

UNIVERSITÉ SIDI MOHAMED BEN ABDELLAH FACULTÉ DES
SCIENCES ET TECHNIQUES DE FES

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

MÉMOIRE DE FIN D'ÉTUDES

Pour l'obtention du diplôme de
MASTER MATHÉMATIQUES ET APPLICATIONS

Présenté par

Jihad Benzaid

sous la direction du Pr. **Najib Mahdou**

Thème :

Dimensions Homologiques de Gorenstein

soutenu le 17 juin 2019

Devant le Jury :

A. Hilali	Fac. des Sciences et Techniques - Fès.
C. Bakkari	Fac. des Sciences Moulay Ismaïl - Meknès.
N. Mahdou	Fac. des Sciences et Techniques - Fès.
L. Oukhtite	Fac. des Sciences et Techniques - Fès.
A. R. Hassani	Fac. des Sciences et Techniques - Fès.

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier ALLAH le tout puissant et miséricordieux, qui m'a donné la force et la patience durant ces longues années d'étude pour enfin accomplir ce travail.

En second lieu, je tiens à remercier très chaleureusement notre professeur Najib Mahdou, qui m'a permis de bénéficier de son encadrement, ainsi que pour sa patience et son aide durant toute la période du travail.

Mes vifs remerciements vont également aux Professeurs A.Hilali, C. Bakkari, N. Mahdou, L. Oukhtite et A. R. Hassani pour l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail en acceptant de l'examiner et de l'enrichir par leurs propositions.

Je tiens à saisir cette occasion et adresser mes profonds remerciements et mes profondes reconnaissances à ma mère, la femme de ma vie, qui sans elle, je ne saurais jamais arriver à ce moment. J'espère toujours être à la hauteur de ses attentes et sa confiance : me surpasser, croire en moi et ne jamais baisser les bras.

Je remercie vivement toute ma famille : mon père, ma petite sœur

Aya et mes deux frères Moad et Adam, qui m'ont accompagné, aidé, soutenu et encouragé tout au long de la réalisation de ce mémoire.

Enfin, je tiens également à remercier mes chères amies, pour m'avoir épaulé moralement tous les jours dans la construction de ce mémoire, ainsi que toutes les personnes qui ont participé de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

Table des matières

Introduction	1
1 Préliminaires	28
.	28
1.1 Résultats sur les modules	28
Quelques isomorphismes canoniques	28
Limite inductive	36
1.2 Résultats sur les complexes	37
Morphisme de complexes	37
Classes orthogonales	43
1.3 Dimensions homologiques	43
Dimensions projective, injective et plate des modules	43
1.4 Dimensions homologiques de Gorenstein	48
2 Les modules projectifs, injectifs et plats de Gorenstein forts	59
.	59
2.1 Les modules projectifs et injectifs de Gorenstein forts	59
2.2 Modules plats de Gorenstein forts	68
3 Les modules projectifs, injectifs et plats d'ordre n de Gorenstein forts	74

.	74
3.1 Les modules projectifs et injectifs d'ordre n de Gorenstein forts	74
3.2 Les modules plats d'ordre n de Gorenstein forts	89
4 Les anneaux dans lesquels tous les modules sont projectifs de Go-	
renstein forts	95
.	95
4.1 Préliminaires	96
4.2 Anneaux G-semisimples	97
4.3 Anneaux SG-semisimple	99
5 Les anneaux dans lesquels la classe des modules plats de Gorenstein	
est stable par extensions	105
.	105
5.1 La dimension plate de Gorenstein dans les anneaux GF-clos à gauche	106
5.2 La dimension plate de Gorenstein dans un produit direct d'anneaux .	119
6 La dimension globale de Gorenstein des anneaux polynômiaux et	
des produits directs des anneaux	123
.	123
6.1 Dimensions de Gorenstein des anneaux polynômiaux	123
6.2 Les dimensions de Gorenstein des produits directs des anneaux	128
7 Dimensions globales de Gorenstein et Dimension de Cotorsion des	
anneaux	135
.	135
7.1 Résultats principaux	135
8 Dimensions Globales de Gorenstein	145
.	145
8.1 La dimension globale de Gorenstein des anneaux	145

8.2 La dimension faible de Gorenstein des anneaux	153
Bibliographie	161

Introduction

Dans ce mémoire, sauf dans le Chapitre 5, les anneaux considérés sont commutatifs et unitaires, et les modules sont unitaires.

Pour un anneau R et un R -module M , on utilise $\mathrm{pd}_R(M)$, $\mathrm{id}_R(M)$, et $\mathrm{fd}_R(M)$ pour dénoter, respectivement, les dimensions projective, injective, et plate de M ; et on note par $\mathrm{gldim}(R)$ et $\mathrm{wdim}(R)$, respectivement, les dimensions globale et faible de R .

Nous désignons par “un anneau (m) -local”, un anneau avec un idéal maximal unique (m) (sans qu’il soit nécessairement Noethérien).

On note par M^+ le module caractère $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ d’un module M .

L’histoire des dimensions homologiques de Gorenstein a commencé avec Auslander [2], quand il a introduit la G-dimension pour les modules de type fini sur des anneaux Noethériens et puis il l’a développée avec Bridger dans [3]. La raison derrière le nom G-dimension est le résultat suivant : un anneau Noethérien local est de Gorenstein (i.e., de dimension auto-injective finie) si et seulement si la G-dimension de tout module de type fini est finie [2, Théorème 3, page 64]. Cette caractérisation est analogue à la caractérisation célèbre des anneaux Noethériens locaux réguliers établie par Auslander, Buchbaum, et Serre (voir [4] et [56])¹. Rappelons que, pour un anneau Noethérien R , la G-dimension d’un R -module de type fini M , notée

1. Il est important de mentionner que cette caractérisation est considérée comme la raison principale d’utilisation des méthodes homologiques dans la théorie des anneaux. Notamment, quand elle est utilisée pour répondre affirmativement à la conjecture : “les anneaux Noethériens locaux réguliers sont des domaines factoriels” (voir par exemple [54] et [48]).

$G - \dim_R(M)$, est la longueur minimale d'une résolution de M de termes des R -modules de G -dimension 0, qui sont définis comme suit : Un R -module de type fini M est de G -dimension 0, si :

- M est réflexif, i.e., l'homomorphisme canonique

$$M \rightarrow \operatorname{Hom}_R(\operatorname{Hom}_R(M, R), R)$$

est un isomorphisme ; et

- $\operatorname{Ext}_R^m(M, R) = 0 = \operatorname{Ext}_R^m(\operatorname{Hom}_R(M, R), R)$ pour tout $m > 0$.

La G -dimension est analogue à la dimension projective. Notamment, elles sont étroitement liées par le résultat principal suivant : *Pour tout module de type fini M , $G - \dim(M) \leq \operatorname{pd}(M)$, avec égalité si $\operatorname{pd}(M)$ est finie.* On dit que la G -dimension est un raffinement de la dimension projective. Néanmoins, cette analogie exige une extension de la G -dimension aux modules qui ne sont pas nécessairement de type fini et sur n'importe quel anneau. Dans les années 1990, Enochs et al. [30, 31, 35] ont réussi à établir cette extension en définissant les modules projectifs de Gorenstein et la dimension projective de Gorenstein ⁷ (voir aussi [32]).

Définitions 0.0.1

Soit R un anneau.

- Une suite exacte de R -modules projectifs $\mathbf{P} = \cdots \rightarrow P_1 \rightarrow P_0 \rightarrow P^0 \rightarrow P^1 \rightarrow \cdots$ est dite une *résolution projective complète*, si la suite $\operatorname{Hom}_R(\mathbf{P}, Q)$ est exacte pour tout module projectif Q .
- Un R -module M est dit *projectif de Gorenstein* (en bref, G -projectif), s'il existe une résolution projective complète $\mathbf{P}$ telle que $M \cong \operatorname{Im}(P_0 \rightarrow P^0)$.
- On dit qu'un R -module M est de *dimension projective de Gorenstein* au plus n (pour un entier positif n), et on écrit $\operatorname{Gpd}_R(M) \leq n$, s'il existe une suite exacte de R -modules $0 \rightarrow G_n \rightarrow \cdots \rightarrow G_0 \rightarrow M \rightarrow 0$, dans laquelle chaque G_i est projectif de Gorenstein.

7. En fait, ce sont Avramov, Buchweitz, Martsinkovsky, et Reiten qui ont prouvé que la dimension projective de Gorenstein des modules de type fini sur un anneau Noethérien coïncide avec la G -dimension d'Auslander (voir [22, Théorème 4.2.6 et Notes page 99]).

La définition des modules projectifs de Gorenstein est principalement inspirée de la caractérisation suivante des modules de dimension 0 due à Auslander [2] : Soient R un anneau Noethérien et M un R -module de type fini. Alors, $\text{G-dim}_R(M) = 0$ si et seulement s'il existe une suite exacte de R -modules libres de type fini $\mathbf{L} = \cdots \rightarrow L_1 \rightarrow L_0 \rightarrow L^0 \rightarrow L^1 \rightarrow \cdots$ telle que $M = \text{Im}(L_0 \rightarrow L^0)$ et telle que la suite $\text{Hom}(\mathbf{L}, R)$ est exacte.

Aussi, Enochs et al. [30, 31, 35] ont défini la dimension injective de Gorenstein comme la notion duale de la dimension projective de Gorenstein.

Définitions 0.0.2

Soit R un anneau.

- Une suite exacte de R -modules injectifs $\mathbf{I} := \cdots \rightarrow I_1 \rightarrow I_0 \rightarrow I^0 \rightarrow I^1 \rightarrow \cdots$ est dite une *résolution injective complète*, si la suite $\text{Hom}_R(E, \mathbf{I})$ est exacte pour tout module injectif E .
- Un R -module M est dit *injectif de Gorenstein* (en bref, G-injectif), s'il existe une résolution injective complète $\mathbf{I}$ telle que $M \cong \text{Im}(I_0 \rightarrow I^0)$.
- On dit qu'un R -module M est de *dimension injective de Gorenstein* au plus n (pour un entier positif n), et on écrit $\text{Gid}_R(M) \leq n$, s'il existe une suite exacte de R -modules $0 \rightarrow M \rightarrow G_0 \rightarrow \cdots \rightarrow G_n \rightarrow 0$, dans laquelle G_i est injectif de Gorenstein.

Finalement, pour compléter l'analogie avec les dimensions homologiques classiques, Enochs et al. [34] ont introduit la dimension plate de Gorenstein.

Définitions 0.0.3

Soit R un anneau.

- Une suite exacte de R -modules plats $\mathbf{F} := \cdots \rightarrow F_1 \rightarrow F_0 \rightarrow F^0 \rightarrow F^1 \rightarrow \cdots$ est dite une *résolution plate complète*, si la suite $\mathbf{F} \otimes_R I$ est exacte pour tout module injectif I .
- Un R -module M est dit *plat de Gorenstein* (en bref, G-plat), s'il existe une résolution plate complète $\mathbf{F}$ telle que $M \cong \text{Im}(F_0 \rightarrow F^0)$.

• On dit qu'un R -module M est de *dimension plate de Gorenstein* au plus n (pour un entier positif n), et on écrit $\mathrm{Gfd}_R(M) \leq n$, s'il existe une suite exacte de R -modules $0 \rightarrow G_n \rightarrow \cdots \rightarrow G_0 \rightarrow M \rightarrow 0$, dans laquelle chaque G_i est plat de Gorenstein.

Les dimensions homologiques de Gorenstein sur des anneaux Noethériens étaient le sujet de recherche de plusieurs travaux considérables (voir [22]¹ et [32]). La majorité de ces travaux confirme que ces dimensions sont similaires aux dimensions homologiques classiques. Notamment, elles sont liées par les assertions suivantes : Pour un anneau Noethérien R et un R -module M , on a :

- $\mathrm{Gpd}_R(M) \leq \mathrm{pd}_R(M)$ avec égalité si $\mathrm{pd}_R(M)$ est finie.
- $\mathrm{Gid}_R(M) \leq \mathrm{id}_R(M)$ avec égalité si $\mathrm{id}_R(M)$ est finie.
- $\mathrm{Gfd}_R(M) \leq \mathrm{fd}_R(M)$ avec égalité si $\mathrm{fd}_R(M)$ est finie.

D'autre part, rappelons qu'un anneau R est dit *n -Gorenstein*, pour un entier positif n , si R est Noethérien avec $\mathrm{id}_R(R) \leq n$. L'anneau R est dit *Iwanaga-Gorenstein*, s'il est n -Gorenstein pour un certain entier positif n [32] et [44]⁷. Dans ce contexte, les dimensions homologiques de Gorenstein servent à caractériser les anneaux Iwanaga-Gorenstein comme suivant :

Théorème 0.0.4 ([32], Théorème 12.3.1)

Si R est un anneau Noethérien, alors les assertions suivantes sont équivalentes pour un entier positif n :

1. R est n -Gorenstein ;
2. $\mathrm{Gpd}_R(M) \leq n$ pour tout R -module M ;

1. Voir Errata du livre [22] dans le site de Christensen : www.math.ttu.edu/~lchrste/.

7. Rappelons qu'un anneau Noethérien local R est dit *de Gorenstein*, si $\mathrm{id}_R(R)$ est finie. En général, un anneau Noethérien R est *de Gorenstein*, si le localisé R_p est de Gorenstein pour tout idéal premier p de R [7] (voir aussi [48]). Il est montré qu'un anneau est Iwanaga-Gorenstein si et seulement s'il est de Gorenstein et de dimension de Krull finie. Noter que les anneaux Iwanaga-Gorenstein locaux coïncident avec les anneaux de Gorenstein locaux ; ce qui n'est pas vrai en général.

3. $\text{Gid}_R(M) \leq n$ pour tout R -module M ;
4. $\text{Gfd}_R(M) \leq n$ pour tout R -module M .

Aussi, la dimension plate de Gorenstein sert à caractériser les anneaux n -FC. Les anneaux n -FC sont introduits dans [21] comme une généralisation des anneaux n -Gorenstein de la façon suivante :

Définitions 0.0.5 ([21], [40] et [57])

Soient R un anneau et n un entier positif.

- On dit qu'un R -module M a une dimension *FP-injective* (ou *pure*) inférieure ou égale à n , notée $\text{FP-id}_R(M) \leq n$, si $\text{Ext}_R^{n+1}(P, M) = 0$ pour tout R -module P de présentation finie.

Les modules de dimension FP-injective 0 sont dits *FP-injectifs* (ou *absolument purs*).

- R est dit *n -FC* , s'il est cohérent avec $\text{FP-id}_R(R) \leq n$.

Il est évident que, sur un anneau Noethérien, la dimension FP-injective coïncide avec la dimension injective classique. Ainsi, pour un entier positif n , un anneau Noethérien est n -FC si et seulement s'il est n -Gorenstein. Comme conséquence, le résultat suivant généralise l'équivalence (1) $\Leftrightarrow$ (4) du Théorème 0.0.4.

Théorème 0.0.6 ([21], Théorème 7)

Pour un anneau cohérent R , les assertions suivantes sont équivalentes :

1. R est n -FC ;
2. $\text{Gfd}_R(M) \leq n$ pour tout R -module M ;
3. $\text{Gpd}_R(M) \leq n$ pour tout R -module M de présentation finie.

Finalement, avec les travaux de Holm, la théorie des dimensions homologiques de Gorenstein ont connu une nouvelle phase. En fait, dans [42], Holm a généralisé plusieurs résultats obtenus sur des anneaux Noethériens (voir aussi [24]) et il a donné

des descriptions fonctorielles importantes des dimensions de Gorenstein. L'un des principaux résultats est le suivant (Théorème 1.4.13) : Soient R un anneau et M un R -module de dimension projective de Gorenstein finie. Alors, pour un entier positif n , les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $\text{Gpd}(M) \leq n$;
2. $\text{Ext}^i(M, L) = 0$ pour tout $i > n$ et tout module L avec $\text{pd}(L)$ finie ;
3. $\text{Ext}^i(M, Q) = 0$ pour tout $i > n$ et tout module projectif Q ;
4. Pour toute suite exacte $0 \rightarrow K_n \rightarrow G_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow G_0 \rightarrow M \rightarrow 0$, si $G_1, \dots, G_{n-1}$ sont Gorenstein projectifs, alors K_n est aussi Gorenstein projectif.

En plus, il a donné un résultat analogue pour le cas de la dimension injective de Gorenstein. Concernant la dimension plate de Gorenstein, il a obtenu un résultat similaire sur des anneaux cohérents.

Ce mémoire représente quelques contributions importantes à la théorie des dimensions de Gorenstein. Il est divisé en huit chapitres couvrant les sept articles suivants [8, 10, 9, 14, 11, 12, 13] :

* * * * * ✱ 1 ✱ * * * * *

Ce **premier** chapitre contient les notions de base en relation avec les dimensions homologiques de Gorenstein :

- La première et deuxième sections contiendront des notions et résultats primordiaux sur les catégories des modules et des complexes.
- La troisième section présente les résultats principaux des dimensions homologiques classiques des modules et des anneaux.
- La quatrième section expose les résultats principaux de l'article de H.Holm sur les dimensions homologiques de Gorenstein [42].

* * * * * ✱ 2 ✱ * * * * *

Dans le **Chapitre 2**, une étude d'un cas particulier de modules projectifs, injectifs, et plats de Gorenstein, est menée.

Ces modules sont définis comme suit (Définitions 2.1.1 et 2.2.1) :

Définitions. • Une résolution projective complète de la forme

$$\mathbf{P} = \cdots \xrightarrow{f} P \xrightarrow{f} P \xrightarrow{f} P \xrightarrow{f} \cdots$$

est appelée une résolution *projective complète forte* et notée $(\mathbf{P}, f)$.

Un module M est dit *projectif de Gorenstein fort* (SG-projectif en bref), si $M \cong \text{Ker } f$ pour une certaine résolution projective complète forte $(\mathbf{P}, f)$.

- Les modules *injectifs de Gorenstein forts* (SG-injectif en bref) sont définis dualement.
- Une résolution plate complète de la forme

$$\mathbf{F} = \cdots \xrightarrow{f} F \xrightarrow{f} F \xrightarrow{f} F \xrightarrow{f} \cdots$$

est appelée une résolution *plate complète forte* et notée $(\mathbf{F}, f)$.

Un module M est dit *plat de Gorenstein fort* (SG-plat en bref), si $M \cong \text{Ker } f$ pour une certaine résolution plate complète forte $(\mathbf{F}, f)$.

Il est connu que tout module projectif est un module projectif de Gorenstein. Notamment, on a l'inclusion suivante :

$$\{\text{modules projectifs}\} \subseteq \{\text{modules G-projectifs}\}.$$

Nous verrons que la classe des modules projectifs de Gorenstein forts est une classe intermédiaire, ainsi on a les inclusions suivantes (Proposition 2.1.3 ; voir aussi Proposition 2.2.2) :

$$\begin{aligned} \{\text{modules projectifs}\} &\subseteq \{\text{modules SG-projectifs}\} \\ &\subseteq \{\text{modules G-projectifs}\}. \end{aligned}$$

La première section contiendra également des exemples montrant qu'en général ces inclusions sont strictes (Exemples 2.1.5, 2.1.13, 2.2.3, et 2.2.11). Nous établissons aussi des conditions pour qu'un module projectif (resp., plat) de Gorenstein fort soit plat (Corollaire 2.1.11, Proposition 2.2.7, et Corollaire 2.2.8 ; voir aussi Lemme 8.1.9.)

Avec les modules de Gorenstein forts, une nouvelle et simple caractérisation de modules projectifs, injectifs, et plats de Gorenstein, sera établie. Ces caractérisations sont les résultats principaux du Chapitre 2 (Théorèmes 2.1.7 et 2.2.5) :

Théorème. • *Un module est projectif (resp., injectif) de Gorenstein si et seulement s'il est un facteur direct d'un module projectif (resp., injectif) de Gorenstein fort.*

• *Tout module plat de Gorenstein est un facteur direct d'un module plat de Gorenstein fort.*

En fait, l'importance des résultats ci-dessus se manifeste par le fait que les modules de Gorenstein forts ont des caractérisations plus simples que celles de ces modules correspondants de Gorenstein. Par exemple, les modules projectifs de Gorenstein ont les caractérisations suivantes (d'après Proposition 1.4.1 et Théorème 1.4.13] et [36, preuve du Théorème 1.4 (1) $\Leftrightarrow$ (4)] :

Théorème 0.0.7

Pour un module M , les assertions suivantes sont équivalentes :

1. *M est projectif de Gorenstein ;*
2. *Il existe une suite exacte de modules projectifs*

$$\mathbf{P} = \cdots \rightarrow P_1 \rightarrow P_0 \rightarrow P^0 \rightarrow P^1 \rightarrow \cdots ,$$

telle que $M \cong \text{Im}(P_0 \rightarrow P^0)$ et que la suite $\text{Hom}(\mathbf{P}, F)$ est exacte pour tout module F de dimension projective finie.

3. **i)** *$\text{Ext}^i(M, Q) = 0$ pour tout $i > 0$ et tout module projectif Q ;*

- ii) Il existe une suite exacte $\mathbf{P} = 0 \rightarrow M \rightarrow P_0 \rightarrow P_1 \rightarrow \cdots$, où chaque P_i est un module projectif, telle que la suite $\text{Hom}(\mathbf{P}, Q)$ est exacte pour tout module projectif Q .
4. i) $\text{Ext}^i(M, F) = 0$ pour tout $i > 0$ et tout module F de dimension projective finie ;
- ii) Il existe une suite exacte $\mathbf{P} = 0 \rightarrow M \rightarrow P_0 \rightarrow P_1 \rightarrow \cdots$, où chaque P_i est un module projectif, telle que la suite $\text{Hom}(\mathbf{P}, F)$ est exacte pour tout module F de dimension projective finie.
5. Il existe une famille de suites exactes courtes

$$0 \rightarrow M_i \rightarrow P_i \rightarrow M_{i+1} \rightarrow 0 \quad i \in \mathbb{Z},$$

où chaque P_i est un module projectif et $M_0 = M$, telle que, pour tout $i \in \mathbb{Z}$, $\text{Ext}(M_i, Q) = 0$ pour tout module projectif Q .

Pour les modules projectifs de Gorenstein forts, on a la Proposition 2.1.9 ; voir aussi les Propositions 2.1.12 et 2.2.6 et la Remarque 2.1.10 (2) :

Proposition. *Pour un module M , les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. M est projectif de Gorenstein fort ;
2. Il existe une suite exacte courte $0 \rightarrow M \rightarrow P \rightarrow M \rightarrow 0$, où P est un module projectif, et $\text{Ext}(M, Q) = 0$ pour tout module projectif Q ;
3. Il existe une suite exacte courte $0 \rightarrow M \rightarrow P \rightarrow M \rightarrow 0$, où P est un module projectif, et $\text{Ext}(M, Q') = 0$ pour tout module Q' de dimension projective finie ;
4. Il existe une suite exacte courte $0 \rightarrow M \rightarrow P \rightarrow M \rightarrow 0$, où P est un module projectif, telle que, pour tout module projectif Q , la suite $0 \rightarrow \text{Hom}(M, Q) \rightarrow \text{Hom}(P, Q) \rightarrow \text{Hom}(M, Q) \rightarrow 0$ est exacte ;
5. Il existe une suite exacte courte $0 \rightarrow M \rightarrow P \rightarrow M \rightarrow 0$, où P est un module projectif, telle que, pour tout module Q' de dimension projective finie, la suite $0 \rightarrow \text{Hom}(M, Q') \rightarrow \text{Hom}(P, Q') \rightarrow \text{Hom}(M, Q') \rightarrow 0$ est exacte.

Comme il est mentionné, les modules projectifs, injectifs et plats de Gorenstein sont largement étudiés sur des anneaux Noethériens. Ainsi, on trouve que la relation qui existe entre les modules projectifs de Gorenstein et les modules plats de Gorenstein est (presque) similaire à celle existant entre les modules projectifs et les modules plats classiques. Par exemple, si R est un anneau Noethérien de dimension de Krull finie, alors tout R -module projectif de Gorenstein est plat de Gorenstein [22, Proposition 5.1.4]⁷. Et, d'après [22, Théorème 5.1.11], si R est un anneau Noethérien, alors un R -module de type fini est projectif de Gorenstein si et seulement s'il est plat de Gorenstein. Dans [42], Holm a étendu le résultat obtenu dans [22, Proposition 5.1.4] aux anneaux cohérents de dimension finitiste finie : la dimension finitiste d'un anneau R , notée $\text{FPD}(R)$, est définie par :

$$\text{FPD}(R) = \sup\{\text{pd}_R(M) \mid M \text{ est un } R\text{-module avec } \text{pd}_R(M) < \infty\}.$$

Il est connu que si R est un anneau Noethérien, alors la dimension finitiste de R coïncide avec sa dimension de Krull [41, Théorème 3.2.6].

Proposition 0.0.8 (Proposition 1.4.21)

Si R est un anneau cohérent de dimension finitiste finie, alors tout R -module projectif de Gorenstein est plat de Gorenstein.

Aussi, d'après [42, Section 3], la preuve du [22, Théorème 5.1.11] et celle du [22, Lemme 5.1.10]¹ restent valables sur les anneaux cohérents. Ainsi, [22, Théorème 5.1.11] peut s'étendre aux anneaux cohérents :

Proposition 0.0.9

Si R est un anneau cohérent, alors un R -module de présentation finie est projectif de Gorenstein si et seulement s'il est plat de Gorenstein.

Dans ce contexte, les modules projectifs et plats de Gorenstein forts nous donnent plus de relations (voir Proposition 2.2.9 et Corollaire 2.2.10) :

7. voir la note de la page 4.

1. voir la note de la page 4.

Proposition. *Un module de type fini est projectif de Gorenstein fort si et seulement s'il est plat de Gorenstein fort et de présentation finie.*

Corollaire. *Si R est un domaine ou un anneau local, alors un module de type fini est projectif de Gorenstein fort si et seulement s'il est plat de Gorenstein fort.*

L'étude des modules projectifs de Gorenstein forts de type fini nous a permis de donner une nouvelle caractérisation des S -anneaux : un anneau R est dit S -anneau, si tout R -module plat de type fini est projectif (voir [53]). On prouve la Proposition 2.2.12 :

Proposition. *R est un S -anneau si et seulement si tout module plat de Gorenstein fort de type fini est un R -module projectif de Gorenstein fort.*

Finalement, une généralisation de modules de Gorenstein forts, a été introduite dans [15] plus récemment, définie comme suit :

Définition 0.0.10 ([15], Definition 2.1)

Soit n un entier positif. Un R -module M est n -projectif de Gorenstein fort, s'il existe une suite exacte de R -modules :

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow P_n \longrightarrow \dots \longrightarrow P_1 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

telle que les P_i sont projectifs, et que la suite reste exacte lorsqu'on applique le foncteur $\text{Hom}_R(-, Q)$, où Q est un R -module projectif.

Par conséquent, les modules 1-projectifs de Gorenstein forts sont exactement les modules projectifs de Gorenstein forts.

Dans [15], c'est bien montré que tout module n -projectif de Gorenstein fort est projectif de Gorenstein et tout module projectif de Gorenstein fort est n -projectif de Gorenstein [15, Proposition 2.5].

.....* 3 *.....

Le **Chapitre 3**, contiendra une étude des cas particuliers des modules de dimensions projective, injective et plate de Gorenstein finies. Ces nouvelles classes de modules généralisent les notions de module projectif, injectif et plat de Gorenstein (fort), respectivement, et donnent des nouvelles caractérisations des modules de dimensions projective, injective et plate de Gorenstein finies, et ils sont définis comme suit (Définitions 3.1.1 et 3.2.1) :

Définitions. Soit n un entier positif.

1. Un R -module M est dit *projectif d'ordre n de Gorenstein fort* s'il existe une suite exacte courte

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow P \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

où $\text{pd}(P) \leq n$, et $\text{Ext}^{n+1}(M, Q) = 0$ pour tout module projectif Q .

2. Un R -module M est dit *injectif d'ordre n de Gorenstein fort* s'il existe une suite exacte courte

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow I \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

où $\text{id}(I) \leq n$, et $\text{Ext}^{n+1}(E, M) = 0$ pour tout module injectif E .

3. Un R -module M est dit *plat d'ordre n de Gorenstein fort* s'il existe une suite exacte courte

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow F \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

où $\text{fd}_R(P) \leq n$, et $\text{Tor}_R^{n+1}(M, I) = 0$ pour tout module injectif I .

On montrera que la classe des modules projectifs d'ordre n de Gorenstein forts est une classe intermédiaire entre celle des modules de dimension projective $\leq n$ et celle des modules de dimension projective de Gorenstein $\leq n$ (Propositions 3.1.2 et 3.2.2). Cependant, ces inclusions peuvent être strictes (Exemples 3.1.4 et 3.1.5).

Les modules projectifs et injectifs d'ordre n de Gorenstein forts, ont permis de donner une nouvelle et simple caractérisation des modules de dimensions projective et injective de Gorenstein $\leq n$. Ces caractérisations sont les résultats principaux du Chapitre 3 (Théorèmes 3.1.6 et 3.1.7).

Théorème. Soient M un R -module et n un entier positif. Alors, $\text{Gpd}_R(M) \leq n$ (resp., $\text{Gid}_R(M) \leq n$) si et seulement si M est un facteur direct d'un module projectif (resp., injectif) d'ordre n de Gorenstein fort.

Par analogie, on a (Théorème 3.2.4) :

Théorème. Soient R un anneau cohérent, M un R -module et n un entier positif. Alors, $\text{Gfd}_R(M) \leq n$ si et seulement si M est un facteur direct d'un R -module plat d'ordre n de Gorenstein fort.

En outre, la première section présentera quelques caractérisations des modules projectifs d'ordre n de Gorenstein forts (Propositions 3.1.9 et 3.1.10).

Proposition. Pour tout R -module M et tout entier positif n , les assertions suivantes sont équivalentes :

1. M est projectif d'ordre n de Gorenstein fort.
2. Il existe une suite exacte courte $0 \rightarrow M \rightarrow Q \rightarrow M \rightarrow 0$ où $\text{pd}_R(Q) \leq n$ et $\text{Ext}_R^i(M, P) = 0$ pour tout $i > n$ et tout R -module P de dimension projective finie.
3. Il existe une suite exacte courte $0 \rightarrow M \rightarrow Q \rightarrow M \rightarrow 0$ où $\text{pd}_R(Q) < \infty$ et $\text{Ext}_R^i(M, P) = 0$ pour tout $i > n$ et tout R -module projectif P .

Proposition. Si $\text{G-gldim}(R) < \infty$. Alors :

1. M est projectif d'ordre n de Gorenstein fort si et seulement s'il existe une suite exacte courte $0 \rightarrow M \rightarrow Q \rightarrow M \rightarrow 0$ où $\text{pd}_R(Q) \leq n$.
2. M est injectif d'ordre n de Gorenstein fort si et seulement s'il existe une suite exacte courte $0 \rightarrow M \rightarrow E \rightarrow M \rightarrow 0$ où $\text{id}_R(E) \leq n$.

A la fin du Chapitre, on donne une relation qui relie les modules projectifs et plats d'ordre n de Gorenstein forts sous certaines conditions (Proposition 3.2.7 et Corollaire 3.2.8).

Proposition. Soient M un R -module et n un entier positif. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. M est projectif d'ordre n de Gorenstein fort qui admet une n -présentation finie.
2. M est plat d'ordre n de Gorenstein fort qui admet une $n+1$ -présentation finie.

Corollaire. *Si R est un anneau cohérent et M est un R -module de présentation finie, alors M est projectif d'ordre n de Gorenstein fort si et seulement s'il est plat d'ordre n de Gorenstein fort.*

Dans ce chapitre, on aura besoin dans certaines preuves du lemme suivant :

Lemme 0.0.11

Soit $0 \rightarrow N \rightarrow N' \rightarrow N'' \rightarrow 0$ une suite exacte de R -modules. Alors,

1. $\text{Gpd}_R(N') \leq \max\{\text{Gpd}_R(N), \text{Gpd}_R(N'')\}$ avec égalité si $\text{Gpd}_R(N) + 1 \neq \text{Gpd}_R(N'')$.
2. $\text{Gpd}_R(N'') \leq \max\{\text{Gpd}_R(N'), \text{Gpd}_R(N) + 1\}$ avec égalité si $\text{Gpd}_R(N') \neq \text{Gpd}_R(N)$.
3. $\text{Gpd}_R(N) \leq \max\{\text{Gpd}_R(N'), \text{Gpd}_R(N'') - 1\}$ avec égalité si $\text{Gpd}_R(N') \neq \text{Gpd}_R(N'')$.

