.  $\square$ 

# 3.4 Les Tournois (-1)-chaînes

Nous présentons dans cette section quelques résultats des tournois (-1)—chaînes, et qui nous rencontrerons dans la suite de ce travail, avec leurs propriétés et liens avec la reconstructibilité des tournois.

Rappelons que deux tournois T et T' définis sur une même base E de cardinal n, sont dites (k)-hypomorphes (resp. (-k)-hypomorphes) s'ils sont isomorphes sur toute partie de E de cardinal k (resp. de cardinal n-k).

Une **chaîne** est un tournoi transitif sur sa base E, et un tournoi T est (-1)-chaîne s'il existe un  $x \in E$  tel que T - x est une chaîne.

## Proposition 3.6 (18)

Soient T un tournoi (-1)-chaîne et fortement connexe et T' un tournoi (-1)-hypomorphe à T tels que  $T-x_1$  et  $T'-x_1$  soient respectivement la chaîne  $x_2x_3, \ldots x_n$  et la chaîne  $y_2y_3, \ldots y_n$ , alors :

- (a :) Si  $\{y_2, y_n\} \cap \{x_2, x_n\} = \emptyset$ , alors T contient les arcs  $x_1 x_2, x_1 x_3, x_{n-1} x_1$  et  $x_n x_1$  et T' contient les arcs  $x_1 y_2, x_1 y_3, y_{n-1} x_1$  et  $y_n x_1$ .
- (b :) Si  $x_2 = y_2$ , et si  $y_n$  n'appartient pas à  $\{x_2, x_n\}$ , alors T et T' ont les mêmes formes qu'en (a), sauf pour les arcs  $x_1x_3$  et  $x_1y_3$  qui ne sont pas exigées.
- (c :) Si  $y_2$  n'appartient pas à  $\{x_2, x_n\}$  et  $y_n = x_n$ , alors T et T' ont les mêmes formes qu'en (a), sauf pour les arcs,  $x_{n-1}x_1$ , et  $y_{n-1}x_1$  qui ne sont pas exigées.
- (d :) Si  $y_2$  n'appartient pas à  $\{x_2, x_n\}$  alors T est de la même forme qu'en (b) avec  $y_n = x_2$ .

Démonstration: Si  $y_2$  n'appartient pas à  $\{x_2, x_n\}$  alors  $T - y_2$  est fortement connexe donc  $T' - y_2$  est aussi fortement connexe, car T et T' sont (-1)—hypomorphes, d'où  $x_1y_3$  appartient à T', de même si  $y_n$  n'appartient pas à  $\{x_2, x_n\}$  alors  $y_{n-1}x_1$  appartient à T, et on a si  $x_n$  n'appartient pas à  $\{y_2, y_n\}$  alors  $x_{n-1}x_1$  appartient à T d'où ce qu'il faut démontrer.

#### Définition 3.5

Soit T un tournoi de base  $S = \{x_1, \ldots, x_n\}$ , on dit qu'un  $x_i$  de S est un **carrefour** de T si tous les 3-cycles de T passent par  $x_i$ .

Remarque 3.6. Etant donné T = (S, A) un tournoi fini et x un carrefour de T alors T - x est une chaîne.

# Proposition 3.7 ([18])

Soient T un tournoi (-1)-chaîne et fortement connexe et T' un tournoi (-1)-hypomorphe à T tels que  $T-x_1$  et  $T'-x_1$  soient respectivement la chaîne  $x_2x_3, \ldots x_n$  et la chaîne  $y_2y_3, \ldots y_n$ , alors :

- (1 :) Dans un tournoi qui n'est pas une chaîne, il y a au plus 3 carrefours.
- (2 :) Tout tournoi qui n'est pas une chaîne, et qui a trois carrefours n'a qu'un 3-cycle et est (-1)-chaîne.

Démonstration: (1:) Evident

(2 :) Soit T un tournoi fini qui n'est pas une chaîne et qui a trois carrefours, alors la définition d'un carrefour implique que T n'a qu'un 3—cycle, qu'on note par  $\{(a,b,c);((a,b);(b,c);(c,a))\}$ , donc  $\{a,b,c\}$  est l'ensemble de ces carrefours de T et on a d'après la remarque (3.6), si a est un carrefour alors T-a est une chaîne d'où T est (-1)—chaîne.

#### Corollaire 3.3

Si T est un tournoi ayant deux carrefours a et b tels que l'arc ba est dans T alors on a : soit T une chaîne, soit la chaîne T-a peut être partitionnée en trois blocs consécutifs A, B et C tels que b est l'extrémité de B, a est dominé par tous les sommets de A et par b, a domine tous les autres sommets avec  $d_T^+(a) > d_T^+(b)$ .

Démonstration: Si T n'est pas une chaîne, soient a et b les deux carrefours de T tel que ba est dans T, donc T-a est une chaîne.

Soit x le premier sommet de T-a tel que  $\{(a,x,b);((a,x);(x,b);(b,a))\}$ , un 3-cycle de T, alors pour tout y différent de a et de b, tel que by est dans T, et cela implique xy est dans T, et comme  $\{(a,x,y);((a,x);(x,y);(y,a))\}$ , ne peut pas être un 3-cycle de T car ya n'est pas dans T et ay dans T, cela indique la forme de T, avec  $d_T^+(a) \ge d_T^+(b)$ , de plus puisque T n'a pas trois carrefours, il existe  $x' \ne x$  tel que  $\{(a,x',b);((a,x');(x',b);(b,a))\}$ , soit un 3-cycle de T donc  $d_T^+(a) > d_T^+(b)$ , d'où le résultat.

Le principale résultat dans tous ce qui précède est :

#### Corollaire 3.4

Si T est un tournoi a 3 carrefours et d'ordre n > 5, alors T est (-1)-reconstructible.

En tenant compte des résultats de **Palmer** et **Harary** [24] établissant que tout tournoi non fortement connexe est (-1)-reconstructible, on peut énoncer le théorème final :

## Théorème 3.3

Tout tournoi (-1)-chaîne est (-1)-reconstructible.

# 3.5 Conclusion

Nous avons présenté dans ce chapitre un certain nombre de résultats sur l'indécomposabilité des tournois, la caractérisation des tournois critiques et (-1)-critique et qui nous amène à poser le problème de la caractérisation des tournois (-2)-critiques, ainsi nous avons étudier les tournois (-1)-chaîne et leurs liens avec la reconstructibilité



## 4.1 Introduction

La fameuse conjecture d'Ulam [58] sur la reconstruction des graphes, qui affirme que tout graphe G d'ordre  $p \ge 3$  peut être reconstruit à partir de leur deck  $\mathcal{D}(G)$ , et malgré le fait que plus de cent articles aient été écrits sur ce sujet, la conjecture a été vérifiée pour relativement quelques classes de graphes y compris les arbres, les k-réguliers, les graphes non connexes.

La conjecture analogue pour les tournois a été examinée pour la première fois par **Harary** et **Palmer** [24], il étaient conscients que les contre-exemples avaient 3 sommets et 4 sommets, mais il ont pu montrer que, pour les tournois d'ordre  $p \ge 5$  et qui ne sont pas fortement connexes peuvent être reconstruits, mais **Parker** et **Beineke** [54] ont découverts des contre-exemples à la conjecture pour les tournois de 5 et 6 sommets, et plus tard la conjecture s'est avérée vraie pour les tournois d'ordre 7, mais autrefois des contre-exemples, ont été trouvés dans le cas de 8 sommets [55].

Suite à ce problème de la (-1)-reconstruction (resp.  $(1, 2, \ldots, k)$ -reconstruction) des tournois posé par **S.Ulam** (resp. **R.Fraïssé** [14]), **P.K.Stockmeyer** a montré que les tournois ne sont pas en générale (-1)-reconstructible (les contre-exemples donnés ci dessus) (resp. **G.Lopez** a montré que les tournois sont  $(1, 2, \ldots, 6)$ -reconstructibles [34]), en suite le problème de la (-k)-reconstruction posé par **M.Pouzet** [4] [47], qui affirme: "Trouver le plus petit entier k tel que toute relation binaire da base finie est (-k)-reconstructible, dés que sa base est suffisamment grand." **G.Lopez** et **C.Rauzy** ont montré que les tournois d'au moins 10 sommets sont (-4)-reconstructible [36], et **Y.Boudabbous** a amélioré ce dernier résultat par deux tournois (-4)-hypomorphes d'au moins 10 sommets sont **héréditairement isomorphes** [6], (deux tournois T et T' de même ensemble de sommets S sont héréditairement isomorphes si pour toute X de S, T'[X] et T[X] sont isomorphes), ainsi le problème de la (-k)-reconstruction des tournois reste ouvert pour k=2 ou k=3, le second cas bien qu'il est considéré beaucoup plus facile que le premier, mais il est aussi ouvert depuis vingt ans.

Ce chapitre sera consacré aux résultats de la reconstructibilité des tournois.

# 4.2 Contre-exemples de la (-1)-reconstruction des tournois

La description des contre-exemples de la conjecture de reconstruction des tournois nécessite le rappelle des notions suivantes :

- Pour tout entier  $k \neq 0$ , pow(k) est le plus grand entier i tel que  $2^i$  divise k, et odd(k) est le quotient de k divisé par  $2^{pow(k)}$  ainsi, par exemples  $48 = 2^4 * 3$  donc pow(48) = 4 et odd(48) = 3, de plus on a pow(-1) = 0 et odd(-1) = -1.
- Soient m, a, b des entiers, on dit que a est **congru** à b modulo m si m divise a b, en symbole :

$$a \equiv b \pmod{m} \Leftrightarrow m|a-b \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \ avec \ a-b=km.$$

par exemple  $2 \equiv 8 \pmod{3}$ , car 3 divise 2 - 8 = -6.

- Le score d'un sommet v de T est le nombre des sommets dominé par v.
- La matrice d'adjacence d'un tournoi d'ordre p est définie par  $M=(a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant p}$  tel que :

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & si \ v_i \ domine \ v_j \\ 0 & sinon \end{cases}$$

# 4.2.1 Le tournoi $A_n$

Tous les contre-exemples que, nous construisons sont basés sur une famille de tournois que nous notons par  $A_n$ , et qui possède un certain nombre de propriétés qu'on va examiner tout d'abord dans cette section.

#### Définition 4.1

Pour chaque entier positif n, le tournoi  $A_n$  avec  $p=2^n$  sommets  $\{v_1,v_2,\ldots,v_p\}$  est défini par :

$$v_i \longrightarrow v_j$$
 si et seulement si  $odd(j-i) \equiv 1 \pmod{4}$  pour  $i \neq j$ .

A titre d'illustration, la matrice d'adjacence de tournoi  $A_3$  est donné par :

FIGURE 4.1 – La matrice d'adjacence de  $A_3$ .

Notons que pour  $n \ge 2$  le sous-tournoi généré par la première moitié des sommets de  $A_n$  est le tournoi  $A_{n-1}$ , ainsi le quart supérieur à gauche de la matrice  $A_3$  est la matrice d'adjacence de  $A_2$ .