Preuve. En utilisant Théorèmes 1.4.13 et 1.4.9 la preuve est analogue à celle de [19, Corollaire 2, p. 135]. ■

* * * * * ✱ 4 ✱ * * * * *

Dans le **Chapitre 4**, on étudiera les deux types d'anneaux suivants :

1. Les anneaux sur lesquels tous les modules sont projectifs (resp., injectifs) de Gorenstein, appelés *G-semisimples* (voir Proposition 4.2.1).
2. Les anneaux, appelés *SG-semisimples*, sur lesquels tous les modules sont projectifs (resp., injectifs) de de Gorenstein forts (voir Proposition 4.3.1).

Nous verrons que les anneaux G-semisimples sont Noethériens (et, par conséquent 0-Gorenstein). Les anneaux 0-Gorenstein sont exactement les anneaux quasi-Frobenius, ces derniers sont largement étudiés et, par suite, caractérisés par plusieurs notions

(voir [51] pour plus de détails). Il se trouve que notre caractérisation des anneaux G -semisimples est, en fait, une extension de la liste des propriétés qui caractérisent les anneaux quasi-Frobenius. Précisément, on a (Théorème 4.2.2) :

Théorème. *Pour un anneau R , les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *R est G -semisimple ;*
2. *Tout R -module injectif de Gorenstein est projectif de Gorenstein ;*
3. *Tout R -module injectif de Gorenstein fort est projectif de Gorenstein fort ;*
4. *Tout R -module projectif de Gorenstein est injectif de Gorenstein ;*
5. *Tout R -module projectif de Gorenstein fort est injectif de Gorenstein fort ;*
6. *R est quasi-Frobenius.*

Les anneaux SG -semisimples sont alors des cas particuliers des anneaux quasi-Frobenius. Ainsi, le deuxième objectif du Chapitre 4 est de voir quels types d'anneaux quasi-Frobenius sont les anneaux SG -semisimples. Pour cela, nous caractérisons d'abord les anneaux SG -semisimples locaux (Théorème 4.3.7) :

Théorème. *Un anneau local est SG -semisimple si et seulement s'il possède un seul idéal propre.*

En général, le (Théorème 4.3.3) sera montré :

Théorème. *Un anneau est SG -semisimple si et seulement s'il est produit direct d'un nombre fini d'anneaux locaux et SG -semisimples.*

Enfin, le chapitre finira par des exemples d'anneaux SG -semisimples, puis des exemples d'anneaux G -semisimples qui ne sont pas SG -semisimples (voir Exemples 4.3.9 et 4.3.10).

***** ✱ 5 ✱ *****

Le **Chapitre 5** est consacré à l'étude de la dimension plate de Gorenstein.

Les anneaux considérés dans ce chapitre ne sont pas nécessairement commutatifs.

La notion de modules plats de Gorenstein est étudiée en premier lieu sur des anneaux Iwanaga-Gorenstein, par Enochs, Jenda et Torrecillas [34], comme une généralisation de la notion classique de modules plats, dans le sens qu'un module est plat si et seulement s'il est plat de Gorenstein et de dimension plate finie⁷. Dans [21], Chen et Ding ont généralisé des caractérisations connues de modules plats de Gorenstein (et alors de la dimension plate de Gorenstein) sur les anneaux Iwanaga-Gorenstein aux anneaux n -FC (voir Définition 0.0.5). Dans [42], Holm utilise la notion de caractères des modules sur les anneaux cohérents pour transférer des résultats concernant les modules injectifs de Gorenstein à des modules plats de Gorenstein. Ainsi, il a étendu l'étude de la dimension plate de Gorenstein aux anneaux cohérents.

Dans ce contexte, nous élargissons la classe d'anneaux sur lesquels la dimension plate de Gorenstein a de "bons comportements". Notamment, nous étudions la dimension plate de Gorenstein sur une nouvelle classe d'anneaux que nous appelons *GF-clos* : Un anneau R est dit *GF-clos* à gauche, si la classe $\mathcal{GF}(R)$ des R -modules à gauche plats de Gorenstein est stable par extensions (voir Définitions ci-dessous). La classe d'anneaux GF-clos à gauche inclut strictement celle des anneaux cohérents et aussi celle des anneaux de dimension faible finie (voir la note après la Proposition 5.1.2).

Les résultats principaux du Chapitre 5 sont dans la Section 5.1. Nous commençons par étudier l'action des modules plats de Gorenstein sur les suites exactes courtes. Rappelons à cet effet que :

7. Cela est aussi vérifié sur des anneaux cohérents (voir la note après Proposition 2.2.6 ; voir aussi Proposition 2.2.7 et Corollaire 2.2.8).

Définitions 0.0.12

Soit R un anneau et soit $\mathcal{X}$ une classe de R -modules à gauche.

1. On dit que la classe $\mathcal{X}$ est *stable par extensions*, si pour toute suite exacte de R -modules à gauche $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$, la condition “ A et C sont dans $\mathcal{X}$ ” implique que B est aussi dans $\mathcal{X}$.
2. On dit que la classe $\mathcal{X}$ est *stable par noyaux des surjections*, si pour toute suite exacte de R -modules à gauche $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$, la condition “ B et C sont dans $\mathcal{X}$ ” implique que A est aussi dans $\mathcal{X}$.
3. La classe $\mathcal{X}$ est dite *résolvante projectivement*, si elle contient tous les R -modules à gauche projectifs, et qu’elle est stable par extensions et par noyaux des surjections ; i.e., pour toute suite exacte de R -modules à gauche $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ avec $C \in \mathcal{X}$, les conditions “ $A \in \mathcal{X}$ ” et “ $B \in \mathcal{X}$ ” sont équivalentes.

Le résultat fondamental suivant (Théorème 5.1.3) généralise Théorème 1.4.23 :

Théorème. *Pour un anneau R , les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. R est GF-clos à gauche ;
2. La classe $\mathcal{GF}(R)$ est résolvante projectivement ;
3. Pour toute suite exacte de R -modules à gauche $0 \rightarrow G_1 \rightarrow G_0 \rightarrow M \rightarrow 0$, où G_0 et G_1 sont plats de Gorenstein. Si $\text{Tor}(I, M) = 0$ pour tout R -module à droite injectif I alors M est plat de Gorenstein.

Par conséquence, si R est un anneau GF-clos à gauche, alors la classe $\mathcal{GF}(R)$ est stable par facteurs directs (Corollaire 5.1.6).

Le résultat fondamental ci-dessus permet de généraliser la caractérisation de la dimension plate de Gorenstein, qui était restreinte sur des anneaux cohérents (Théorème 1.4.29), aux anneaux GF-clos à gauche (Théorème 5.1.8) :

Théorème. *Si R est un anneau GF-clos à gauche, alors, pour un R -module à gauche M et un entier positif n , les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. $\text{Gfd}_R(M) \leq n$;
2. $\text{Gfd}_R(M) < \infty$ et $\text{Tor}_i^R(I, M) = 0$ pour tout $i > n$ et tout R -module à droite injectif I ;
3. $\text{Gfd}_R(M) < \infty$ et $\text{Tor}_i^R(E, M) = 0$ pour tout $i > n$ et tout R -module à droite E avec $\text{id}_R(E) < \infty$;
4. Pour toute suite exacte de R -modules à gauche $0 \rightarrow K_n \rightarrow G_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow G_0 \rightarrow M \rightarrow 0$, si chaque G_i est plat de Gorenstein, alors K_n est plat de Gorenstein.

De plus, si $\text{Gfd}_R(M) < \infty$, alors :

$$\begin{aligned} \text{Gfd}_R(M) &= \sup \left\{ i \in \mathbb{N} \left| \begin{array}{l} \text{Tor}_i^R(E, M) \neq 0 \text{ pour un } R\text{-module} \\ \text{à droite } E \text{ avec } \text{id}_R(E) < \infty. \end{array} \right. \right\} \\ &= \sup \left\{ i \in \mathbb{N} \left| \begin{array}{l} \text{Tor}_i^R(I, M) \neq 0 \text{ pour un } R\text{-module} \\ \text{à droite injectif } I. \end{array} \right. \right\}. \end{aligned}$$

La Section 5.1 prendra sa fin avec le théorème 5.1.11 qui généralise Théorème 1.4.30 :

Théorème. Si R est un anneau GF-clos à gauche, alors pour toute suite exacte courte de R -modules à gauche $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$, on a :

1. Si deux des modules A , B et C sont de dimension plate de Gorenstein finie, alors le troisième est aussi de dimension plate de Gorenstein finie.
2. On a $\text{Gfd}_R(A) \leq \sup\{\text{Gfd}_R(B), \text{Gfd}_R(C) - 1\}$.
L'égalité a lieu dès que $\text{Gfd}_R(B) \neq \text{Gfd}_R(C)$.
3. On a $\text{Gfd}_R(B) \leq \sup\{\text{Gfd}_R(A), \text{Gfd}_R(C)\}$.
L'égalité a lieu dès que $\text{Gfd}_R(C) \neq \text{Gfd}_R(A) + 1$.
4. On a $\text{Gfd}_R(C) \leq \sup\{\text{Gfd}_R(B), \text{Gfd}_R(A) + 1\}$.
L'égalité a lieu dès que $\text{Gfd}_R(B) \neq \text{Gfd}_R(A)$.

Dans la deuxième section du Chapitre 5, on étudiera la dimension plate de Gorenstein sur les produits directs d'un nombre fini d'anneaux. Le principal résultat est le suivant (Théorème 5.2.4) :

Théorème. Soient n un entier, $R = \prod_{i=1}^n R_i$ un produit direct de n anneaux et $N = N_1 \oplus \cdots \oplus N_n$ une décomposition canonique d'un R -module à gauche N . Alors,

$$\text{Gfd}_R(N) = \sup\{\text{Gfd}_{R_i}(N_i) \mid i = 0, \dots, n\}.$$

Ce théorème nous a permis de construire une classe d'anneaux GF-clos à gauche qui ne sont ni cohérents à droite ni de dimension faible finie (voir Exemple 5.2.6).

* * * * * * * * * * * 6, 7, et 8 * * * * * * * * * *

Le reste du mémoire (**Chapitres 6, 7, et 8**) est consacré à l'étude des dimensions de Gorenstein des anneaux commutatifs, ces dimensions sont canoniquement définies, pour un anneau R , de la façon suivante :

— La *dimension projective globale de Gorenstein* de R est :

$$\text{GPD}(R) = \sup\{\text{Gpd}_R(M) \mid M \text{ est un } R\text{-module}\}$$

— La *dimension injective globale de Gorenstein* de R est :

$$\text{GID}(R) = \sup\{\text{Gid}_R(M) \mid M \text{ est un } R\text{-module}\}$$

— La *dimension plate globale de Gorenstein* de R est :

$$\text{GFD}(R) = \sup\{\text{Gfd}_R(M) \mid M \text{ est un } R\text{-module}\}$$

L'objectif principal du **Chapitre 6** est le calcul des dimensions globales de Gorenstein des anneaux de polynômes et des produits directs finis d'anneaux. Les résultats du Chapitre 5 (et aussi ceux du Chapitre 7) se basent sur ceux du Chapitre 8. Ainsi, nous exposons d'abord les résultats du Chapitre 8.

* * * * * * * * * * * 8 * * * * * * * * * *

Le chapitre 8 est consacré à une étude générale des dimensions homologiques de Gorenstein des anneaux commutatifs.

Comme il est mentionné par Holm dans sa thèse [43, page v], la recherche sur les dimensions de Gorenstein tente essentiellement de prouver le “meta-théorème” suivant (avec ou sans conditions restrictives) :

★ *Tout résultat dans la théorie des dimensions homologiques classiques a son analogue dans la théorie des dimensions homologiques de Gorenstein.*

Dans ce contexte se pose la question principale suivante :

Q1. Est-ce qu’on a, pour tout anneau R , la dimension projective globale de Gorenstein de R égale à sa dimension injective globale de Gorenstein ?

Pour un anneau Noethérien, la Question Q1 a déjà une réponse affirmative ; c’est le théorème 0.0.4, qu’on peut réécrire, en utilisant les dimensions de Gorenstein des anneaux, de la manière suivante :

Théorème 0.0.13

Pour tout anneau Noethérien R , on a les égalités :

$$\text{GID}(R) = \text{GPD}(R) = \text{GFD}(R).$$

De plus, pour un entier positif n , cette valeur commune est inférieure ou égale à n si et seulement si R est n -Gorenstein.

Le principal résultat du Chapitre 8, à savoir le théorème 8.1.1, généralise ce résultat, et permet ainsi d’obtenir une réponse affirmative à la Question Q1 :

Théorème. *Pour un anneau R , on a l’égalité :*

$$\text{GPD}(R) = \text{GID}(R).$$

Ainsi, pour un anneau R , on appelle la valeur commune de $\text{GPD}(R)$ et $\text{GID}(R)$ la *dimension globale de Gorenstein* de R , et on la note par **G – gldim(R)**.

D’où, pour un anneau Noethérien R et un entier positif n , on a :

$$R \text{ est } n\text{-Gorenstein} \iff G\text{-gldim}(R) \leq n.$$

Les dimensions projective, injective, et plate classiques des modules sur un anneau Iwanaga-Gorenstein sont liées, d'après Iwanaga [44], de la façon suivante (voir aussi [36, Proposition 1.1 et Remarque 1.2]) :

Proposition. *Si R est un anneau n -Gorenstein pour un entier positif n , alors les assertions suivantes sont équivalentes pour un R -module M :*

1. $\text{pd}_R(M) < \infty$;
2. $\text{pd}_R(M) \leq n$;
3. $\text{id}_R(M) < \infty$;
4. $\text{id}_R(M) \leq n$;
5. $\text{fd}_R(M) < \infty$;
6. $\text{fd}_R(M) \leq n$.

Dans notre contexte, on montre que ces équivalences restent valables sur les anneaux de dimension globale finie (Proposition 8.1.10).

D'autre part, nous allons voir que la relation qui existe entre la dimension projective (resp., injective) classique et la dimension projective (resp., injective) de Gorenstein s'étend aux dimensions des anneaux dans le sens suivant (Proposition 8.1.8) :

Proposition. *Pour tout anneau R , on a : $G\text{-gldim}(R) \leq \text{gldim}(R)$, avec égalité si $\text{wdim}(R) < \infty$.*

On étudiera aussi la dimension plate globale de Gorenstein des anneaux. Ainsi, dans le même contexte, se pose la question suivante :

Q2. Est-ce qu'on a, pour tout anneau R : $\text{GFD}(R) \leq G\text{-gldim}(R)$?

Pour un anneau Noethérien R , on a l'égalité $\text{GFD}(R) = G\text{-gldim}(R)$ (voir Théorème 0.0.13). D'après le Théorème 0.0.6, on peut voir que l'inégalité $\text{GFD}(R) \leq G\text{-gldim}(R)$

a déjà lieu pour un anneau cohérent R . En général, le Théorème 8.2.1 prouvera que cette inégalité reste valable pour n'importe quel anneau, ce qui donne une réponse affirmative à la Question Q2. Ainsi, suivant la terminologie utilisée dans la théorie des dimensions de Gorenstein, la dimension plate globale de Gorenstein d'un anneau R est appelée la *dimension faible de Gorenstein* de R , et est notée $\mathbf{G-wdim}(R)$.

Il est naturel de considérer la relation qui existe entre la dimension faible classique et la dimension faible de Gorenstein des anneaux. Pour cela, on montre le résultat suivant (Proposition 8.2.4) :

Proposition. *Pour tout anneau R , on a : $\mathbf{G-wdim}(R) \leq \mathbf{wdim}(R)$, avec égalité si $\mathbf{wdim}(R) < \infty$.*

D'après le Théorème 0.0.6, la dimension faible de Gorenstein des anneaux cohérents est étroitement liée à la notion d'anneaux n -FC (voir Définition 0.0.5). Dans le Théorème 8.2.8, on réécrit ce théorème en utilisant la dimension faible de Gorenstein des anneaux, et, plus généralement, on donne des descriptions fonctorielles à la dimension faible de Gorenstein des anneaux cohérents, comme suit :

Théorème. *Si R est un anneau cohérent, alors, pour un entier positif n , les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. $\mathbf{G-wdim}(R) \leq n$;
2. $\mathbf{Gfd}_R(G) \leq n$ pour tout R -module injectif de Gorenstein G ;
3. $\mathbf{Gfd}_R(M) \leq n$ pour tout R -module de présentation finie M ;
4. $\mathbf{Gfd}_R(R/I) \leq n$ pour tout idéal de type fini I de R ;
5. $\mathrm{Tor}_i^R(M, E) = 0$ pour tout $i > n$, tout R -module (de présentation finie) M , et tout R -module FP-injectif E (i.e., $\mathbf{fd}(\mathbf{E}) \leq \mathbf{n}$ pour tout $\mathbf{R}$ -module $\mathbf{FP}$ -injectif $\mathbf{E}$) ;
6. $\mathrm{Tor}_i^R(M, E') = 0$ pour tout $i > n$, tout R -module (de présentation finie) M et tout R -module E' avec $\mathbf{FP-id}_R(E') < \infty$ (i.e., $\mathbf{fd}(\mathbf{E}') \leq \mathbf{n}$ pour tout $\mathbf{R}$ -module $\mathbf{E}'$ avec $\mathbf{FP-id}_R(\mathbf{E}') < \infty$) ;

7. $\text{Tor}_i^R(M, I) = 0$ pour tout $i > n$, tout R -module (de présentation finie) M et tout R -module injectif I (i.e., $\text{fd}(\mathbf{I}) \leq \mathbf{n}$ pour tout $\mathbf{R}$ -module injectif $\mathbf{I}$);
8. $\text{Tor}_R^i(M, I') = 0$ pour tout $i > n$, tout R -module (de présentation finie) M et tout R -module I' avec $\text{id}_R(I') < \infty$ (i.e., $\text{fd}(\mathbf{I}') \leq \mathbf{n}$ pour tout $\mathbf{R}$ -module $\mathbf{I}'$ avec $\text{id}_R(\mathbf{I}') < \infty$);
9. $\text{Ext}_R^i(M, F') = 0$ pour tout $i > n$, tout R -module de présentation finie M et tout R -module F' avec $\text{fd}_R(F') < \infty$ (i.e., $\mathbf{FP} - \text{id}_R(\mathbf{F}') \leq \mathbf{n}$ pour tout $\mathbf{R}$ -module $\mathbf{F}'$ avec $\text{fd}_R(\mathbf{F}') < \infty$);
10. $\text{Ext}_R^i(M, F) = 0$ pour tout $i > n$, tout R -module de présentation finie M et tout R -module plat F (i.e., $\mathbf{FP} - \text{id}_R(\mathbf{F}) \leq \mathbf{n}$ pour tout $\mathbf{R}$ -module plat $\mathbf{F}$);
11. $\text{Ext}_R^i(M, R) = 0$ pour tout $i > n$ et tout R -module de présentation finie M (i.e., $\mathbf{R}$ est $\mathbf{n}\text{-FC}$).

Par conséquent, la dimension faible de Gorenstein de R est déterminée par les formules suivantes :

$$\begin{aligned}
\text{G-wdim}(R) &= \sup\{\text{Gfd}_R(R/I) \mid I \text{ est un idéal de } R \text{ de type fini}\} \\
&= \sup\{\text{Gfd}_R(M) \mid M \text{ est un } R\text{-module de présentation finie}\} \\
&= \sup\{\text{Gpd}_R(R/I) \mid I \text{ est un idéal de } R \text{ de type fini}\} \\
&= \sup\{\text{Gpd}_R(M) \mid M \text{ est un } R\text{-module de type fini}\}.
\end{aligned}$$

Il est important de noter que les anneaux de dimension faible de Gorenstein 0 sont exactement les anneaux 0-FC, par suite ils sont cohérents (d'après [21, Théorème 6]). D'après [57, Proposition 4.2] et [25, Théorème 2], les anneaux 0-FC coïncident (dans le cadre des anneaux commutatifs) avec les IF-anneaux : un anneau R est dit un *IF-anneau*, si tout R -module injectif est plat (voir [45] et [25]). En particulier, les IF-anneaux Noethériens sont exactement les anneaux quasi-Frobenius (voir [51] pour plus de détails).

* * * * * ✱ 6 ✱ * * * * *

Maintenant, après l'étude générale des dimensions globale et faible de Gorenstein des anneaux (exposée dans le Chapitre 8), il est naturel de chercher l'existence d'exemples d'anneaux de dimensions globale et faible de Gorenstein finies et de dimension faible infinie et qui ne sont pas nécessairement Noethériens. Cela est obtenu après le calcul des dimensions globale et faible de Gorenstein des anneaux de polynômes et des produits directs finis d'anneaux ; ce qui est le principal objectif du **Chapitre 6**. Notamment, on prouve les résultats suivants (Théorèmes 6.1.1 et 6.1.8) :

Théorème. *Soit $R[X]$ l'anneau de polynômes à coefficients dans R . Alors :*

- $\mathbf{G} - \mathbf{gldim}(\mathbf{R}[X]) = \mathbf{G} - \mathbf{gldim}(\mathbf{R}) + 1$.
- *Si l'anneau de polynômes $R[X]$ est cohérent, alors :*
- $\mathbf{G} - \mathbf{wldim}(\mathbf{R}[X]) = \mathbf{G} - \mathbf{wldim}(\mathbf{R}) + 1$.

Le résultat ci-dessus est une extension du théorème des syzygies de Hilbert classique, c'est aussi une généralisation du fait qu'un anneau R est Iwanaga-Gorenstein si et seulement si l'anneau de polynômes $R[X]$ est de Iwanaga-Gorenstein.

Pour les produits directs finis d'anneaux, on a dans le cas classique l'égalité suivante [20, Chapitre VI, Exercice 8, page 123] :

$$\mathbf{gldim}(\Pi_{i=1}^m R_i) = \sup\{\mathbf{gldim}(R_i), 1 \leq i \leq m\},$$

où $\{R_i\}_{i=1,\dots,m}$ est une famille finie d'anneaux.

Nous allons étendre cette égalité à la dimension globale de Gorenstein. Notamment, nous prouvons les résultats suivants (Théorèmes 6.2.1 et 6.2.5) :

Théorème. *Soit $\{R_i\}_{i=1,\dots,m}$ une famille d'anneaux. Alors :*

- $\mathbf{G} - \mathbf{gldim}(\prod_{i=1}^m R_i) = \sup\{\mathbf{G} - \mathbf{gldim}(\mathbf{R}_i), 1 \leq i \leq m\}$.

— Si chaque R_i est cohérent, alors :

$$\mathbf{G-wdim}\left(\prod_{i=1}^m R_i\right) = \sup\{\mathbf{G-wdim}(R_i), 1 \leq i \leq m\}.$$

Les résultats ci-dessus donnent lieu aux premiers exemples d'anneaux non nécessairement Noethériens, qui sont de dimensions globale et faible de Gorenstein finies et de dimension faible infinie. Notamment, on construit une famille d'anneaux qui ne sont pas Noethériens $\{R_i\}_{i \geq 1}$ telle que $\mathbf{G-wdim}(R_i) = i$, $\mathbf{G-gldim}(R_i) > i$, et $\mathbf{wdim}(R_i) = \infty$ pour tout $i \geq 1$ (voir Exemple 6.2.8).

* * * * * ✱ 7 ✱ * * * * *

Dans le **Chapitre 7**, les investigations concernant les dimensions globale et faible de Gorenstein des anneaux commutatifs, continuent. Une extension de quelques résultats sur les dimensions globales classiques des anneaux aux dimensions globales de Gorenstein des anneaux, sera établie. Pour voir cela, rappelons les notions suivantes :

Dans [27], Ding et Mao ont introduit la dimension de cotorsion des modules et des anneaux :

Définition 0.0.14 ([27])

Soit R un anneau.

- La dimension de cotorsion d'un R -module M , $\text{cd}_R(M)$, est le plus petit entier positif n pour lequel $\text{Ext}_R^{n+1}(F, M) = 0$ pour tout R -module plat F .
- La dimension globale de cotorsion de R , $\text{cot.D}(R)$, est définie comme le maximum des dimensions de cotorsion des R -modules.

La dimension globale de cotorsion des anneaux mesure combien l'anneau est loin d'être parfait : Un anneau R est dit parfait, si tout R -module plat est projectif (voir [6]). Notamment, on a, pour un anneau R et un entier positif n : $\text{cot.D}(R) \leq n$ si et seulement si tout R -module plat est de dimension projective au plus n [27,

Théorème 7.2.5 (1)]. Dans [33], un anneau qui satisfait la dernière assertion est appelé n -parfait. Ainsi, on a : $\text{cot.D}(R) \leq n$ si et seulement si R est n -parfait. En particulier : $\text{cot.D}(R) = 0$ si et seulement si R est 0-parfait si et seulement si R est parfait.

La dimension globale de cotorsion des anneaux est aussi utilisée pour donner une borne supérieure à la dimension globale classique des anneaux :

Théorème 0.0.15 ([27], Théorème 7.2.11)

Pour tout anneau R , on a l'inégalité :

$$\text{gldim}(R) \leq \text{wdim}(R) + \text{cot.D}(R).$$

Le résultat principal du Chapitre 8 généralise cette inégalité aux dimensions globale et faible de Gorenstein des anneaux cohérents ; c'est le Théorème 7.1.1 :

Théorème. *Si R est un anneau cohérent, alors :*

$$\text{cot.D}(R) \leq \text{G-gldim}(R) \leq \text{G-wdim}(R) + \text{cot.D}(R).$$

En particulier :

- *Si $\text{cot.D}(R) = 0$ (i.e., R est parfait), alors :*

$$\text{G-wdim}(R) = \text{gldim}(R).$$

- *Si $\text{G-wdim}(R) = 0$ (i.e., R est un IF-anneau), alors :*

$$\text{cot.D}(R) = \text{G-gldim}(R).$$

Rappelons que l'*extension triviale* d'un anneau R par un R -module E est l'anneau $S := R \ltimes E$ dont le groupe additif est $R \times E$ et la multiplication est définie par : $(r, e)(r', e') = (rr', re' + r'e)$ pour tout (r, e) et (r', e') dans S (pour plus de détails sur ce type d'anneaux, voir [38] et [40, Chapitre 4, Section 4]).

Le résultat principal ci-dessus nous permet de calculer la dimension globale de Gorenstein d'un cas particulier d'extensions triviales d'anneaux comme suivant (Proposition 7.1.5) :

Proposition. *Soit $R \ltimes R$ l'extension triviale d'un anneau R par R . Alors, $\text{FPD}(R \ltimes R) = \text{FPD}(R)$, $\text{cot.D}(R \ltimes R) = \text{cot.D}(R)$, et $\text{gldim}(R \ltimes R) = \infty$.*

En plus, si R est cohérent, alors $\text{G-gldim}(R \ltimes R) = \text{G-gldim}(R)$.

Rajoutons qu'une étude plus détaillée sur la dimension globale de Gorenstein des extensions triviales, a été menée dans [16], dont le résultat principal était de prouver que la dimension globale de Gorenstein des extensions triviales est en général infinie.

Finalement, on étudie la dimension globale de cotorsion des anneaux de groupes et puis on calcule la dimension globale de Gorenstein d'un cas particulier d'anneaux de groupes.

Rappelons qu'un anneau de groupe est défini de la façon suivante : Soient R un anneau et G un groupe abélien écrit multiplicativement. Le R -module libre $R^{(G)}$ avec multiplication induite par G est un anneau, nommé *anneau du groupe G sur R* , et noté RG (pour plus de détails voir par exemple [26, 40, 49, 52]).

Dans [59], on a RG est parfait si et seulement si R est parfait et G est fini. Dans le Chapitre 8, nous avons l'extension suivante (Théorème 7.1.9) :

Théorème. *Soient R un anneau et G un groupe abélien. On a :*

$$\text{cot.D}(R) \leq \text{cot.D}(RG) \leq \text{cot.D}(R) + \text{pd}_{RG}(R).$$

En plus, si G et $\text{pd}_{RG}(R)$ sont finis, alors $\text{cot.D}(R) = \text{cot.D}(RG)$.

Ce résultat et le théorème principal permettent de calculer la dimension globale de Gorenstein d'un cas particulier d'anneaux de groupes comme suivant (Proposition 7.1.11) :

Proposition. *Soit R un anneau avec $\text{G-wdim}(R) = 0$. Si G est un groupe fini tel que son ordre n est inversible dans R , alors $\text{G-wdim}(RG) = 0$ et $\text{G-gldim}(RG) = \text{G-gldim}(R)$.*

Préliminaires

Durant tout ce mémoire R et S sont deux anneaux . Pour alléger l'écriture, tous les modules considérés sont des R -modules, sauf mention contraire. Notamment, les lettres $A, B, C, D, \dots$ représentent, si on n'a pas précisé leurs natures, des R -modules. La catégorie de R -modules sera notée par $\mathcal{M}(R)$.

1.1 Résultats sur les modules

Cette section est consacrée aux définitions, théorèmes et résultats principaux sur la catégorie des modules, inclut les isomorphismes canoniques et la somme directe :

Théorème 1.1.1

- 1.[54, Théorème 1.13] : $M \otimes N \cong N \otimes M$
- 2.[54, Théorème 2.4] : $\text{Hom}(\oplus M_i, N) \cong \prod \text{Hom}(M_i, N)$
- 3.[54, Théorème 2.6] : $\text{Hom}(N, \prod M_i) \cong \prod \text{Hom}(N, M_i)$
- 4.[54, Théorème 2.8] : $N \otimes (\oplus M_i) \cong \oplus (N \otimes M_i)$

Théorème 1.1.2 ([54], Théorème 2.11)

Soient A un R -module, B un R - S -bimodule et C un S -module. Alors :

$$\boxed{\text{Hom}_S(A \otimes_R B, C) \cong \text{Hom}_R(A, \text{Hom}_S(B, C))}$$

Définition et Théorème 1.1.3 ([54], Théorème 2.7 et Exercice 2.22, p. 33)

Soit $0 \longrightarrow A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} C \longrightarrow 0$ une suite exacte courte de R -modules. Alors, les assertions suivantes sont équivalentes :

1. Il existe un homomorphisme $j : C \rightarrow B$ tel que $pj = 1_C$;

2. Il existe un homomorphisme $q : B \rightarrow A$ tel que $qi = 1_A$.

Ainsi, si l'une de ces assertions équivalentes est vérifiée, alors $\mathbf{B} \cong \mathbf{A} \oplus \mathbf{C}$.

Dans ce cas, on dit que la suite courte ci-dessus est scindée.

Définissons les produits fibrés (pullbacks) :

Définition 1.1.4 ([61], Définition 2.5.1)

Considérons deux morphismes $f : A \rightarrow C$ et $g : B \rightarrow C$ d'une catégorie donnée $\mathcal{C}$.

Un pullback (ou produit fibré) de (f, g) est un triplet (D, α, β) tel que

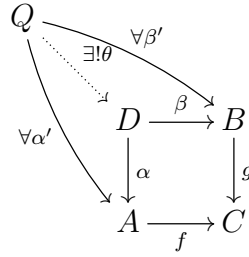
1. D est un objet de $\mathcal{C}$,
2. $\beta : D \rightarrow B, \alpha : D \rightarrow A$ sont des morphismes de $\mathcal{C}$ tels que $f\alpha = g\beta$.

Et pour tout autre triplet (Q, α', β') où

1. Q est un objet de $\mathcal{C}$,
2. $\beta' : Q \rightarrow B, \alpha' : Q \rightarrow A$ sont des morphismes de $\mathcal{C}$ tels que $f\alpha' = g\beta'$,

il existe un unique morphisme $\theta : Q \rightarrow D$ tel que $\beta' = \beta\theta$ et $\alpha' = \alpha\theta$.

Ceci peut être illustré par le diagramme suivant :



La notion duale d'un pullback est un pushout. Caractérisons les Diagrammes Pushouts :

Théorème 1.1.5 (“Diagrammes Pushouts” ; [54], Exercices 2.29 et 2.30 p. 42-43)

Soient les deux homomorphismes :

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{g} & B \\ f \downarrow & & \\ C & & \end{array}$$

1.1. RÉSULTATS SUR LES MODULES

Il existe un module D qui rend commutatif le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{g} & B \\ f \downarrow & & \downarrow f' \\ C & \xrightarrow{g'} & D \end{array}$$

tel que :

- ✓ Si g (resp., f) est injectif, alors g' (resp., f') l'est aussi.
- ✓ Les conoyaux de chaque homomorphismes parallèles sont isomorphes.