## **Lemme 4.1**

- (a): Le tournoi  $A_n$  est auto-dual.
- (b) : Les  $2^{n-1}$  premiers sommets de  $A_n$ , ont chacun un score égale à  $2^{n-1}$  et les sommets qui reste ont chacun un score égale à  $2^{n-1} - 1$ .
- (c): Le tournoi  $A_n$ , n'a qu'un seul automorphisme (automorphisme d'identité).
- Démonstration: (a): Le graphe qui envoie chaque sommet  $v_i$  vers  $v_{p+1-i}$ , inverse la direction de tous les arcs de  $A_n$ , ce qui nous permet d'avoir que  $A_n \cong A_n^*$ , d'où  $A_n$ est auto-dual.
  - (b): Pour un entier fixe i, les sommets de  $A_n$  autres que  $v_i$  et  $v_{i+\frac{p}{2}}$  peuvent être appariés en faisant correspondre  $v_j$  avec  $v_{2i-j}$  (où le dernier indice peut être réduit modulo  $2^n$ ), donc il est claire que  $v_i$  domine exactement un sommet de chaque paire, ce qui implique que  $v_i$  domine  $2^{n-1}-1$  sommets de  $A_n$ , et de plus pour  $i \leqslant 2^{n-1}$ , le sommet  $v_i$  domine  $v_{i+\frac{p}{2}}$  ce qui nous permet de conclure que le score des  $2^{n-1}$  premiers sommets de  $A_n$  égale à  $2^{n-1}$ .
  - (c): La preuve est par récurrence sur n, le résultat est évident pour n=1Pour n > 1, un automorphisme de  $A_n$  doit permuter les  $2^{n-1}$  premiers sommets entre eux et les  $2^{n-1}$  derniers sommets entre eux, puisque un automorphisme préserve les scores des sommets, cependant chacun de ces ensembles de sommets génère un tournoi isomorphe à  $A_{n-1}$ , d'où par hypothèse de récurrence tout automorphisme de  $A_n$  doit laisser fixé tous les sommets da chaque moitié, et il doit donc avoir une permutation d'identité.

Le lemme (4.1) nous permet d'établir le résultat suivant :

# Théorème 4.1 (57)

Pour tout entier k, tel que  $1 \leq k \leq 2^n$ , les tournois  $A_n - v_k$  et  $A_n - v_{p+1-k}$  sont isomorphes.

Remarque 4.1. Chaque sous-tournoi de  $A_n$  obtenu en enlevant un sommet est auto-dual.

Démonstration: Le lemme (4.1,(a)) implique que, pour tout entier i, le dual de soustournoi  $A_n - v_i$  est isomorphe à  $A_n - v_{p+1-i}$  qui est selon le théorème (4.1) isomorphe à  $A_n - v_i$ , d'où tout sous-tournoi de  $A_n$  obtenu en enlevant un sommet est auto-dual.

#### Contre-exemples d'ordre $2^n + 1$ 4.2.2

Nous augmentons maintenant chaque tournoi  $A_n$  de deux manières différentes pour obtenir des contre-exemples à la conjecture de reconstruction.

#### Définitions 4.1

Pour chaque entier positif n, le tournoi  $B_n$  d'ordre  $2^n + 1$ , est obtenu à partir de  $A_n$  en ajoutant un sommet  $v_0$  qui domine  $v_2, v_4, v_6 \cdots v_p$ , et qui est dominé par  $v_1, v_3, v_5 \cdots v_{p-1}$ .

**le tournoi**  $C_n$  est obtenu à partir de  $A_n$  en ajoutant un sommet  $v_0$  qui domine  $v_1, v_3, v_5 \cdots v_{p-1}$ , et qui est dominé par  $v_2, v_4, v_6 \cdots v_p$ .

Les matrices d'adjacences des tournois  $B_3$  et  $C_3$  sont présentées par :

	$v_0$	$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_4$	$v_5$	$v_6$	$v_7$	$v_8$		$v_0$	$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_4$	$v_5$	$v_6$	$v_7$	$v_8$
$v_0$	$I^0$	0	1	0	1	0	1	0	$1 \setminus$	$v_0$	$\int_{0}^{\infty}$	1	0	1	0	1	0	1	$0 \setminus$
$v_1$	1	0	1	1	0	1	1	0	0	$v_1$	0	0	1	1	0	1	1	0	0
$v_2$	0	0	0	1	1	0	1	1	0	$v_2$	1	0	0	1	1	0	1	1	0
$v_3$	1	0	0	0	1	1	0	1	1	$v_3$	0	0	0	0	1	1	0	1	1
$v_4$	0	1	0	0	0	1	1	0	1	$v_4$	1	1	0	0	0	1	1	0	1
$v_5$	1	0	1	0	0	0	1	1	0	$v_5$	0	0	1	0	0	0	1	1	0
$v_6$	0	0	0	1	0	0	0	1	1	$v_6$	1	0	0	1	0	0	0	1	1
$v_7$	1	1	0	0	1	0	0	0	1	$v_7$	0	1	0	0	1	0	0	0	1
$v_8$	/ 0	1	1	0	0	1	0	0	0/	$v_8$	\1	1	1	0	0	1	0	0	0/

FIGURE 4.2 – Matrices d'adjacences de  $B_3$  et  $C_3$ .

Ceux-ci forment la plus petite paire de contre-exemple de la conjecture de reconstruction des tournois.

#### Théorème 4.2

Les tournois  $B_n$  et  $C_n$  ne sont pas isomorphe.

Démonstration: Pour n = 1, notons que  $B_1$  est le tournoi transitif à 3 sommets, tandis que  $C_1$  est le cycle de 3 sommets, donc  $C_1$  et  $B_1$  ne sont pas isomorphes.

Ensuite pour n=2, l'unique sommet  $v_1$  de score 3 de  $B_2$  est dominé par l'unique sommet  $v_4$  de score 1, alors que dans  $C_2$ , l'unique sommet  $v_2$  de score 3 domine l'unique sommet  $v_3$  de score 1, ce qui nous permet de déduire autrefois que  $B_2$  et  $C_2$  ne sont pas isomorphes. Pour  $n \geq 3$ , nous invoquons le lemme (4.1) (b), en observant que les sommets de  $B_n$  de score  $2^{n-1}+1$  sont  $v_1,v_3,\cdots v_{\frac{p}{2}-1}$ , ce qui génère un sous-tournoi que nous dénotons par  $T_1$ , les sommets correspondants de  $C_n$  de score  $2^{n-1}+1$  sont  $v_2,v_4,\cdots v_{\frac{p}{2}}$ , ce qui génère un autre sous-tournoi qu'on note par  $T_2$ , ainsi tout isomorphisme de  $B_n$  à  $C_n$  doit être une extension d'un isomorphisme de  $T_1$  sur  $T_2$ .

Maintenant, l'application  $\varphi: v_i \longrightarrow v_{\frac{(i+1)}{2}}$  est simplement considéré comme un isomorphisme de  $T_1$  sur  $A_{n-2}$ , tandis que  $\pi: v_i \longrightarrow v_{\frac{i}{2}}$  est un isomorphisme de  $T_2$  sur  $A_{n-2}$ , par conséquent on a  $\pi^{-1} \circ \varphi: v_i \longrightarrow v_{i+1}$  est clairement un isomorphisme de  $T_1$  sur  $T_2$  et le lemme (4.1) (c)) implique qu'il s'agit du seul isomorphisme de ce type, donc tout isomorphisme de  $B_n$  sur  $C_n$  doit donc envoyer  $v_1$  à  $v_2$ .

De plus les sommets de  $B_n$  et  $C_n$  de score  $2^{n-1}-1$  permet de conclure que tout isomorphisme de  $B_n$  sur  $C_n$  doit donc envoyer  $v_p$  vers  $v_{p-1}$ , alors que  $v_1$  est dominé par  $v_p$  dans  $B_n$ , tandis que  $v_2$  domine  $v_{p-1}$  dans  $C_n$ , d'où aucun isomorphisme de ce type ne peut exister, donc  $B_n$  et  $C_n$  ne sont pas isomorphes.

Nous observons maintenant commet les tournois  $B_n$  et  $C_n$  sont des conter-exemples de la conjecture.

# Théorème 4.3

Les tournois  $B_n - v_0$  et  $C_n - v_0$  sont isomorphes, et pour tout  $1 \le k \le p$ , les tournois  $B_n - v_k$  et  $C_n - v_{p+1-k}$  sont isomorphes.

Démonstration: La première partie est immédiate (définition de  $B_n$  et  $C_n$ ). Pour  $1 \leq k \leq p$ , on peut facilement vérifier que l'isomorphisme de théorème (4.1) de  $A_n - v_k$  sur  $A_n - v_{p+1-k}$  peut être étendu à un isomorphisme de  $B_n - v_k$  sur  $C_n - v_{p+1-k}$ en faisant donner à  $v_0$  de  $B_n$ ,  $v_0$  de  $C_n$ .

D'où  $B_n$  et  $C_n$  sont deux tournois d'ordre  $2^n+1$  qui sont (-1)-hypomorphes d'après le théorème (4.3), et qui ne sont pas isomorphes d'après le théorème (4.2).

#### 4.2.3Contre-exemples d'ordre $2^n + 2$

Dans cette section, nous augmentons les tournois  $B_n$  et  $C_n$  pour obtenir une autre famille de contre-exemples à la conjecture de reconstruction.

## Définitions 4.2

Pour tout entier positif n, le tournoi  $D_n$  d'ordre  $2^n + 2$  est obtenu à partir de  $B_n$  en ajoutant un sommet  $v_{p+1}$  qui domine  $v_1, v_3, \dots v_{p-1}$  et dominé par  $v_2, v_4, \dots v_p$  et  $v_0$ . Le tournoi  $E_n$  d'ordre  $2^n + 2$  est obtenu à partir de  $C_n$  en ajoutant un sommet  $v_{p+1}$ qui domine  $v_2, v_4, \dots v_p$  et dominé par  $v_1, v_3, \dots v_{p-1}$  et  $v_0$ .

Les matrices d'adjacences des tournois  $D_3$  et  $E_3$  sont présentées par :

	$v_0$	$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_4$	$v_5$	$v_6$	$v_7$	$v_8$	$v_9$		$v_0$	$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_4$	$v_5$	$v_6$	$v_7$	$v_8$	$v_9$
$v_0$	$\int_{0}^{\infty}$	0	1	0	1	0	1	0	1	$1 \setminus$	$v_0$	$\int_{0}^{\infty}$	1	0	1	0	1	0	1	0	$1 \setminus$
$v_1$	1	0	1	1	0	1	1	0	0	0	$v_1$	0	0	1	1	0	1	1	0	0	1
$v_2$	0	0	0	1	1	0	1	1	0	1	$v_2$	1	0	0	1	1	0	1	1	0	0
$v_3$	1	0	0	0	1	1	0	1	1	0	$v_3$	0	0	0	0	1	1	0	1	1	1
$v_4$	0	1	0	0	0	1	1	0	1	1	$v_4$	1	1	0	0	0	1	1	0	1	0
$v_5$	1	0	1	0	0	0	1	1	0	0	$v_5$	0	0	1	0	0	0	1	1	0	1
$v_6$	0	0	0	1	0	0	0	1	1	1	$v_6$	1	0	0	1	0	0	0	1	1	0
$v_7$	1	1	0	0	1	0	0	0	1	0	$v_7$	0	1	0	0	1	0	0	0	1	1
$v_8$	0	1	1	0	0	1	0	0	0	1	$v_8$	1	1	1	0	0	1	0	0	0	0
$v_9$	/ 0	1	0	1	0	1	0	1	0	0/	$v_9$	/ 0	0	1	0	1	0	1	0	1	0/

FIGURE 4.3 – Matrices d'adjacences de  $D_3$  et  $E_3$ .

#### Théorème 4.4

Pour tout entier n > 1, les tournois  $D_n$  et  $E_n$  ne sont pas isomorphes.

Démonstration: Nous invoquons autrefois le lemme (4.1)(b)), donc les sommets de score  $2^{n-1} + 1$  de  $D_n$  et  $E_n$  sont  $v_0, v_1, v_2, \dots v_{\frac{p}{2}}$ , cependant ces sommets génèrent un soustournoi de  $D_n$  isomorphe à  $B_{n-1}$ , et un sous-tournoi de  $E_n$  isomorphe à  $C_{n-1}$ , ainsi tout isomorphisme entre  $D_n$  et  $E_n$  doit être une extension d'un isomorphisme entre  $B_{n-1}$ , et  $C_{n-1}$ , ce qui est impossible selon le théorème (4.2), d'où  $D_n$  et  $E_n$  ne sont pas isomorphes.

Remarque 4.2. Nous notons que lorsque n = 1 dans le théorème (4.4), on trouve que  $E_1$  est isomorphe à  $D_1$ , cette construction ne donne pas donc une paire de contre-exemple de 4 sommets.

## Théorème 4.5

Pour tout entier positif k , tel que  $0 \le k \le p+1$  les tournois  $D_n - v_k$  et  $E_n - v_{p+1-k}$  sont isomorphes.

Démonstration: Le résultat est évident pour k=0 et k=p+1, et pour  $1 \leq k \leq p$  l'isomorphisme de théorème (4.1) peut être étendu en faisant donner à  $v_0$  et  $v_{p+1}$  de  $D_n$ ,  $v_0$  et  $v_{p+1}$  de  $C_n$ .

#### Observations finales

Les paires uniques des tournois d'ordre 3 et 5 qui ne sont pas (-1)-reconstructibles sont respectivement  $B_1$ ,  $C_1$  et  $B_2$ ,  $C_2$ , et comme il est indiqué précédemment, il n'y a pas de contre-exemples d'ordre 7, de plus on ne connaît pas des contre-exemples d'ordres impair autres que  $B_n$  et  $C_n$ , il est donc claire qu'on peux supposer que ce sont les seuls contre-exemples d'ordre impair.

La situation est assez différente dans le cas de l'ordre pair, en plus des paires de contreexemples  $D_1$  et  $E_1$ , il existe une paire d'ordre 4, deux autres d'ordre 6 et deux paires d'ordre 8, d'où il semble peu probable qu'il n'y en ait pas d'autres conter-exemples dans ce contexte.

# 4.3 Classes des Tournois (-1)-reconstructible

En 1977, **Stokmeyer** [54] exhibe la construction d'une infinité de tournois mettant en défaut la célèbre conjecture d'Ulam, (les conter-exemples présentées dans la deuxième partie de ce chapitre), mais avant, Harary et Palmer ont prouvé qu'elle est vraie pour les graphes orientés non fortement connexes, par la suite plusieurs tentatives sont faites pour décrire les classes vérifiant cette conjecture, les travaux de M.Pouzet, Gérard Lopez et Claire Rauzy ont cerné les classes de validité de cette conjecture.

L'objectif de cette partie est d'établir la (-1)-reconstruction de quelques classes de tournois.

#### 4.3.1 Cas des Tournois Sans Diamant

L'objet du présent de cette section est d'établir la reconstructibilité des tournois particuliers appelés tournois sans diamant.

Rappelons que les tournois sans diamant, sont des tournois dont toutes les restrictions à quatre sommets sont soit des chaînes, soit fortement connexes, en d'autres termes, ces restrictions à quatre sommets sont transitifs ou hamiltoniens

#### Cractérisation des Tournois Sans Diamant

#### Définition 4.2

Pour tout entier positif h, on définit le tournoi  $T_h$  sur  $\{0, 1, \ldots, 2h\}$  par : (i, i + j) est un arc de  $T_h$  quelque soient  $i = 0, 1, \ldots, 2h$  et  $j = 1, 2, \ldots, h$  et (i + j, i) arc de  $T_h$  pour  $i = 0, 1, \ldots, 2h$  et  $j = h + 1, h + 2, \ldots, 2h$  où + désigne la somme modulo 2h + 1.

- **Remarque 4.3.** (a): Pour tout entier positif h, le tournoi  $T_h$  admet la permutation circulaire  $\Phi(i) = i + 1$  comme automorphisme.
  - (b): La restriction de  $T_h$  à  $\{0, 1, ..., h\}$  est la chaîne maximale de longueur maximale notée (0, 1, ..., h).
  - (c):  $T_h$  est irréductible (indécomposable) et sans diamant.
- Démonstration: (a): Par construction de  $T_h$  on a (i, j) dans  $T_h$  entraı̂ne que (i + 1, j + 1) est dans  $T_h$ .
  - (b): D'après la construction de  $T_h$  on peut voir facilement que  $(0,1,2,\ldots,h)$  est une chaîne et pour tout  $j=h+1,h+2,\ldots,2h,\ (h,j)$  et (j,0) sont dans  $T_h$  d'où  $\{(0,h,j);((0,h);(h,j);(j;0))\}$  est un cycle de  $T_h$  d'où  $(0,1,2,\ldots,h)$  est une chaîne maximale de longueur h+1.
    - Soit C une chaîne de  $T_h$ , par permutation on peut supposer que C commence par 0, et la base de C est une partie de  $\{0, 1, \ldots, h\}$  donc C est de longueur  $\leq h + 1$ .
  - (c): Soient deux sommets i et j de  $T_h$ , on peut supposer que  $i < j \le h$  donc (j, j + h) et (j + h, i) sont dans  $T_h$ , donc tous les intervalle de  $T_h$  contenant i et j contient tous les éléments da la chaîne  $(j, \ldots, j + h)$  et par suite contient i + h + 1 donc tous les éléments de la chaîne  $(i, i + 1, \ldots, i + h + 1)$ , donc en définitive égale à la base de  $T_h$  ce qui implique que  $T_h$  est irréductible, et il est sans diamant car sa restriction sur 4 sommets est une chaîne.

Par extension un tournoi T isomorphe à un  $T_h$  est appelé tournoi irréductible et sans diamant de largeur h.

## Proposition 4.1 (19)

Deux tournois irréductibles sans diamant sont isomorphes si et seulement s'il ont même largeur.

П

Démonstration: Soit T et T' deux tournois irréductibles sans diamant de largeur h et h' respectivement, on suppose que  $h \leq h'$ ,  $T_h$  et  $T_{h'}$  étant isomorphes, alors si on avait  $h \leq h'$ , donc une chaîne maximale de longueur maximale de  $T_{h'}$  n'aurait pas d'image dans  $T_h$  donc h = h'.

Réciproquement si T et T' sont deux tournois irréductibles sans diamant de largeur h alors il sont tous les deux isomorphes à  $T_h$ .

D'où la caractérisation des tournois sans diamant :

# Théorème 4.6 (Théorème de caractérisation [19])

Un tournoi T est sans diamant si et seulement s'il existe un entier h tel que T soit une  $T_h$ —somme des chaînes.

# La (-1)-reconstruction des Tournois sans Diamant

En utilisant la caractérisation des tournois sans diamant obtenus ci-dessus on établit la (-1)-reconstructibilité de ces tournois par le théorème suivant :

# Théorème 4.7 (Téorème Principal [19])

Tout tournoi T sans diamant d'ordre n > 6 est (-1)-reconstructible.

La preuve de ce théorème utilise les lemmes suivants :

## Lemme 4.2

Soient T un tournoi sans diamant d'ordre n > 3, T' un tournoi (n-1)—hypomorphe à T, C(x) et C'(x) les chaînes de dilatation contenant x dans T et T' respectivement, alors on a :

- (1): T est une chaîne si et seulement si T' est une chaîne.
- (2): T' est un tournoi sans diamant de même largeur que T.
- (3): Pour un entier k donné, si C(x) est de cardinal k alors C'(x) est de cardinal k, et le nombre de chaînes de dilatation de cardinal k est le même dans T et T'.

## Lemme 4.3

Soient deux relations binaire  $\Re$  et  $\Re'$  de même base E, et I et I' des intervalles non triviaux de  $\Re$  et  $\Re'$  tels qu'il existe un isomorphisme  $f_1$  de  $\Re_{|I|}$  sur  $\Re'_{|I'|}$ , et pour tout x de E, un isomorphisme  $f_x$  de  $\Re - x$  sur  $\Re' - x$  tel que :  $f_x(I - x) = I' - x$ , alors  $\Re$  et  $\Re'$  sont isomorphes

De ce lemme on peut déduire le résultat suivant :

#### Corollaire 4.1

Si deux tournois T et T' sont sans diamant et (-1)-hypomorphes et tels qu'il existe un x et un isomorphisme  $f_x$  de T-x sur T'-x vérifiant C(x)-x non vide et  $f_x(C(x)-x)=C'(x)-x$ , alors T et T' sont isomorphes.

Soit T un tournoi sans diamant de largeur h, et  $C_0, C_1, \ldots, C_{2h}$ , les chaînes de dilatation de T, on dit que les chaînes de dilatation de cardinal k donné sont **régulièrement réparties** dans T, lorsqu'il existe une permutation  $\Pi = \Phi^p$  (p entier,  $\Phi(i) = i + 1$ ) tel que si  $C_i$  est de cardinal k, alors  $C_{\Pi(i)}$  est de cardinal k.

De plus si  $C_i$  est réduit à un singleton  $\{x\}$  (resp. à une paire  $\{x,y\}$ , resp. à  $\{x,y,z\}$ ) on dit que  $C_i$  est le **pic** x (rep. le **duo**  $\{x,y\}$ , resp. le **trio**  $\{x,y,z\}$ ).

## Lemme 4.4

Soit T un tournoi sans diamant, m le cardinal maximal des chaînes de dilatation, si  $m \neq 2$  et s'il existe un entier k,  $1 \leq k \leq m$ , tel que les chaînes de cardinal k sont régulièrement réparties dans T, alors T est (-1)-reconstructible.

Muni de ces lemmes on a aisément la preuve du théorème principal :

# La preuve de théorème principal 4.7

Démonstration: Soient T un tournoi sans diamant d'ordre n > 6, et m le cardinal maximal des chaînes de dilatation de T, et T' un tournoi (-1)—hypomorphe à T

Si  $m \ge 4$ , on prend x et y dans des chaînes de cardinal 2 et 3 respectivement et on obtient par la (-1)-hypomorphie que les chaînes de cardinal 4 sont régulièrement réparties dans T et le lemme (4.4) donne le résultat c'est-à-dire la (-1)-reconstruction de T.

Si m=3, on pose  $n_1, n_2$  et  $n_3$  le nombre de pics, de duos et de trios respectivement, ainsi si  $n_2 \ge 2$  on prend x et y dans deux duos distincts et on obtient par la (-1)-hypomorphie que les trios sont régulièrement répartis d'où d'après le lemme (4.4) T est (-1)-reconstructible.

Si  $n_2 = 2$  et  $n_3 \ge 2$ , on prend x et y dans deux trios différents et comme m = 3 alors les pics sont régulièrement répartis d'où autre fois la (-1)-reconstruction de T par le lemme (4.4).

Si  $n_2 = n_3 = 1$ , alors h est égale au moins à 2 car sinon on aurait  $n \le 6$  qui est une contradiction avec l'ordre de T, donc  $h \ge 2$  et on va considérer deux possibilités :

 $(\alpha)$ : Si le trio et le duo sont consécutifs par exemple en  $C_{i+h}$  et  $C_{i+h+1}$ , soit x le pic en  $C_{i+h}$ , on a T-x est isomorphe à T'-x alors  $C_{i+h}$  et  $C_{i+h+1}$  sont également consécutifs dans T', seule éventualité pour avoir une chaîne de cardinal 5 dans T'-x comme il y en a dans T-x, mais alors si  $C_{i+h}$  (resp.  $C_{i+h+1}$ ) est le trio, alors en posant y le pic en  $C_{i-1}$  (resp.  $C_{i+1}$ ), l'isomorphisme de T-y sur T'-y entraîne que dans T', y en  $C'_{i-1}$  (resp.  $C'_{i+1}$ ) de telle sorte que  $C'_{i+h}$  (resp.  $C'_{i+h+1}$ ) soit le trio de T' et d'où l'isomorphisme de T et T' (la (-1)-reconstructibilité de T.)