De façon qu'on obtient des diagrammes de la forme :

$$\begin{array}{ccccccc} & 0 & & 0 & & & \\ & \downarrow & & \downarrow & & & \\ 0 & \rightarrow & A & \rightarrow & B & \rightarrow & E \rightarrow 0 \\ & \downarrow & & \downarrow & & \parallel & \\ 0 & \rightarrow & C & \rightarrow & D & \rightarrow & E \rightarrow 0 \\ & \downarrow & & \downarrow & & & \\ & F & = & F & & & \\ & \downarrow & & \downarrow & & & \\ & 0 & & 0 & & & \end{array} \quad \begin{array}{ccccccc} & 0 & & 0 & & & \\ & \downarrow & & \downarrow & & & \\ 0 & \rightarrow & F & \rightarrow & A & \rightarrow & B \rightarrow 0 \\ & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \rightarrow & F & \rightarrow & C & \rightarrow & D \rightarrow 0 \\ & & & & \downarrow & & \downarrow \\ & & & & E & = & E \\ & & & & \downarrow & & \downarrow \\ & & & & 0 & & 0 \end{array}$$

Les diagrammes construits de cette façon sont appelés *Diagrammes "Pushouts"*.

Définissons et introduisons les modules n -présentés :

Définition 1.1.6

Un R -module M est dit n -présenté s'il existe une suite exacte :

$F_n \rightarrow F_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow F_0 \rightarrow M \rightarrow 0$ où les F_i sont libres de base finie.

Ainsi, si M est n -présenté, alors il est i -présenté pour tout $i = 0, \dots, n$.

Si M est 1-présenté, on dit aussi qu'il est de présentation finie.

Notons par $\lambda_R(M)$ (ou simplement $\lambda(M)$) le plus grand entier n tel que M soit n -présenté.

Si M est n -présenté pour tout entier n , on dit qu'il est infiniment présenté et on écrit $\lambda(M) = \infty$.

Par convention, si M n'est pas de type fini, on pose $\lambda(M) = -1$.

Il est clair que : $\diamond M$ de type fini si, et seulement si $\lambda(M) \geq 0$.

$\diamond M$ de présentation finie si, et seulement si $\lambda(M) \geq 1$.

Théorème 1.1.7 ([40], Théorème 2.1.2)

Soit $0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$ une suite exacte courte. Alors :

1. $\lambda(B) \geq \inf\{\lambda(A), \lambda(C)\}$
2. $\lambda(C) \geq \inf\{\lambda(B), \lambda(A) + 1\}$
3. $\lambda(A) \geq \inf\{\lambda(B), \lambda(C) - 1\}$

Définissons les modules projectif, injectif et plat, et présentons des résultats fondamentaux :

Définition et Théorème 1.1.8 ([40], Théorème 1.1.3)

Un R -module P est dit *projectif* s'il vérifie l'une des assertions équivalentes suivantes :

1. $\text{Hom}_R(P, -)$ est un foncteur exact (i.e., si $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ une suite exacte, alors $0 \rightarrow \text{Hom}(P, A) \rightarrow \text{Hom}(P, B) \rightarrow \text{Hom}(P, C) \rightarrow 0$ est exacte.) ;
2. P est un facteur direct d'un R -module libre ;
3. Toute suite exacte courte de la forme $0 \rightarrow N \rightarrow M \rightarrow P \rightarrow 0$ est scindée.

Théorème 1.1.9 (“Lemme de Schanuel” ; [54], Théorème 3.62)

Soient $0 \rightarrow K \rightarrow P \rightarrow M \rightarrow 0$ et $0 \rightarrow K' \rightarrow P' \rightarrow M \rightarrow 0$ deux suites exactes courtes telles que P et P' sont projectifs. Alors, $\mathbf{K} \oplus \mathbf{P}' \cong \mathbf{K}' \oplus \mathbf{P}$

Proposition 1.1.10 ([54], p. 90)

Tout module projectif de type fini est de présentation finie.

Théorème 1.1.11 ([54], Lemme 3.59)

Soient A un R -module, B un R - S -bimodule et C un S -module.

Si A est projectif de type fini, alors on a l'isomorphisme suivant :

$$\mathbf{A} \otimes_R \text{Hom}_S(\mathbf{B}, \mathbf{C}) \cong \text{Hom}_S(\text{Hom}_R(\mathbf{A}, \mathbf{B}), \mathbf{C})$$

Définition et Théorème 1.1.12 ([40], Théorème 1.1.6)

Un R -module E est dit *injectif* s'il vérifie l'une des assertions équivalentes suivantes :

1. $\text{Hom}_R(-, E)$ est un foncteur exact (i.e., si $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ une suite exacte, alors $0 \rightarrow \text{Hom}(C, E) \rightarrow \text{Hom}(B, E) \rightarrow \text{Hom}(A, E) \rightarrow 0$ est exacte.) ;
2. E est un facteur direct de tout module le contenant ;
3. Toute suite exacte courte de la forme $0 \rightarrow E \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow 0$ est scindée ;
4. Pour tout idéal I de R , tout homomorphisme de I dans E peut être prolongé à un homomorphisme de R dans E (critère de Baer).

Définition et Théorème 1.1.13 ([40], Théorème 1.2.1)

Un R -module F est dit *plat* s'il vérifie l'une des assertions équivalentes suivantes :

1. $F \otimes_R - (\cong - \otimes_R F)$ est un foncteur exact (i.e., si $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ une suite exacte, alors $0 \rightarrow F \otimes A \rightarrow F \otimes B \rightarrow F \otimes C \rightarrow 0$ est exacte.) ;
2. Pour tout idéal de type fini I , l'homomorphisme de $I \otimes F$ dans IF défini par : $x \otimes m \mapsto xm$, avec $x \in I$ et $m \in F$, est un isomorphisme ;
3. Le R -module $F^* = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$, appelé le caractère du R -module F , est injectif.

Sur anneau cohérent, nous retrouvons une liaison de plus entre l'injectivité et la platitude. Rappelons qu'un anneau R est dit cohérent si tout idéal de type fini de R est de présentation finie.

Proposition 1.1.14 ([60], Lemme 3.1.4)

Si R est cohérent, alors, pour tout R -module M injectif, son caractère $M^* = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ est un R -module plat.

Notations : On note par $\mathcal{P}(R)$, $\mathcal{F}(R)$ et $\mathcal{I}(R)$, respectivement, la classes de R -modules projectifs, plats et injectifs.

Théorème 1.1.15 ([54], Théorèmes 3.14 et 3.45, et Exercice 3.8)

Soit $(M_i)_{i \in I}$ une famille de R -modules. Alors, pour que $\bigoplus M_i$ soit projectif (resp., plat), il faut et il suffit que M_i soit projectif (resp., plat) pour tout $i \in I$.

On dit que $\mathcal{P}(R)$ et $\mathcal{F}(R)$ sont stables par somme directe quelconque et par facteur direct.

Théorème 1.1.16

Soit $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ une suite exacte courte telle que C est projectif (resp., plat). Alors, pour que A soit projectif (resp., plat), il faut et il suffit que B soit projectif (resp., plat).

Dualement, on trouve des résultats sur l'injectivité représentés dans le théorème suivant :

Théorème 1.1.17

1. Un produit direct quelconque de R -modules injectifs est un R -module injectif.
On dit que $\mathcal{I}(R)$ est stable par produit direct quelconque.
2. Tout facteur direct d'un R -module injectif est un R -module injectif.
On dit que $\mathcal{I}(R)$ est stable par facteur direct.
3. Soit $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ une suite exacte courte telle que A est injectif.
Alors, pour que B soit injectif, il faut et il suffit que C soit injectif.

Définition 1.1.18 ([42], Définition 1.1)

Soit $\mathfrak{X}$ une classe de R -modules.

1. On dit que $\mathfrak{X}$ est résolvable projectivement si $\mathcal{P}(R) \subseteq \mathfrak{X}$ et que, pour toute suite exacte courte $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ telle que $C \in \mathfrak{X}$, on a :
 $A \in \mathfrak{X}$ si, et seulement si $B \in \mathfrak{X}$
2. On dit que $\mathfrak{X}$ est résolvable injectivement si $\mathcal{I}(R) \subseteq \mathfrak{X}$ et que, pour toute suite exacte courte $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ telle que $A \in \mathfrak{X}$, on a :
 $B \in \mathfrak{X}$ si, et seulement si $C \in \mathfrak{X}$

Ainsi, $\mathcal{P}(R)$ et $\mathcal{F}(R)$ sont résolvables projectivement, et $\mathcal{I}(R)$ est résolvable injectivement.

Proposition 1.1.19 ([42], Proposition 1.4)

Soit $\mathfrak{X}$ une classe de R -modules qui est résolvable projectivement ou résolvable injectivement.

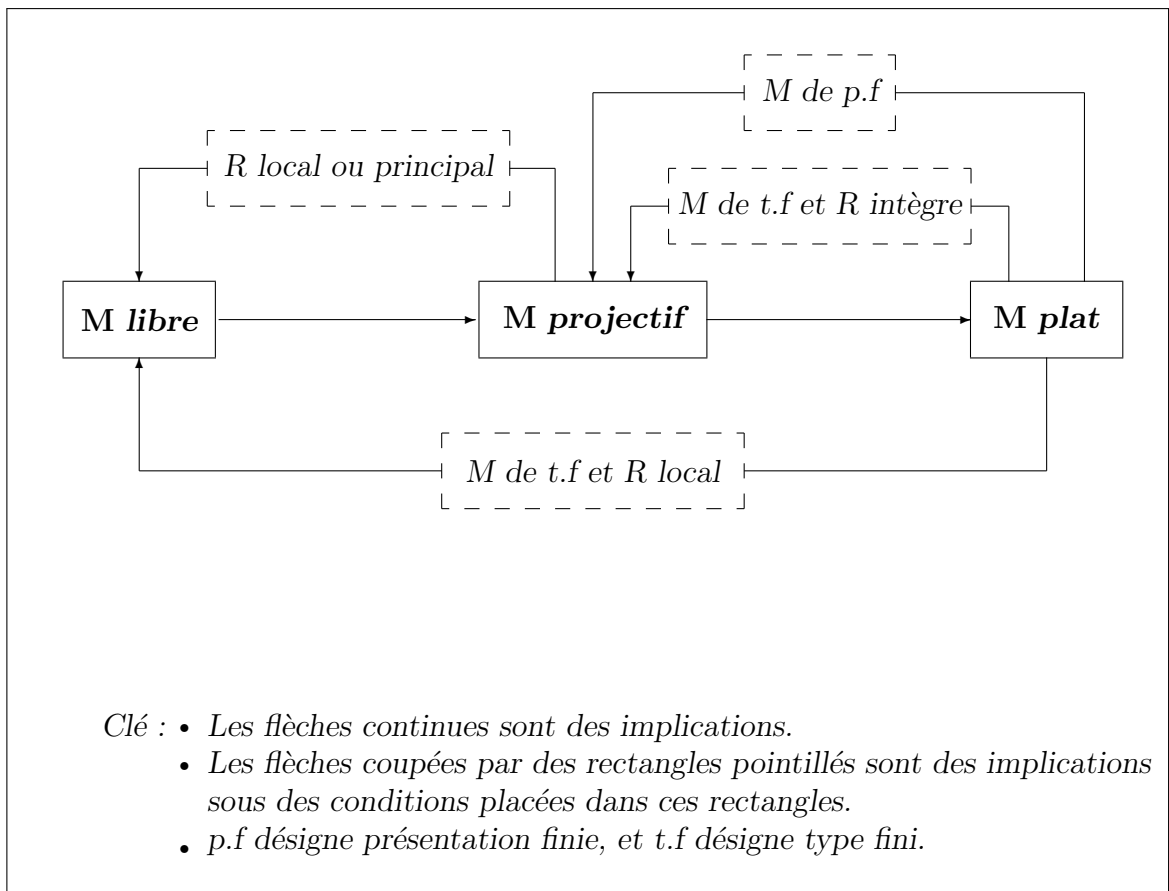
1.1. RÉSULTATS SUR LES MODULES

Si $\mathfrak{X}$ est stable par somme directe dénombrable ou stable par produit direct dénombrable, alors $\mathfrak{X}$ est stable par facteur direct.

On peut schématiser les relations entre les modules libre, projectif et plat tel que dans le livre Rotman [54] :

1.1.20 Schéma

RELATIONS ENTRE LIBRE, PROJECTIF ET PLAT



Introduisons maintenant les résolutions libres et les résolutions injectives :

Définition 1.1.21

- ◇ Une résolution libre (resp., projective et plate) d'un R -module M est une suite exacte de la forme : $\cdots \rightarrow M_2 \rightarrow M_1 \rightarrow M_0 \rightarrow M \rightarrow 0$ telle que les M_i sont des modules libres (resp., projectifs et plats).

◇ Une résolution injective d'un R -module M est une suite exacte de la forme :
 $0 \rightarrow M \rightarrow M_0 \rightarrow M_1 \rightarrow M_2 \rightarrow \dots$ telle que les M_i sont des modules injectifs.

Définition et Théorème 1.1.22 ([19], §3, N° 3)

Pour tout R -module M , notons $L_0(M)$ le R -module libre $R^{(M)}$; soient $(e_m)_{m \in M}$ sa base canonique et p_0 l'homomorphisme surjectif tel que $p_0(e_m) = m$.

Posons $K_0 = \text{Ker } p_0$ et $i_0 : K_0 \hookrightarrow L_0(M)$ l'injection canonique. Ainsi, on a la suite exacte courte : $0 \rightarrow K_0 \xrightarrow{i_0} L_0(M) \xrightarrow{p_0} M \rightarrow 0$

Ce qui veut dire que : Tout module est quotient d'un module libre

Faisons la même chose avec K_0 , en posant $L_1(M) = R^{(K_0)}$, on obtient la suite exacte courte : $0 \rightarrow K_1 \xrightarrow{i_1} L_1(M) \xrightarrow{p_1} K_0 \rightarrow 0$

Et ainsi, on obtient une famille de suites exactes courtes avec lesquelles on obtient une résolution libre de M , dite la résolution libre canonique de M .

$$\dots \rightarrow L_2(M) \rightarrow L_1(M) \rightarrow L_0(M) \rightarrow M \rightarrow 0$$

Cela en composant les suites exactes courtes obtenues, comme montré par le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & L_2(M) & \xrightarrow{i_1 p_2} & L_1(M) & \xrightarrow{i_0 p_1} & L_0(M) \xrightarrow{p_0} M \longrightarrow 0 \\ & & \nearrow i_2 & \searrow p_2 & \nearrow i_1 & \searrow p_1 & \nearrow i_0 \\ \dots & & K_2 & & K_1 & & K_0 \\ & \nearrow & \nearrow & \nearrow & \nearrow & \nearrow & \nearrow \\ 0 & & 0 & & 0 & & 0 \end{array}$$

Ainsi : Tout module admet une résolution libre, à fortiori projective et plate.

Définition et Théorème 1.1.23

Un R -module E est dit *fidèlement injectif* s'il vérifie l'une des assertions équivalentes suivantes :

1. E est injectif, et que pour tout module M , $M = 0$ si, et seulement si $\text{Hom}(M, E) = 0$;
2. Pour qu'une suite $A \rightarrow B \rightarrow C$ soit exacte, il faut et il suffit que la suite $\text{Hom}(C, E) \rightarrow \text{Hom}(B, E) \rightarrow \text{Hom}(A, E)$ soit exacte ;
3. E est injectif et l'homomorphisme canonique $\sigma : M \rightarrow \text{Hom}(\text{Hom}(M, E), E)$

$$m \longmapsto \sigma(m) : f \mapsto f(m)$$

est injectif pour tout module M .

Proposition 1.1.24 ([54], Lemme 3.51)

Pour qu'une suite $A \longrightarrow B \longrightarrow C$ soit exacte, il faut et il suffit que la suite $C^* \longrightarrow B^* \longrightarrow A^*$ soit exacte.

Théorème 1.1.25

Tout module s'injecte dans un module injectif.

Les modules plats sont caractérisés par la limite inductive selon le théorème de Lazard. Rappelons d'abord la notion de la limite inductive :

Définition 1.1.26 ([62], Chapitre III, Section V)

◇ Soit I un ensemble préordonné filtrant (i.e., I munit d'une relation de préordre vérifiant : $\forall i, j \in I, \exists k \in I$ tel que $i \leq k$ et $j \leq k$).

Un système inductif de modules relatif à I est la donnée d'une famille $(M_i)_{i \in I}$ de R -modules et d'une famille d'homomorphismes $(f_{ij} : M_i \longrightarrow M_j)_{\substack{i, j \in I \\ i \leq j}}$ vérifiant les deux propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} \triangleright \quad f_{ii} &= \text{id}_{M_i} \quad \forall i \in I; \\ \triangleright \quad f_{ij}f_{jk} &= f_{ik} \quad \forall i \leq j \leq k. \end{aligned}$$

◇ Si on pose D le sous module de $\oplus M_i$ engendré par les éléments $x_i - f_{ij}(x_i)$ où $x_i \in M_i$ et $i \leq j$ (après identification de M_i à un sous module de la somme directe), le R -module $\oplus M_i / D$ s'appelle la limite inductive du système inductif $(M_i)_{i \in I}$ et noté par $\varinjlim M_i$.

Proposition 1.1.27 ([54], Exemples 20 et 20' p.40-41)

Si I est muni de la préordre triviale (i.e., $\forall i, j \in I, i \leq j \iff i = j$), alors $\varinjlim M_i$ sera exactement la somme directe $\oplus M_i$.

Théorème 1.1.28 ("Théorème de Lazard" ; [19], §1, N° 6, Théorème 1, p. 14)

Pour qu'un R -module F soit plat, il faut et il suffit qu'il existe un système inductif de modules libres de base finie $(L_i)_{i \in I}$ tel que $\varinjlim L_i \cong F$.

1.2 Résultats sur les complexes

Définition 1.2.1

Un R -complexe (ou simplement complexe) est une suite $\mathbf{X}$ de R -module X_l et d'homomorphismes ∂_l^X avec $l \in \mathbb{Z}$

$$\mathbf{X} = \cdots \longrightarrow X_{l+1} \xrightarrow{\partial_{l+1}^X} X_l \xrightarrow{\partial_l^X} X_{l-1} \longrightarrow \cdots$$

telle que $\partial_l^X \partial_{l+1}^X = 0$ pour tout $l \in \mathbb{Z}$ (i.e., $\text{Im } \partial_{l+1}^X \subseteq \text{Ker } \partial_l^X$).

- ◇ ∂_l^X s'appelle la différentielle du complexe $\mathbf{X}$ de degré n .
- ◇ Le module quotient $H_l(X) = \text{Ker } \partial_l^X / \text{Im } \partial_{l+1}^X$ est appelé le n ième module d'**homologie** du complexe $\mathbf{X}$.
- ◇ Le complexe d'homologies est le complexe noté $H(X)$ tel que $(H(X))_l = H_l(X)$ et $\partial_l^{H(X)} = 0$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Remarque 1.2.2

Le module d'homologie joue un rôle central dans l'algèbre homologique, son rôle principal est de mesurer l'exactitude des complexes, de façon qu'on a l'équivalence : X est un complexe exact (i.e., $\text{Im } \partial_{l+1}^X = \text{Ker } \partial_l^X$) si, et seulement si $H_l(X) = 0$ pour tout $l \in \mathbb{Z}$.

Notation : Certains auteurs adoptent, pour les complexes, l'indexation suivante :

$$\mathbf{X} = \cdots \longrightarrow X_1 \xrightarrow{\partial_1} X_0 \xrightarrow{\partial_0} X^0 \xrightarrow{\partial^0} X^1 \xrightarrow{\partial^1} \cdots$$

Définition 1.2.3

Soient X et Y deux complexes.

- ◇ Un morphisme $\alpha : X \longrightarrow Y$ de complexes est une famille $\alpha = (\alpha_l)_{l \in \mathbb{Z}}$ d'homomorphismes $\alpha_l : X_l \longrightarrow Y_l$ telle que le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & X_{l+1} & \xrightarrow{\partial_{l+1}^X} & X_l & \xrightarrow{\partial_l^X} & X_{l-1} & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow \alpha_{l+1} & & \downarrow \alpha_l & & \downarrow \alpha_{l-1} & & \\ \cdots & \longrightarrow & Y_{l+1} & \xrightarrow{\partial_{l+1}^Y} & Y_l & \xrightarrow{\partial_l^Y} & Y_{l-1} & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

est commutatif (i.e., $\alpha_l \partial_{l+1}^X = \partial_{l+1}^Y \alpha_{l+1}$).

1.2. RÉSULTATS SUR LES COMPLEXES

◇ De α on peut déduire, canoniquement, un morphisme de complexes d'homologie $H(X) \longrightarrow H(Y)$, noté $H(\alpha)$, tel que $H(\alpha)_l : H(X)_l \longrightarrow H(Y)_l$

$$\bar{x}_l \longmapsto \overline{\alpha(x_l)}$$

appelé le morphisme induit par α .

◇ Si $H(\alpha)_l$ est un isomorphisme pour tout $l \in \mathbb{Z}$, α est dit *quasi-isomorphisme*.

Définition 1.2.4

Soient $(X^i)_{i \in I}$ une famille de complexes,

◇ La somme directe des complexes X^i est le complexe noté $\bigoplus_i X^i$ tel que

$$(\bigoplus_i X^i)_l = \bigoplus_i (X^i)_l \quad \text{et} \quad \partial_l^{\bigoplus X^i} = \bigoplus_i \partial_l^{X^i} : (x_l^i) \longmapsto (\partial_l^{X^i}(x_l^i)) \quad \text{pour tout } l \in \mathbb{Z}.$$

◇ De la même façon on définit le produit direct de complexes.

Proposition 1.2.5 ([19], §2, N° 2, Proposition 1)

Soit $(X^i)_{i \in I}$ une famille de complexes. Alors :

$$H_n(\bigoplus_i X^i) \cong \bigoplus_i H_n(X^i) \quad \text{et} \quad H_n(\prod_i X^i) \cong \prod_i H_n(X^i)$$

Ainsi, X^i est exact pour tout $i \in I$ si, et seulement si $\bigoplus_i X^i$ ($\prod_i X^i$) est exact.

Théorème 1.2.6 (“Suite exacte longue” ; [54], Théorème 6.7)

De toute suite exacte courte de complexes $0 \longrightarrow X \xrightarrow{\alpha} Y \xrightarrow{\beta} Z \longrightarrow 0$ on obtient une suite exacte de la forme :

$$\cdots \rightarrow H_n(X) \rightarrow H_n(Y) \rightarrow H_n(Z) \rightarrow H_{n-1}(X) \rightarrow H_{n-1}(Y) \rightarrow \cdots$$

appelée *suite exacte longue d'homologie*.

Définition et Théorème 1.2.7 (“Cône d'homomorphisme” ; [19], §2, N° 6)

A un morphisme de complexes $\alpha : X \rightarrow Y$, on peut associer un complexe, noté $\mathcal{M}(\alpha)$ et appelé **Cône d'homomorphisme** α , défini comme suivant :

$$\diamond \mathcal{M}(\alpha)_i = Y_i \oplus X_{i-1}$$

$$\diamond \partial_i^{\mathcal{M}(\alpha)} : Y_i \oplus X_{i-1} \longrightarrow Y_{i-1} \oplus X_{i-2}$$

$$(y_i, x_{i-1}) \longmapsto (\partial_i^Y(y_i) + \alpha(X_{i-1}), -\partial_{i-1}^X(x_{i-1}))$$

Il a les propriétés suivantes :

1. $\mathcal{M}(\alpha)$ est exact si, et seulement si le morphisme α est quasi-isomorphisme.
2. Pour tout foncteur additif T on a : $T(\mathcal{M}(\alpha)) \cong \mathcal{M}(T(\alpha))$.

Proposition 1.2.8 (“Lemme de Horseshoe ” ; [54], Lemme 6.20)

Soit le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc}
 & \vdots & & \vdots & & & \\
 & \downarrow & & \downarrow & & & \\
 & P'_1 & & P''_1 & & & \\
 & \downarrow & & \downarrow & & & \\
 & P'_0 & & P''_0 & & & \\
 & \downarrow & & \downarrow & & & \\
 0 & \longrightarrow & A' & \longrightarrow & A & \longrightarrow & A'' \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & & & \downarrow \\
 & & 0 & & & & 0
 \end{array}$$

tel que les colonnes sont des résolutions projectives, respectivement, de A' et A'' . Alors, on peut le compléter en un diagramme commutatif, de sorte qu'on obtient une résolution projective de A , de la façon suivante :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 0 & \longrightarrow & P'_1 & \longrightarrow & P'_1 \oplus P''_1 & \longrightarrow & P''_1 \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & P'_0 & \longrightarrow & P'_0 \oplus P''_0 & \longrightarrow & P''_0 \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & A' & \longrightarrow & A & \longrightarrow & A'' \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 0 & & 0 & & 0
 \end{array}$$

Un bref rappel sur les foncteurs $\ll Ext \gg$ et $\ll Tor \gg$ est indispensable :

Définition et Théorème 1.2.9 (“Foncteurs Tor” ; [19] §4, N° 4)

Soient M et N deux R -modules.

Notons par L_M , L_N les complexes obtenus en éliminant, respectivement M et N ,

1.2. RÉSULTATS SUR LES COMPLEXES

de ses résolutions libres canoniques (voir page 35) .

Le foncteur $Tor_n^R(M, N)$ (ou, lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté sur l'anneau, $Tor_n(M, N)$) est défini à partir de ces deux complexes, de façon qu'on a, pour tout $n \in \mathbb{Z}$:

$$\mathbf{Tor}_n^R(\mathbf{M}, \mathbf{N}) \cong \mathbf{H}_n(\mathbf{M} \otimes_R \mathbf{L}_N) \cong \mathbf{H}_n(\mathbf{L}_M \otimes_R \mathbf{N}).$$

Les R -modules $Tor_n(M, N)$ sont indépendants de la résolution plate choisie. C'est-à-dire, si par exemple $\cdots \rightarrow F_1 \rightarrow F_0 \rightarrow M \rightarrow 0$ est une résolution plate de M , et que F_M le complexe obtenu en éliminant M de cette résolution, alors

$$Tor_n(M, N) \cong H_n(F_M \otimes_R N) \quad \text{pour tout } n.$$

Et on a les résultats :

- ◇ $Tor_n(M, N) = 0$ pour tout $n < 0$
- ◇ $Tor_0(M, N) \cong M \otimes N$
- ◇ $\boxed{\mathbf{Tor}_n(\mathbf{N}, \mathbf{M}) \cong \mathbf{Tor}_n(\mathbf{M}, \mathbf{N})}$

Pour $n = 1$, on écrit $Tor(M, N)$ au lieu de $Tor_1(M, N)$.

Théorème 1.2.10 (“Suite exacte longue des Tor” ; [54], Théorème 8.3)

Soit $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ une suite exacte courte de modules.

Pour tout module M , il existe une suite exacte : $\cdots \rightarrow Tor_{n+1}(C, M) \rightarrow Tor_n(A, M) \rightarrow Tor_n(B, M) \rightarrow Tor_n(C, M) \rightarrow \cdots \rightarrow Tor_2(C, M) \rightarrow Tor(A, M) \rightarrow Tor(B, M) \rightarrow Tor(C, M) \rightarrow A \otimes M \rightarrow B \otimes M \rightarrow C \otimes M \rightarrow 0$

Définition et Théorème 1.2.11 (“Foncteurs Ext” ; [19], §5, N° 3)

Soient M et N deux R -modules.

Notons par L_M (resp., E_N) le complexe obtenu en éliminant M (resp., N) de sa résolution libre (resp., injective) canonique (voir [19], §3, N° 4).

Le foncteur $Ext_R^n(M, N)$ (ou, lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté sur l'anneau, $Ext^n(M, N)$) est défini à partir de ces deux complexes, de façon qu'on a, pour tout $n \in \mathbb{Z}$:

$$\mathbf{Ext}_R^n(\mathbf{M}, \mathbf{N}) \cong \mathbf{H}_{-n}(\mathbf{Hom}_R(\mathbf{M}, \mathbf{E}_N)) \cong \mathbf{H}_{-n}(\mathbf{Hom}_R(\mathbf{L}_M, \mathbf{N})).$$

Les R -modules $\text{Ext}_R^n(M, N)$ sont indépendants de la résolution projective de M et de la résolution injective de N choisies. C'est-à-dire, si P_M est un complexe obtenu en éliminant M d'une de ces résolutions projectives, et si I_N est un complexe obtenu en éliminant N d'une de ces résolutions injectives, alors, pour tout $n \in \mathbb{Z}$:

$$\text{Ext}_R^n(M, N) \cong H_{-n}(\text{Hom}_R(M, I_N)) \cong H_{-n}(\text{Hom}_R(P_M, N)).$$

Et nous avons les résultats :

- ◇ $\text{Ext}^n(M, N) = 0$ pour tout $n < 0$
- ◇ $\text{Ext}^0(M, N) \cong \text{Hom}(M, N)$

Pour $n = 1$, on écrit $\text{Ext}(M, N)$ au lieu de $\text{Ext}^1(M, N)$.

Théorème 1.2.12 (“Suite exacte longue des Ext ” ; [54], Théorèmes 7.3 et 7.5)

Soit $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ une suite exacte courte de modules.

Pour tout module M , il existe une suite exacte :

$$0 \rightarrow \text{Hom}(M, A) \rightarrow \text{Hom}(M, B) \rightarrow \text{Hom}(M, C) \rightarrow \text{Ext}(M, A) \rightarrow \text{Ext}(M, B) \rightarrow \text{Ext}(M, C) \rightarrow \text{Ext}^2(M, A) \rightarrow \dots$$

et une suite exacte :

$$0 \rightarrow \text{Hom}(C, M) \rightarrow \text{Hom}(B, M) \rightarrow \text{Hom}(A, M) \rightarrow \text{Ext}(C, M) \rightarrow \text{Ext}(B, M) \rightarrow \text{Ext}(A, M) \rightarrow \text{Ext}^2(C, M) \rightarrow \dots$$

Les foncteurs Ext et Tor sont des outils très forts en algèbre homologique, on se permet alors de présenter quelques résultats importants :

Théorème 1.2.13 ([54], Corollaire 7.20)

Soient A et C deux modules.

Pour que $\text{Ext}(C, A) = 0$, il faut et il suffit que toute suite exacte courte de la forme $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ soit scindée.

Théorème 1.2.14 ([54], Théorèmes 7.13 et 7.14)

Soient N un module et $(M_i)_{i \in I}$ une famille de modules. Alors :

$$\begin{aligned} \text{Ext}^n(\bigoplus M_i, N) &\cong \prod \text{Ext}^n(M_i, N) \\ \text{Ext}^n(N, \prod M_i) &\cong \prod \text{Ext}^n(N, M_i) \end{aligned}$$

Théorème 1.2.15 ([40], Théorème 2.1.5)

Pour tout module de présentation finie M , on a :

$$\mathrm{Ext}^n(M, \varinjlim G_i) \cong \varinjlim \mathrm{Ext}^n(M, G_i)$$

où $(G_i)_{i \in I}$ est un système inductif de sous modules d'un même module.

Théorème 1.2.16 ([54], Théorèmes 11.65 et 11.66)

Soient $R \rightarrow S$ un homomorphisme d'anneaux, M un R -module et N un S -module.

Alors :

1. Si S est un R -module plat, alors $\mathrm{Ext}_S^n(M \otimes_R S, N) \cong \mathrm{Ext}_R^n(M, N)$
2. Si S est un R -module projectif, alors $\mathrm{Ext}_S^n(N, \mathrm{Hom}_R(S, M)) \cong \mathrm{Ext}_R^n(N, M)$

Théorème 1.2.17 ([40], Théorème 1.1.8)

Soient M un R -module, E un S -module et N un R - S -bimodule.

Si E est injectif, alors

$$\mathrm{Hom}_S(\mathrm{Tor}_n^R(M, N), E) \cong \mathrm{Ext}_R^n(M, \mathrm{Hom}_S(N, E))$$

Particulièrement, si on considère le $\mathbb{Z}$ -module injectif $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, l'isomorphisme précédent s'écrit (en utilisant la notation du caractère d'un module, voir Théorème & Définition 1.1.13, p. 32) :

$$\boxed{(\mathrm{Tor}_n^R(M, N))^* \cong \mathrm{Ext}_R^n(M, N^*)}$$

On se permet de donner quelques résultats sur les résolutions.

Définition 1.2.18

Soit $\mathfrak{X}$ une classe de modules.

Pour tout module M , on définit deux types de résolutions :

- ◇ une $\mathfrak{X}$ -résolution à gauche de M est une suite exacte $\mathbf{X} : \cdots \rightarrow X_1 \rightarrow X_0 \rightarrow M \rightarrow 0$ telle que $X_i \in \mathfrak{X}$ pour tout $i \geq 0$.
- $\mathbf{X}$ est dite de longueur finie n si, pour tout $i > n$, $X_i = 0$.

◇ une $\mathfrak{X}$ -résolution à droite de M est une suite exacte $\mathbf{X} : 0 \rightarrow M \rightarrow X^0 \rightarrow X^1 \rightarrow \dots$ telle que $X_i \in \mathfrak{X}$ pour tout $i \geq 0$.

$\mathbf{X}$ est dite de longueur finie n si, pour tout $i > n$, $X_i = 0$.

Maintenant, soit $\mathbf{X}$ n'importe quelle $\mathfrak{X}$ -résolution (à gauche ou à droite) de M . On dit que $\mathbf{X}$ est propre (resp., copropre) si la suite $\text{Hom}(Y, \mathbf{X})$ (resp., $\text{Hom}(\mathbf{X}, Y)$) est exacte pour tout module $Y \in \mathfrak{X}$.

Définition 1.2.19 (“Classes orthogonales” ; [22], Section 1)

Pour toute classe de R -modules $\mathfrak{X}$, on définit, respectivement, la classe orthogonale à gauche et la classe orthogonale à droite, associée à $\mathfrak{X}$, comme suivant :

$${}^\perp \mathfrak{X} = \{M \in \mathcal{M}(R) / \text{Ext}_R^i(M, X) = 0 \ \forall X \in \mathfrak{X}, \forall i > 0\};$$

$$\mathfrak{X}^\perp = \{N \in \mathcal{M}(R) / \text{Ext}_R^i(X, N) = 0 \ \forall X \in \mathfrak{X}, \forall i > 0\}.$$

Proposition 1.2.20 ([22], Section 1)

- La classe ${}^\perp \mathfrak{X}$ est résolvente projectivement et stable par somme directe quelconque.
- La classe $\mathfrak{X}^\perp$ est résolvente injectivement et stable par produit direct quelconque.

1.3 Dimensions homologiques

Définition 1.3.1

Soient M un R -module et n un entier positif.

- ◇ On dit que M a une dimension projective (resp., plate) inférieure ou égale à n s'il existe une suite exacte $0 \rightarrow M_n \rightarrow M_{n-1} \rightarrow \dots \rightarrow M_1 \rightarrow M_0 \rightarrow M \rightarrow 0$ telle que les M_i sont des R -modules projectifs (resp., plats) ; on écrit $\text{pd}_R(M) \leq n$ (resp., $\text{fd}_R(M) \leq n$), ou simplement $\text{pd}(M) \leq n$ (resp., $\text{fd}(M) \leq n$).
- ◇ On dit que M a une dimension injective inférieure ou égale à n s'il existe une suite exacte $0 \rightarrow M \rightarrow E_0 \rightarrow E_1 \rightarrow \dots \rightarrow E_{n-1} \rightarrow E_n \rightarrow 0$ telle que les E_i sont des R -modules injectifs ; on écrit $\text{id}_R(M) \leq n$ ou simplement $\text{id}(M) \leq n$.

1.3. DIMENSIONS HOMOLOGIQUES

Notations : On note par $\overline{\mathcal{P}}(R)$, $\overline{\mathcal{F}}(R)$ et $\overline{\mathcal{I}}(R)$, les classes, respectivement, de R -modules de dimension projective, plate et injective finie.

Les trois théorèmes qui suivent représentent des caractérisations fonctorielles des dimensions projective, injective et plate.

Théorème 1.3.2 ([54], Théorème 9.5)

Soit M un module. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $\text{pd}(M) \leq n$;
2. $\text{Ext}^i(M, N) = 0$ pour tout module N et tout $i \geq n + 1$;
3. $\text{Ext}^{n+1}(M, N) = 0$ pour tout module N ;
4. Si $0 \rightarrow K_n \rightarrow P_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow P_1 \rightarrow P_0 \rightarrow M \rightarrow 0$ est une suite exacte telle que les P_i sont projectifs, alors K_n est projectif.

Théorème 1.3.3 ([40], Théorème 1.3.6)

Soit M un module. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $\text{id}(M) \leq n$;
2. $\text{Ext}^i(N, M) = 0$ pour tout module N et tout $i \geq n + 1$;
3. $\text{Ext}^{n+1}(N, M) = 0$ pour tout module N ;
4. Si $0 \rightarrow M \rightarrow E_0 \rightarrow E_1 \rightarrow \cdots \rightarrow E_{n-1} \rightarrow L_n \rightarrow 0$ est une suite exacte telle que les E_i sont injectifs, alors L_n est injectif ;
5. $\text{Ext}^{n+1}(R/I, M) = 0$ pour tout idéal I de R .

Théorème 1.3.4 ([40], Théorème 1.3.8)

Soit M un module. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $\text{fd}(M) \leq n$;
2. $\text{Tor}^i(M, N) = 0$ pour tout module N et tout $i \geq n + 1$;
3. $\text{Tor}^{n+1}(M, N) = 0$ pour tout module N ;
4. $\text{Tor}^{n+1}(M, R/I) = 0$ pour tout idéal de type fini I de R ;

5. Si $0 \rightarrow K_n \rightarrow F_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow F_1 \rightarrow F_0 \rightarrow M \rightarrow 0$ est une suite exacte telle que les F_i sont plats, alors K_n est plat.

Proposition 1.3.5 ([19], §8, N° 1, Corollaire 2)

Soit $0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$ une suite exacte courte. Alors :

1. $\text{pd}(M) \leq \max\{\text{pd}(M'), \text{pd}(M'')\}$ avec égalité si $\text{pd}(M'') \neq \text{pd}(M') + 1$.
2. $\text{pd}(M'') \leq \max\{\text{pd}(M), \text{pd}(M') + 1\}$ avec égalité si $\text{pd}(M) \neq \text{pd}(M')$.
3. $\text{pd}(M') \leq \max\{\text{pd}(M), \text{pd}(M'') - 1\}$ avec égalité si $\text{pd}(M) \neq \text{pd}(M'')$.

Notamment, si deux des trois modules M , M' et M'' ont une dimension projective finie, il en est de même pour le troisième.

Proposition 1.3.6 ([54])

Soit $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ une suite exacte courte telle que B est projectif (resp., plat et injectif), alors soit les deux modules A et C sont projectifs (resp., plats et injectifs). Sinon, $\text{pd}(C) = \text{pd}(A) + 1$ (resp., $\text{fd}(C) = \text{fd}(A) + 1$ et $\text{id}(A) = \text{id}(C) + 1$).

Maintenant, on peut donner et rappeler les dimensions homologiques des anneaux.

Définition et Théorème 1.3.7 ([54], Théorème 9.10)

1. La quantité $\text{ID}(R) = \sup\{\text{id}(M), M \in \mathcal{M}(R)\}$ est appelée la dimension injective globale de R .
2. La quantité $\text{PD}(R) = \sup\{\text{pd}(M), M \in \mathcal{M}(R)\}$ est appelée la dimension projective globale de R .

Ces deux quantités sont égales, elles seront appelées la dimension globale de R et notées $\text{gldim}(R)$.

Théorème 1.3.8 ([40], Théorème 1.3.7)

Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $\text{gldim}(R) \leq n$;
2. $\text{pd}(M) \leq n$ pour tout R -module de type fini M ;

1.3. DIMENSIONS HOMOLOGIQUES

3. $\text{Ext}^{n+1}(M, N) = 0$ pour tous R -module M et N ;
4. $\text{pd}(R/I) < n$ pour tout idéal I de R .

Ainsi, $\text{gldim}(\mathbf{R}) = \sup\{\text{pd}(\mathbf{R}/\mathbf{I}) | \mathbf{I} \text{ un idéal de } \mathbf{R}\}$
 $= \sup\{\text{pd}(\mathbf{M}) | \mathbf{M} \text{ un } \mathbf{R}\text{-module de type fini}\}$

Définition et Théorème 1.3.9

Pour tout R -module M , $\text{fd}(M) \leq \text{pd}(M)$.

Ainsi, la quantité $\sup\{\text{fd}(\mathbf{M}), \mathbf{M} \in \mathcal{M}(\mathbf{R})\} \leq \text{gldim}(R)$. Elle sera appelée la dimension faible de R et notée $\text{wdim}(\mathbf{R})$.

Théorème 1.3.10 ([40], Théorème 1.3.9)

Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $\text{wdim}(R) \leq n$;
2. $\text{fd}(M) \leq n$ pour tout R -module de présentation finie M ;
3. $\text{Tor}^{n+1}(M, N) = 0$ pour tout R -modules M et N ;
4. $\text{fd}(R/I) \leq n$ pour tout idéal I de R ;
5. $\text{fd}(R/I) \leq n$ pour tout idéal de type fini I de R .

Ainsi, $\text{wdim}(\mathbf{R}) = \sup\{\text{fd}(\mathbf{M}) | \mathbf{M} \text{ } \mathbf{R}\text{-module de présentation finie}\}$
 $= \sup\{\text{fd}(\mathbf{R}/\mathbf{I}) | \mathbf{I} \text{ idéal de type fini de } \mathbf{R}\}$
 $= \sup\{\text{fd}(\mathbf{R}/\mathbf{I}) | \mathbf{I} \text{ idéal de } \mathbf{R}\}$.

Dans la suite de ce mémoire, on étudiera la dimension projective de Gorenstein de l'anneau de polynômes $R[X]$, en étendant le Théorème des Syzygies 1.3.13.

Pour cette raison, rappelons ce théorème, ainsi que d'autres résultats utiles.

R1 : Si $\sigma : R \longrightarrow S$ est un homomorphisme d'anneaux, alors tout S -module M peut être considéré comme un R -module par la modulation suivante :

$$r.m = \sigma(r)m \quad \text{pour tout } r \in R \text{ et tout } m \in M.$$

Et que tout homomorphisme $f : M \rightarrow N$ de S -modules peut être considéré comme un homomorphisme de R -modules, de la façon suivante :

$$f(r.m) = f(\sigma(r)m) = \sigma(r)f(m) = r.f(m) \text{ pour tout } r \in R \text{ et tout } m \in M.$$

D'après [54, Exercice 9.13, p. 245], si σ est surjectif, alors, pour tous S -modules M et N , on a $\text{Hom}_S(M, N) = \text{Hom}_R(M, N)$.

En particulier, nous avons l'homomorphisme surjectif canonique suivant :

$$\begin{aligned} R[X] &\longrightarrow R[X]/XR[X] \cong R \\ P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \dots &\longmapsto \bar{P} = a_0 \end{aligned}$$

D'où, pour tous $R[X]$ -modules M et N ,

$$\boxed{\text{Hom}_{R[X]}(M, N) = \text{Hom}_R(M, N).}$$

D'autre part, si N est un R -module, alors $N \otimes_R S$ peut être considéré comme un S -module par la modulation suivante :

$$s(x \otimes s') = x \otimes ss' \quad \text{pour tous } s \text{ et } s' \in S \text{ et tout } x \in N.$$

R2 : Le R -module $R[X]$ est libre, en effet :

$$\begin{aligned} R[X] &= R \oplus XR \oplus X^2R \oplus \dots \\ &\cong R^{(\mathbb{N})} \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\diamond \boxed{\text{Tout } R[X]\text{-module projectif est aussi un } R\text{-module projectif.}}$$

En effet, si P est un $R[X]$ -module projectif, alors il existe un $R[X]$ -module Q

$$\begin{aligned} \text{tel que } P \oplus Q &\cong_{R[X]} R[X]^{(I)} \quad \text{pour certain ensemble } I \\ &\cong_R (R^{(\mathbb{N})})^{(I)} \quad \text{qui est un } R\text{-module libre.} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

$$\diamond \boxed{\text{Tout } R\text{-module } M \text{ est facteur direct du } R\text{-module } M[X] = M \otimes R[X].}$$

$$\underline{\text{En Fait}} : M[X] = M \otimes_R R[X] \cong_R M \otimes_R R^{(\mathbb{N})} \cong_R M^{(\mathbb{N})} \quad .$$

Ainsi, le R -module $M[X]$ est somme directe de copies de M .

R3 : Si N est un $R[X]$ -module, alors il est aussi un R -module et par suite on peut considérer le $R[X]$ -module $N[X] = N \otimes R[X]$, de sorte qu'on a le résultat suivant :

Proposition 1.3.11 ([54], Lemme 9.29)

Si N un $R[X]$ -module, alors on a une suite exacte courte de $R[X]$ -modules de la forme :

$$0 \longrightarrow N[X] \longrightarrow N[X] \longrightarrow N \longrightarrow 0$$

R4 : Nous pouvons calculer la dimension projective de R comme étant un $R[X]$ -module à partir le résultats suivant :

Proposition 1.3.12 ([19], Exemple p. 136)

Soit x un élément d'un anneau S qui n'est ni inversible, ni diviseur de zéro. Alors, $\text{pd}_S(S/xS) = 1$.

Ainsi,

$$\boxed{\text{pd}_{R[X]}(R) = 1}$$

R5 : Les dimensions homologiques de l'anneau de polynômes $R[X]$ peuvent être exprimées en fonction des dimensions homologiques de R comme suivant :

Théorème 1.3.13 (“Théorème des Syzygies de Hilbert” ; [40], Théorème 1.3.17)

$$\boxed{\text{gldim}(R[X]) = \text{gldim}(R) + 1}$$

$$\boxed{\text{wdim}(R[X]) = \text{wdim}(R) + 1}$$

1.4 Dimensions homologiques de Gorenstein

Dans cette section, on exposera les résultats, en relation avec notre sujet, les plus importants de l'article :

H. Holm, GORENSTEIN HOMOLOGICAL DIMENSIONS, J. Pure Appl. Algebra 189 (2004), 167-193.

Cette section est constituée de deux parties :

La première partie est consacrée aux résultats concernant la dimension projective de Gorenstein.

Note importante : Dualement avec la dimension projective de Gorenstein, on peut définir la dimension injective de Gorenstein. Ainsi, tous les résultats de la dimension projective de Gorenstein, excepté la Proposition 1.4.14, ont une version duale de la dimension injective de Gorenstein.

La deuxième partie est consacrée aux résultats concernant la dimension plate de Gorenstein.

D'après la définition du module projectif (resp. injectif) de Gorenstein (voir page 2), on a la caractérisation suivante :

Proposition 1.4.1

Pour qu'un module M soit projectif de Gorenstein, il faut et il suffit que $M \in {}^\perp\mathcal{P}(R)$ et qu'il admette une $P(R)$ -résolution à droite copropre.

En plus, Si $(\mathbf{P})$ est une résolution projective complète, alors $\text{Hom}((\mathbf{P}), L)$ est exacte pour tout R -module $L \in \overline{\mathcal{P}}(R)$.

Par conséquence, si M est projectif de Gorenstein, alors $M \in {}^\perp\overline{\mathcal{P}}(R)$.

Le résultat qui suit nous permet de supposer, toujours, que les termes (*i.e.*, modules) dans une résolution projective complète sont libres.

Proposition 1.4.2

Si M un module projectif de Gorenstein, alors il existe une résolution projective complète

$$(\mathcal{F}) : \cdots \rightarrow F_1 \rightarrow F_0 \rightarrow F^0 \rightarrow F^1 \rightarrow \cdots$$

avec les F_i sont libres et que $M \cong \text{Im}(F_0 \rightarrow F^0)$.

Le théorème qui suit est une généralisation de [22, Corollaire 4.3.5], exprimant la réaction de la G -projectivité sur une suite exacte courte qui est analogue à celle de la projectivité.

Théorème 1.4.3

La classe $\mathcal{GP}(R)$ est résolvante projectivement.

En plus, elle est stable par somme directe quelconque et par facteur direct.

Comme une première exception de la Note importante page 49, on donne une version duale G -injective du théorème précédent.

Théorème 1.4.4

La classe $\mathcal{GI}(R)$ est résolvante injectivement.

En plus, elle est stable par produit direct quelconque et par facteur direct.

Proposition 1.4.5

Soit M un R -module et considérons les deux suites exactes :

$$0 \rightarrow K_n \rightarrow G_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow G_0 \rightarrow M \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow \tilde{K}_n \rightarrow \tilde{G}_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow \tilde{G}_0 \rightarrow M \rightarrow 0$$

telles que les G_i et les $\tilde{G}_i$ sont projectifs de Gorenstein. alors, K_n est G -projectif si, et seulement si $\tilde{K}_n$ est G -projectif.

Comme on a déjà défini la dimension projective de Gorenstein (voir page 2), il suffit d'ajouter qu'on note par $\overline{\mathcal{GP}}(R)$ (resp. $\overline{\mathcal{GI}}(R)$) la classe des R -modules de dimension projective (resp. injective) de Gorenstein finie.

Théorème 1.4.6

Tout élément M de $\overline{\mathcal{GP}}(R)$ admet une $\mathcal{GP}(R)$ -préenveloppe surjective.

En particulier, si M est un R -module de dimension projective de Gorenstein finie

$n > 0$, alors M admet une $\mathcal{GP}(R)$ -préenveloppe surjective $\varphi : G \rightarrow M$, telle que $\text{Ker}\varphi = K$ satisfait $\text{pd}(K) = n - 1$.

Notamment, M admet une $\mathcal{GP}(R)$ -résolution à gauche propre de longueur n .

Corollaire 1.4.7

Soit $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ une suite exacte courte telle que A et B sont projectifs de Gorenstein. Si $\text{Ext}(C, P) = 0$ pour tout module projectif P , alors C est projectif de Gorenstein.

Par des méthodes complètement différentes, Enochs et Jenda ont prouvé dans [31, Théorème 2.13] la version duale, G-injective, de la Proposition 1.4.7 précédente .

Donnons une version duale du Théorème 1.4.6, dont l'application sera dans la deuxième partie.

Théorème 1.4.8

Tout élément M de $\overline{\mathcal{GI}}(R)$ admet une $\mathcal{GI}(R)$ -préenveloppe injective.

En particulier, si M est un R -module de dimension injective de Gorenstein finie $n > 0$, alors M admet une $\mathcal{GI}(R)$ -préenveloppe injective $\varphi : M \hookrightarrow G$, telle que $\text{Coker}\varphi = H$ satisfait $\text{id}(H) = n - 1$.

Notamment : M admet une $\mathcal{GI}(R)$ -résolution à droite copropre de longueur n .

Les trois résultats suivants confirment l'analogie existante entre la dimension projective et la dimension projective de Gorenstein.

Théorème 1.4.9

Soit $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ une suite exacte courte. Si deux des trois modules A , B et C ont une dimension projective de Gorenstein finie, il en est de même pour le troisième.

Proposition 1.4.10

Soit $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ une suite exacte courte telle que B est projectif de Gorenstein.

Si C est projectif de Gorenstein, alors A est aussi projectif de Gorenstein. Sinon, $\mathbf{Gpd}(A) = \mathbf{Gpd}(C) - 1$.

Proposition 1.4.11

Soit $(M_i)_{i \in I}$ une famille de modules. Alors,

$$\mathbf{Gpd}(\bigoplus_{i \in I} M_i) = \sup\{\mathbf{Gpd}(M_i); i \in I\}$$

On présente la version duale du Théorème 1.4.9.

Théorème 1.4.12

Soit $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ une suite exacte courte. Si deux des trois modules A , B et C ont des dimensions injectives de Gorenstein finies, il en est de même pour le troisième.

Donnons une caractérisation fonctorielle de la dimension projective de Gorenstein.

Théorème 1.4.13

Soient M un R -module de dimension projective de Gorenstein finie et n un entier positif. Alors, les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $\mathbf{Gpd}(M) \leq n$;
2. $\text{Ext}^i(M, L) = 0$ pour tout $i > n$ et tout module L avec $\text{pd}(L)$ finie ;
3. $\text{Ext}^i(M, Q) = 0$ pour tout $i > n$ et tout module projectif Q ;
4. Pour toute suite exacte $0 \rightarrow K_n \rightarrow G_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow G_0 \rightarrow M \rightarrow 0$ où les G_i sont projectifs de Gorenstein, le module K_n est aussi projectif de Gorenstein.

Par conséquence, la dimension projective de Gorenstein de M est déterminée comme suivant :

$$\begin{aligned} \mathbf{Gpd}(M) &= \sup\{i \in \mathbb{N} \mid \exists L \in \overline{\mathcal{P}}(R) : \text{Ext}^i(M, L) \neq 0\} \\ &= \sup\{i \in \mathbb{N} \mid \exists Q \in \mathcal{P}(R) : \text{Ext}^i(M, Q) \neq 0\} \end{aligned}$$

Corollaire 1.4.14

Si R est un anneau Noethérien, alors pour tout R -module de type fini M avec $\text{Gpd}(M) < \infty$, $\text{Gpd}(M) = \sup\{i \in \mathbb{N} \mid \text{Ext}^i(M, R) \neq 0\}$

Ce dernier corollaire montre et confirme que la dimension projective de Gorenstein est une extension de la G-dimension d'Auslander dans [2].

Le Théorème qui suit donne une caractérisation fonctorielle de la dimension injective de Gorenstein, c'est la version duale du Théorème 1.4.13.

Théorème 1.4.15

Soient N un R -module de dimension injective de Gorenstein finie et n un entier positif. Alors, les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $\text{Gid}(N) \leq n$;
2. $\text{Ext}^i(L, N) = 0$ pour tout $i > n$ et tout module L avec $\text{id}(L)$ finie ; ;
3. $\text{Ext}^i(I, N) = 0$ pour tout $i > n$ et tout module injectif I ;
4. Pour toute suite exacte $0 \rightarrow N \rightarrow H^0 \rightarrow \dots \rightarrow H^{n-1} \rightarrow C^n \rightarrow 0$ où les H^i sont injectifs de Gorenstein, le module C^n est aussi injectif de Gorenstein.

Par conséquence, la dimension injective de Gorenstein de N est déterminée comme suivant :

$$\begin{aligned} \text{Gid}(N) &= \sup\{i \in \mathbb{N} \mid \exists L \in \overline{\mathcal{I}}(R) : \text{Ext}^i(L, N) \neq 0\} \\ &= \sup\{i \in \mathbb{N} \mid \exists I \in \mathcal{I}(R) : \text{Ext}^i(I, N) \neq 0\} \end{aligned}$$

Le résultat qui suit confirme que la dimension projective de Gorenstein est un raffinement de la dimension projective :

Proposition 1.4.16

Pour tout R -module M , $\text{Gpd}(M) \leq \text{pd}(M)$.

L'égalité a lieu dès que la dimension projective de M est finie.

En particulier, $\mathcal{GP}(\mathbf{R}) \cap \overline{\mathcal{P}}(\mathbf{R}) = \mathcal{P}(\mathbf{R})$

On termine cette partie avec une application très importante du Théorème 1.4.6, où on compare la dimension projective finie d'un anneau (Définition 1.4.17) avec sa

dimension projective de Gorenstein finie suivante :

$$\mathbf{FGPD}(\mathbf{R}) = \sup\{\mathbf{Gpd}(\mathbf{M}) \mid \mathbf{M} \in \overline{\mathcal{GP}}(\mathbf{R})\}$$

Définition 1.4.17

La quantité $\mathbf{FPD}(R) = \sup\{\mathbf{pd}(M), M \in \overline{\mathcal{P}}(R)\}$ est appelée la dimension projective finitiste de R .

Théorème 1.4.18

Pour tout anneau R , $\mathbf{FGPD}(\mathbf{R}) = \mathbf{FPD}(\mathbf{R})$

La même chose se reproduit entre la dimension injective de Gorenstein finie d'un anneau et sa dimension injective finie :

Théorème 1.4.19

Pour tout anneau R on a l'égalité suivante : $\mathbf{FGID}(\mathbf{R}) = \mathbf{FID}(\mathbf{R})$

Bien que les modules projectifs de Gorenstein se définissent à partir du foncteur $\mathbf{Hom}_R(-, -)$, les modules plats de Gorenstein se définissent à partir du foncteur $- \otimes_R -$. Ceci explique la différence entre l'étude de la G-platitude et celle de la G-projectivité.

Cependant, sur un anneau cohérent, H. Holm a pu établir une liaison entre la G-platitude et la G-injectivité, similaire à celle qui existe entre la platitude et l'injectivité (voir Théorème & Définition 1.1.13).

Ainsi, la majorité des résultats établis sur la G-platitude s'est faite sur un anneau cohérent.

Comme dans la première partie, le principal objectif de cette partie est de donner une description fonctorielle de la dimension plate de Gorenstein.

Commençons par donner des résultats et des caractérisations des modules plats de Gorenstein définis sur la page 3.

La distributivité du produit tensoriel par rapport à la somme directe (voir (4), Théorème 1.1.1) nous donne le résultat suivant :

Proposition 1.4.20

La classe $\mathcal{GF}(R)$ est stable par somme directe quelconque.

Sur un anneau Noethérien, on a tout module projectif de Gorenstein est plat de Gorenstein [[22], Proposition 5.1.4]. Cependant, dans le cas général, la question demeure ouverte. Néanmoins, H. Holm l'a prouvée dans le cas particulier suivant :

Proposition 1.4.21

Si R est un anneau cohérent tel que $\text{FPD}(R)$ est finie, alors tout module projectif de Gorenstein est plat de Gorenstein.

Nous donnons maintenant le principal résultat dans lequel, la G-platitude se joint à la G-injectivité via la notion du caractère d'un module.

Théorème 1.4.22

Soit M un R -module. On considère les assertions suivantes :

- 1. M est plat de Gorenstein ;*
- 2. Le caractère M^* de M est injectif de Gorenstein ;*
- 3. M admet une $\mathcal{F}(R)$ -résolution à droite copropre, et que $\text{Tor}_i(I, M) = 0$ pour tout $i > 0$ et tout module injectif I .*

Alors, (1) $\Rightarrow$ (2). Et si, en plus, R est cohérent, alors les trois assertions sont équivalentes.

Grâce au Théorème 1.4.22, on conclut, sur un anneau cohérent, la réaction de la G-platitude sur une suite exacte courte.

Théorème 1.4.23

Si R est cohérent, alors la classe $\mathcal{GF}(R)$ est résolvante projectivement et stable par facteur direct.

Proposition 1.4.24

Soient R un anneau cohérent et $0 \rightarrow G' \rightarrow G \rightarrow M \rightarrow 0$ une suite exacte courte telle que G' et G sont plats de Gorenstein.

Si $\text{Tor}(I, M) = 0$ pour tout module injectif I , alors M est plat de Gorenstein.

A ce stade, on se permet de donner des résultats concernant la dimension plate de Gorenstein définie sur la page 3.

Ajoutons d'abord qu'on note par $\overline{\mathcal{GF}}(R)$ la classe de R -modules de dimension plate de Gorenstein finie.

La proposition suivante est une généralisation de [22, Proposition 5.2.7].

Proposition 1.4.25

Soit $R \longrightarrow S$ un homomorphisme d'anneaux tel que S est un R -module plat.

Pour tout R -module M on a l'inégalité : $\mathbf{Gfd}_S(S \otimes_R M) \leq \mathbf{Gfd}_R(M)$

La généralisation de l'équivalence (1) $\Leftrightarrow$ (2), dans le Théorème 1.4.22, aux dimensions injective et plate de Gorenstein se traduit par une inégalité :

Proposition 1.4.26

Pour tout R -module M , on a l'inégalité : $\mathbf{Gid}_R(M^) \leq \mathbf{Gfd}_R(M)$.*

L'égalité a lieu dès que R est cohérent.

En utilisant la relation qui existe entre la dimension plate de Gorenstein et la dimension injective de Gorenstein, établit dans la Proposition 1.4.26 précédente, avec les versions duales G -injectives des Propositions 1.4.10 et 1.4.11, on obtient les deux résultats suivants :

Proposition 1.4.27

Soient R un anneau cohérent et $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ une suite exacte courte telle que B est plat de Gorenstein.

Si C est plat de Gorenstein, il en est de même pour A . Sinon, $\mathbf{Gfd}_R(A) = \mathbf{Gfd}_R(C) - 1$.

Proposition 1.4.28

Supposons que R est cohérent, et considérons $(M_i)_{i \in I}$ une famille de R -modules, alors :

$$\mathbf{Gfd}(\oplus M_i) = \sup\{\mathbf{Gfd}(M_i) \mid i \in I\}.$$

Le théorème qui suit, donne une caractérisation fonctorielle de la dimension plate de Gorenstein sur un anneau cohérent. Un cas particulier de ce théorème peut être trouvé dans [[22], Théorème 5.2.14].

Théorème 1.4.29

Soient M un R -module de dimension plate de Gorenstein finie et n un entier positif. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $\text{Gfd}(M) \leq n$;
2. $\text{Tor}_i(L, M) = 0$ pour tout $i > n$ et tout R -module L avec $\text{id}(L)$ finie ;
3. $\text{Tor}_i(Q, M) = 0$ pour tout $i > n$ et tout R -module injectif Q .
4. Pour toute suite exacte $0 \rightarrow K_n \rightarrow G_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow G_0 \rightarrow M \rightarrow 0$ où les G_i sont plats de Gorenstein, le module K_n est aussi plat de Gorenstein.

Par conséquence, la dimension plate de Gorenstein de M est déterminée comme suivant :

$$\begin{aligned} \text{Gfd}(M) &= \sup\{i \in \mathbb{N} \mid \exists L \in \overline{\mathcal{I}}(R) : \text{Tor}_i(L, M) \neq 0\} \\ &= \sup\{i \in \mathbb{N} \mid \exists Q \in \mathcal{I}(R) : \text{Tor}_i(Q, M) \neq 0\} \end{aligned}$$

Théorème 1.4.30

Soit $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ une suite exacte courte.

Si deux des trois modules A , B et C ont une dimension plate de Gorenstein finie, il en est de même pour le troisième.

Le théorème suivant, présente le rapport existant entre : la dimension plate, la dimension plate de Gorenstein et la grande dimension plate restreinte définie par :

$$\boxed{\text{Rfd}_R(M) = \sup\{i \geq 0 \mid \exists L \in \overline{\mathcal{F}}(R) : \text{Tor}_i(L, M) \neq 0\}}$$

Il est conjecturé par Foxby que si $\text{Gfd}(M)$ est finie, alors $\text{Rfd}(M) = \text{Gfd}(M)$. Christensen [22, Proposition 5.4.8] l'a prouvé sur un anneau local de Cohen-Macaulay avec un module dualisant.

Voyons l'extension suivante :

Théorème 1.4.31

Pour tout R -module M , on a les inégalités suivantes :

$$\text{Rfd}_R(M) \leq \text{Gfd}_R(M) \leq \text{fd}_R(M)$$

Si en plus R est Noethérien, alors :

- Si $\text{fd}_R(M)$ est finie, on aura les deux inégalités :

$$\text{Rfd}_R(M) = \text{Gfd}_R(M) = \text{fd}_R(M)$$

- Si $\text{Gfd}_R(M)$ est finie, alors $\text{Rfd}_R(M) = \text{Gfd}_R(M)$

Nous aurons besoin aussi du lemme suivant :

Lemme 1.4.32

Supposons que R est cohérent. Soit M un R -module de dimension plate de Gorenstein finie $n > 0$, alors il existe une suite exacte courte $0 \rightarrow K \rightarrow G \rightarrow M \rightarrow 0$ telle que G est plat de Gorenstein, et que $\text{fd}(K) = n - 1$.

Les modules projectifs, injectifs et plats de Gorenstein forts

D. Bennis, N. Mahdou. (2007), *Strongly Gorenstein projective, injective, and flat modules*. Journal of Pure and Applied Algebra, 210 :437-445.

Ce chapitre est consacré à l'étude d'un cas particulier des modules projectifs, injectifs et plats de Gorenstein, qu'on nomme respectivement : modules projectifs de Gorenstein forts, injectifs de Gorenstein forts et plats de Gorenstein forts. Ces trois dernières classes révèlent une nouvelle caractérisation des premières classes et confirment l'analogie entre la notion classique de "Modules projectifs, injectifs et plats " et la notion "Modules projectifs, injectifs et plats de Gorenstein ".