 $(\beta)$ : Si le trio et le duo ne sont pas consécutifs, on suppose que dans T, il y a r éléments entre le duo et le trio sur la chaîne maximale qui les contient tous les deux, en prenant y hors de cette chaîne de sorte que dans T-y il ait une chaîne de dilatation de cardinal 4, on obtient que dans T' il y a au moins r-1 éléments entre le duo et le trio et qu'ils sont dans le même ordre sur la chaîne maximale qui les contient, et de là s'il n'y avait que r-1 éléments entre eux dans T', on prend y' un pic de T' tel que dans T'-y' il n'y ait que r-2 éléments entre le duo et la chaîne de quatre éléments et on obtient une contradiction, donc il y a dans T' exactement r éléments entre le duo et le trio comme dans T, et comme ils sont dans le même ordre sur le trame de T (c-à-d  $T_h$ ) alors on a l'isomorphisme entre T et T' d'où la (-1)-reconstruction de T

Si m=2, on dira pour simplifier que  $C_i$  est opposé à  $C_{i+h}$  et à  $C_{i+h+1}$  et on pose  $S_1$  (resp.  $S_1'$ ) l'ensemble des pics dans T (resp. dans T'),  $S_2$  (resp.  $S_2'$ ) l'ensemble des pics  $C_i$  de T (resp.  $C_i'$  dans T'), tels que  $C_{i+h}$  est un duo et  $C_{i+h+1}$  est un pic,  $S_3$  (resp.  $S_3'$ ) l'ensemble des pics  $C_i$  de T (resp.  $C_i'$  de T') tels que  $C_{i+h}$  est un pic et  $C_{i+h+1}$  est un duo, on a alors  $S_1 = S_1'$  car seuls les éléments de  $S_1$  font apparaître un duo supplémentaire dans T, donc aussi dans T', il s'ensuit alors que  $S_2 \cup S_3 = S_2' \cup S_3'$  ce qui nous amène à considéré 3 cas  $(S_2 \neq S_3', S_2 = S_3', T)$  admet deux duos consécutifs) possible et qui nous donne toujours une contradiction avec le fait que  $S_1 = S_1'$  et cela achève la preuve pour le cas m=2. Enfin, pour m=1, on aura T régulier et le lemme (4.4) implique que T est (-1)-reconstructible d'où le théorème est ainsi établi.

# 4.3.2 Cas des Tournois (-1)-Chaîne

Dans cette partie, on montre que tout tournoi (-1)-chaîne est (-1)-reconstructible c'est-à-dire tout T'(-1)-hypomorphe à T est isomorphe à T, la preuve de ce résultat est obtenue à partir des lemmes et résultats suivants :

# Proposition 4.2 ([18])

Un tournoi fortement connexe T qui a au moins deux carrefours est (-1)-reconstructible.

Démonstration: Soit  $a_1$  l'un des carrefours de T, alors  $T-a_1$  est donc un tournoi transitif donc une chaîne et T est (-1)-chaîne, et puisque T est fortement connexe alors T est de la forme :  $a_1a_2$  et  $a_na_1$  sont des arcs de T et  $(a_2, a_3, \ldots, a_n)$  est une chaîne, le deuxième carrefour b est  $a_2$  ou  $a_n$ , si  $b = a_n$  on pose  $x_1 = b = a_n$ ,  $x_2 = a_1$ ,  $x_3 = a_2, \ldots, x_n = a_{n-1}$  et dans les deux cas on a T de la forme  $x_1x_2$  est un arc et  $(x_2, x_3, \ldots, x_n)$  est une chaîne et tous les autres arcs sont d'extrémité  $x_1$ .

Soit alors T' un tournoi sur  $\{x_1, \ldots, x_n\}$  (-1)-hypomorphe à T, donc  $T' - x_1$  et  $T' - x_2$  sont des chaînes car il sont isomorphes à  $T - x_1$  et  $T - x_2$  respectivement, d'où  $x_1$  et  $x_2$  sont des carrefours de T', donc T' soit de la forme :  $x_1x_2$  un arc de T' et  $(x_2, x_3, \ldots, x_n)$  est une chaîne et tous les arcs de T' sont d'extrémité  $x_1$  ou de la forme :  $x_2x_1$  un arc de T' et  $(x_1, x_3, \ldots, x_n)$  est une chaîne et tous les arcs de T' sont d'origine  $x_1$ , et cette deuxième forme est isomorphe à la première par,  $f(x_2) = x_1$ ,  $f(x_1) = x_2$  et la correspondance de chaîne sur les autres sommets, donc T' est isomorphe à T, d'où T est (-1)-reconstructible

On considère le tournoi T de base  $\{x_1, \ldots, x_n\}$  tel que n > 6 et tel que  $T - x_1$  soit la chaîne  $(x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}, x_n)$ , on partage  $x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}, x_n$  en blocs  $A_0, A_1, A_{2p}, A_{2p+1}$  vérifiant :

- $A_0$ : est le plus grand intervalle contenant  $x_2$  et tel que pour tout x appartenant à  $A_0$ ,  $xx_1$  appartient à T.
- $A_1$ : est le plus grand intervalle contenant le premier terme suivant de la chaîne et qui n'est pas dans  $A_0$ , et tel que tout x de  $A_1$   $x_1x$  appartient à T.
- $A_{2p}$ : est le plus grand intervalle contenant le premier terme suivant de la chaîne qui n'est pas dans  $A_{2p-1}$ , et tel que tout x de  $A_{2p}$   $xx_1$  appartient à T.
- $A_{2p+1}$ : est le plus grand intervalle contenant le premier terme suivant de la chaîne, qui n'est pas dans  $A_{2p}$ , et tel que tout x appartenant à  $A_{2p+1}$   $x_1x$  appartient à T. ainsi de suite jusqu'à  $x_n$ .

On appelle **côte** de  $A_i$  et on note  $C(A_i)$  le nombre de 3-cycle qui passent par un sommet de  $A_i$ , de plus si  $card(A_i) = k_i$  pour tout i, alors on a :

- $C(A_1) = k_2 + k_4 + \cdots + k_{2p}$ .
- $C(A_2) = k_1$ .
- $C(A_3) = k_4 + \cdots + k_{2p} = C(A_1) k_2$ .
- $C(A_4) = k_1 + k_3 = C(A_2) k_3$ .
- $C(A_5) = k_6 + \cdots + k_{2p} = C(A_3) k_4$ .
- $C(A_{2n}) = k_1 + k_3 + \cdots + k_{2n-1}$ .

Remarque 4.4. (a) Dans un tournoi (-1)-chaîne la côte maximale est :  $\max\{C(A_1), C(A_{2p})\}.$ 

- (b) Si T et T' sont (-1)-hypomorphes, alors tout sommet de côte maximale dans T est de côte maximale dans T'.
- Démonstration: (a) On a quelque soit i impair  $C(A_i) \leq C(A_1)$ , et quelque soit i pair  $C(A_i) \leq C(A_{2n})$ , d'où la côte maximale de T est  $\max\{C(A_1), C(A_{2n})\}$ .
  - (b) Soit a un sommet de côte maximale de T alors quelque soit x sommet de T on a  $C(x) \leqslant C(a)$ , donc  $C(T-x) \geqslant C(T-a)$  or T et T' sont (-1)-hypomorphes alors C(T-x) = C(T'-x) et C(T-a) = C(T'-a) ce qui implique que  $C'(x) \leqslant C'(a)$  d'où a est de côte maximale dans T'.

## Théorème 4.8 (Téorème Principal [18])

Soit T un tournoi fortement connexe sur  $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$  tel que  $T - x_1$  soit une chaîne, alors T est (-1)-reconstructible.

La preuve de ce résultat est obtenue grâce aux lemmes suivants :

#### Lemme 4.5

Si  $A_1$  est de côte maximale avec  $card(A_1) = 1$  et  $d_T^+(x_1) \neq d_T^-(x_1)$ , alors tout tournoi T'(-1)-hypomorphe à T est isomorphe à T.

## Lemme 4.6

Dans un tournoi fortement connexe T, Si  $A_1$  est de côte maximale et de cardinal 1, et si  $d_T^+(x_1) = d_T^-(x_1)$ , alors tout tournoi T'(-1)-hypomorphe à T est isomorphe à T.

## Lemme 4.7

Soit T un tournoi fortement connexe, si  $A_1$  est de côte maximale de cardinal 2, tel que  $d_T^+(x_1) \neq d_T^-(x_1)$  alors  $d_T^+(x_1) < d_T^-(x_1)$  et tout T' (-1)—hypomorphe à T est isomorphisme à T.

D'où la preuve de théorème (4.8):

Démonstration: Soit T un tournoi fortement connexe sur  $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$  tel que  $T - x_1$  soit une chaîne, alors si  $A_1$  est de côte maximale, d'où d'après les lemmes (4.5, 4.6, 4.7) T est (-1)-reconstructible, or grâce à la remarque (4.4) on sait que si  $A_1$  n'est pas de côte maximale alors  $A_{2p}$  est de côte maximale, en prenant le tournoi opposé et en appliquant les résultats de ces lemmes on obtient la (-1)-reconstructibilité de T (car on a vu plus haut que dans un tournoi (-1)-chaîne, soit  $A_1$  est de côte maximale, soit  $A_{2p}$ , mais si  $A_{2p}$  est de côte maximale, alors le tournoi T obtenu en renversant toutes les arcs de T est aussi (-1)-chaîne et dans T la sous-chaîne de côte maximale est au début, et c'est pour cela on a supposer sans perte de généralité que la sous-chaîne de côte maximale est  $A_1$ .) d'où dans les deux cas on obtient que T est (-1)-reconstructible.  $\square$ 

# 4.4 La (-3)-reconstruction des tournois

Le but de cette partie est de démontrer la (-3)-reconstruction des tournois dans certains cas, en se basant sur les travaux de **A.Boussairi** et **Y.Boudabbous** [7]

# 4.4.1 Cas des tournois finis, décomposables et fortement connexes à au moins 12 sommets

L'objectif de ce paragraphe est de démontrer que tout tournoi fini à au moins 12 sommets, décomposable et fortement connexe, est (-3)-reconstructible.

## Théorème 4.9

Tout tournoi fini d'ordre  $\geq 12$ , décomposable et fortement connexe, est (-3)-reconstructible.

Pour prouver ce théorème, on aura besoin des résultats suivants.

#### Lemme 4.8

Soit T un tournoi d'ordre  $n \ge 14$  si toute restriction de T à n-3 sommets est

décomposables alors le tournoi T est (n-3)-reconstructible.

Remarque 4.5. Si de plus le tournoi est fortement connexe le lemme (4.8) a été démontré par leurs auteurs pour  $n \ge 12$ .

## Lemme 4.9

Soit  $T = S(T_1, T_2, \dots, T_k)$  un tournoi dilaté d'un tournoi S indécomposable de cardinal  $k \ge 5$ .

S'il existe un unique sommet  $j \in \{1, ..., k\}$  tel que la base  $I_j$  de  $T_j$  est de cardinal  $\geq 3$ , et si T' est un tournoi (-3)-hypomorphe à T alors  $T' = S(T'_1, T'_2, ..., T'_k)$ .

## Proposition 4.3

Soit T un tournoi fortement connexe d'ordre  $n \ge 12$ , si T' est un tournoi (-3)-hypomorphe à T, alors on a soit T et T' sont isomorphes, soit les restrictions de T' et  $T^*$  à toute partie F de la base de T sont isomorphes.