2.1 Les modules projectifs et injectifs de Gorenstein forts

Cette section contient une introduction et une première étude des modules projectifs et injectifs de Gorenstein forts, définis comme suit :

Définitions 2.1.1

— Une résolution projective complète de la forme :

$$\mathbf{P} = \cdots \xrightarrow{f} P \xrightarrow{f} P \xrightarrow{f} P \xrightarrow{f} \cdots$$

2.1. LES MODULES PROJECTIFS ET INJECTIFS DE GORENSTEIN FORTS

est appelée une résolution *projective complète forte* associée au couple $(\mathbf{P}, f)$.

Un module M est appelé *projectif de Gorenstein fort* (SG-projectif) si $M \cong \text{Ker } f$ pour une certaine résolution projective complète forte $(\mathbf{P}, f)$.

— Les modules *injectifs de Gorenstein forts* (SG-injectifs) sont définis d’une façon duale.

D’après ces premières définitions, on obtient immédiatement les résultats suivants.

Proposition 2.1.2

1. Si $(P_i)_{i \in I}$ est une famille de modules projectifs de Gorenstein forts, alors $\oplus P_i$ est un module projectif de Gorenstein fort.
2. Si $(I_i)_{i \in I}$ est une famille de modules injectifs de Gorenstein forts, alors $\prod I_i$ est un module injectif de Gorenstein fort.

Preuve. On note simplement que la somme (resp., produit) des résolutions projectives (resp., injectives) complètes fortes est aussi une résolution projective (resp., injective) complète forte (on utilise les isomorphismes naturels du [54, Théorèmes 2.4 et 2.6] et [19, §2, N° 2, Proposition 1]). ■

On peut remarquer facilement que les modules projectifs (resp., injectifs) de Gorenstein forts sont un cas particulier des modules projectifs (resp., injectifs) de Gorenstein. De plus, on sait déjà qu’un module projectif (resp., injectif) est projectif (resp., injectif) de Gorenstein. Ce résultat est obtenu en considérant pour un module projectif P , la résolution projective complète suivante $0 \longrightarrow P \xrightarrow{=} P \longrightarrow 0$ [22, Observation 4.2.2].

Le résultat suivant permet de situer la classe des modules projectifs (resp., injectifs) de Gorenstein forts entre la classe des modules projectifs (resp., injectifs) et la classe des modules projectifs (resp., injectifs) de Gorenstein.

Proposition 2.1.3

Tout module projectif (resp., injectif) est projectif (resp., injectif) de Gorenstein fort.

2.1. LES MODULES PROJECTIFS ET INJECTIFS DE GORENSTEIN FORTS

Preuve. Il suffit de montrer la proposition dans le cas où le module est projectif. En effet, le cas de module injectif est analogue.

Soit P un module projectif, considérons la suite exacte :

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbf{P} = & \cdots & \xrightarrow{f} & P \oplus P & \xrightarrow{f} & P \oplus P & \xrightarrow{f} & P \oplus P & \xrightarrow{f} & \cdots \\ & & & (x, y) & \longmapsto & (0, x) & & & & \end{array}$$

On a $0 \oplus P = \text{Ker } f = \text{Im } f \cong P$.

Soit Q un module projectif, on applique le foncteur $\text{Hom}_R(-, Q)$ à la suite $\mathbf{P}$ et on obtient le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & \text{Hom}(P \oplus P, Q) & \xrightarrow{\text{Hom}_R(f, Q)} & \text{Hom}(P \oplus P, Q) & \longrightarrow & \cdots \\ & & \cong \downarrow & & \cong \downarrow & & \\ \cdots & \longrightarrow & \text{Hom}(P, Q) \oplus \text{Hom}(P, Q) & \longrightarrow & \text{Hom}(P, Q) \oplus \text{Hom}(P, Q) & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

Puisque la suite au dessous est exacte, la suite au dessus est exacte aussi, d'où le résultat. ■

Les modules projectifs (resp., injectifs) de Gorenstein forts ne sont pas nécessairement projectifs (resp., injectifs), comme le montre l'exemple qui suit.

D'abord, rappelons qu'un anneau R est appelé *quasi-Frobenius* (QF-anneau), s'il est Noéthérien et auto-injectif (i.e., R est un R -module injectif). Par exemple, si I est un idéal non nul dans un domaine de Dedekind R , alors R/I est quasi-Frobenius [54, Exercice 9.24]. Le théorème suivant caractérise ces anneaux :

Théorème 2.1.4 ([1], Théorème 31.9)

Soit R un anneau, les assertions suivantes sont équivalentes :

1. R est quasi-Frobenius ;
2. Tout R -module projectif est injectif ;
3. Tout R -module injectif est projectif.

Maintenant, on peut donner l'exemple souhaité :

Exemple 2.1.5

On considère l'anneau quasi-Frobenius local $R = k[X]/(X^2)$ où k est un corps, et soit $\overline{X}$ la classe résiduelle de X dans R .

1. L'idéal $(\overline{X})$ est projectif de Gorenstein fort et injectif de Gorenstein fort.
2. Alors qu'il n'est ni projectif ni injectif.

Preuve. 1. Soit l'homothétie x définie par la multiplication par $\overline{X}$.

On a la suite exacte $\mathbf{F} = \cdots \longrightarrow R \xrightarrow{x} R \xrightarrow{x} R \longrightarrow \cdots$.

Alors, $\text{Ker } x = \text{Im } x = (\overline{X})$.

Comme R est quasi-Frobenius, on peut déduire d'après Théorème 2.1.4 que $\mathbf{F}$ est à la fois une résolution projective et injective complète forte. Alors, $(\overline{X})$ est à la fois un idéal projectif de Gorenstein fort et injectif de Gorenstein fort.

2. Comme l'idéal $(\overline{X})$ n'est pas libre dans l'anneau local R (puisque $\overline{X}^2 = 0$), il n'est pas projectif. Par suite, d'après Théorème 2.1.4, $\overline{X}$ n'est pas injectif non plus.

■

Remarque 2.1.6

Si on veut construire un exemple d'un module projectif de Gorenstein fort qui n'est pas de type fini, on peut voir facilement, d'après la proposition 2.1.2 et en utilisant l'idéal $(\overline{X})$ de l'exemple précédent, que la somme directe $(\overline{X})^{(I)}$ pour tout ensemble infini d'indices I est un module projectif de Gorenstein fort qui n'est pas de type fini.

Maintenant, on donne le principal résultat de ce chapitre, caractérisant les modules projectifs de Gorenstein par des modules projectifs de Gorenstein forts.

Théorème 2.1.7

Un module M est projectif (resp., injectif) de Gorenstein si et seulement si M est un facteur direct d'un module projectif (resp., injectif) de Gorenstein fort.

Preuve. Il suffit de montrer ce théorème dans le cas où M est projectif de Gorenstein.

2.1. LES MODULES PROJECTIFS ET INJECTIFS DE GORENSTEIN FORTS

D'après Théorème 1.4.3, il suffit de montrer l'implication directe, puisque l'implication réciproque provient du fait que la classe des modules projectifs de Gorenstein est stable par facteur direct.

Soit M un module projectif de Gorenstein.

Alors, il existe une résolution projective complète :

$$\mathbf{P} = \cdots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{d_1^P} P_0 \xrightarrow{d_0^P} P_{-1} \xrightarrow{d_{-1}^P} P_{-2} \longrightarrow \cdots$$

telle que $M \cong \text{Im}(d_0^P)$.

Pour tout $m \in \mathbb{Z}$, on pose $\Sigma^m P$ la suite exacte déduite de $\mathbf{P}$ comme suite :

$$(\Sigma^m P)_i = P_{i-m} \quad \text{et} \quad d_i^{\Sigma^m P} = d_{i-m}^P \quad \text{pour tout } i \in \mathbb{Z}.$$

Considérons la suite exacte

$$\mathbf{Q} = \oplus(\Sigma^m P) = \cdots \longrightarrow Q = \oplus P_i \xrightarrow{\oplus d_i^P} Q = \oplus P_i \xrightarrow{\oplus d_i^P} Q = \oplus P_i \longrightarrow \cdots$$

Comme $\text{Im}(\oplus d_i) \cong \oplus \text{Im } d_i$, M est un facteur direct de $\text{Im}(\oplus d_i)$.

D'autre part, d'après [1, Proposition 20.2 (1)] on a

$$\text{Hom}\left(\bigoplus_{m \in \mathbb{Z}} (\Sigma^m P), L\right) \cong \prod_{m \in \mathbb{Z}} \text{Hom}(\Sigma^m P, L)$$

qui est une suite exacte pour tout module projectif L . Alors, $\mathbf{Q}$ est une résolution projective complète forte.

Donc, M est un facteur direct du module projectif de Gorenstein fort $\text{Im}(\oplus d_i)$.

■

Remarque 2.1.8

D'après Proposition 1.4.2, la démonstration précédente peut être refaite en utilisant des résolutions complètes avec des modules libres et ainsi la résolution projective forte construite sera de termes des modules libres.

A la fin de cette section, on présentera un exemple d'un module projectif de Gorenstein, qui n'est pas projectif de Gorenstein fort. D'abord, on se permet de citer quelques propriétés importantes des modules projectifs de Gorenstein forts.

2.1. LES MODULES PROJECTIFS ET INJECTIFS DE GORENSTEIN FORTS

Le résultat suivant donne une simple caractérisation des modules projectifs de Gorenstein forts.

Proposition 2.1.9

Soit M un module, les assertions suivantes sont équivalentes :

1. M est projectif de Gorenstein fort ;
2. Il existe une suite exacte courte $0 \rightarrow M \rightarrow P \rightarrow M \rightarrow 0$, où P est un module projectif, et $\text{Ext}(M, Q) = 0$ pour tout module projectif Q ;
3. Il existe une suite exacte courte $0 \rightarrow M \rightarrow P \rightarrow M \rightarrow 0$, où P est un module projectif, et $\text{Ext}(M, Q') = 0$ pour tout module Q' de dimension projective finie ;
4. Il existe une suite exacte courte $0 \rightarrow M \rightarrow P \rightarrow M \rightarrow 0$, où P est un module projectif ; tel que, pour tout module projectif Q , la suite courte $0 \rightarrow \text{Hom}(M, Q) \rightarrow \text{Hom}(P, Q) \rightarrow \text{Hom}(M, Q) \rightarrow 0$ est exacte ;
5. Il existe une suite exacte courte $0 \rightarrow M \rightarrow P \rightarrow M \rightarrow 0$, où P est un module projectif ; tel que, pour tout module Q' de dimension projective finie, la suite courte $0 \rightarrow \text{Hom}(M, Q') \rightarrow \text{Hom}(P, Q') \rightarrow \text{Hom}(M, Q') \rightarrow 0$ est exacte.

Preuve. Résulte immédiatement de la définition des modules projectifs de Gorenstein forts. ■

Remarques 2.1.10

1. Notons qu'en utilisant cette caractérisation des modules projectifs de Gorenstein forts, la Proposition 2.1.3 devient évidente. En effet, on a la suite exacte courte $0 \rightarrow P \rightarrow P \oplus P \rightarrow P \rightarrow 0$, et $\text{Ext}(P, Q) = 0$ pour tout module Q .
2. On peut caractériser les modules injectifs de Gorenstein forts d'une manière similaire à celle des modules projectifs de Gorenstein forts dans Proposition 2.1.9.

Rappelons qu'un module projectif de Gorenstein est projectif si et seulement si sa dimension projective est finie (Proposition 1.4.16).

Le résultat suivant définit le lien entre les modules projectifs de Gorenstein forts et la dimension plate.

Corollaire 2.1.11

Un module projectif de Gorenstein fort M est plat si et seulement si M est de dimension plate finie.

Preuve. Résultat simple de proposition 2.1.9. ■

La proposition suivante concerne les modules projectifs de Gorenstein forts de type fini. On sait bien qu'un module projectif de type fini est infiniment présenté (i.e., admet une résolution libre

$$\cdots \rightarrow F_n \rightarrow F_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow F_0 \rightarrow M \rightarrow 0$$

telle que chaque F_i est un module libre de type fini).

Pour les modules projectifs de Gorenstein, la question est toujours ouverte. Toutefois, les modules projectifs de Gorenstein forts donnent une réponse partielle affirmative, caractérisant les modules projectifs de Gorenstein forts de type fini.

Proposition 2.1.12

Soient R un anneau et M un R -module. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. *M projectif de Gorenstein fort de type fini ;*
2. *Il existe une suite exacte courte $0 \rightarrow M \rightarrow P \rightarrow M \rightarrow 0$ où P est un R -module projectif de type fini, et $\text{Ext}(M, R) = 0$;*
3. *Il existe une suite exacte courte $0 \rightarrow M \rightarrow P \rightarrow M \rightarrow 0$ où P est un R -module projectif de type fini, et $\text{Ext}(M, F) = 0$ pour tout R -module plat F ;*
4. *Il existe une suite exacte courte $0 \rightarrow M \rightarrow P \rightarrow M \rightarrow 0$ où P est un R -module projectif de type fini, et $\text{Ext}(M, F') = 0$ pour tout R -module F' de dimension plate finie.*

Preuve. Notons que la quatrième condition est plus forte que la première. Par conséquence, il ne reste que trois implications à montrer.

(1) $\Rightarrow$ (2). Un simple résultat de Proposition 2.1.9.

(2) $\Rightarrow$ (3). Soit F un R -module plat. D'après Théorème de Lazard (Théorème

2.1. LES MODULES PROJECTIFS ET INJECTIFS DE GORENSTEIN FORTS

1.1.28), il existe un système inductif $(L_i)_{i \in I}$ de R -modules libres de type fini tel que $\varinjlim L_i \cong F$. D'après Théorème 1.2.15 (ou similairement à la preuve de [32, Lemma 3.1.16]), on a, pour tout $i \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} \text{Ext}(M, F) &\cong \text{Ext}(M, \varinjlim L_i) \\ &\cong \varinjlim \text{Ext}(M, L_i) \end{aligned}$$

Maintenant, comme toute somme directe peut être considérée comme la limite inductive de sa somme partielle finie avec ordre par inclusion, [19, Exercice 3, page 187] implique aussi que $\text{Ext}(M, L_i) = 0$ pour tout $i \in I$.

(3) $\Rightarrow$ (4). Soit F' un R -module tel que $0 < \text{fd}(F') = m < \infty$.

D'abord, il est clair que (3) implique $\text{Ext}^n(M, F) = 0$ pour tout $n > 0$, et tout R -module plat F .

Par suite, on choisit une suite exacte courte $0 \rightarrow K \rightarrow L \rightarrow F' \rightarrow 0$ où L est un R -module libre et $\text{fd}(K) = m - 1$.

Par induction on a $\text{Ext}^n(M, L) = \text{Ext}^n(M, K) = 0$ pour tout $n > 0$. En appliquant le foncteur $\text{Hom}(M, -)$ à la suite exacte courte ci-dessus on obtient la suite exacte

$$0 = \text{Ext}(M, L) \rightarrow \text{Ext}(M, F') \rightarrow \text{Ext}^2(M, K) = 0.$$

Alors, $\text{Ext}(M, F') = 0$. ■

On termine la section par un exemple d'un module projectif de Gorenstein qui n'est pas projectif de Gorenstein fort.

Exemple 2.1.13

On considère l'anneau Noethérien local $R = k[[X_1, X_2]]/(X_1X_2)$ où k est un corps. Alors :

1. Les deux idéaux $(\overline{X_1})$ et $(\overline{X_2})$ sont projectifs de Gorenstein, où $\overline{X_i}$ est la classe résiduelle de X_i dans R pour $i = 1, 2$.
2. $(\overline{X_1})$ et $(\overline{X_2})$ ne sont pas projectifs de Gorenstein forts.

Preuve. 1. Il s'agit de [22, Example 4.1.5].

2. Supposons, par exemple, que l'idéal $(\overline{X_1})$ est projectif de Gorenstein fort.

D'après Proposition 2.1.12, il existe une suite exacte courte

$$0 \rightarrow (\overline{X_1}) \rightarrow P \rightarrow (\overline{X_1}) \rightarrow 0$$

où P est un module projectif de type fini. Comme R est local, il existe un entier positif n tel que $P \cong R^n$. Donc, on peut écrire la suite ci-dessus comme suit :

$$(\Phi) : 0 \longrightarrow (\overline{X_1}) \longrightarrow R^n \longrightarrow (\overline{X_1}) \longrightarrow 0.$$

D'autre part, on a la suite exacte courte

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & (\overline{X_2}) & \longrightarrow & R & \longrightarrow & (\overline{X_1}) \longrightarrow 0 \\ & & & & x & \longmapsto & x\overline{X_1} \end{array}$$

Alors, d'après le lemme de Schanuel (Théorème 1.1.9), on a $R^n \oplus (\overline{X_2}) \cong R \oplus (\overline{X_1})$. En appliquant le produit tensoriel par k , le corps résiduel de R , on obtient l'isomorphisme des k -espaces vectoriels suivant : $k^n \oplus (k \otimes_R (\overline{X_2})) \cong k \oplus (k \otimes_R (\overline{X_1}))$, et on déduit que $n = 1$. Par conséquence, la suite exacte courte (Φ) devient

$$0 \longrightarrow (\overline{X_1}) \xrightarrow{g} R \xrightarrow{f} (\overline{X_1}) \longrightarrow 0$$

Maintenant, on considère $f(1) = \overline{\alpha X_1}$ pour un certain $\alpha \in k[[X_1, X_2]]$, d'où $\text{Im } f = (\overline{\alpha X_1}) = (\overline{X_1})$, ceci implique qu'il existe β et δ dans $k[[X_1, X_2]]$ tels que $X_1 = \beta\alpha X_1 + \delta X_1 X_2$, alors $\alpha\beta = 1 - \delta X_2$ qui est inversible dans $k[[X_1, X_2]]$, de même pour α , et par suite $\overline{\alpha}$ est inversible dans R . Alors,

$$\text{Ker } f = \{x \in R \mid xf(1) = x\overline{\alpha X_1} = \overline{0}\} = \{x \in R \mid x\overline{X_1} = \overline{0}\} = \text{Ann } \overline{X_1} = (\overline{X_2}).$$

Par conséquence, $(\overline{X_1}) \cong \text{Im } g = \text{Ker } f = (\overline{X_2})$.

Ce qui est absurde puisque $\text{Ann } \overline{X_1} = (\overline{X_2}) \neq (\overline{X_1}) = \text{Ann } \overline{X_2}$.

Alors, $(\overline{X_1})$ n'est pas projectif de Gorenstein fort. ■

2.2 Les modules plats de Gorenstein forts

Cette section est consacrée aux modules plats de Gorenstein forts, qu'on introduira et définira pour les lier plus loin, avec les modules projectifs de Gorenstein forts.

Définition 2.2.1

Une résolution plate complète de la forme

$$\mathbf{F} = \cdots \xrightarrow{f} F \xrightarrow{f} F \xrightarrow{f} F \xrightarrow{f} \cdots$$

est appelée résolution *plate complète forte* associée au couple $(\mathbf{F}, f)$.

Un module M est appelé *plat de Gorenstein fort* (SG-plat) si $M \cong \text{Ker } f$ pour une certaine résolution plate complète forte $(\mathbf{F}, f)$.

En conséquent, les modules plats de Gorenstein forts sont un simple cas particulier des modules de Gorenstein plats. L'exemple 2.2.11 présente des exemples de modules plats de Gorenstein qui ne sont pas plats de Gorenstein forts.

Maintenant, similairement à Proposition 2.1.3 on peut montrer qui suit :

Proposition 2.2.2

Tout module plat est plat de Gorenstein fort.

Exemple 2.2.3

D'après Exemple 2.1.5, il est clair que l'idéal $(\overline{X})$ est aussi plat de Gorenstein fort, mais il n'est pas plat.

Proposition 2.2.4

Toute somme directe de deux modules plats de Gorenstein forts est un module plat de Gorenstein fort.

Preuve. Similaire à la preuve de Proposition 2.1.2 en se basant sur le fait que le produit tensoriel commute avec la somme. ■

Les modules plats de Gorenstein forts donnent une simple caractérisation des modules plats de Gorenstein :

Théorème 2.2.5

Si un module M est plat de Gorenstein, alors M est un facteur direct d'un module plat de Gorenstein fort.

Preuve. Similaire à la preuve du Théorème 2.1.7. ■

Comme les modules projectifs de Gorenstein forts sont caractérisés par Proposition 2.1.9, la proposition suivante caractérise les modules plats de Gorenstein forts d'une manière similaire.

Proposition 2.2.6

Soit M un module, les assertions suivantes sont équivalentes :

1. *M est plat de Gorenstein fort ;*
2. *Il existe une suite exacte courte $0 \rightarrow M \rightarrow F \rightarrow M \rightarrow 0$, où F est un module plat, et $\text{Tor}(M, I) = 0$ pour tout module injectif I ;*
3. *Il existe une suite exacte courte $0 \rightarrow M \rightarrow F \rightarrow M \rightarrow 0$, où F est un module plat, et $\text{Tor}(M, I') = 0$ pour tout module I' de dimension injective finie ;*
4. *Il existe une suite exacte courte $0 \rightarrow M \rightarrow F \rightarrow M \rightarrow 0$, où F est un module plat ; telle que $0 \rightarrow M \otimes I \rightarrow F \otimes I \rightarrow M \otimes I \rightarrow 0$ est exacte pour tout module injectif I ;*
5. *Il existe une suite exacte courte $0 \rightarrow M \rightarrow F \rightarrow M \rightarrow 0$, où F est un module plat ; telle que la suite $0 \rightarrow M \otimes I' \rightarrow F \otimes I' \rightarrow M \otimes I' \rightarrow 0$ est exacte pour tout module I' de dimension injective finie.*

Holm (Théorème 1.4.31) a montré que, dans un anneau Noethérien, un module plat de Gorenstein est plat si et seulement si sa dimension plate est finie. En outre, on peut voir, d'après Proposition 1.4.26, [40, Théorème 1.2.1], et la version duale de Proposition 1.4.16 que la même équivalence est vérifiée dans les anneaux cohérents. Mais en général, la question est toujours ouverte. Toutefois, on peut donner une autre réponse partielle affirmative (Corollaire 2.2.8). D'abord, commençons par le cas de modules plats de Gorenstein forts.

Proposition 2.2.7

Un module plat de Gorenstein fort est plat si et seulement si sa dimension plate est finie.

Preuve. Immédiate suite à Proposition 2.2.6. ■

Corollaire 2.2.8

Si R est un anneau de dimension faible finie. Alors, un R -module M est plat de Gorenstein si et seulement si M est plat.

Preuve. Simple, en combinant Théorème 2.2.5 avec Proposition 2.2.7 et Proposition 1.1.15. ■

D'après Proposition 0.0.9, dans un anneau cohérent, la classe des modules projectifs de Gorenstein de présentation finie et la classe des modules plats de Gorenstein de type fini coïncident. En général, la question est toujours ouverte. Néanmoins, les modules de Gorenstein forts donnent une réponse partielle affirmative :

Proposition 2.2.9

Soit R un anneau. Un R -module M est projectif de Gorenstein fort de type fini si et seulement si M est plat de Gorenstein fort de présentation finie.

Preuve. On peut montrer cette proposition de manière analogue à la preuve de [22, Lemme 5.1.10],¹ en utilisant les résolutions complètes fortes. Ici, on utilise pour la preuve la caractérisation des modules projectifs de Gorenstein forts de type fini.

$\implies$. Soit M un module projectif de Gorenstein fort de type fini. D'après Proposition 2.1.12, il existe une suite exacte courte $0 \rightarrow M \rightarrow P \rightarrow M \rightarrow 0$ où P est un module projectif de type fini, et $\text{Ext}(M, R) = 0$.

Soit E un module injectif. Comme M est infiniment présenté, on a, d'après Théorème 1.2.17, l'isomorphisme suivant :

$$\text{Tor}(\text{Hom}(R, E), M) \cong \text{Hom}(\text{Ext}(M, R), E).$$

1. voir la note de bas de page 4.

Ainsi, $\text{Tor}(E, M) = 0$ (Puisque $\text{Hom}(R, E) \cong E$ et $\text{Ext}(M, R) = 0$). Donc, M est un R -module plat de Gorenstein fort (d'après Proposition 2.2.6).

$\Leftarrow$. Maintenant, supposons que M est un module plat de Gorenstein fort de présentation finie. D'après Proposition 2.2.6, il existe une suite exacte courte $0 \rightarrow M \rightarrow P \rightarrow M \rightarrow 0$ où P est un module projectif de type fini, et $\text{Tor}(M, E) = 0$ pour tout module injectif E . Si on suppose que E est fidèlement injectif, le même isomorphisme de l'implication directe ci-dessus implique que $\text{Ext}(M, R) = 0$. Ainsi, d'après Proposition 2.1.12, on a M est projectif de Gorenstein fort. ■

Rappelons que si R est un anneau local ou intègre, alors tout R -module plat de type fini ou de présentation finie est projectif (voir Schéma 1.1.20).

Sous les mêmes conditions, les modules plats de Gorenstein forts et les modules projectifs de Gorenstein forts sont liés de la même façon, comme c'est bien explicite dans Proposition 2.2.9 et le corollaire suivant :

Corollaire 2.2.10

Si R est un domaine ou un anneau local, alors un R -module M de type fini est plat de Gorenstein fort si et seulement si M est projectif de Gorenstein fort.

Preuve. En utilisant Proposition 2.2.9 et sa preuve. ■

Maintenant, on présente un exemple de modules plats de Gorenstein qui ne sont pas plats de Gorenstein forts.

Exemple 2.2.11

On considère l'anneau Noethérien local $R = k[[X_1, X_2]]/(X_1X_2)$ où k est un corps. Les deux idéaux $(\overline{X_1})$ et $(\overline{X_2})$ sont plats de Gorenstein, où $\overline{X_i}$ est la classe résiduelle de X_i pour $i = 1, 2$ dans R . Cependant, ces idéaux ne sont pas plats de Gorenstein forts.

Preuve. En appliquant simplement [22, Théorème 5.1.11] et Proposition 2.2.9 à Exemple 2.1.13. ■

En étudiant les anneaux parfaits, Bass [6] a montré qu'un anneau R est parfait si et seulement si tout R -module plat est projectif (voir aussi [1, 60] pour plus de détails sur cet anneau).

Motivé par ce résultat, Sakhaiev pose la question sur les cas où on a plus généralement, tout module plat est projectif (voir [55]). En effet, cette question a été étudiée en premier temps à l'année 1960, à savoir avec les travaux de Vasconcelos [58] et Endo [29]. Toutefois, une première réponse générale apparut avec Facchini, Herbera, et Sakhaiev [37]. Plus récemment, une étude la concernant a été établie par Puninski et Rothmaler [53], qui ont donné aux anneaux satisfaisant cette question le nom de S -anneau, honorant Sakhaiev.

Maintenant, il est naturel de poser la question : Quand est ce qu'on a tout module plat de Gorenstein fort de type fini est projectif de Gorenstein fort ?

La réponse donne une nouvelle caractérisation aux S -anneaux :

Proposition 2.2.12

Un anneau R est un S -anneau si et seulement si tout R -module plat de Gorenstein fort de type fini est projectif de Gorenstein fort.

Preuve. $\implies$. Soit M un R -module plat de Gorenstein fort de type fini. Alors, d'après Proposition 2.2.6, il existe une suite exacte courte $0 \rightarrow M \rightarrow F \rightarrow M \rightarrow 0$ où F un R -module plat de type fini. Par hypothèses F est projectif, et donc M est de présentation finie. Alors, d'après Proposition 2.2.9, M est projectif de Gorenstein fort.

$\impliedby$. Maintenant, supposons que M est un R -module plat de type fini. Alors, d'après Proposition 2.2.2, M est plat de Gorenstein fort de type fini. Par conséquence, M , par hypothèses, est projectif de Gorenstein fort. Ainsi, d'après Proposition 2.1.12, il existe une suite exacte courte $0 \rightarrow M \rightarrow P \rightarrow M \rightarrow 0$ où P est un R -module projectif de type fini, et $\text{Ext}(M, F) = 0$ pour tout R -module plat F . Donc, $\text{Ext}(M, M) = 0$ (Puisque M est plat), et alors la suite exacte courte ci-dessus est scindée (Théorème 1.2.13). Donc, M est projectif puisqu'il est un facteur direct du R -module projectif

P , d'où le résultat. ■

Les modules projectifs, injectifs et plats d'ordre n de Gorenstein forts

N. Mahdou and M. Tamekkante (2018), *Strongly n -Gorenstein projective, injective and flat modules*. Acta Mathematica Universitatis Comeniana, vol. 87, no. 1, 3553.

Ce chapitre, généralisant l'idée du premier chapitre, présente et contient une étude des cas particuliers des modules de dimensions projective, injective et plate de Gorenstein inférieures ou égales à $n \geq 0$, qu'on appelle, respectivement, les modules projectifs, injectifs, et plats d'ordre n de Gorenstein forts. Ces trois classes de modules donnent des nouvelles caractérisations des trois premières. En outre, elles généralisent les notions de module projectif, injectif et plat de Gorenstein fort, respectivement.

3.1 Les modules projectifs et injectifs d'ordre n de Gorenstein forts

Dans cette section, on introduit et étudie les modules projectif et injectif d'ordre n de Gorenstein forts définis comme suit :

Définitions 3.1.1

Soit n un entier positif.

1. Un R -module M est dit *projectif d'ordre n de Gorenstein fort*, s'il existe une

suite exacte courte

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow P \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

où $\text{pd}_R(P) \leq n$ et $\text{Ext}_R^{n+1}(M, Q) = 0$ dès que Q est projectif.

2. Un R -module M est dit *injectif d'ordre n de Gorenstein fort*, s'il existe une suite exacte courte

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow I \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

où $\text{id}_R(I) \leq n$ et $\text{Ext}_R^{n+1}(E, M) = 0$ dès que E est injectif.

Une conséquence directe de la définition ci-dessus c'est que les modules projectifs d'ordre 0 de Gorenstein fort sont exactement les modules projectifs de Gorenstein forts. Aussi, tout module de dimension projective finie inférieure ou égale n est un module projectif d'ordre n de Gorenstein fort, et on a :

Proposition 3.1.2

Soit n un entier positif et soit M un module projectif d'ordre n de Gorenstein fort. Alors, on a les assertions suivantes :

1. Si $0 \rightarrow N \rightarrow P_{n-1} \rightarrow \dots \rightarrow P_0 \rightarrow M \rightarrow 0$ est une suite exacte où tous les P_i sont projectifs, alors N est un module projectif de Gorenstein fort, et en conséquent $\text{Gpd}_R(M) \leq n$.
2. En outre, si $0 \rightarrow M \rightarrow P \rightarrow M \rightarrow 0$ est une suite exacte courte où $\text{pd}_R(P) < \infty$ alors $\text{Gpd}_R(M) = \text{pd}_R(P)$, et en conséquent M est un module projectif d'ordre k de Gorenstein fort avec $k := \text{pd}_R(P)$.

Preuve. (1) Si $n = 0$ le résultat est vérifié par Proposition 2.1.9. Autrement, comme M est un module projectif d'ordre n de Gorenstein fort, il existe une suite exacte courte $0 \rightarrow M \rightarrow P \rightarrow M \rightarrow 0$ où $\text{pd}_R(P) \leq n$. Considérons le diagramme commu-

3.1. LES MODULES PROJECTIFS ET INJECTIFS D'ORDRE n DE GORENSTEIN FORTS

tatif suivant :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & 0 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & P_{n-1} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & P_0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & Q & \longrightarrow & P_{n-1} \oplus P_{n-1} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & P_0 \oplus P_0 & \longrightarrow & P & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & P_{n-1} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & P_0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & & & 0 & & 0 & &
 \end{array}$$

Il est clair que, Q est projectif puisque $\text{pd}_R(P) \leq n$. En outre, pour tout module projectif K , on a $\text{Ext}_R^1(N, K) = \text{Ext}_R^{n+1}(M, K) = 0$. Ainsi, par Proposition 2.1.9, N est un module projectif de Gorenstein fort (et par suite, projectif de Gorenstein). Donc, $\text{Gpd}_R(M) \leq n$.