Démonstration: On sait d'après [16] et [28] que tout tournoi se met sous l'une des formes suivantes :

- (i)  $T = S(T_1, ..., T_k)$  où S est un tournoi indécomposable (dans ce cas T est fortement connexe.)
- (ii)  $T = S(T_1, ..., T_k)$  où S est une chaîne à au moins 2 sommets.

D'où on peut poser  $T = S(T_1, \ldots, T_k)$  où S est indécomposable, si T' est un tournoi (-3)-hypomorphe à T alors on a d'après un lemme de P.Ille et A.Boussairi [10], soit  $T' = S(T'_1, \ldots, T'_k)$  soit  $T' = S^*(T'_1, \ldots, T'_k)$  où  $T'_i$  est un tournoi de même base  $I_i$  que celle de  $T_i$ , et ceci on l'a en particulier si T' est (-3)-hypomorphe à T car dans ce cas on aura d'après le lemme de M.Pouzet [47] ( $\Re$  et  $\Re'$  deux relation binaire si  $\Re$  et  $\Re'$  sont (-p)-hypomorphes alors  $\Re$  et  $\Re'$  sont  $\inf(p, n-p)$ -hypomorphe), que T et T' sont (-3)-hypomorphes car  $n \ge 12$ , d'où on a :

- Si  $\forall i \in \{1, \ldots, k\}$  on a  $card(I_i) \leq 3$  dans ce cas si  $T' = S(T'_1, \ldots, T'_k)$  alors du fait que les restrictions  $T'_{|I_i}$  et  $T_{|I_i}$  sont isomorphes, alors T et T' sont isomorphes par recollement des isomorphismes, (sur les  $I_i$ ), si donc T' et T ne sont pas isomorphes, alors  $T' = S^*(T'_1, \ldots, T'_k)$  et si F est une partie de la base E de T, donc du fait que les restrictions  $T'_{|F\cap B|}$  et  $T^*_{|F\cap B|}$  sont isomorphes et que  $T'_{|F\cap B|} = T^*_{|F\cap B|}$ , où B est la base de S, d'où T' et  $T^*$  sont isomorphes sur F par recollement des isomorphismes (sur les  $F \cap I_i$ .)
- S'il existe un  $i \in \{1, ..., k\}$  tel que  $card(I_i) \geqslant 4$ :
  - S'il existe un  $j \in \{1, \ldots, k\} \{i\}$  tel que  $card(I_j) \geqslant 2$  et si  $k \geqslant 4$ , alors la restriction de T à toute partie de n-3 sommets (où n est l'ordre de T) est décomposable et d'après le lemme (4.8) T et T' sont isomorphes, d'où le résultat. S'il existe un  $j \in \{1, \ldots, k\} \{i\}$  tel que  $card(I_j) \geqslant 2$  et si k=3, alors il est facile de voire que si T' est (-3)-hypomorphe à T, on a  $T' = S(T'_1, T'_2, T'_3)$  où  $T_i$  est un tournoi de base  $I_i$  pour i=1,2,3, donc T et T' ne forment pas une seule classe de différence sur toute partie à n, n-1, n-2 sommets (les classes de différences sont les classes d'équivalences de la relation d'équivalence S(T,T') définie pa : deux

éléments x et y sont en relation si x = y ou si x et y sont liés par un chemin de différence  $x = x_1, \ldots, x_n = y$  vérifiant  $T(x_i, x_j) \neq T(x_j, x_i)$ ,  $T'(x_i, x_j) \neq T'(x_j, x_i)$   $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$  et  $j \neq i$  et  $T(x_i, x_j) \neq T'(x_i, x_j)$   $\forall i \in \{1, \ldots, n-1\}$  et j = i + 1 et d'après un résultat publié dans T et T' sont isomorphes (si T et T' sont deux tournois T et T' sont isomorphes et si T et T' ne forment pas une seule classe de différence alors T et T' sont isomorphes).

- Si maintenant  $\forall j \in \{1,\ldots,k\} \{i\}$  on a :  $card(I_j) = 1$  et si  $k \geq 5$  alors du lemme (4.9) on a  $T' = S(T'_1,\ldots T'_k)$  où  $T'_i$  est un tournoi de base  $I_i$ , donc T et T' ne forment pas une seule classe de différence sur toute partie à n, n-1, n-2 sommets et d'où T et T' sont isomorphes.
- Si  $\forall j \in \{1, ..., k\} \{i\}$  on a :  $card(I_j) = 1$  et si k = 4, alors il est autre fois facile de voire d'après ce qui précède que  $T' = S(T'_1, ..., T'_k)$  où  $T'_i$  est un tournoi de base  $I_i$ , donc T et T' ne forment pas une seule classe de différence sur tout partie à n, n-1, n-2 sommets ce qui implique que T et T' sont isomorphes.
- Si  $\forall j \in \{1, ..., k\} \{i\}$  on a :  $card(I_j) = 1$  et si k = 3, alors en utilisant ce qui précède on voit que  $T' = S(T'_1, T'_2, T'_3)$  où  $T'_i$  est un tournoi fortement connexe de base  $I_i$ , et il est claire que  $card(I_3) = n 2$  et donc d'après un autre résultat dans [51], qui affirme que tout tournoi d'ordre  $\geq 9$  est (-1, -3)-reconstructible, ce qui nous permet de conclure que T et T' sont isomorphes.

#### Lemme 4.10

Il n'existe pas de tournoi T à au moins 8 sommets, (-3)-hypomorphe à son dual  $T^*$ , abritant des diamants, et admettant un intervalle de cardinal 2.

La preuve de théorème principal (4.9) :

Démonstration: Soit T un tournoi fini d'ordre  $\geq 12$ , fortement connexe et décomposable, montrons que T est (-3)-reconstructible.

- Si T n'abrite pas des diamants, alors d'après le théorème (4.7) T est (-3)—reconstructible.
- Si T abrite des diamants, supposons que T n'est pas (-3)-reconstructible, alors il existe un tournoi T' (-3)-hypomorphe à T mais n'est pas isomorphe à T, alors d'après la proposition (4.3) on a les restrictions de  $T^*$  et de T' à toute partie F de la base de Tsont isomorphes, et en particulier lorsque card(F) = 3, on en déduit que T et  $T^*$  sont (-3)-hypomorphes, donc d'après le lemme de M.Pouzet [47] et le lemme (4.10), T ne peut pas avoir un intervalle de cardinal 2, et comme on peut supposer que  $T = S(T_1, \ldots, T_k)$ , alors s'il existe deux sommets distinct i et j de  $\{1, \ldots, k\}$  tel que  $card(I_i) \neq 1$  et  $card(I_j) \neq 1$  alors T est (-3)-reconstructible en appliquant le lemme (4.8) (  $car card(I_j) \geqslant 3$  et  $card(I_i) \geqslant 3$  et la restriction de T sur n-3 sommets est décomposable).

S'il existe un unique sommet  $i \in \{1, ..., k\} - \{i\}$  on a  $card(I_i) \neq 1$  alors :

\* Si  $k \geq 5$ , comme  $\forall j \in \{1, \ldots, k\} - \{i\}$  on a  $card(I_j) = 1$ , alors d'après le lemme (4.9), on déduit que  $T' = S(T'_1, \ldots, T'_k)$  où  $T'_i$  est un tournoi de base  $I_i$  ( car  $card(I_i) \neq 1$  et T ne peut pas avoir un intervalle de cardinal 2, c-à-d  $card(I_i) \geq 3$ ) donc T et T' ne forment pas une seule classe de différence sur toute partie à n,

- n-1, n-2 sommets ceci implique que T et T' sont isomorphes, ce qui absurde avec l'hypothèses que T et T' ne sont pas isomorphes.
- \* Si k = 4, comme  $\forall j \in \{1, ..., k\} \{i\}$  on a :  $card(I_j) = 1$ , alors en utilisant les résultats précédents on voit qu'on a  $T' = S(T'_1, ..., T'_k)$  où  $T'_i$  est un tournoi de base  $I_i$  donc T et T' ne forment pas une seule classe de différence sur tout partie à n, n-1, n-2 sommets donc T et T' sont isomorphes ce qui absurde.
- \* Si k = 3, comme  $\forall j\{1, \ldots, k\} \{i\}$  on a  $card(I_j) = 1$ , alors on voit que  $T' = S(T'_1, T'_2, T'_3)$  où  $T'_i$  est un tournoi fortement connexe de base  $I_i$ , avec  $card(I_3 = n 2)$  et T et T' sont (-1, -3)—reconstructible, d'où T et T' sont isomorphes ce qui absurde et cela achève la preuve de théorème principal.

# 4.4.2 Cas des tournois symétriques à au moins 12 sommets

Dans cette section on va donner une preuve à la conjecture d'Ulam sur la (-3)-reconstruction des tournois finis, symétriques et d'ordre supérieur ou égale à 12, en introduisant la notion de la symétrie des tournois.

## Définitions 4.3

Etant donné un tournoi T de base E, alors si x et x' deux sommets de T tels que T(x,y) = T(y,x') pour tout  $y \in E \setminus \{x,x'\}$  alors x et x' sont dits symétriques et x' est dit un symétrique de x.

T est dit symétrique si tout sommet de T admet un et un seul sommet symétrique.

Le résultat principal de cette section (la (-3)-reconstruction d'un tournoi fini symétrique d'ordre  $\geq 12$ ) est démontré dans [47], mais pour cela on aura besoin des lemmes suivants qui vont nous servie tout au long de la preuve.

## Lemme 4.11

Etant donné un tournoi indécomposable T, si T' est un tournoi (-3)-hypomorphe à T alors T'=T ou  $T'=T^*$ .

Dans la suite on utilisera les notation suivantes : si T est un tournoi de base E, notons pour tout  $x \in E$ ,  $E^+(x) = \{y \in E \setminus \{x\}/T(x,y) = +\}$  et  $E^-(x) = \{y \in E \setminus \{x\}/T(x,y) = -\}$ .

Donc l'utilisation de lemme de décomposition de T.Gallai [16] et P.Kelly [28] qui affirme que tout tournoi se met sous l'une des formes suivantes :

- (i)  $T = S(T_1, ..., T_k)$  où S est un tournoi indécomposable.
- (ii)  $T = S(T_1, ..., T_k)$  où S est une chaîne à au moins 2 sommets.

Nous permet de définir les intervalle suivants :

 $J_i(x)$  pour tout  $i \in \{1, ..., k\}$  (resp.  $I_i(x)$ , pour  $i \in \{1, ..., n\}$ ) les intervalles de  $E^+(x)$  (resp. de  $E^-(x)$ ) qui sont soit des intervalles chaînes maximaux parmi les intervalles chaînes de  $E^+(x)$  (resp.  $E^-(x)$ ), soit des intervalles fortement connexes maximaux parmi les intervalles fortement connexes de  $E^+(x)$  (resp.  $E^-(x)$ ) avec  $T(J_i(x), J_j(x)) = +$  si  $i + 1 \leq j$  et  $T(I_i(x), I_j(x)) = +$  si  $i + 1 \leq j$ , et par convention si la restriction de T sur  $E^+(x)$  est une chaîne, je pose p = 1, de même si la restriction de T sur  $E^-(x)$  est une

chaîne, je pose n=1, ce qui nous permet de supposer que  $I_1(x)$ ,  $I_n(x)$ ,  $J_1(x)$  et  $J_p(x)$  sont des intervalles chaînes (pouvant être vides ), qu'on appelle les T-chaînes extrêmes de x ou tout simplement les chaînes extrêmes de x, d'où on a le lemme suivant :

## Lemme 4.12

Soit T un tournoi de base E, tels que  $|E| \ge 8$  et T abrite des diamants, si T et  $T^*$  sont (-3)—hypomorphes alors on a  $\forall x \in E$ :

- (i) Soit  $card(I_1(x)) = 1$  et  $I_1(x) = J_1(x) = J_p(x) = \emptyset$ .
- (ii) Soit  $card(J_p(x)) = 1$  et  $J_1(x) = I_1(x) = I_n(x) = \emptyset$ .
- (iii) Soit  $I_1(x) = I_n(x) = J_1(x) = J_p(x) = \emptyset$ .

et du lemme (4.12) on aura le résultat suivant :

## Corollaire 4.2

Si T est un tournoi de base E tels que  $|E|\geqslant 10$ , et T abrite des diamants, et si  $\forall y\in E$  on a :

- (a) Soit  $card(I_p(y)) = 1$  et  $I_1(y) = I_n(y) = J_1(y) = \emptyset$ .
- (b) Soit  $card(I_1(y)) = 1$  et  $J_p(y) = I_n(y) = J_1(y) = \emptyset$ .