(2) D'après la suite exacte courte $0 \rightarrow M \rightarrow P \rightarrow M \rightarrow 0$, Proposition 1.4.16, Lemma 0.0.11 (1), et comme $\text{Gpd}_R(M)$ est finie par (1) ci-dessus, on a :

$$k := \text{pd}_R(P) = \text{Gpd}_R(P) = \max\{\text{Gpd}_R(M), \text{Gpd}_R(M)\} = \text{Gpd}_R(M).$$

Ainsi, par Théorème 1.4.13, $\text{Ext}_R^{k+1}(M, K) = 0$ dès que K est projectif. Par conséquent, M est un module projectif d'ordre k de Gorenstein fort. ■

En utilisant Théorème 1.4.13, une conséquence directe de Proposition 3.1.2 c'est que, tout module projectif d'ordre n de Gorenstein fort est un module projectif d'ordre m de Gorenstein fort dès que $n \leq m$.

Proposition 3.1.3

1. Si $(M_i)_{i \in I}$ est une famille de R -modules projectifs d'ordre n de Gorenstein forts, alors $\bigoplus M_i$ est projectif d'ordre n de Gorenstein fort.
2. Si $(M_i)_{i \in I}$ est une famille de R -modules injectifs d'ordre n de Gorenstein forts, alors $\prod M_i$ est injectif d'ordre n de Gorenstein fort.

Preuve. Clair puisque :

$\text{pd}_R(\bigoplus N_i) = \sup\{\text{pd}_R(N_i); i \in I\}$, $\text{id}_R(\prod N_i) = \sup\{\text{id}_R(N_i), i \in I\}$,
 $\text{Ext}^i(\bigoplus M_i, N) \cong \bigoplus \text{Ext}^i(M_i, N)$, et $\text{Ext}^i(M, \prod N_i) \cong \prod \text{Ext}^i(M, N_i)$ pour tous les
modules M, N, M_i, N_i , et tout $i \geq 0$. ■

Il est clair que, pour un entier positif n et un R -module M :

$$“\text{pd}_R(M) \leq n” \implies “M \text{ est projectif d'ordre } n \text{ de Gorenstein fort}” \implies “\text{Gpd}_R(M) \leq n”$$

Toutefois, les réciproques ne sont pas vraies en général comme le montre les deux exemples suivants :

Exemple 3.1.4

Considérons l'anneau quasi-Frobenius local $R := K[X]/(X^2)$ où K est un corps, soit $(\overline{X})$ la classe résiduelle de X dans R . Soit S un anneau Noethérien tel que $\text{gldim}(S) = n$. Considérons un S -module de type fini M tel que $\text{pd}_S(M) = n$. Posons $T := R \times S$ et $E := (\overline{X}) \times M$. Alors :

1. E est un T -module projectif d'ordre n de Gorenstein fort et $\text{Gpd}_T(E) = n$.
2. Toutefois, $\text{pd}_T(E) = \infty$.

Preuve. (1) Considérons la suite exacte courte de R -modules :

$$0 \rightarrow (\overline{X}) \xrightarrow{\kappa} R \xrightarrow{\phi} (\overline{X}) \rightarrow 0$$

où κ est l'injection de $(\overline{X})$ dans R et ϕ est la multiplication par $\overline{X}$. Considérons la suite exacte courte scindée de S -modules :

$$0 \rightarrow M \xrightarrow{\iota} M \oplus M \xrightarrow{\pi} M \rightarrow 0$$

où ι et π sont, respectivement, l'injection et la projection canoniques. Par conséquent, on a la suite exacte courte des $R \times S$ -modules :

$$(\star) \quad 0 \rightarrow E \rightarrow R \times (M \oplus M) \rightarrow E \rightarrow 0.$$

3.1. LES MODULES PROJECTIFS ET INJECTIFS D'ORDRE n DE GORENSTEIN FORTS

Par [50, Lemme 2.5 (2)], $\text{pd}_T(R \times (M \oplus M)) = \text{pd}_S(M \oplus M) = n$. D'autre part, par Théorème 6.2.1, Proposition 8.1.8 et [11, Proposition 2.6], on a :

$$\text{G-gldim}(T) = \sup\{\text{G-gldim}(R), \text{G-gldim}(S)\} = \text{gldim}(S) = n < \infty.$$

Alors, $\text{Gpd}_T(E) < \infty$. Donc, en appliquant Lemme 0.0.11 (3) à $(\star)$, on a :

$$\text{Gpd}_T(E) \leq \max\{\text{Gpd}_T(R \times (M \oplus M)), \text{Gpd}_T(E) - 1\}.$$

Ainsi, $\text{Gpd}_T(E) \leq \text{Gpd}_T(R \times (M \oplus M))$. En utilisant Lemme 0.0.11 (1) une autre fois à $(\star)$, on a

$$\text{Gpd}_T(R \times (M \oplus M)) \leq \max\{\text{Gpd}_T(E), \text{Gpd}_T(E)\} = \text{Gpd}_T(E).$$

Alors, $\text{Gpd}_T(E) = \text{Gpd}_T(R \times (M \oplus M))$. D'autre part, par Proposition 1.4.16, $\text{Gpd}_T(R \times (M \oplus M)) = \text{pd}_T(R \times (M \oplus M)) = n$. En conséquent, $\text{Gpd}_T(E) = n$. Et par suite, d'après $(\star)$ et par Théorème 1.4.13, E est un T -module projectif d'ordre n de Gorenstein, comme voulu.

(2) En utilisant [50, Lemme 2.5 (2)], $\text{pd}_T(E) = \sup\{\text{pd}_R(\overline{X}), \text{pd}_S(M)\}$. Maintenant, supposons que $\text{pd}_R(\overline{X}) < \infty$. Ainsi, par [11, Proposition 2.6 et Corollaire 2.7], $\overline{X}$ est projectif, et donc libre puisque R est local. Absurde, puisque $\overline{X}^2 = 0$. D'où, $\text{pd}_T(E) = \infty$. ■

Exemple 3.1.5

Considérons l'anneau Noethérien quasi-Frobenius local $R := K[[X, Y]]/(XY)$ où K est un corps, et $(\overline{X})$ la classe résiduelle de X dans R . Soit S un anneau Noethérien tel que $\text{gldim}(S) = n$ et M est un S -module de type fini tel que $\text{pd}_S(M) = n$. Posons $T := R \times S$ et $E := (\overline{X}) \times M$. Alors :

1. $\text{Gpd}_T(E) = n$.
2. Il n'existe aucun entier positif k tel que E est un T -module projectif d'ordre k de Gorenstein fort .

Preuve. (1) Par Lemme 6.2.2 et Théorème 1.4.16,

$$n = \text{pd}_S(M) = \text{Gpd}_S(M) = \text{Gpd}_S(E \otimes_T S) \leq \text{Gpd}_T(E).$$

D'autre part, par Proposition 8.1.8 et [11, Proposition 2.6 et Corollaire 2.7], les conditions de Lemme 6.2.3 sont satisfaites. Par conséquent, on a

$$\text{Gpd}_T(E) \leq \sup\{\text{Gpd}_R(\overline{X}), \text{Gpd}_S(M)\} = \text{pd}_S(M) = n$$

D'où, $\text{Gpd}_T(E) = n$, comme voulu.

(2) Supposons qu'il existe un entier positif k tel que E est un T -module projectif d'ordre k de Gorenstein fort. Alors, il existe une suite exacte courte de T -modules

$$(*) \quad 0 \rightarrow E \rightarrow P \rightarrow E \rightarrow 0$$

où $\text{pd}_T(P) < \infty$. Comme R est un T -module projectif et comme $(\overline{X}) \cong_R E \otimes_T R$, en appliquant le foncteur $- \otimes_T R$ on obtient une suite exacte de R -modules de la forme :

$$0 \rightarrow (\overline{X}) \rightarrow P \otimes_T R \rightarrow (\overline{X}) \rightarrow 0$$

Notons que $\text{pd}_R(P \otimes_T R) < \infty$. Par conséquent, par [11, Propositions 2.6 et Corollaire 2.7], $P \otimes_T R$ est un R -module projectif et $(\overline{X})$ est un R -module projectif de Gorenstein. Alors, par Théorème 1.4.13, $(\overline{X})$ est un R -module projectif de Gorenstein fort. Ceci contredit Exemple 2.1.13. ■

Maintenant, on donne le résultat principal de cette section.

Théorème 3.1.6

Soit M un R -module et soit n un entier positif. Alors, $\text{Gpd}_R(M) \leq n$ si et seulement si M est un facteur direct d'un module projectif d'ordre n de Gorenstein fort.

Preuve. Si $n = 0$ le résultat est vérifié par Théorème 2.1.7. Alors, on peut supposer que $0 < \text{Gpd}_R(M) \leq n$. D'après, Théorème 1.4.6, il existe une suite exacte courte de R -modules $0 \rightarrow K \rightarrow G \rightarrow M \rightarrow 0$ où G est projectif de Gorenstein et $\text{pd}_R(K) \leq$

3.1. LES MODULES PROJECTIFS ET INJECTIFS D'ORDRE n DE GORENSTEIN FORTS

$n - 1$. D'après la définition des modules projectifs de Gorenstein, il existe une suite exacte courte

$$0 \rightarrow G \rightarrow P \rightarrow G^0 \rightarrow 0$$

où P est projectif et G^0 est projectif de Gorenstein. Par conséquent, considérons le diagramme pushout suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & K & \xlongequal{\quad} & K & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & G & \longrightarrow & P & \longrightarrow & G^0 \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \vdots & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & M & \cdots \cdots \cdots & D & \longrightarrow & G^0 \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & 0 & & 0 & & \end{array}$$

D'après la suite exacte courte verticale du milieu et Proposition 1.3.5, $\text{pd}_R(D) \leq \text{pd}_R(K) + 1 \leq n$. Considérons la résolution n -projective de M :

$$0 \rightarrow G_n \rightarrow P_n \rightarrow \dots \rightarrow P_1 \rightarrow M \rightarrow 0.$$

Il est clair que G_n est projectif de Gorenstein. Divisons cette suite en suites exactes courtes comme suit :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & G_1 & \longrightarrow & P_1 & \longrightarrow & M \longrightarrow 0 \\ 0 & \longrightarrow & G_2 & \longrightarrow & P_2 & \longrightarrow & G_1 \longrightarrow 0 \\ & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \longrightarrow & G_n & \longrightarrow & P_n & \longrightarrow & G_{n-1} \longrightarrow 0 \end{array}$$

Il est clair que, par Lemma 0.0.11, pour chaque $1 \leq i \leq n$, $\text{Gpd}_R(G_i) \leq n - i \leq n$.

Considérons aussi la résolution projective de G_n suivante :

$$\dots \rightarrow P_{n+2} \rightarrow P_{n+1} \rightarrow G_n \rightarrow 0$$

et divisons la en suites exactes courtes comme suit $0 \rightarrow G_{i+1} \rightarrow P_{i+1} \rightarrow G_i \rightarrow 0$ pour tout $i \geq n$. Il est clair que tout $i \geq n$, G_i est projectif de Gorenstein (par Théorème 1.4.3). D'autre part, comme G^0 est projectif de Gorenstein, il existe une résolution à droite projective copropre de G^0 :

$$0 \rightarrow G^0 \rightarrow P^1 \rightarrow P^2 \rightarrow P^3 \rightarrow \dots$$

3.1. LES MODULES PROJECTIFS ET INJECTIFS D'ORDRE n DE GORENSTEIN FORTS

telle que pour tout $i \geq 1$, $G^i = \text{Im}(P^i \rightarrow P^{i+1})$ est projectif de Gorenstein. Si on divise cette suite en suites exactes courtes on aura $0 \rightarrow G^i \rightarrow P^{i+1} \rightarrow G^{i+1} \rightarrow 0$ pour tout $i \geq 0$.

En bref, on a :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\
 0 & \longrightarrow & G^1 & \longrightarrow & P^2 & \longrightarrow & G^2 \longrightarrow 0 \\
 0 & \longrightarrow & G^0 & \longrightarrow & P^1 & \longrightarrow & G^1 \longrightarrow 0 \\
 0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & D & \longrightarrow & G^0 \longrightarrow 0 \\
 0 & \longrightarrow & G_1 & \longrightarrow & P_1 & \longrightarrow & M \longrightarrow 0 \\
 0 & \longrightarrow & G_2 & \longrightarrow & P_2 & \longrightarrow & G_1 \longrightarrow 0 \\
 & \vdots & & \vdots & & \vdots &
 \end{array}$$

Ainsi, la suite exacte courte somme est $0 \rightarrow N \rightarrow Q \rightarrow N \rightarrow 0$ où $N = \oplus_{i \geq 1} G_i \oplus M \oplus_{i \geq 0} G^i$ et $Q = \oplus_{i \geq 1} P_i \oplus D \oplus_{i \geq 1} P^i$. Il est clair que $\text{pd}_R(Q) = \text{pd}_R(D) \leq n$ et $\text{Gpd}_R(N) = \sup\{\text{Gpd}_R(G_i), \text{Gpd}_R(G^i), \text{Gpd}_R(M)\} \leq n$ (par Proposition 1.4.11). Ainsi, par Théorème 1.4.13, N est projectif d'ordre n de Gorenstein fort et M est un facteur direct de N .

La condition “si” est une conséquence de Proposition 1.4.11 et Proposition 3.1.2.

■

Dualement, on a :

Théorème 3.1.7

Soit M un R -module et soit n un entier positif. Alors, $\text{Gid}_R(M) \leq n$ si et seulement si M est un facteur direct d'un module injectif d'ordre n de Gorenstein fort.

Preuve. En remplaçant la somme directe par le produit direct, en utilisant Théorème 1.4.8, et les duales de Proposition 1.4.11, Théorème 2.1.7, et Lemme 0.0.11, la preuve de ce théorème se fait de la même manière de celle du Théorème 3.1.6. ■

Remarque 3.1.8

D'après la preuve de Théorème 3.1.6, si $\text{Gpd}_R(M) = n$ alors, il existe un module projectif d'ordre n de Gorenstein fort N avec $\text{Gpd}_R(N) = n$ tel que M est un facteur direct de N .

Proposition 3.1.9

Pour tout R -module M et tout entier positif n , les assertions suivantes sont équivalentes :

1. M est projectif d'ordre n de Gorenstein fort.
2. Il existe une suite exacte $0 \rightarrow M \rightarrow Q \rightarrow M \rightarrow 0$ où $\text{pd}_R(Q) \leq n$ et $\text{Ext}_R^i(M, P) = 0$ pour tout module P de dimension projective finie et tout $i > n$.
3. Il existe une suite exacte $0 \rightarrow M \rightarrow Q \rightarrow M \rightarrow 0$ où $\text{pd}_R(Q) < \infty$ et $\text{Ext}_R^i(M, P) = 0$ pour tout module projectif P et tout $i > n$.

Preuve. (1) $\Rightarrow$ (2) D'après la définition d'un module projectif d'ordre n de Gorenstein fort, il suffit de montrer que, pour tout $i > n$ et tout module P de dimension projective finie, on a $\text{Ext}_R^i(M, P) = 0$. Ceci est clair d'après Théorème 1.4.13 puisque $\text{Gpd}_R(M) \leq n$ (par Proposition 3.1.2).

(2) $\Rightarrow$ (3) Clair.

(3) $\Rightarrow$ (1) Soit P un module projectif. La suite exacte courte $0 \rightarrow M \rightarrow Q \rightarrow M \rightarrow 0$ donne lieu à la suite exacte longue

$$\dots \rightarrow \text{Ext}_R^i(M, P) \rightarrow \text{Ext}_R^i(Q, P) \rightarrow \text{Ext}_R^i(M, P) \rightarrow \dots$$

Comme $\text{Ext}_R^i(M, P) = 0$ pour chaque $i > n$, il est clair que $\text{Ext}_R^i(Q, P) = 0$. En outre, $\text{Gpd}_R(Q) = \text{pd}_R(Q) < \infty$ (par Proposition 1.4.16). Alors, par Théorème 1.4.13, $\text{pd}_R(Q) = \text{Gpd}_R(Q) \leq n$. En conséquence, M est projectif d'ordre n de Gorenstein fort. ■

Proposition 3.1.10

Si $\text{G-gldim}(R) < \infty$. Alors :

1. M est projectif d'ordre n de Gorenstein fort si et seulement s'il existe une suite exacte

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow Q \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

où $\text{pd}_R(Q) \leq n$.

2. M est injectif d'ordre n de Gorenstein fort si et seulement s'il existe une suite exacte

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow E \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

où $\text{id}_R(E) \leq n$.

Preuve. (1) La condition “seulement si” est claire d'après la définition d'un module projectif d'ordre n de Gorenstein fort. Donc, on montre la condition “si”. Comme $\text{G-gldim}(R) < \infty$, $\text{Gpd}_R(M) < \infty$. Ainsi, il existe un entier k tel que $\text{Ext}_R^i(M, P) = 0$ pour tout $i > k$ et tout module projectif P . Par ailleurs, en utilisant la suite exacte longue

$$\dots \rightarrow \text{Ext}_R^i(Q, P) \rightarrow \text{Ext}_R^i(M, P) \rightarrow \text{Ext}_R^{i+1}(M, P) \rightarrow \text{Ext}_R^{i+1}(Q, P) \rightarrow \dots$$

on déduit que $\text{Ext}_R^{n+1}(M, P) = \text{Ext}_R^{n+j}(M, P)$ pour tout $j > 0$ (puisque $\text{pd}_R(Q) \leq n$). Ainsi, si $j > k$, on conclut que pour tout module projectif P , $\text{Ext}_R^{n+1}(M, P) = 0$. En conséquent, M est projectif d'ordre n de Gorenstein fort.

(2) La preuve est duale à celle de (1). ■

Proposition 3.1.11

Soit M un R -module projectif d'ordre n de Gorenstein fort ($n \geq 1$). Alors, il existe un épimorphisme $\varphi : N \twoheadrightarrow M$ où N est projectif de Gorenstein fort et $K = \ker(\varphi)$ satisfait $\text{pd}_R(K) = \text{Gpd}_R(M) - 1 \leq n - 1$.

Preuve. La preuve est similaire à celle de Théorème 1.4.13 dans [42]. Comme complément, on donne la preuve. Considérons une résolution n -projective de M :

$$0 \rightarrow N \rightarrow P_n \rightarrow \dots \rightarrow P_1 \rightarrow M \rightarrow 0$$

Il est clair que, N est projectif de Gorenstein fort (par Proposition 3.1.2). Par la définition d'un module projectif de Gorenstein fort, il existe une suite exacte (de longueur n)

$$0 \rightarrow N \rightarrow Q \rightarrow \dots \rightarrow Q \rightarrow N \rightarrow 0$$

3.1. LES MODULES PROJECTIFS ET INJECTIFS D'ORDRE n DE GORENSTEIN FORTS

où Q est projectif et telle que le foncteur $\text{Hom}_R(-, P)$ conserve l'exactitude de cette suite dès que P est projectif. Ainsi, il existe des homomorphismes, $Q \rightarrow P_i$ ($i = 1, \dots, n$) et $N \rightarrow M$ tels que le diagramme suivant est commutatif.

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & Q & \longrightarrow \cdots \longrightarrow & Q & \longrightarrow & N & \longrightarrow & 0 \\
 & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & P_n & \longrightarrow \cdots \longrightarrow & P_1 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

Ce diagramme donne une chaîne d'applications entre les complexes,

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & Q & \longrightarrow \cdots \longrightarrow & Q & \longrightarrow & N & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & P_n & \longrightarrow \cdots \longrightarrow & P_1 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

ceci induit un isomorphisme en homologie. Son cône d'homomorphisme est exact, et tous les modules y contenant, sauf $P_1 \oplus N$ qui est projectif de Gorenstein fort, sont projectifs. Donc, le noyau K de $\varphi : P_1 \oplus N \rightarrow M$ satisfait $\text{pd}_R(K) = \text{Gpd}_R(M) - 1 \leq n - 1$, comme voulu. ■

Proposition 3.1.12

(A) Soit $0 \rightarrow N \xrightarrow{\alpha} P \xrightarrow{\beta} N' \rightarrow 0$ une suite exacte de R -modules.

Cas1 “**P** projectif et $\text{Gpd}_R(N') = n < \infty$ ”.

1. Si N' est projectif de Gorenstein fort, alors il en est de même pour N .
2. Si $n \geq 1$ et N' est projectif d'ordre n de Gorenstein fort, alors N est projectif d'ordre $(n - 1)$ de Gorenstein fort et $\text{Gpd}_R(N) = n - 1$.

Cas 2 “ $\text{pd}_R(P) = n < \infty$ ”. Si N est un module projectif de Gorenstein fort, alors N' est projectif d'ordre $(n + 1)$ de Gorenstein fort.

(B) Soit $0 \rightarrow N \xrightarrow{\mu} N' \xrightarrow{\nu} Q \rightarrow 0$ une suite exacte où $\text{pd}_R(Q) = n < \infty$.

1. Si $n > 0$ et N' est projectif de Gorenstein fort, alors N est projectif d'ordre $(n - 1)$ de Gorenstein fort.

2. Si Q est projectif, alors N est projectif de Gorenstein fort si et seulement si N' est projectif de Gorenstein fort.

Preuve. (A)

Cas 1 (1) Conséquence directe de Proposition 2.1.9.

(2) Si N' est un module projectif d'ordre n de Gorenstein fort, alors il existe une suite exacte courte $0 \rightarrow N' \rightarrow Q \rightarrow N' \rightarrow 0$ où $\text{pd}_R(Q) \leq n$. Il est clair que $\text{pd}_R(Q) = \text{Gpd}_R(N') = n$ (par Proposition 3.1.2). Par ailleurs, on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & P & \longrightarrow & N' \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & Q' & \longrightarrow & P \oplus P & \longrightarrow & Q \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & P & \longrightarrow & N' \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 0 & & 0 & & 0
 \end{array}$$

Comme P est projectif et $\text{Gpd}_R(N') = n$, on a $\text{pd}_R(Q') = \text{Gpd}_R(N) = n - 1$ (par Lemme 0.0.11). Ainsi, N' est projectif d'ordre $(n - 1)$ de Gorenstein fort (par Théorème 1.4.13).

Cas 2 Comme N est projectif de Gorenstein fort, il existe une suite exacte $0 \rightarrow N \xrightarrow{u} Q \xrightarrow{v} N \rightarrow 0$ où Q est projectif et $\text{Ext}_R^1(N, K) = 0$ pour tout module K de dimension projective finie. Ainsi, comme $\text{pd}_R(P) < \infty$, la suite courte

$$0 \rightarrow \text{Hom}_R(N, P) \xrightarrow{\circ v} \text{Hom}_R(Q, P) \xrightarrow{\circ u} \text{Hom}_R(N, P) \rightarrow 0$$

est exacte. Donc, pour $\alpha : N \rightarrow P$ il existe un morphisme $\lambda : Q \rightarrow P$ tel que

3.1. LES MODULES PROJECTIFS ET INJECTIFS D'ORDRE n DE GORENSTEIN FORTS

$\alpha = \lambda \circ u$. En conséquent, le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & N & \xrightarrow{u} & Q & \xrightarrow{v} & N \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \alpha & & \downarrow \phi & & \downarrow \alpha \\ 0 & \longrightarrow & P & \xrightarrow{i} & P \oplus P & \xrightarrow{j} & P \longrightarrow 0 \end{array}$$

où $\phi : Q \rightarrow P \oplus P$ est défini en posant $\phi(q) = (\lambda(q), \alpha \circ v(q))$ pour chaque $q \in Q$ et i et j sont, respectivement, l'injection et la projection canoniques. Ainsi, en appliquant le lemme du Serpent, on déduit une suite exacte de la forme :

$$0 \rightarrow N' \rightarrow (P \oplus P)/\phi(Q) \rightarrow N' \rightarrow 0.$$

Il est clair que, $\text{pd}_R(P \oplus P/\phi(Q)) \leq n+1$ et $\text{Gpd}_R(N') \leq n+1$. En conséquent, par Théorème 1.4.13, N' est projectif d'ordre $(n+1)$ de Gorenstein fort, comme voulu.

(B) Supposons que N' est projectif de Gorenstein fort. Ainsi, il existe une suite exacte $0 \rightarrow N' \xrightarrow{u} P \xrightarrow{v} N' \rightarrow 0$ où P est projectif et $\text{Ext}_R^1(N, K) = 0$ pour tout module K de dimension projective finie. Alors, d'une manière similaire à celle dans **(A) Cas 2**, il existe un morphisme $\phi : P \rightarrow Q \oplus Q$ tel que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & N' & \xrightarrow{u} & P & \xrightarrow{v} & N' \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \alpha & & \downarrow \phi & & \downarrow \alpha \\ 0 & \longrightarrow & Q & \xrightarrow{i} & Q \oplus Q & \xrightarrow{j} & Q \longrightarrow 0 \end{array}$$

Donc, en appliquant le Lemme de Serpent, on a la suite exacte de la forme

$$0 \rightarrow N \rightarrow \ker(\phi) \rightarrow N \rightarrow 0.$$

1. Si $n > 0$, alors $\text{pd}_R(\ker(\phi)) = n-1$ et $\text{Gpd}_R(N) = n-1$ (par Lemme 0.0.11). Par suite, N est projectif d'ordre $(n-1)$ de Gorenstein fort (par Théorème 1.4.13).
2. Si Q est projectif, alors $\ker(\phi)$ est projectif et N est projectif de Gorenstein. Ainsi, N est projectif de Gorenstein fort. Réciproquement, si N est projectif de Gorenstein fort, il est clair que $N' \cong N \oplus P$ est projectif de Gorenstein fort, comme voulu.

■

Dualement, on a :

Proposition 3.1.13

(A) Soit $0 \rightarrow N \xrightarrow{\alpha} I \xrightarrow{\beta} N' \rightarrow 0$ une suite de R -modules exacte.

Cas1 “I injectif et $\text{Gid}_R(N) = n < \infty$ ”.

1. Si N est injectif de Gorenstein fort, alors il en est de même pour N' .
2. Si $n \geq 1$ et N est injectif d'ordre n de Gorenstein fort, alors N' est injectif d'ordre $(n - 1)$ de Gorenstein fort et $\text{Gid}_R(N') = n - 1$.

Cas 2 “ $\text{id}_R(I) = n < \infty$ ”. Si N' est injectif de Gorenstein fort, alors N est injectif d'ordre $(n + 1)$ de Gorenstein fort.

(B) Soit $0 \rightarrow E \xrightarrow{\mu} N' \xrightarrow{\nu} N \rightarrow 0$ une suite exacte où $\text{id}_R(E) = n < \infty$.

1. Si $n > 0$ et N' est injectif de Gorenstein fort, alors N est injectif d'ordre $(n - 1)$ de Gorenstein fort.
2. Si E est injectif, alors N est injectif de Gorenstein fort si et seulement si N' est injectif de Gorenstein fort.

Corollaire 3.1.14

Soit R un anneau. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. Tout module projectif de Gorenstein est projectif de Gorenstein fort.
2. Tout module M tel que $\text{Gpd}_R(M) \leq 1$ est projectif d'ordre 1 de Gorenstein fort.

Preuve. (1) $\Rightarrow$ (2) Soit M un module tel que $\text{Gpd}_R(M) \leq 1$. Considérons une suite exacte courte $0 \rightarrow N \rightarrow P \rightarrow M \rightarrow 0$ où P est projectif et N est projectif de Gorenstein. Donc, par hypothèses, N est projectif de Gorenstein fort. Ainsi, par Proposition 3.1.12 (Cas 2), M est un module projectif d'ordre 1 de Gorenstein fort, comme voulu.

3.1. LES MODULES PROJECTIFS ET INJECTIFS D'ORDRE n DE GORENSTEIN FORTS

(2) $\Rightarrow$ (1) Soit M un module projectif de Gorenstein. Par hypothèses, M est projectif d'ordre 1 de Gorenstein. Alors, il existe une suite exacte $0 \rightarrow M \rightarrow Q \rightarrow M \rightarrow 0$ où $\text{pd}_R(Q) \leq 1$. Comme M est projectif de Gorenstein, il en est de même pour Q , et par suite, Q est projectif (par Théorème 1.4.3 et Proposition 1.4.16). En conséquent, M est un module projectif de Gorenstein fort. ■

Proposition 3.1.15

Soit R un anneau. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. Tout module est projectif d'ordre n de Gorenstein fort.
2. Tout module est injectif d'ordre n de Gorenstein fort.

Preuve. Il suffit de montrer une seule implication, la réciproque sera analogue.

Supposons que tout module est projectif d'ordre n de Gorenstein fort. Ainsi $\text{G-gldim}(R) \leq n$ (par Proposition 3.1.2 et par hypothèses). Maintenant, considérons un module arbitraire M . Il est clair que $\text{Gid}_R(M) \leq n$ (puisque $\text{G-gldim}(R) \leq n$). Alors, pour tout module injectif I , $\text{Ext}_R^{n+1}(I, M) = 0$ (Théorème 1.4.15). D'autre part, il existe une suite exacte courte $0 \rightarrow M \rightarrow P \rightarrow M \rightarrow 0$ où $\text{pd}_R(P) \leq n$. Par [11, Corollaire 2.7], $\text{id}_R(P) \leq n$. En conséquent, M est injectif d'ordre n de Gorenstein fort, comme voulu. ■

Proposition 3.1.16

Soit R un anneau de dimension globale de Gorenstein finie et soit n un entier positif.

Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $\text{G-gldim}(R) \leq n$.
2. Tout module projectif de Gorenstein fort est injectif d'ordre n de Gorenstein fort.
3. Tout module injectif de Gorenstein fort est projectif d'ordre n de Gorenstein fort.

Preuve. On montre que $\text{G-gldim}(R) \leq n$ si et seulement si tout module projectif de Gorenstein fort est injectif d'ordre n de Gorenstein fort. La preuve de la deuxième

équivalence est analogue.

D'abord, supposons que $\text{G-gldim}(R) \leq n$ et considérons un module projectif de Gorenstein fort M . Pour un tel module il existe une suite exacte $0 \rightarrow M \rightarrow P \rightarrow M \rightarrow 0$ où P est projectif. D'après [11, Corollaire 2.7], $\text{id}_R(P) \leq n$. Donc, par Proposition 3.1.10, M est injectif d'ordre n de Gorenstein fort.

Réciproquement, supposons que tout module projectif de Gorenstein fort est injectif d'ordre n de Gorenstein fort. Soit P un module projectif arbitraire. Par hypothèses, P est injectif d'ordre n de Gorenstein fort. Ainsi, il existe une suite exacte $0 \rightarrow P \rightarrow E \rightarrow P \rightarrow 0$ où $\text{id}_R(E) \leq n$. Donc, $P \oplus P \cong E$. En conséquent, $\text{id}_R(P) \leq n$. Alors, par [11, Lemme 2.1], $\text{G-gldim}(R) \leq n$, comme voulu. ■

3.2 Les modules plats d'ordre n de Gorenstein forts

Dans cette section, on étudie les modules plats d'ordre n de Gorenstein forts, définis comme suit :

Définition 3.2.1

Un R -module M est dit *plat d'ordre n de Gorenstein fort*, s'il existe une suite exacte courte

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow F \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

où $\text{fd}_R(P) \leq n$ et $\text{Tor}_R^{n+1}(M, I) = 0$ dès que I est injectif.

Une conséquence directe de la définition ci dessus c'est que, les modules plats d'ordre 0 de Gorenstein forts sont exactement les modules plats de Gorenstein forts, cf. Proposition 2.2.6. Aussi, tout module de dimension plate finie inférieure ou égale n est plat d'ordre n de Gorenstein fort. Par ailleurs, on a :

Proposition 3.2.2

Soit n un entier positif et soit M un module plat d'ordre n de Gorenstein fort. Alors, on a les assertions suivantes :

3.2. LES MODULES PLATS D'ORDRE N DE GORENSTEIN FORTS

1. Si $0 \rightarrow N \rightarrow P_n \rightarrow \dots \rightarrow P_1 \rightarrow M \rightarrow 0$ est une suite exacte où tous P_i sont des modules projectifs alors, N est un module plat de Gorenstein fort, et en conséquence $\text{Gfd}_R(M) \leq n$.
2. En plus, si $0 \rightarrow M \rightarrow F \rightarrow M \rightarrow 0$ est une suite exacte courte, où $\text{fd}_R(F) < \infty$ alors, $\text{Gfd}_R(M) = \text{fd}_R(F)$, et donc M est un module plat d'ordre k de Gorenstein fort avec $k := \text{fd}_R(F)$.

Preuve. (1) En utilisant une résolution n -projective de M et Proposition 2.2.6, la preuve est analogue à celle de Proposition 3.1.2 (1).

(2) Considérons une suite exacte courte $(\sharp) \quad 0 \rightarrow M \rightarrow F \rightarrow M \rightarrow 0$ où $\text{fd}_R(F) < \infty$.