Alors T et  $T^*$  ne peuvent pas être (-3)-hypomorphes.

# Théorème 4.10 (Téorème Principal [51])

Tout tournoi fini symétrique d'ordre  $n \ge 12$  est (-3)-reconstructible.

Démonstration: Soit T un tournoi symétrique d'ordre supérieur ou égale à 12, alors il est claire que T est fortement connexe ( car T est symétrique ), donc si T est décomposable on aura d'après le théorème (4.9) que T est (-3)—reconstructible et d'où le résultat. Sinon si T est indécomposable, et on peut distinguer 2 cas :

- \* T n'abrite pas de diamants, alors d'après le théorème (4.7) de G.Gnanvo et P.Ille, T est (-3)—reconstructible.
- \* T abrite des diamant, supposons que T n'est pas (-3)-reconstructible, alors il existe un tournoi T' (-3)-hypomorphe à T, mais ne sont pas isomorphes, donc d'après le lemme de M.Pouzet T et T' sont  $(\inf(3, n-3))$ -hypomorphes avec  $n \ge 12$  donc T et T' sont (-3)-hypomorphes, et le lemme (4.11) implique que  $T' = T^*$  (car T et T' ne sont pas isomorphes) et donc  $T^*$  et T' sont (-3)-hypomorphes et du lemme (4.12) et du corollaire (4.2) on doit avoir :  $I_1(x) = I_n(x) = J_1(x) = J_p(x) = \emptyset$  pour tout x sommet de E, (car T et  $T^*$  sont (-3)-hypomorphes) donc T ne peut pas être symétrique ce qui absurde d'où tout tournoi fini, symétrique d'ordre  $n \ge 12$  est (-3)-reconstructible.

# 4.4.3 Cas des tournois finis et fortement connexes à au moins 12 sommets

L'objectif de cette section est d'établir la (-3)-reconstruction des tournois finis et fortement connexes à au moins 12 sommets.

#### • Notations et définitions

Si T est un tournoi de base E tel que tout sommet y de E admet au plus un unique sommet symétrique y', et soient a, b et c 3 sommets de E deux à deux non symétriques, alors notons  $a \circ b = \{x \in E - \{a, b, a', b'\}/T(x, a) = T(x, b)\}$  et  $a \circ b \circ c = \{x \in E - \{a, b, c, a', b', c'\}/T(x, a) = T(x, b) = T(x, c)\}.$ 

Si F est une partie de E à éléments deux à deux non symétriques, alors notons **Spin** F le nombre des éléments de F qui ont un point symétrique dans E.

## Lemme 4.13

Etant donné un tournoi T de base E tels que T est d'ordre impair  $\geqslant 7$  et abrite des diamants, alors si T et  $T^*$  sont (-3)-hypomorphes et si  $\{a,b,c\}$  est une partie de E telle que  $T_{\{a,b,c\}}$  est un 3-cycle, alors  $spim\{a,b,c\} \notin \{1,3\}$ . on en déduit que si T est un tournoi abritant des diamants et de cardinal impair  $\geqslant 7$ , alors T et  $T^*$  ne sont pas (-3)-hypomorphes.

#### Lemme 4.14

Soit T un tournoi de base E tels que T est d'ordre pair  $\geq 8$ , et abrite des diamants alors si T et  $T^*$  sont (-3)-hypomorphes et si  $\{a,b,c\}$  est une partie de E telle que  $T_{|\{a,b,c\}}$  est un 3-cycle, alors  $spim\{a,b,c\} \neq 2$ , et T est symétrique.

D'où les lemmes ci-dessus nous permet d'établir les résultats suivants :

## Proposition 4.4

Tout tournoi fortement connexe et d'ordre pair  $\geq 12$  est (-3)-reconstructible.

Démonstration: Soit T un tournoi d'ordre pair  $\geq 12$  et fortement connexe alors d'après les théorèmes (4.7, 4.9) il suffit de démontrer le résultat dans le cas où T est indécomposable et abritant des diamants.

Supposons que T n'est pas (-3)-reconstructible, alors il existe un tournoi T' (-3)-hypomorphe à T mais non isomorphes, donc le lemme de M.Pouzet et le lemme 4.11 implique que  $T' = T^*$  et T et  $T^*$  sont (-3)-hypomorphes et comme T est de cardinal pair alors le lemme 4.14 assure que T est symétrique, ce qui nous permet de déduire d'après le théorème 4.10 que T est (-3)-reconstructible ce qui est absurde avec l'hypothèse d'où ce qu'il faut démontrer.

## Proposition 4.5

Tout tournoi fortement connexe et d'ordre impair  $\geq 13$  est (-3)-reconstructible.

Démonstration: Soit T un tournoi fortement connexe d'ordre impair  $\geq 13$  alors d'après les théorèmes (4.7, 4.9) il suffit de démontrer le résultat dans le cas où T est indécomposable et abritant des diamants.

Supposons que T n'est pas (-3)-reconstructible, alors il existe un tournoi T'

(-3)-hypomorphe à T mais non isomorphes, d'où autre fois le lemme de M.Pouzet et le lemme 4.11 implique que  $T' = T^*$  et T et  $T^*$  sont (-3)-hypomorphes, et ceci est impossible d'après le lemme (4.13) d'où le résultat.

Le résultat principal de cette section est :

## Théorème 4.11

Tout tournoi fortement connexe d'ordre  $n \ge 12$  est (-3)-reconstructible.

Démonstration: Soit T un tournoi fortement connexe d'ordre  $n \ge 12$ , alors si T est d'ordre pair, la proposition (4.4) donne le résultat, sinon la proposition (4.5), nous permet de conclure la preuve

# 4.4.4 Cas des tournois finis, non fortement connexes à au moins 14 sommets

Le résultat principal de cette section est coomme suit :

## Proposition 4.6

Tout tournoi non fortement connexe et d'ordre  $n \ge 14$  est (-3)-reconstructible.

Démonstration: Soit T un tournoi non fortement connexe et d'ordre  $n \ge 14$ , alors on sait d'après ce qui précède (les preuves des théorème (4.9), (4.10) que T est dilaté d'une chaîne L par des intervalles  $I_i$ , où chaque  $I_i$  est soit un intervalle chaîne maximal parmi les intervalles qui sont fortement connexes, d'où on peut alors écrire  $T = L(I_1, \ldots, I_k)$  avec  $T(x_i, x_j) = +$  si  $i + 1 \le j$  ou  $x_i \in I_i$  et  $x_j \in I_j$ .

#### $1^{\text{\'e}me} cas$ : Si l'ordre de L est $\geq 4$ .

Dans ce cas T est (-3)—reconstructible, car si T' est un tournoi (-3)—hypomorphe à T alors, il est claire que T et T' sont (-1)—hypomorphes sur toute partie F de E (la base de T) de cardinal n-2, or  $T_{|F}$  est non fortement connexe donc d'après le résultat obtenu par F.Harary et E.Palmer [24] (tout tournoi non fortement connexe d'ordre  $n \ge 5$  est (-1)—reconstructible) donc comme l'ordre de T est  $\ge 14$  alors les restrictions de T et T' à F sont isomorphes, ainsi T et T' sont (-2)—hypomorphes, donc de même on a T et T' sont (-1)—hypomorphes sur toute partie B de cardinal n-1, et comme  $T_{|B}$  est non fortement connexe alors les restrictions de T et T' à B sont isomorphes, ainsi T et T' sont (-1)—hypomorphes, d'où le résultat de F.Harary implique que T et T' sont isomorphes d'où T est (-3)—reconstructible.

#### $2^{\text{\'e}me}cas$ : Si l'ordre de L égal à 2

Dans ce cas  $T = L(I_1, I_2)$  avec  $1 \le card(I_1) \le 2$  et  $card(I_2) \ge 12$  car si  $card(I_1) \ge 3$  et  $card(I_2) \ge 3$  alors T se démontre facilement (-3)-reconstructible comme dans le premier cas, donc si T' est un tournoi (-3)-hypomorphes à T, alors puisque  $n \ge 14$ , T et T' sont  $(\le 3)$ -hypomorphes donc d'après le lemme de M.Pouzet on a T et T' sont (3)-hypomorphes alors  $I_1$  et  $I_2$  sont aussi des intervalles pour T' et on a soit  $T' = L(I_1, I_2)$  ou  $T' = L^*(I_1, I_2)$ 

(i) Si  $T' = L(I_1, I_2)$  (c-à-d,  $T(x, y) = T'(x, y) \ \forall (x, y) \in I_1 \times I_2$ ), alors dans ce cas si f est un isomorphisme de  $T_{|I_1 \cup F}$  sur  $T'_{|I_1 \cup F}$  où F est une partie de  $I_2$ , on doit avoir  $f(I_1) = I_1$  et f(F) = F, si donc F est une partie de  $I_2$  de cardinal n-3, alors par la (-3)-hypomorphie, les restrictions de T et T' à F sont isomorphes ainsi T et T' sont (-3)-hypomorphes sur  $I_2$ , et comme  $card(I_2) \geqslant 12$ , donc les restrictions de T et T' à  $I_2$  sont isomorphes d'après les résultats précédents, et par suite T et T' sont isomorphes par recollement des isomorphismes d'où la (-3)-reconstruction de T.

(ii) Si  $T' = L^*(I_1, I_2)$  (c-à-d T(x, y) = -T'(x, y)  $\forall (x, y) \in I_1 \times I_2$ ) alors en enlevons deux sommets a et b de  $I_2$  tels que  $T_{|E-\{a,b\}}$  abrite un 3-cycle et posons la restriction  $T_{|E-\{a,b\}} = L'(J_1, \ldots, J_k)$  et  $T'_{|E-\{a,b\}} = L''(J'_1, \ldots, J'_k)$  donc comme les restrictions de T et T' à  $E - \{a,b\}$  est non fortement connexe et T et T' sont (-1)-hypomorphes alors L' = L'' et  $\forall i \in \{1, \ldots, k\}, J_i$  et  $J'_i$  ont un même cardinal, si x est un élément de  $I_1$  alors  $x \in J_1$  et  $x \in J'_k$ , mais par la (-3)-hypomorphie en enlevant a,b et x, les restrictions de T et T' à  $E - \{a,b,x\}$  étant isomorphes,  $J_1$  et  $J'_1 - \{x\}$  ont un même cardinal, ce qui est impossible, puisque  $J_1$  et  $J'_1$  ont un même cardinal, donc ce sous cas est impossible et par suite T et T' sont isomorphes.

 $3^{\text{\'eme}} cas$ : Si l'ordre de L est égal à 3.

Alors s'il existe au moins deux intervalles  $I_i$  de cardinal  $\geq 2$ , alors T et T' sont isomorphes par le même raisonnement que celui du premier cas.

 $4^{me}cas$ : Si l'ordre de L=3 et  $card(I_1)=card(I_3)=1$ .

Posons  $I_1 = \{x\}$  et  $I_3 = \{y\}$  et soit T' un tournoi (-3)-hypomorphe à T alors T' est (3)-hypomorphe à T d'après le lemme de M.Pouzet, et il est claire que  $T_{|I_2}$  et  $T'_{|I_2}$  seront les seuls intervalles maximales et fortement connexes de T respectivement de T', Et il s'ensuit que  $T' = L(I_1, I_2, I_3)$  ou  $T' = L^*(I_1, I_2, I_3)$  on peut montrer qu'on a pas  $T' = L^*(I_1, I_2, I_3)$ , car si c'est le cas on aura un absurde avec le faite que  $J_1$  et  $J'_1$  ont le même cardinal donc on aura uniquement le cas où  $T' = L(I_1, I_2, I_3)$  alors le même démarche que dans les cas précédents on peut avoir grace à la (-3)-hypomorphe sur  $I_2$ , et comme  $T_{|I_2}$  est un tournoi fortement connexe de cardinal  $\geq 12$  et donc d'après la proposition (4.11), T et T' sont isomorphes sur  $I_2$ , et par suite T et T' sont isomorphes sur E par recollement des isomorphismes donc T est (-3)-reconstructible, et d'où le résultat.

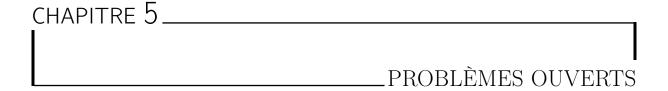
## Théorème 4.12

Tout tournoi fini d'ordre  $n \ge 14$  est (-3)-reconstructible.

Démonstration: Soit T un tournoi fini  $n \ge 14$ , donc s'il est fortement connexe alors il est (-3)-reconstructible d'après le théorème (4.11), sinon la (-3)-reconstruction de T se déduit directement à partir de la proposition (4.6).

# 4.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié la conjecture d'Ulam dans les tournois, d'une part nous avons présenter la liste des contre-exemples liés à la (-1)-reconstruction des tournois, d'autre part nous avons vu un certain nombre de résultats concernant la (-3)-reconstruction des tournois d'ordre un peu élevé.



"Prouver et Conjecturer", comme aimait à le dire Paul d'Erdős, sont l'essence même de l'activité mathématique, notre choix de problèmes dans cette section a été guidé inévitablement par les résultats existants dans les chapitres 2, 3 et 4 en particulier, nous nous somme efforcés d'ensélectionner plusieurs qui impliquent la prochaine étape dans l'approche du problème général.

La reconstruction de graphes ou de tournois constitue un problème ou il reste beaucoup de choses à faire, on pourrait même établir une longue liste de problèmes concernant ce sujet par exemple beaucoup de classes intéressantes de graphes et de tournois restent à reconstruire.

# 5.0.1 Quelques Problèmes Ouverts en reconstruction et arêtereconstruction des Graphes

Comme on l'a déjà dit la liste des problèmes ouverts que nous proposons ci-dessous est inspirée par les résultats des chapitres précédents :

- **Problème 1 :** Rappelons qu'un graphe simple G est bi-degré, lorsque il existe deux entiers différents p et q tel que le degré des sommets de G vaut p ou q, et on sait d'après le théorème (2.2), que les graphes simples réguliers sont reconstructibles, ce qui nous permet de poser la même question sur les graphes simples bi-degrés.
- **Problème 2 :** On sait d'après les résultats obtenus dans [49] que la classe des graphes bipartis dans certains cas sont reconstructibles, ce qui nous amène à questionner est ce qu'on peut reconstruire un graphe biparti?.
- **Problème 3 :** Si deux graphes infinis sont hypomorphes, alors chacun est isomorphe à un sous-graphe de l'autre (**Halin.**)
- **Problème 4 :** Le cas des multigraphes d'ordre ≥ 3, est ce qu'on peut montrer qu'il sont reconstructibles, sous l'hypothèse que la conjecture d'Ulam soit vérifiée (c-à-d les graphes simples d'ordre ≥ 3 sont reconstructibles)?

Les problèmes de 1 à 4 sont encores ouverts pour l'arête-reconstruction.

## 5.0.2 La reconstruction par Commutation

Le problème de reconstruction par commutation demande, si un graphe simple est uniquement déterminé à un isomorphisme près par son deck de commutation, une carte dans le deck de commutation est obtenue en échangeant l'ensemble des voisins et non voisins d'un sommet, et contrairement aux cartes de deck de la reconstruction ou de l'arête-reconstruction, une carte de deck de commutation d'un graphe G n'est pas un sous-graphe de G, voir [44 53] pour une description détaillé de problème.

#### Définition 5.1

Une carte de commutation d'un graphe simple G = (S(G), A(G)) par rapport à un sommet v de G, est un graphe simple noté G \* v et défini par : S(G \* v) = S(G) et  $A(G * v) = \{A(G) - \{uv : uv \in A(G)\}\} \cup \{uv : uv \notin A(G)\}$ .

En utilisant cette définition, le deck de commutation est construit et la conjecture de reconstruction par commutation similaire aux autres conjectures de reconstructions demande, si un graphe peut être déterminé par son deck de commutation.

#### Définitions 5.1

Etant donné un graphe simple G = (S, A), le multi-ensemble des graphes non étiquetés  $\{G * v : v \in S\}$  est le **deck de commutation** de G, noté par S(G) et chaque graphe  $H \in S(G)$  est une carte de commutation.

Une **reconstruction par commutation** d'un graphe G est un graphe F tel qu'il existe une bijection  $\Pi: S(G) \longrightarrow S(F)$  où  $G * v \cong F * \Pi(v)$  pour tout  $v \in S(G)$ . Un graphe G est dit **reconstructible par commutation** lorsque tout reconstruction par commutation de G est isomorphe à G.

La figure ci-dessous représente la liste des graphes qui ne sont pas reconstructible par commutation :

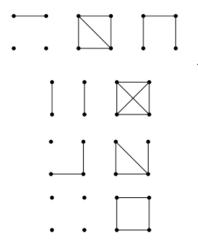


FIGURE 5.1 – Chaque rang présente des graphes qui sont reconstructibles par commutation l'un de l'autre.

En effet, chaque rang de la figure (5.1) contient des graphes qui sont reconstructions par commutation l'un de l'autre mais il ne sont pas isomorphes, d'où la conjecture suivante peut alors énoncée :

## Conjecture 44:

Tout graphe simple d'ordre  $\geq 5$  est reconstructible par commutation.

### 5.0.3 La reconstruction Mineure

Dans cette section, nous introduisons un autre problème de reconstruction lié à l'arêtereconstruction.

Un **mineur** d'un graphe connexe G est un graphe que l'on peut obtenir de G par une séquence de suppressions d'arêtes et d'arêtes contractions, ainsi **un mineur propre maximal** de G est un mineur de G obtenu par la suppression d'une arête ou d'une arête contraction.

Par cette définition, on conclut que  $\mathcal{E}(G) \cup \mathcal{C}(G)$  est le multi-ensemble de tous les mineurs propres maximaux de G, où  $\mathcal{E}(G)$  est l'arête-deck de G et  $\mathcal{C}(G)$  le deck contraction de G.

#### Définitions 5.2

Etant donné un graphe simple G = (S(G), A(G)), le multi-ensemble des graphes non étiquetés  $\mathcal{M}(G) = \mathcal{E}(G) \cup \mathcal{C}(G)$  est le deck mineur de G.

Une reconstruction mineure de G est un graphe F tel qu'il existe deux bijection :  $\varphi_1: A(G) \longrightarrow A(F)$  et  $\varphi_2: A(G) \longrightarrow A(F)$  où  $G - e \cong F - \varphi_1(e)$  et  $G/e \cong F/\varphi_2(e)$  pour tout  $e \in A(G)$ .

Le graphe G est **mineur reconstructible** lorsque toute reconstruction mineure de G lui est isomorphe.

#### Conjecture:

Tout graphe simple de taille  $\geq 3$  est mineur reconstructible.

# 5.0.4 La reconstruction par Contraction

Le problème de reconstruction étudié dans cette section est le problème de reconstruction par contraction, la collection de graphes dérivés de G est l'ensemble de tous les G/e où e est une arête de G, les résultats de la reconstruction par contraction peuvent être trouvés dans [33 [31] [32]].

#### Définitions 5.3

Etant donné un graphe simple G = (S(G), A(G)), le multi-ensemble des graphes non étiquetés  $\mathcal{C}(G) = \{G/e : e \in A(G)\}$  est le **deck contraction** de G, et tout graphe  $H \in \mathcal{C}(G)$  est une carte contraction de G.

Une **reconstruction de contraction** de G est un graphe F tel qu'il existe une bijection  $\varphi: A(G) \longrightarrow A(F)$  où  $G/e \cong F/\varphi(e)$  pour tout  $e \in A(G)$ .

G est **reconstructible par contraction** lorsque toute reconstruction de contraction de G lui est isomorphe.

Par conséquent, pour  $e = (v_i, v_j)$  une arête de G, alors une carte contraction de G notée G/e est l'opération qui consiste à introduire un nouveau sommet  $a_e$  et de nouvelles arêtes telles que  $a_e$  soit adjacente à tous les sommets de N(e), et en supprimant  $v_i$  et  $v_j$  et tous les arêtes qui sont incidents à  $v_i$  ou  $v_j$ .

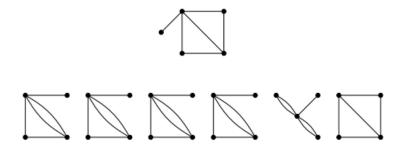


FIGURE 5.2 – Au premier rang : Le graphe G, au deuxième rang le deck contraction  $\mathcal{C}(G)$  de G.

## Conjecture:

Tous les graphes simples de taille  $\geq 4$  sont reconstructible par contraction.

La conjecture principale de reconstruction par contraction peut sembler comme de nombreux problèmes de reconstruction hors de portée pour le moment, cependant nous pensons que de nombreux problèmes plus modestes sont accessibles et intéressants, nous en présentons quelques-unes dans cette section :

**Question 1**: Les graphes séparables , avec un bloc non trivial sont-il reconstructibles par contraction?

Les graphes séparables avec plus d'un bloc non trivial sont reconstructibles par contraction d'après un théorème qu'on peut trouver dans [46], et dans ce même travail les graphes séparables avec un seul bloc non trivial sont également montrés reconstructibles par contraction, mais sous des hypothèses spécifiques sur la structure de bloc non trivial.

Question 2 : Les multi-graphes séparables comportant plus d'un bloc non trivial sont-ils reconstructibles par contraction ?

Des progrès ont été accomplis dans la reconstruction par contraction des graphes réguliers, dans [46] l'auteur montre que les graphes réguliers de distance sont reconstructibles par contraction ce qui nous amène à :

Question 3 : Les graphes réguliers sont-ils reconstructibles par contraction?

# \_CONCLUSION GÉNÉRALE

La conjecture de reconstruction est généralement considérée comme l'un des principaux problèmes non résolus de la théorie des graphes, en effet en 1969 **Harary** l'a même classé dans la catégorie des "Maladies Graphiques" en raison de son caractère contagieux selon des sources fiables [4], elle a été découvert dans le **Wisconsien** (Etats Unis) par **Ulam** et **Kelly** en 1941, et il existe maintenant plus de cent articles qui traitent les progrès vers ça résolution.