Premièrement, on montre que $\text{Gfd}_R(M) \leq \text{fd}_R(F) := k$ et que M est plat d'ordre k de Gorenstein fort. Soit I un module injectif arbitraire. Considérons une résolution n -projective de M :

$$0 \rightarrow N \rightarrow P_n \rightarrow \dots \rightarrow P_1 \rightarrow M \rightarrow 0$$

D'après (1) ci dessus, N est plat de Gorenstein fort. Alors, il existe une suite exacte courte $(\star) \quad 0 \rightarrow N \rightarrow P \rightarrow N \rightarrow 0$ où P est plat et $\text{Tor}_R^1(N, I) = 0$. Par suite, d'après $(\star)$, pour tout $i > 0$, $\text{Tor}_R^i(N, I) = 0$. Donc, $\text{Tor}_R^{n+i}(M, I) = \text{Tor}_R^i(N, I) = 0$ pour tout $i > 0$.

La suite exacte courte $(\sharp)$ donne lieu à la suite longue :

$$\dots \text{Tor}_R^{i+1}(F, I) \rightarrow \text{Tor}_R^{i+1}(M, I) \rightarrow \text{Tor}_R^i(M, I) \rightarrow \text{Tor}_R^i(F, I) \rightarrow \dots$$

Ainsi, pour tout $i > k$, $\text{Tor}_R^i(M, I) = \text{Tor}_R^{i+1}(M, I) = \dots = \text{Tor}_R^{i+n}(M, I) = 0$. En particulier, $\text{Tor}_R^{k+1}(M, I) = 0$. Par conséquence, M est un module plat d'ordre k de Gorenstein fort. Alors, d'après (1) ci dessus, $\text{Gfd}_R(M) \leq k = \text{fd}_R(F)$.

Finalement, on montre que $\text{fd}_R(F) \leq \text{Gfd}_R(M)$. En appliquant $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(-, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ à la suite exacte courte $0 \rightarrow M \rightarrow F \rightarrow M \rightarrow 0$ on a l'exactitude de la suite $0 \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \rightarrow 0$. D'autre part, par Proposition 1.4.26, $\text{Gid}_R(\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})) \leq \text{Gfd}_R(M) \leq n$, et par Proposition

1.1.24 et Théorème 1.1.13 3.52] $\text{id}_R(\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})) = \text{fd}_R(F) < \infty$. Donc, par Théorème 1.4.15 et la version injective de Proposition 3.1.9, $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ est un module injectif d'ordre n de Gorenstein fort. Ainsi, d'après la version injective de Proposition 3.1.2 et par Proposition 1.4.26, on a :

$$\text{fd}_R(F) = \text{id}_R(\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})) = \text{Gid}_R(\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})) \leq \text{Gfd}_R(M).$$

En conséquence, l'égalité désirée est vérifiée. ■

Lemme 3.2.3

Soit $0 \rightarrow N \rightarrow N' \rightarrow N'' \rightarrow 0$ une suite exacte courte de modules dans un anneau cohérent R . Alors, $\text{Gfd}_R(N) \leq \max\{\text{Gfd}_R(N'), \text{Gfd}_R(N'') - 1\}$ avec égalité si $\text{Gfd}_R(N') \neq \text{Gfd}_R(N'')$.

Preuve. En utilisant Théorème 1.4.30 et Théorème 1.4.29, la preuve est analogue à celle de [19, Corollaire 2, p. 135]. ■

Théorème 3.2.4

Soient R un anneau cohérent, M un R -module, et n un entier positif. Alors, $\text{Gfd}_R(M) \leq n$ si et seulement si M est un facteur direct d'un R -module plat d'ordre n de Gorenstein fort.

Preuve. En utilisant Théorème 2.2.5, Proposition 1.4.28, Théorème 1.4.29, [42, Théorème 3.23], Lemme 3.2.3, et Proposition 3.2.2, la preuve de ce résultat est analogue à celle du Théorème 3.1.6. ■

Proposition 3.2.5

Pour un R -module M et un entier positif n , les assertions suivantes sont équivalentes :

1. M est plat d'ordre n de Gorenstein fort.
2. Il existe une suite exacte $0 \rightarrow M \rightarrow F \rightarrow M \rightarrow 0$ où $\text{fd}_R(F) \leq n$ et $\text{Tor}_R^i(M, I) = 0$ pour tout module I de dimension injective finie et tout $i > n$.
3. Il existe une suite exacte $0 \rightarrow M \rightarrow F \rightarrow M \rightarrow 0$ où $\text{fd}_R(F) < \infty$ et $\text{Tor}_R^i(M, I) = 0$ pour tout module injectif I et tout $i > n$.

3.2. LES MODULES PLATS D'ORDRE n DE GORENSTEIN FORTS

Preuve. (1) $\Rightarrow$ (2) D'après la définition d'un module plat d'ordre n de Gorenstein fort, il suffit de montrer que $\text{Tor}_R^i(M, I) = 0$ pour tout module I de dimension injective finie et tout $i > n$. Considérons une résolution n -projective de M :

$$0 \rightarrow N \rightarrow P_n \rightarrow \dots \rightarrow P_1 \rightarrow M \rightarrow 0.$$

Par Proposition 3.2.2 (1), N est plat de Gorenstein fort. Alors, il existe une suite exacte $(\star) \quad 0 \rightarrow N \rightarrow P \rightarrow N \rightarrow 0$ où P est plat et $\text{Tor}_R^1(N, I) = 0$ dès que $\text{id}_R(I) < \infty$ (par Proposition 2.2.6). Par suite, d'après $(\star)$, pour tout $i > 0$, $\text{Tor}_R^i(N, I) = 0$. En conséquence, on a $\text{Tor}_R^{n+i}(M, I) = \text{Tor}_R^i(N, I) = 0$, comme voulu.

(2) $\Rightarrow$ (3) Evident.

(3) $\Rightarrow$ (1) De la même manière dans la preuve de Proposition 3.1.9 (3) $\Rightarrow$ (1), on montre que, pour tout module injectif I et tout $i > n$, on a $\text{Tor}_R^i(F, I) = 0$. En suite, supposons que $m := \text{fd}_R(F) > n$ et soit N un module arbitraire. Choisissons une suite exacte courte $0 \rightarrow N \rightarrow I \rightarrow I/N \rightarrow 0$ où I est injectif. on a la suite exacte longue

$$\dots \rightarrow \text{Tor}_R^{i+1}(F, I) \rightarrow \text{Tor}_R^{i+1}(F, I/N) \rightarrow \text{Tor}_R^i(F, N) \rightarrow \text{Tor}_R^i(F, I) \rightarrow \dots$$

Ainsi, pour $i > n$, on a $\text{Tor}_R^i(F, N) = \text{Tor}_R^{i+1}(F, I/N)$. Donc, $\text{Tor}_R^m(F, N) = \text{Tor}_R^{m+1}(F, I/N) = 0$. Alors, $\text{fd}_R(F) \leq m - 1$. Absurde. Ainsi, $\text{fd}_R(F) \leq n$. Finalement, il est clair que M est un module plat d'ordre n de Gorenstein fort, comme voulu. ■

Proposition 3.2.6

Soit M un module plat d'ordre n de Gorenstein fort ($n \geq 1$) dans un anneau cohérent R . Alors, il existe un épimorphisme $\varphi : N \twoheadrightarrow M$ où N est plat de Gorenstein fort et $K = \ker(\varphi)$ satisfait $\text{fd}_R(K) = \text{Gfd}_R(M) - 1 \leq n - 1$.

Preuve. En utilisant Proposition 2.2.6 et Lemme 1.4.32, la preuve est analogue à celles de Lemme 1.4.32 sur [42] et Proposition 3.1.11. ■

Proposition 3.2.7

Soit M un R -module et soit n un entier positif. Alors, les assertions suivantes sont équivalentes :

1. M est projectif d'ordre n de Gorenstein fort et M admet une n -présentation finie.
2. M est plat d'ordre n de Gorenstein fort et M admet une $n + 1$ -présentation finie.

Preuve. Dans les deux cas dans cette proposition M admet une n -présentation finie. Ainsi, on peut considérer une résolution n -libre $0 \rightarrow N \rightarrow F_n \rightarrow \dots \rightarrow F_1 \rightarrow M \rightarrow 0$ où tous F_i sont libres de type fini et N est de type fini.

(1) $\Rightarrow$ (2) Si M est un module projectif d'ordre n de Gorenstein fort alors, N est un module projectif de Gorenstein fort de type fini. Ainsi, par Proposition 2.2.6, N est un module plat de Gorenstein fort de présentation finie. Alors, M admet une $(n + 1)$ -présentation finie, et pour tout module injectif I on a $\text{Tor}_R^{n+1}(M, I) = \text{Tor}_R^1(N, I) = 0$. D'autre part, il existe une suite exacte $0 \rightarrow M \rightarrow Q \rightarrow M \rightarrow 0$ où $\text{fd}_R(Q) \leq \text{pd}_R(Q) \leq n$. En conséquent, M est plat d'ordre n de Gorenstein fort et admet une $(n + 1)$ -présentation finie.

(2) $\Rightarrow$ (1) Si M est un module plat d'ordre n de Gorenstein fort admettant une $(n + 1)$ -présentation finie, alors N est un module plat de Gorenstein fort de présentation finie. Ainsi, d'après Proposition 2.2.6, N est projectif de Gorenstein fort. Donc, pour tout module projectif P , $\text{Ext}_R^{n+1}(M, P) = \text{Ext}_R^1(N, P) = 0$. Par ailleurs, il existe une suite exacte $0 \rightarrow M \rightarrow F \rightarrow M \rightarrow 0$ où $\text{fd}_R(F) \leq n$. En plus, d'après cette suite exacte courte on a F admet aussi une $(n + 1)$ -présentation finie. Ainsi, $\text{pd}_R(F) = \text{fd}_R(F) \leq n$. En conséquent, M est un module projectif d'ordre n de Gorenstein fort, comme voulu. ■

Corollaire 3.2.8

Si R est un anneau cohérent et M est un module de présentation finie alors, M est projectif d'ordre n de Gorenstein fort si et seulement si M est plat d'ordre n de Gorenstein fort.

Finalement, il est clair pour un R -module M et un entier positif n on a :

$$\text{"fd}_R(M) \leq n \implies \text{"}M \text{ est plat d'ordre } n \text{ de Gorenstein fort"} \implies \text{"Gfd}_R(M) \leq n\text{"}$$

Les réciproques ne sont pas vraies en général. On peut le voir clairement d'après Exemples 3.1.4 et 3.1.5 de la première section. Il suffit de remarquer que T est Noethérien et E est de présentation finie (puisque E est de type fini et T est Noethérien) et utiliser Corollaire 3.2.8.

Les anneaux dans lesquels tous les modules sont projectifs de Gorenstein forts

D. Bennis, N. Mahdou, K. Ouarghi (2010), *Rings over which all modules are Gorenstein (resp., strongly Gorenstein) projective*. Rocky Mountain Journal of Mathematics, Vol. 40 (3) 749– 759.

Le but principal de ce chapitre, est d'étudier les deux classes d'anneaux suivantes : La classe des anneaux dans lesquels tous les modules sont projectifs de Gorenstein qu'on appelle les anneaux *G-semisimples*. Et celle des anneaux dans lesquels tous les modules sont projectifs de Gorenstein forts, qu'on appelle les anneaux *SG-semisimples*.

On montrera que les anneaux G-semisimples ne sont que les anneaux quasi-Frobenius ; i.e., les anneaux Noéthériens et auto-injectifs (i.e., 0-Gorenstein). Les anneaux SG-semisimples ne sont donc qu'un cas particulier des anneaux quasi-Frobenius. On caractérisera les anneaux SG-semisimples. Notamment, on montrera qu'un anneau local est SG-semisimple si et seulement s'il admet au plus un seul idéal propre différent de zéro ; en général, un anneau est SG-semisimple si et seulement s'il est un produit direct fini d'anneaux locaux SG-semisimples.

Ce chapitre contiendra évidemment des exemples d'anneaux SG-semisimples et des exemples des anneaux G-semisimples qui ne sont pas SG-semisimples.

4.1 Préliminaires

Avant de commencer, on a besoin de rappeler quelques résultats importants concernant les anneaux quasi-Frobenius (pour plus de détails voir par exemple [1] et [51]). L'anneau quotient R/I , où R est un domaine principal et I est un idéal propre différent de zéro quelconque de R , est un exemple classique d'anneau quasi-Frobenius [54, Exercice 9.24]. Les anneaux quasi-Frobenius ont plusieurs caractérisations, dont on a besoin de certaines :

Théorème 4.1.1 ([51], Théorèmes 1.50, 7.55, et 7.56)

Pour un anneau R , les conditions suivantes sont équivalentes :

1. R est quasi-Frobenius ;
2. R est Artinien et auto-injectif ;
3. Tout R -module projectif est injectif ;
4. Tout R -module injectif est projectif ;
5. R est Noethérien et, pour tout idéal I , $\text{Ann}(\text{Ann}(I)) = I$, où $\text{Ann}(I)$ est l'annulateur de I .

Les anneaux quasi-Frobenius sont un cas particulier des anneaux parfaits ; i.e., les anneaux où tout module plat est projectif. Notamment, un anneau est quasi-Frobenius si et seulement s'il est parfait et auto-injectif [51, Théorème 6.39]. Les anneaux parfaits sont introduits par Bass dans [6]. Il existe plusieurs caractérisations des anneaux parfaits (voir [1]). Ici, on a besoin de :

Théorème 4.1.2 ([6], Théorème P et Exemple 6, page 476)

Pour un anneau R , les conditions suivantes sont équivalentes :

1. R est parfait ;
2. Toute limite inductive (avec un ensemble d'indices ordonné) de R -modules projectifs est projective ;

3. R est un produit direct fini d'anneaux locaux, chacun avec un idéal maximal T -nilpotent (i.e., si on choisit une suite $a_1, a_2, \dots$ d'éléments de l'idéal maximal, alors pour un certain indice j , $a_1 a_2 \dots a_j = 0$).

D'après Théorèmes 4.1.1 et 4.1.2 et [51, Lemme 5.64], on peut donner une caractérisation structurée des anneaux quasi-Frobenius, qu'on utilisera plus loin :

Proposition 4.1.3

Un anneau R est quasi-Frobenius si et seulement si $R = R_1 \times \dots \times R_n$, où chaque R_i est un anneau local quasi-Frobenius.

4.2 Anneaux G -semisimples

Dans cette section, on étudie les anneaux G -semisimples ; i.e., les anneaux satisfaisant les deux conditions équivalentes suivantes :

Proposition 4.2.1

Pour un anneau R , les conditions suivantes sont équivalentes :

1. Tout R -module est projectif de Gorenstein ;
2. Tout R -module est injectif de Gorenstein.

Preuve. On montre l'implication (1) $\Rightarrow$ (2), puisque la preuve de la réciproque est analogue.

Supposons que tout module est projectif de Gorenstein. Alors, tout module injectif est projectif (puisque, étant un module projectif de Gorenstein, il s'injecte dans un module projectif). Ce qui est équivalent, d'après Théorème 4.1.1, à dire que tout module projectif est injectif. Alors, toute résolution projective complète est aussi une résolution injective complète, et par suite, tout R -module est injectif de Gorenstein.

■

Notons que l'équivalence dans Proposition 4.2.1 est déjà vérifiée dans le cas où R est Noethérien, et chacune des deux conditions (1) et (2) est équivalente au fait que l'anneau est quasi-Frobenius (voir par exemple [32, Théorème 12.3.1]). Par suite, on montre que Proposition 4.2.1 et sa démonstration confirment qu'un anneau G -semisimple est le même qu'un anneau quasi-Frobenius.

Théorème 4.2.2

Pour un anneau R , les conditions suivantes sont équivalentes :

1. R est G -semisimple ;
2. Tout R -module injectif de Gorenstein est projectif de Gorenstein ;
3. Tout R -module injectif de Gorenstein fort est projectif de Gorenstein fort ;
4. Tout R -module projectif de Gorenstein est injectif de Gorenstein ;
5. Tout R -module projectif de Gorenstein fort est injectif de Gorenstein fort ;
6. R est quasi-Frobenius.

Preuve. Notons d'abord qu'un anneau G -semisimple est Noethérien. En effet, d'après la preuve de Proposition 4.2.1, on a si R est un anneau G -semisimple, alors tout R -module projectif est injectif. Alors d'après Théorème 4.1.1, R est quasi-Frobenius et donc Noethérien. Ceci donne la preuve de l'implication (1) $\Rightarrow$ (6). Pour la réciproque, on peut se baser sur Proposition 4.2.1 et sa démonstration. ■

On a un lien entre les anneaux semisimples et les anneaux G -semisimples ; comparé à [54, Exercice 9.2] :

Proposition 4.2.3

Un anneau G -semisimple est semisimple si et seulement si sa dimension globale est finie.

Preuve. Suite au fait qu'un module projectif de Gorenstein est projectif si et seulement si sa dimension projective est finie Proposition 1.4.16 . ■

Finalement, il est important de préciser qu'il existe plusieurs exemples d'anneaux G-semisimples qui ne sont pas semisimples, par exemple $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.

4.3 Anneaux SG-semisimple

Dans cette section, on étudie les anneaux *SG-semisimples* ; i.e., les anneaux satisfaisant les deux conditions équivalentes suivantes.

Proposition 4.3.1

Pour un anneau R , les conditions suivantes sont équivalentes :

1. *Tout R -module est projectif de Gorenstein fort ;*
2. *Tout R -module est injectif de Gorenstein fort.*

Preuve. Il suffit de démontrer l'implication (1) $\Rightarrow$ (2), car la réciproque est analogue.

Supposons que tout module est projectif de Gorenstein fort. Alors, d'après Théorème 4.2.2, R est G-semisimple (i.e., quasi-Frobenius). Donc, on peut montrer qu'une résolution projective complète forte est aussi une résolution injective complète forte.

■

Naturellement, un anneau SG-semisimple est G-semisimple (i.e., quasi-Frobenius). Plus loin, on présentera des exemples d'anneaux SG-semisimples et d'autres exemples d'anneaux G-semisimples qui ne sont pas SG-semisimples (voir Corollaires 4.3.9 et 4.3.10). D'abord, on donne une caractérisation des anneaux SG-semisimples. Pour commencer, le lemme suivant est indispensable.

Lemme 4.3.2

Soit $R = R_1 \times \cdots \times R_n$ un produit direct fini d'anneaux R_i . Un R -module M est projectif de Gorenstein (fort) si et seulement si $M = M_1 \oplus \cdots \oplus M_n$, où tout M_i est R_i -module projectif de Gorenstein (fort).

Preuve. On obtient ce résultat en remarquant la structure des modules (projectifs) et les homomorphismes dans un produit direct fini d'anneaux (voir par exemple [18, Sous section 2.6]). ■

Théorème 4.3.3

Un anneau R est SG-semisimple si et seulement si $R = R_1 \times \cdots \times R_n$, où chaque R_i est un anneau local SG-semisimple.

Preuve. Ce résultat est une conséquence de Proposition 4.1.3 et Lemme 4.3.2 .
■

Le Théorème 4.3.3 nous amène à restreindre l'étude des anneaux SG-semisimples aux anneaux locaux SG-semisimples.

Lemme 4.3.4

Soit R un anneau m -local et soit $x \neq 0$ un diviseur de zéro dans R . Si l'idéal xR est projectif de Gorenstein fort, alors $\text{Ann}(xR) \cong xR$ et par suite $\text{Ann}(\text{Ann}(xR)) = \text{Ann}(xR)$.

En particulier, si $xR = m$, on a $\text{Ann}(m) = m$.

Preuve. Comme xR est projectif de Gorenstein fort, il existe, d'après Proposition 2.1.12, une suite exacte courte de R -modules

$$(\star) \quad 0 \rightarrow xR \rightarrow P \rightarrow xR \rightarrow 0,$$

où P est projectif, alors libre (puisque R est m -local). Dans la suite $(\star)$ xR est de type fini, alors il en est de même pour le R -module libre P . Donc, il existe un entier positif non nul n tel que $P \cong R^n$. Par suite, on a la suite exacte suivante :

$$(\star\star) \quad 0 \rightarrow xR \rightarrow R^n \rightarrow xR \rightarrow 0.$$

Soit la suite canonique exacte courte de R -modules suivante :

$$0 \rightarrow \text{Ann}(xR) \rightarrow R \rightarrow xR \rightarrow 0.$$

D'après le lemme de Schanuel (Théorème 1.1.9), on a :

$$\text{Ann}(xR) \oplus R^n \cong R \oplus (xR).$$

Alors, comme R est m -local, les ensembles générateurs minimaux de $\text{Ann}(xR) \oplus R^n$ et $R \oplus (xR)$ ont le même nombre d'éléments qui est nécessairement 2. D'autre part, comme x est un diviseur de zéro non nul dans R , $\text{Ann}(xR) \neq 0$, ainsi $\text{Ann}(xR)$ est engendré par au moins un élément, alors $\text{Ann}(xR) \oplus R^n$ est engendré par au moins $n + 1$ éléments. Donc, n doit être égal à 1. D'où la suite $(\star\star)$ devient :

$$0 \rightarrow xR \rightarrow R \xrightarrow{f} xR \rightarrow 0.$$

Maintenant, soit $\alpha \in R$ avec $f(1) = \alpha x$. Comme f est surjectif, il existe $\beta \in R$ tel que $f(\beta) = x$. D'où, $x = \beta \alpha x$, par suite $(1 - \beta \alpha)x = 0$, ce qui veut dire que $(1 - \beta \alpha) \in \text{Ann}(xR) \subseteq m$. Alors, $\beta \alpha$ est inversible, et de même pour α . Ceci implique que :

$$\text{Ker } f = \{y \in R \mid 0 = yf(1) = y\alpha x\} = \text{Ann}(xR).$$

Par conséquence, $xR \cong \text{Ker } f = \text{Ann}(xR)$. Alors, $\text{Ann}(\text{Ann}(xR)) = \text{Ann}(xR)$.

Maintenant, si $m = xR$, alors $m = xR \subseteq \text{Ann}(\text{Ann}(xR)) = \text{Ann}(xR) \subseteq m$.

■

Lemme 4.3.5

Soient R un anneau m -local et I un idéal propre non nul de R . Si R/I est un R -module projectif de Gorenstein fort, alors I est un idéal cyclique projectif de Gorenstein fort engendré par un diviseur de zéro de R .

Preuve. Comme R est un anneau m -local et similairement à la première partie de la preuve du Lemme 4.3.4, on a une suite exacte courte de R -modules :

$$(*) \quad 0 \rightarrow R/I \rightarrow R^n \rightarrow R/I \rightarrow 0,$$

où n est un entier positif non nul.

Et aussi, en utilisant le même argument qui est dans la preuve du Lemme 4.3.4

4.3. ANNEAUX SG-SEMISIMPLE

ci-dessus , et la suite exacte courte de R -modules :

$$(**) \quad 0 \rightarrow I \rightarrow R \rightarrow R/I \rightarrow 0,$$

on a $n = 1$ et $I = xR$ pour un certain diviseur de zéro x de R .

Maintenant, pour montrer que I est projectif de Gorenstein fort, notons qu'il est projectif de Gorenstein (d'après la suite $(**)$ et d'après Théorème 1.4.3. Alors, $\text{Ext}(I, P) = 0$ pour tout R -module projectif P (d'après Proposition 1.4.1). D'autre part, les deux suites $(*)$ et $(**)$ avec le schéma de Horseshoe (Proposition 1.2.8) donnent le diagramme commutatif suivant avec colonnes et lignes exactes :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \rightarrow & I & \rightarrow & Q & \rightarrow & I \rightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \rightarrow & R & \rightarrow & R \oplus R & \rightarrow & R \rightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \rightarrow & R/I & \rightarrow & R & \rightarrow & R/I \rightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 0 & & 0 & & 0
 \end{array}$$

Notons que Q est un R -module projectif. Alors, d'après la première suite horizontale et Proposition 2.1.9, I est un idéal projectif de Gorenstein fort. ■

Lemme 4.3.6

Si R est un anneau local G -semisimple, alors tout R -module M est de la forme : $M = R^{(I)} \oplus N$, où I est un ensemble d'indices et N est un R -module avec $\text{Ann}(x) \neq 0$ pour tout élément x de N .

Preuve. On peut assumer que M admet un élément x tel que $rx \neq 0$ pour tout $0 \neq r \in R$. On considère l'ensemble E de tous les sous modules libres de M . L'ensemble E n'est pas vide, puisque xR est un sous module libre de M . D'autre part, comme R est un anneau local G -semisimple et d'après Théorème 4.1.2, la

limite inductive de R -modules libres est un R -module libre. Donc, pour toute sous chaîne E_i de E , $\cup E_i$ est un sous module libre de M . Alors, d'après le lemme de Zorn, E admet un élément maximal F . Posons $F = R^{(I)}$ qui est injectif (puisque R est G-semisimple). Alors, F est un facteur direct de M et par suite $M = F \oplus N$ pour un certain R -module N . S'il existe $x \in N$ tel que $rx \neq 0$ pour tout $r \in R$, alors $xR \cong R$ est injectif et par suite un facteur direct de N . D'où, il existe un R -module N' tel que $N = xR \oplus N'$, et donc $M = F \oplus N = F \oplus xR \oplus N'$. Mais, le sous module libre $F \oplus xR$ de M contredit la maximalité de F . ■

Le théorème suivant est le résultat principal de cette section, caractérisant les anneaux locaux SG-semisimples.

Théorème 4.3.7

Pour un anneau m -local R , les conditions suivantes sont équivalentes :

1. R est SG-semisimple ;
2. R/m est un R -module projectif de Gorenstein fort ;
3. R admet au plus un seul idéal propre non nul (qui est nécessairement m).

Preuve. (1) $\Rightarrow$ (2). Par définition.

(2) $\Rightarrow$ (3). D'après Lemme 4.3.5, $m = xR$ est un idéal cyclique projectif de Gorenstein fort et x est un diviseur de zéro. Alors, d'après Lemme 4.3.4, $m^2 = 0$. Donc, un argument standard montre que nous avons soit $m = 0$ soit m l'unique idéal propre non nul de R .

(3) $\Rightarrow$ (1). Supposons que R n'est pas un corps. Il est clair que $m = xR$ (pour un certain $0 \neq x \in R$) et $m^2 = 0$. Alors, d'après Théorème 4.1.1, R est G-semisimple (i.e., quasi-Frobenius), d'où m est un idéal projectif de Gorenstein de R . Alors, d'après Proposition 1.4.1, $\text{Ext}(m, Q) = 0$ pour tout R -module projectif Q . Donc, d'après la suite exacte courte

$$0 \rightarrow \text{Ann}(m) = m \rightarrow R \rightarrow m \rightarrow 0,$$

4.3. ANNEAUX SG-SEMISIMPLE

et d'après Proposition 2.1.9, m est un R -module projectif de Gorenstein fort.

Maintenant, on considère un R -module arbitraire M . D'après Lemme 4.3.6, il existe un ensemble d'indices I tel que $M \cong R^{(I)} \oplus N$, où N est un R -module avec $\text{Ann}(y) \neq 0$ pour tout élément non nul $y \in N$. Alors, nécessairement $xN = 0$, et donc $N \cong (R/m)^{(J)}$ pour un certain ensemble d'indices J . Comme $R/m \cong m$ est un R -module projectif de Gorenstein fort et, d'après Proposition 2.1.2 (1), N est un R -module projectif de Gorenstein fort. Alors, M est un R -module projectif de Gorenstein fort. ■

Corollaire 4.3.8

Un anneau R est SG-semisimple si et seulement si $R = R_1 \times \cdots \times R_n$, où chaque R_i est un anneau avec au plus un seul idéal propre non nul.

Preuve. Combiner Théorèmes 4.3.3 et 4.3.7. ■

Cette section prend sa fin avec quelques exemples d'anneaux G-semisimples et SG-semisimples.

Corollaire 4.3.9

Pour tout domaine principal R et tout idéal premier non nul p de R , l'anneau R/p^2 est local SG-semisimple.

Le résultat suivant nous amène à construire des anneaux G-semisimples qui ne sont pas SG-semisimples.

Corollaire 4.3.10

Pour tout domaine principal R et tout idéal premier non nul p de R , l'anneau R/p^n , où $n \geq 3$, est local G-semisimple, mais non pas SG-semisimple.

Les anneaux dans lesquels la classe des modules plats de Gorenstein est stable par extensions

D. Bennis, (2009) *Rings over which the class of Gorenstein flat modules is closed under extensions*, Communications in Algebra 37 (3), 855–868.

Dans ce chapitre les anneaux sont associatifs, non nécessairement commutatifs.

Un anneau R est dit *GF-clos* à gauche, si la classe de tous les R -modules à gauche plats de Gorenstein est stable par extensions. La classe des anneaux GF-clos à gauche inclue strictement celle des anneaux cohérents à droite et celle des anneaux de dimension faible finie.

Dans ce chapitre, on étudiera la dimension plate de Gorenstein dans les anneaux GF-clos à gauche. Notamment, on étendra le fait que la classe des modules plats de Gorenstein à gauche est résolvante projectivement dans les anneaux cohérents à droite aux anneaux GF-clos à gauche. Aussi, on généralisera la caractérisation des modules plats de Gorenstein à gauche (de même pour la dimension plate de Gorenstein des modules à gauche) dans les anneaux cohérents à droite aux anneaux GF-clos à gauche. Pour finir, on utilisera les produits directs des anneaux pour construire un anneau GF-clos à gauche, qui n'est ni cohérent à droite ni de dimension globale faible finie.

5.1 La dimension plate de Gorenstein dans les anneaux GF-clos à gauche

Cette section est consacrée à l'étude de la dimension plate de Gorenstein dans les anneaux définis comme suit :

Définition 5.1.1

Un anneau R est dit *GF-clos à gauche*, si $\mathcal{GF}(R)$ est stable par extensions.

Rappelons qu'un anneau R est dit *cohérent à droite*, si tout idéal à droite I de type fini est de présentation finie ; c'est qu'il existe une suite exacte de R -modules à droite $F_1 \rightarrow F_0 \rightarrow I \rightarrow 0$, où chaque F_i est libre de type fini.

Proposition 5.1.2

1. Tout anneau cohérent à droite est GF-clos à gauche.
2. Tout anneau de dimension faible finie est GF-clos à gauche.

Preuve. 1. Conséquence de Théorème 1.4.23.

2. Soit R un anneau tel que $\text{wdim}(R) \leq n$ pour un certain entier positif n . On montre que la classe des R -modules à gauche plats de Gorenstein et la classe des R -modules plats coïncident¹. En effet, on considère un R -module à gauche plat de Gorenstein G . D'après la définition, il existe une suite exacte de R -modules à gauche $0 \rightarrow G \rightarrow F^0 \rightarrow F^1 \rightarrow \dots \rightarrow F^{n-1} \rightarrow N \rightarrow 0$, où chaque F^i est un R -module à gauche plat. Par hypothèses, $\text{fd}_R(N) \leq n$, et par suite G est plat. ■

On sait bien qu'il existe un anneau cohérent à droite (par suite il est GF-clos à gauche) avec une dimension faible infinie (voir par exemple [19, Exercice 11 (f), page 181] ou prendre simplement un anneau de Gorenstein, alors Noethérien, avec une dimension faible infinie). Aussi, il existe des anneaux de dimension faible finie qui ne sont pas cohérents à droite. Ceci veut dire qu'il existe des anneaux GF-clos à gauche

1. A comparer avec le corollaire 2.2.8 où les anneaux sont supposés commutatifs.

qui ne sont pas cohérents à droite (prendre par exemple un anneau R non semi-héréditaire avec $\text{wdim}(R) \leq 1$, voir [47, Exemple 2.3]). Alors, la classe des anneaux GF-clos à gauche inclut strictement celle des anneaux cohérents à droite et celle des anneaux de dimension faible globale finie. Dans la section qui suit, on montrera qu'il existe un anneau GF-clos à gauche qui n'est ni cohérent ni de dimension globale faible finie (Exemple 5.2.6). Notamment, on aurait aimé avoir **tout anneau est GF-clos à gauche**.

On commence par le résultat fondamental suivant, qui s'agit, avec le Corollaire 5.1.6, d'une généralisation de Théorème 1.4.23 .