Dans ce mémoire nous avons étudié cette conjecture pour les graphes et les tournois, en particulier nous avons considéré un certaine nombre de classe de graphes et de tournois, pour lesquelles l'étude de leur reconstructibilité à été notre principale motivation.

Dans ce manuscrit, nous avons dans un premier temps rappelé les notions et les objets de notre étude, concernant les classes particulières des relations et leurs propriétés, notions de la théorie des graphes et la théorie des tournois.

Afin de mieux comprendre le problème de la reconstruction des graphes, nous avons examiné au chapitre 2, une étude détaillée de ce problème qui affirme selon une formulation équivalente proposée par Harary que tout graphe simple d'ordre  $\geqslant 3$  est uniquement déterminé à un isomorphisme prés par son deck  $\mathcal{D}(G)$ , et qui est généralisé par Kelly en considérant dans ce cas la reconstructibilité des graphe à partir des sous-graphes crées en enlevant k sommets au lieu d'un seul, nous avons présenté aussi quelques paramètres et classes de graphes reconstructibles, à partir de les prouver qu'il sont reconnaissables et faiblement reconstructibles, dans ce mémoire on a montré que les graphes k—réguliers, non connexes, arbres sont reconstructibles, et même chose dans le cas de l'arête-reconstruction, ainsi nous avons abordé le problème des nombres de reconstruction d'un graphe qui peuvent être considérés comme une mesure de la facilité avec laquelle un graphe peut être reconstruit, d'autre part nous avons présenté aussi un certaine nombre de résultats concernant les nombres de reconstruction existentielle et universel pour les graphes d'ordre compris entre 3 et 11 sommets.

Dans le chapitre 3, nous avons présenté des résultats sur l'indécomposabilité des tournois, la caractérisation des tournois critiques et (-1)-critiques, (-1)-chaînes et leurs liens avec la reconstructibilité, ce qui nous amène à poser le problème de la caractérisation des tournois (-2)-critiques?

Finalement, dans le chapitre 4 nous avons étudié la conjecture d'Ulam dans les tournois en précisant la liste des contre-exemples liés à la (-1)-reconstructibilité des tournois, d'autre

part nous avons vu un certain nombre de résultats concernant la (-3)-reconstruction des tournois, ce qui nous amène à poser aussi le problème de la (-2)-reconstruction des tournois?.

# BIBLIOGRAPHIE

- [1] H. Belkhechine and I. Boudabbous. Indecomposable tournaments and their indecomposable subtournaments on 5 and 7 vertices. arXiv preprint arXiv:1007.3049, 2010.
- [2] H. Belkhechine, I. Boudabbous, and J. Dammak. Morphologie des tournois (- 1)-critiques. *Comptes Rendus Mathematique*, 345(12):663–666, 2007.
- [3] B. Bollobás. Almost every graph has reconstruction number three. *Journal of Graph Theory*, 14(1):1–4, 1990.
- [4] J. A. Bondy and R. L. Hemminger. Graph reconstruction—a survey. *Journal of Graph Theory*, 1(3):227–268, 1977.
- [5] I. Boudabbous and P. Ille. Critical and infinite directed graphs. *Discrete Mathematics*, 307(19-20):2415–2428, 2007.
- [6] Y. Boudabbous. Isomorphie héréditaire et {- 4}-hypomorphie pour les tournois. Comptes Rendus Mathematique, 347(15-16):841-844, 2009.
- [7] Y. Boudabbous and A. Boussairi. Reconstruction des tournois et dualité. Comptes rendus de l'Académie des sciences. Série 1, Mathématique, 320(4):397–400, 1995.
- [8] Y. Boudabbous, J. Dammak, and P. Ille. Indecomposability and duality of tournaments. *Discrete Mathematics*, 223(1-3):55–82, 2000.
- [9] Y. Boudabbous and P. Ille. Indecomposability graph and critical vertices of an indecomposable graph. *Discrete Mathematics*, 309(9):2839–2846, 2009.
- [10] A. Boussaïri, P. Ille, G. Lopez, and S. Thomassé. Hypomorphie et inversion locale entre graphes. Comptes rendus de l'Académie des sciences. Série 1, Mathématique, 317(2):125–128, 1993.
- [11] M. Chudnovsky and P. Seymour. Growing without cloning. SIAM Journal on Discrete Mathematics, 26(2):860–880, 2012.
- [12] J. Dammak. Caracterisation des relations binaires finies d-demi-reconstructibles. *Proyecciones (Antofagasta)*, 22(1):31–62, 2003.
- [13] A. Ehrenfeucht and G. Rozenberg. Primitivity is hereditary for 2-structures. *Theoretical Computer Science*, 70(3):343–358, 1990.
- [14] R. Fraïssé. Abritement entre relations et spécialement entre chaînes. In *Symposia Mathematica*, volume 5, pages 203–251, 1970.

BIBLIOGRAPHIE BIBLIOGRAPHIE

[15] R. Fraissé. Theory of relations. revised. vol. 145. Studies in Logic and the Foundations of Mathematics. With an appendix by Norbert Sauer. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 2000.

- [16] T. Gallai. Transitiv orientierbare graphen. Acta Mathematica Hungarica, 18(1-2):25–66, 1967.
- [17] W. B. Giles. Reconstructing trees from two point deleted subtrees. *Discrete Mathematics*, 15(4):325–332, 1976.
- [18] C. Gnanvo. Les tournois (-1)-chaîne. Mathematical Logic Quarterly, 37(2-4):27–37, 1991.
- [19] C. Gnanvo and P. Ille. La reconstruction des tournois sans diamant. *Mathematical Logic Quarterly*, 38(1):283–291, 1992.
- [20] M. Habib. Substitution des structures combinatoires : Théorie et algorithmes. PhD thesis, 1981.
- [21] F. Harary. On the reconstruction of a graph from a collection of subgraphs. In *Theory of Graphs and its Applications (Proc. Sympos. Smolenice*, 1963), pages 47–52. Publ. House Czechoslovak Acad. Sci. Prague, 1964.
- [22] F. Harary. A survey of the reconstruction conjecture. In *Graphs and combinatorics*, pages 18–28. Springer, 1974.
- [23] F. Harary and Ed Palmer. The reconstruction of a tree from its maximal subtrees. Canadian Journal of Mathematics, 18:803–810, 1966.
- [24] F. Harary and Ed Palmer. On the problem of reconstructing a tournament from subtournaments. *Monatshefte für Mathematik*, 71(1):14–23, 1967.
- [25] R. L. Hemminger. On reconstructing a graph. Proceedings of the American Mathematical Society, 20(1):185–187, 1969.
- [26] P. Ille. Indecomposable graphs. Discrete Mathematics, 173(1-3):71–78, 1997.
- [27] R. Kaschek. A first introduction to graph reconstruction.
- [28] D. Kelly. Comparability graphs. In *Graphs and order*, pages 3–40. Springer, 1985.
- [29] P. J. Kelly. On isometric transformations. PhD thesis, 1942.
- [30] P. J. Kelly et al. A congruence theorem for trees. *Pacific Journal of Mathematics*, 7(1):961–968, 1957.
- [31] V. Krishnamoorthy and KR. Parthasarathy. On the reconstruction of separable graphs from elementary contractions. *Discrete Mathematics*, 38(2-3):197–205, 1982.
- [32] S. Kundu. Reconstruction of a unicyclic graph from its elementary contractions. Graph Theory Newsletter,  $4(1):3,\ 1974.$
- [33] S. Kundu, E. Sampathkumar, and V. Bhave. Reconstruction of a tree from its homomorphic images and other related transforms. *Journal of Combinatorial Theory*, *Series B*, 20(2):117–123, 1976.
- [34] G. Lopez. Determination of relation by isomorphic types of its restrictions. COMPTES RENDUS HEBDOMADAIRES DES SEANCES DE L'ACADEMIE DES SCIENCES SERIE A, 275(20):951, 1972.
- [35] G. Lopez. L'indéformabilité des relations et multirelations binaires. *Mathematical Logic Quarterly*, 24(19-24):303–317, 1978.

BIBLIOGRAPHIE BIBLIOGRAPHIE

[36] G. Lopez and C. Rauzy. Reconstruction of binary relations from their restrictions of cardinality 2, 3, 4 and (n-1) i. *Mathematical Logic Quarterly*, 38(1):27–37, 1992.

- [37] B. Manvel. Some basic observations on kelly's conjecture for graphs. *Discrete Mathematics*, 8(2):181–185, 1974.
- [38] S. J. Mary. Reconstructing properties of graphs.
- [39] B. D. McKay. nauty user's guide (version 2.2). Technical report, Technical Report TR-CS-9002, Australian National University, 2003.
- [40] B. McMullen. Ms project proposal graph reconstruction numbers. 2005.
- [41] R. Molina. Correction of a proof on the ally-reconstruction number of a disconnected graph. Ars Combinatoria, 40:59–64, 1995.
- [42] W. Myrvold. The ally-reconstruction number of a disconnected graph. Ars Combinatoria, 28:123–127, 1989.
- [43] C. St JA Nash-W. The reconstruction problem. Selected topics in graph theory, 1:205–236, 1978.
- [44] P. Niesink. *The Vertex-Switching Reconstruction Problem*. PhD thesis, University of Ottawa (Canada), 2010.
- [45] Graph Reconstruction Numbers. Multi-vertex deletion graph reconstruction numbers.
- [46] A. Poirier. Reconstructing a graph from its edge-contractions. PhD thesis, Université d'Ottawa/University of Ottawa, 2018.
- [47] M. Pouzet. Application d'une propriété combinatoire des parties d'un ensemble aux groupes et aux relations. *Mathematische Zeitschrift*, 150(2):117–134, 1976.
- [48] S. Ramachandran. On a new digraph reconstruction conjecture. *Journal of Combinatorial Theory*, Series B, 31(2):143–149, 1981.
- [49] N. Z. Salvi. Reconstructing some invariants of a bipartite graph. J. Combin. Inform. System Sci, 8(1):5–9, 1983.
- [50] J. H. Schmerl and W. T. Trotter. Critically indecomposable partially ordered sets, graphs, tournaments and other binary relational structures. *Discrete Mathematics*, 113(1-3):191–205, 1993.
- [51] M. Sghiar. La (-3)-reconstruction des tournois a au moins 14. 2010.
- [52] J. Spinrad. P4-trees and substitution decomposition. Discrete applied mathematics, 39(3):263–291, 1992.
- [53] R. P. Stanley. Reconstruction from vertex-switching. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 38(2):132–138, 1985.
- [54] P. K. Stockmeyer. The falsity of the reconstruction conjecture for tournaments. Journal of Graph Theory, 1(1):19–25, 1977.
- [55] P. K. Stockmeyer. A census of non-reconstructable digraphs, i : Six related families. Journal of Combinatorial Theory, Series B, 31(2):232–239, 1981.
- [56] P. K. Stockmeyer. Tilting at windmills, or my quest for nonreconstructible graphs. Congressus Numerantium, 63:188–200, 1988.
- [57] P.K. Stockmeyer. New counterexamples to digraph reconstruction conjecture. In NOTICES OF THE AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY, volume 23, pages A654–A655. AMER MATHEMATICAL SOC 201 CHARLES ST, PROVIDENCE, RI 02940-2213, 1976.

BIBLIOGRAPHIE BIBLIOGRAPHIE

[58] S. M. Ulam. A collection of mathematical problems, volume 8. Interscience Publishers, 1960.

[59] J. Weinstein. Reconstructing colored graphs. *Pacific Journal of Mathematics*, 57(1):307–314, 1975.