Théorème 5.1.3

Pour un anneau R , les conditions suivantes sont équivalentes :

1. R est GF-clos à gauche.
2. La classe $\mathcal{GF}(R)$ est résolvante projectivement.
3. Pour toute suite exacte courte de R -modules à gauche $0 \rightarrow G_1 \rightarrow G_0 \rightarrow M \rightarrow 0$, où G_0 et G_1 sont plats de Gorenstein. Si $\text{Tor}(I, M) = 0$ pour tout R -module à droite injectif I , alors M est plat de Gorenstein.

Pour la preuve de ce théorème, on a besoin des lemmes suivants :

Lemme 5.1.4

Soit R un anneau et soit M un R -module à gauche. Les conditions suivantes sont équivalentes :

1. M est plat de Gorenstein.
2. M satisfait les deux conditions suivantes :
 - (i) $\text{Tor}_i^R(I, M) = 0$ pour tout $i > 0$ et tout R -module à droite injectif I ,
 - (ii) Il existe une suite exacte de R -modules à gauche

$$0 \rightarrow M \rightarrow F^0 \rightarrow F^1 \rightarrow \cdots ,$$

où chaque F_i est plat, tel que $I \otimes_R -$ conserve l'exactitude de la suite à chaque fois où I est un R -module à droite injectif .

3. Il existe une suite exacte courte de R -modules à gauche

$$0 \rightarrow M \rightarrow F \rightarrow G \rightarrow 0,$$

où F est plat et G est plat de Gorenstein.

Preuve. En utilisant la définition des modules plats de Gorenstein, l'équivalence (1) $\Leftrightarrow$ (2) est obtenue par un argument standard. Aussi, par définition, on a immédiatement l'implication (1) $\Rightarrow$ (3).

On montre l'implication (3) $\Rightarrow$ (2). Supposons qu'il existe une suite exacte courte de R -modules à gauche :

$$(\alpha) = \quad 0 \rightarrow M \rightarrow F \rightarrow G \rightarrow 0,$$

où F est plat et G est plat de Gorenstein. Soit I un R -module à droite injectif. Comme G est plat de Gorenstein et d'après l'équivalence (1) $\Leftrightarrow$ (2), $\text{Tor}_{i+1}^R(I, G) = 0$ pour tout $i \geq 0$. Alors, on utilise la suite exacte longue,

$$\text{Tor}_{i+1}^R(I, G) \rightarrow \text{Tor}_i^R(I, M) \rightarrow \text{Tor}_i^R(I, F),$$

pour avoir $\text{Tor}_i^R(I, M) = 0$ pour tout $i > 0$.

D'autre part, comme G est plat de Gorenstein, il existe une suite exacte de R -modules à gauche :

$$(\beta) = \quad 0 \rightarrow G \rightarrow F^0 \rightarrow F^1 \rightarrow \dots,$$

où chaque F_i est plat, tel que $I \otimes_R -$ conserve l'exactitude de la suite dès que I est un R -module à droite injectif. Assemblons les suites (α) et (β) , on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & F & \longrightarrow & F^0 \longrightarrow F^1 \longrightarrow \dots \\ & & & & \searrow & & \nearrow \\ & & & & & G & \\ & & & & \nearrow & & \searrow \\ & & 0 & & & & 0 \end{array}$$

tel que $I \otimes_R -$ conserve l'exactitude de la suite en haut du diagramme dès que I est un R -module à droite injectif. ■

Lemme 5.1.5

Soit $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ une suite exacte courte de R -modules à gauche. Si A est plat de Gorenstein et C est plat, alors B est plat de Gorenstein.

Preuve. Comme A est plat de Gorenstein, il existe une suite exacte courte de R -modules à gauche $0 \rightarrow A \rightarrow F \rightarrow G \rightarrow 0$, où F est plat et G est plat de Gorenstein. On considère le diagramme pushout suivant :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\
 0 & \longrightarrow & F & \dashrightarrow & F' & \longrightarrow & C \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & G & \xlongequal{\quad} & G & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & &
 \end{array}$$

Dans la suite $0 \rightarrow F \rightarrow F' \rightarrow C \rightarrow 0$, F et C sont plats, de même alors pour F' . Donc, d'après la suite verticale du milieu et d'après Lemme 5.1.4, B est plat de Gorenstein. ■

Dans la preuve suivante, M^+ signifie le module caractère $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ d'un module M .

Preuve du Théorème 5.1.3. (1) $\Rightarrow$ (2). Pour montrer que la classe $\mathcal{GF}(R)$ est résolvante projectivement, il suffit de montrer qu'elle est stable par noyaux de surjection (voir Définitions 0.0.12). Alors, on considère une suite exacte courte de R -modules à gauche $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$, où B et C sont plats de Gorenstein. On montre que A est plat de Gorenstein. Comme B est plat de Gorenstein, il existe une suite exacte de R -modules à gauche $0 \rightarrow B \rightarrow F \rightarrow G \rightarrow 0$, où F est plat et G est

5.1. LA DIMENSION PLATE DE GORENSTEIN DANS LES ANNEAUX GF-CLOS À GAUCHE

plat de Gorenstein. On considère le diagramme pushout suivant :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C \longrightarrow 0 \\
 & & \parallel & & \downarrow & & \vdots \\
 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & F & \dashrightarrow & D \longrightarrow 0 \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & & & G & \equiv & G \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & & & 0 & & 0
 \end{array}$$

D'après la suite verticale à droite et comme R est GF-clos à gauche, le R -module D est plat de Gorenstein. Donc, d'après la suite horizontale du milieu et Lemme 5.1.4, A est plat de Gorenstein, d'où le résultat.

(1) $\Rightarrow$ (3). Comme G_1 est plat de Gorenstein, il existe une suite exacte courte de R -modules à gauche $0 \rightarrow G_1 \rightarrow F_1 \rightarrow H \rightarrow 0$, où F_1 est plat et H est plat de Gorenstein. On considère le diagramme pushout suivant :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & G_1 & \longrightarrow & G_0 & \longrightarrow & M \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \vdots & & \parallel \\
 0 & \longrightarrow & F_1 & \dashrightarrow & D & \longrightarrow & M \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & H & \equiv & H & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & &
 \end{array}$$

Dans la suite exacte courte $0 \rightarrow G_0 \rightarrow D \rightarrow H \rightarrow 0$, on a G_0 et H sont plats de Gorenstein, de même alors pour D (puisque R est GF-clos à gauche). Alors, il existe une suite exacte courte de R -modules à gauche $0 \rightarrow D \rightarrow F \rightarrow G \rightarrow 0$, où F

est plat et G est plat de Gorenstein. On considère le diagramme pushout suivant :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & F_1 & \longrightarrow & D & \longrightarrow & M \longrightarrow 0 \\
 & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & F_1 & \longrightarrow & F & \dashrightarrow & F' \longrightarrow 0 \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & & & G & = & G \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & & & 0 & & 0
 \end{array}$$

On montre que F' est plat. Considérons la suite $0 \rightarrow M \rightarrow F' \rightarrow G \rightarrow 0$. Soit I un R -module à droite injectif. D'après la suite exacte,

$$0 = \text{Tor}_1^R(I, M) \rightarrow \text{Tor}_1^R(I, F') \rightarrow \text{Tor}_1^R(I, G) = 0,$$

on a

$$(*) \quad \text{Tor}_1^R(I, F') = 0.$$

D'autre part, considérons la suite $0 \rightarrow F_1 \rightarrow F \rightarrow F' \rightarrow 0$. D'après [54, Lemme 3.51], on a la suite exacte courte des modules caractères suivante :

$$(\beta) = \quad 0 \rightarrow (F')^+ \rightarrow F^+ \rightarrow (F_1)^+ \rightarrow 0.$$

D'après [54, Théorème 3.52], F^+ et $(F_1)^+$ sont des R -modules à droite injectifs. Alors, d'après (*) et d'après [20, Proposition 5.1, page 120],

$$\text{Ext}_R((F_1)^+, (F')^+) \cong (\text{Tor}_1^R((F_1)^+, F'))^+ = 0.$$

Alors, la suite (β) est scindée, on a donc $(F')^+$ est injectif étant un facteur direct du R -module à droite injectif F^+ . Alors, F' est un R -module à gauche plat (d'après [54, Théorème 3.52]).

Finalement, d'après Lemme 5.1.4 et la suite exacte courte $0 \rightarrow M \rightarrow F' \rightarrow G \rightarrow 0$, M est plat de Gorenstein.

(3) $\Rightarrow$ (1). Considérons une suite exacte courte de R -modules à gauche $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$, où A et C sont plats de Gorenstein. On montre que B est plat de Gorenstein. Soit I un R -module à droite injectif. En appliquant le foncteur $I \otimes_R -$ à la suite exacte courte $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$, on aura la suite exacte longue,

$$\mathrm{Tor}_i^R(I, A) \rightarrow \mathrm{Tor}_i^R(I, B) \rightarrow \mathrm{Tor}_i^R(I, C).$$

Alors, $\mathrm{Tor}_i^R(I, B) = 0$ pour tout $i > 0$ (puisque A et C est plat de Gorenstein et d'après Lemme 5.1.4).

D'autre part, comme C est plat Gorenstein, il existe, par définition, une suite exacte courte de R -modules à gauche $0 \rightarrow G \rightarrow F \rightarrow C \rightarrow 0$, où F est plat et C est plat de Gorenstein. Considérons le diagramme pullback suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 0 & & 0 & \\ & & & \downarrow & & \downarrow & \\ & & & G & \xlongequal{\quad} & G & \\ & & & \downarrow & & \downarrow & \\ 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & D & \dashrightarrow & F \longrightarrow 0 \\ & & \parallel & & \vdots & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C \longrightarrow 0 \\ & & & & \downarrow & & \downarrow \\ & & & & 0 & & 0 \end{array}$$

Aussi, comme A est plat de Gorenstein, il existe une suite exacte courte de R -modules à gauche $0 \rightarrow A \rightarrow F' \rightarrow G' \rightarrow 0$, où F' est plat et G' est plat de

Gorenstein. Considérons le diagramme pushout suivant :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & D & \longrightarrow & F \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\
 0 & \longrightarrow & F' & \dashrightarrow & D' & \longrightarrow & F \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & G' & \xlongequal{\quad} & G' & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & &
 \end{array}$$

Dans la suite exacte courte $0 \rightarrow F' \rightarrow D' \rightarrow F \rightarrow 0$ on a F' et F sont plats, alors il en est de même pour D' . Alors, d'après la suite exacte courte $0 \rightarrow D \rightarrow D' \rightarrow G' \rightarrow 0$ et d'après Lemme 5.1.4, D est plat Gorenstein. Finalement, considérons la suite exacte courte $0 \rightarrow G \rightarrow D \rightarrow B \rightarrow 0$. On a G et D sont plats de Gorenstein, et $\text{Tor}_i^R(I, B) = 0$ pour tout $i > 0$ et pour tout R -module à droite injectif I . Par conséquence, d'après (3), B est plat de Gorenstein. Ceci complète la preuve. ■

Corollaire 5.1.6

Si R est un anneau GF-clos à gauche, alors la classe $\mathcal{GF}(R)$ est stable par facteur direct.

Preuve. Combiner [42, Propositions 1.4], Proposition 1.4.20 et Théorème 5.1.3. ■

Remarque 5.1.7

Les modules à gauche projectifs de Gorenstein ont une caractérisation similaire à celle des modules à gauche plats de Gorenstein dans Lemme 5.1.4. Explicitement, un R -module à gauche M est projectif de Gorenstein si et seulement s'il existe une suite exacte courte de R -modules à gauche $0 \rightarrow M \rightarrow P \rightarrow G \rightarrow 0$, où P est projectif et G est projectif de Gorenstein. Alors, un argument similaire à celui utilisé pour l'implication (1) $\Rightarrow$ (2) du Théorème 5.1.3 donne une nouvelle preuve du fait que la

classe des modules à gauche projectifs de Gorenstein est résolutive projectivement (voir Théorème 1.4.3 et sa preuve sur [42]).

Maintenant, on donne une description fonctorielle de la dimension plate de Gorenstein dans les anneaux GF-clos à gauche. Ceci généralise Théorème 1.4.29 qui est déjà vérifié dans les anneaux cohérents à droite.

Théorème 5.1.8

Soit un anneau R et soit M un R -module à gauche. Si R est GF-clos à gauche. Alors, les conditions suivantes sont équivalentes pour un entier positif n :

1. $\text{Gfd}_R(M) \leq n$;
2. $\text{Gfd}_R(M) < \infty$ et $\text{Tor}_i^R(I, M) = 0$ pour tout $i > n$ et tout R -module à droite injectif I ;
3. $\text{Gfd}_R(M) < \infty$ et $\text{Tor}_i^R(E, M) = 0$ pour tout $i > n$ et tout R -module à droite E avec $\text{id}_R(E) < \infty$;
4. Pour toute suite exacte de R -modules à gauche $0 \rightarrow K_n \rightarrow G_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow G_0 \rightarrow M \rightarrow 0$, si chaque G_i est plat de Gorenstein, il en est de même alors pour K_n .

De plus, si $\text{Gfd}_R(M) < \infty$, alors

$$\begin{aligned} \text{Gfd}_R(M) &= \sup \left\{ i \in \mathbb{N} \left| \begin{array}{l} \text{Tor}_i^R(E, M) \neq 0 \text{ pour un certain } R\text{-module} \\ \text{à droite } E \text{ avec } \text{id}_R(E) < \infty. \end{array} \right. \right\} \\ &= \sup \left\{ i \in \mathbb{N} \left| \begin{array}{l} \text{Tor}_i^R(I, M) \neq 0 \text{ pour un certain} \\ R\text{-module à droite injectif } I. \end{array} \right. \right\}. \end{aligned}$$

Pour montrer ce théorème, on a besoin du lemme suivant.

Lemme 5.1.9

Soit M un R -module à gauche et considérons les deux suites exactes de R -modules à gauche,

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow G_n \rightarrow G_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow G_0 \rightarrow M \rightarrow 0, \text{ et} \\ 0 \rightarrow H_n \rightarrow H_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow H_0 \rightarrow M \rightarrow 0. \end{aligned}$$

où $G_0, \dots, G_{n-1}$ et $H_0, \dots, H_{n-1}$ sont plats de Gorenstein. Si R est GF-clos à gauche, alors G_n est plat de Gorenstein si et seulement si H_n est plat de Gorenstein.

Preuve. Suite au Théorème 5.1.3, Corollaire 5.1.6, et Proposition 1.4.20, la preuve est similaire à celle de [22, Théorème 1.2.7 (i) $\Rightarrow$ (iii)]. ■

Preuve du Théorème 5.1.8. D'abord, notons que les dernières inégalités viennent immédiatement d'après les équivalences entre (1), (2), et (3). Notons aussi que l'équivalence (1) $\Leftrightarrow$ (4) est obtenue simplement par Lemme 5.1.9 et par la définition de la dimension plate de Gorenstein. Alors, il reste à montrer les équivalences (1) $\Leftrightarrow$ (2) $\Leftrightarrow$ (3).

(1) $\Rightarrow$ (2). On raisonne par induction sur n . Supposons que $\text{Gfd}_R(M) = n$. Le cas $n = 0$ est vérifié d'après Lemme 5.1.4. Alors, supposons $n \geq 1$. Donc, il existe, par définition de la dimension plate de Gorenstein, une suite exacte courte de R -modules à gauche :

$$0 \rightarrow K \rightarrow G \rightarrow M \rightarrow 0,$$

où G est plat de Gorenstein, tel que $\text{Gfd}_R(K) = n - 1$. Alors, pour un R -module à droite injectif I , on a $\text{Tor}_i^R(I, G) = 0$ pour tout $i > 0$ (d'après le Lemme 5.1.4), et $\text{Tor}_i^R(I, K) = 0$ pour tout $i > n - 1$ (par induction). Alors, on utilise la suite exacte longue,

$$\text{Tor}_{i+1}^R(I, G) \rightarrow \text{Tor}_{i+1}^R(I, M) \rightarrow \text{Tor}_i^R(I, K),$$

pour conclure que $\text{Tor}_{i+1}^R(I, M) = 0$ pour tout $i > n - 1$, comme voulu.

(2) $\Rightarrow$ (3). Simple par induction sur $\text{id}_R(E)$.

(3) $\Rightarrow$ (1). Comme $\text{Gfd}_R(M)$ est finie et d'après Lemme 5.1.9, on peut choisir, pour un certain entier positif $m > n$, une suite exacte de R -modules à gauche :

$$0 \rightarrow G_m \rightarrow \dots \rightarrow G_0 \rightarrow M \rightarrow 0,$$

où $G_0, \dots, G_{m-1}$ sont plats et G_m est plat de Gorenstein. Soit $K_n = \text{Ker}(G_{n-1} \rightarrow G_{n-2})$. L'objectif est de montrer que K_n est plat de Gorenstein. On décompose la

suite

$$0 \rightarrow G_m \rightarrow \cdots \rightarrow G_n \rightarrow K_n \rightarrow 0$$

à des suites exactes courtes :

$$0 \rightarrow H_{i+1} \rightarrow G_i \rightarrow H_i \rightarrow 0$$

pour $i = n, \dots, m-1$, où $H_n = K_n$ et $H_m = G_m$. Considérons la suite exacte courte de R -modules à gauche :

$$0 \rightarrow H_m (= G_m) \rightarrow G_{m-1} \rightarrow H_{m-1} \rightarrow 0.$$

On montre que H_{m-1} est plat de Gorenstein . D'après la suite exacte :

$$0 \rightarrow H_{m-1} \rightarrow \cdots \rightarrow G_0 \rightarrow M \rightarrow 0,$$

on a pour tout R -module à droite injectif I et tout $i > 0$:

$$\mathrm{Tor}_i^R(I, H_{m-1}) \cong \mathrm{Tor}_{(m-1)+i}^R(I, M) = 0.$$

Alors, d'après Théorème 5.1.3 (1) $\Leftrightarrow$ (3), H_{m-1} est plat de Gorenstein.

Finalement, on répète successivement ce dernier argument pour conclure que $H_{m-2}, \dots, H_n = K_n$ sont plats de Gorenstein, Ceci complète la preuve. ■

Le résultat suivant généralise Proposition 1.4.28 qui est déjà vérifiée dans les anneaux cohérents à droite en utilisant la connexion entre la dimension plate de Gorenstein et la dimension injective de Gorenstein (Proposition 1.4.26).

Proposition 5.1.10

Si R est un anneau GF-clos à gauche, alors pour une famille de R -modules à gauche $(M_i)_{i \in I}$, on a :

$$\mathrm{Gfd}_R(\oplus_{i \in I} M_i) = \sup\{\mathrm{Gfd}_R(M_i) \mid i \in I\}.$$

Preuve. En utilisant Théorème 5.1.8, Proposition 1.4.20, et le fait que dans un anneau GF-clos à gauche R la classe $\mathcal{GF}(R)$ est stable par facteur direct (Corollaire 5.1.6), la preuve est analogue à celle de Proposition 1.4.11 sur [42]. ■

On termine avec la généralisation suivante de Théorème 1.4.30. Notamment, on fait étendre les (in)égalités standards à la dimension plate ; comparé à [19, Corollaire 2, page 135].

Théorème 5.1.11

Si R est un anneau GF-clos à gauche, alors pour une suite exacte courte de R -modules à gauche $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$, on a :

1. *Si deux des modules A , B , et C ont une dimension plate de Gorenstein finie, alors il en est de même pour le troisième.*
2. *On a l'inégalité $\text{Gfd}_R(A) \leq \sup\{\text{Gfd}_R(B), \text{Gfd}_R(C) - 1\}$.
L'égalité est vérifiée si $\text{Gfd}_R(B) \neq \text{Gfd}_R(C)$.*
3. *On a l'inégalité $\text{Gfd}_R(B) \leq \sup\{\text{Gfd}_R(A), \text{Gfd}_R(C)\}$.
L'égalité est vérifiée si $\text{Gfd}_R(C) \neq \text{Gfd}_R(A) + 1$.*
4. *On a l'inégalité $\text{Gfd}_R(C) \leq \sup\{\text{Gfd}_R(B), \text{Gfd}_R(A) + 1\}$.
L'égalité est vérifiée si $\text{Gfd}_R(B) \neq \text{Gfd}_R(A)$.*

Preuve. D'abord notons que, en utilisant l'assertion (1) et Théorème 5.1.8, les assertions (2), (3), et (4) sont prouvées similairement au [19, Corollaire 2, page 135]. On montre (1). Soit $\cdots \rightarrow A_1 \rightarrow A_0 \rightarrow A \rightarrow 0$ et $\cdots \rightarrow C_1 \rightarrow C_0 \rightarrow C \rightarrow 0$ des résolutions projectives de, respectivement, A et C . Alors, par le lemme de Horseshoe (Proposition 1.2.8), on a le diagramme commutatif suivant, pour tout entier positif

n :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \rightarrow & H_n & \rightarrow & K_n & \rightarrow & L_n \rightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \rightarrow & A_0 & \rightarrow & A_0 \oplus C_0 & \rightarrow & C_0 \rightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \rightarrow & A & \rightarrow & B & \rightarrow & C \rightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 0 & & 0 & & 0
 \end{array}$$

On a trois cas :

Cas 1 : Supposons que $\text{Gfd}_R(A) \leq n$ et $\text{Gfd}_R(C) \leq n$ pour un certain entier positif n . Alors, d'après Théorème 5.1.8, H_n et L_n sont plats de Gorenstein, alors il en est de même pour K_n (puisque R est GF-clos à gauche). Ceci veut dire que $\text{Gfd}_R(B) \leq n$, comme voulu.

Cas 2 : Supposons que $\text{Gfd}_R(B) \leq n$ et $\text{Gfd}_R(C) \leq n$ pour un certain entier positif n . Alors K_n et L_n sont plats de Gorenstein, alors il en est de même pour H_n (d'après Théorème 5.1.3). Ceci veut dire que $\text{Gfd}_R(A) \leq n$, comme voulu.

Cas 3 : Supposons que $\text{Gfd}_R(A) \leq n$ et $\text{Gfd}_R(B) \leq n$ pour un certain entier positif n . Alors, H_n et K_n sont plats de Gorenstein. En assemblant les suites $0 \rightarrow L_n \rightarrow C_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow C_0 \rightarrow C \rightarrow 0$ et $0 \rightarrow H_n \rightarrow K_n \rightarrow L_n \rightarrow 0$, on a la suite exacte suivante :

$$0 \rightarrow H_n \rightarrow K_n \rightarrow C_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow C_0 \rightarrow C \rightarrow 0.$$

D'où, $\text{Gfd}_R(C) \leq n + 1$, comme voulu. $\blacksquare$

5.2 La dimension plate de Gorenstein dans un produit direct d'anneaux

Notre but, dans cette section, est de montrer, en se basant sur une étude de la dimension plate de Gorenstein des modules à gauche dans un produit direct d'anneaux, comment construire un anneau GF-clos à gauche qui n'est ni cohérent à gauche ni de dimension faible finie.

Pour la convenance du lecteur, on rappelle d'abord quelques propriétés concernant la structure des modules et d'homomorphismes dans les produits directs d'anneaux (Pour plus de détails voir [18, Section 2.6]).

Soit $R = \prod_{i=1}^n R_i$ un produit direct d'anneaux. Si M_i est un R_i -module à gauche (resp., droite) pour $i = 1, \dots, n$, alors $M = M_1 \oplus \dots \oplus M_n$ est un R -module à gauche (resp., droite). Inversement, si M est un R -module à gauche (resp., droite), alors il est de la forme $M = M_1 \oplus \dots \oplus M_n$, où M_i est un R_i -module à gauche (resp., droite) pour $i = 1, \dots, n$ [18, Sous section 2.6.6]. Aussi, les homomorphismes de R -modules sont définis par leurs actions sur le R_i -module composant. Ceci est résumé dans le résultat suivant :

Théorème 5.2.1 ([18], **Théorème 2.6.8**)

Soit $R = \prod_{i=1}^n R_i$ un produit direct d'anneaux et soit $M = M_1 \oplus \dots \oplus M_n$ et $N = N_1 \oplus \dots \oplus N_n$ des décompositions de R -modules à gauche (resp., à droite) en R_i -modules à gauche (resp., à droite). Alors, on a les assertions suivantes :

1. Il existe un isomorphisme naturel de groupes abéliens :

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_R(M, N) & \xrightarrow{\cong} & \text{Hom}_{R_1}(M_1, N_1) \oplus \dots \oplus \text{Hom}_{R_n}(M_n, N_n) \\ \alpha & \longmapsto & \alpha_1 \oplus \dots \oplus \alpha_n \end{array}$$

où l'homomorphisme $\alpha_1 \oplus \dots \oplus \alpha_n$ est défini par :

$$(\alpha_1 \oplus \dots \oplus \alpha_n)(m_1, \dots, m_n) = (\alpha_1 m_1, \dots, \alpha_n m_n).$$

5.2. LA DIMENSION PLATE DE GORENSTEIN DANS UN PRODUIT DIRECT D'ANNEAUX

2. L'homomorphisme α est injectif (resp., surjectif) si et seulement si chaque α_i est injectif (resp., surjectif).

Similairement, le produit tensoriel des modules dans un produit direct d'anneaux fini est défini comme suit :

Proposition 5.2.2

Soit $R = \prod_{i=1}^n R_i$ un produit direct d'anneaux et soit $M = M_1 \oplus \cdots \oplus M_n$ (resp., $N = N_1 \oplus \cdots \oplus N_n$) une décomposition de R -module à droite (resp., gauche) en R_i -modules à droite (resp., gauche). Soit $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$ des éléments de M et N , respectivement. Alors, il existe un isomorphisme naturel de groupes abéliens :

$$\begin{aligned} M \otimes_R N &\xrightarrow{\cong} (M_1 \otimes_{R_1} N_1) \oplus \cdots \oplus (M_n \otimes_{R_n} N_n) \\ x \otimes_R y &\longmapsto (x_1 \otimes_{R_1} y_1, \dots, x_n \otimes_{R_n} y_n). \end{aligned}$$

Ceci est utilisé pour la preuve du résultat suivant.

Proposition 5.2.3

Soit R et N comme dans Proposition 5.2.2. Alors,

$$\text{fd}_R(N) = \sup\{\text{fd}_{R_i}(N_i) \mid i = 0, \dots, n\}.$$

Maintenant, on peut présenter le résultat principal de la section, qui généralise Lemme 6.2.6.

Théorème 5.2.4

Soit R et N comme dans Proposition 5.2.2. Alors,

$$\text{Gfd}_R(N) = \sup\{\text{Gfd}_{R_i}(N_i) \mid i = 0, \dots, n\}.$$

Preuve. D'abord, comme une conséquence de Théorème 5.2.1, Propositions 5.2.2 et 5.2.3, et le fait qu'un R -module à droite $E = E_1 \oplus \cdots \oplus E_n$ est injectif si et seulement si chaque E_i est un R_i -module à droite injectif (d'après [18, Exercice 2.6.5]), on a l'équivalence : N est un R -module à gauche plat de Gorenstein si et seulement si chaque N_i est un R_i -module à gauche plat de Gorenstein.

Maintenant, on montre l'égalité désirée. D'abord, on montre l'inégalité $\text{Gfd}_R(N) \leq$

5.2. LA DIMENSION PLATE DE GORENSTEIN DANS UN PRODUIT DIRECT D'ANNEAUX

$\sup\{\text{Gfd}_{R_i}(N_i) \mid i = 0, \dots, n\}$. Pour ceci, on suppose que $\sup\{\text{Gfd}_{R_i}(N_i) \mid i = 0, \dots, n\} = m$ pour un certain entier positif m . Alors, il existe, pour $i = 1, \dots, n$, une suite exacte de R_i -modules à gauche :

$$0 \longrightarrow F_{m,i} \xrightarrow{\alpha_{m,i}} \dots \longrightarrow F_{0,i} \xrightarrow{\alpha_{0,i}} N_i \longrightarrow 0,$$

où $F_{j,i}$ est plat de Gorenstein pour $j = 0, \dots, m$. Alors, on a une suite exacte de R -modules à gauche :

$$0 \longrightarrow F_m \xrightarrow{\alpha_m} \dots \longrightarrow F_0 \xrightarrow{\alpha_0} N \longrightarrow 0,$$

où $F_j = F_{j,1} \oplus \dots \oplus F_{j,n}$ for $j = 0, \dots, m$. Comme tout $F_{j,i}$ est un R_i -module à gauche plat de Gorenstein, tout F_j est un R -module à gauche plat de Gorenstein. Ceci implique la première inégalité.

Maintenant, on montre l'inégalité inverse. Pour ceci, on suppose que $\text{Gfd}_R(N) = m$ pour un certain entier positif m . D'après Théorème 5.2.1, on a une suite exacte de R -modules à gauche :

$$0 \longrightarrow \oplus_i F_{m,i} \xrightarrow{\oplus_i \alpha_{m,i}} \dots \longrightarrow \oplus_i F_{0,i} \xrightarrow{\oplus_i \alpha_{0,i}} N = \oplus_i N_i \longrightarrow 0,$$

où $\oplus_i F_{j,i}$ est un R -module à gauche plat de Gorenstein $j = 1, \dots, m$. Alors, chaque $F_{j,i}$ est un R_i -module à gauche plat de Gorenstein pour $i = 1, \dots, n$ et $j = 1, \dots, m$. Alors, pour $i = 1, \dots, n$, on a une suite exacte de R_i -modules à gauche :

$$0 \longrightarrow F_{m,i} \xrightarrow{\alpha_{m,i}} \dots \longrightarrow F_{0,i} \xrightarrow{\alpha_{0,i}} N_i \longrightarrow 0,$$

où $F_{j,i}$ est plat de Gorenstein pour $j = 0, \dots, m$. Donc, pour $i = 1, \dots, n$, $\text{Gfd}_{R_i}(N_i) \leq m$. Alors, $\sup\{\text{Gfd}_{R_i}(N_i) \mid i = 0, \dots, n\} \leq m = \text{Gfd}_R(N)$. Ceci complète la preuve.

■

Maintenant, on se permet de présenter l'exemple désiré. Pour ceci, on a besoin du résultat suivant.

Proposition 5.2.5

Un produit direct d'anneaux $\prod_{i=1}^n R_i$ est GF-clos à gauche si et seulement si chaque R_i est GF-clos à gauche.

Preuve. Combiner Théorème 5.2.1 avec Théorème 5.2.4. ■

Finalement, les résultats précédents permettent de construire des exemples d'anneaux GF-clos à gauche qui ne sont ni cohérents à droite ni de dimension faible finie :

Exemple 5.2.6

D'après la note qui suit Proposition 5.1.2, on peut avoir l'anneau GF-clos à gauche R de dimension faible infinie et un anneau GF-clos à gauche S qui n'est pas cohérent à droite. Alors, pour le produit direct d'anneaux $\Gamma = R \times S$ on a :

1. Γ est GF-clos à gauche (d'après Proposition 5.2.5).
2. $\text{wdim}(\Gamma) = \sup\{\text{wdim}(R), \text{wdim}(S)\} = \infty$ (l'égalité à gauche vient suite à Proposition 5.2.3).
3. Γ n'est pas cohérent à droite (puisque en utilisant Théorème 5.2.1 on montre que le produit direct $R_1 \times R_2$ est cohérent à droite si et seulement si chaque R_i est cohérent à droite⁷.)

7. Cette équivalence est un cas particulier, dans le cadre commutatif, de [28, Théorème 2.13].

La dimension globale de Gorenstein des anneaux polynômiaux et des produits directs des anneaux

D. Bennis, N. Mahdou. (2009), *Global Gorenstein Dimensions of Polynomial rings and direct product of rings*. Houston Journal of Mathematics, Vol. 25 (4), 1019-1028.

Dans ce chapitre, on fait étendre le fameux théorème de syzygy de Hilbert aux dimensions homologiques de Gorenstein des anneaux (voir Chapitre 7). Aussi, on étudie les dimensions homologiques de Gorenstein des produits directs des anneaux. Nos résultats génèreront des exemples d'anneaux non-Noethériens de dimension de Gorenstein finie et de dimension globale faible classique infinie.

6.1 Les dimensions de Gorenstein des anneaux polynômiaux

Le but de cette section est de calculer la dimension globale faible de Gorenstein des anneaux commutatifs des polynômes.

6.1. LES DIMENSIONS DE GORENSTEIN DES ANNEAUX POLYNÔMIAUX

Durant toute cette section, R est un anneau commutatif, et $R[X]$ est l'anneau polynômial avec une indéterminée dans R . On note par $M[X]$, où M est un R -module, le $R[X]$ -module $M \otimes_R R[X]$.

Le premier principal résultat dans cette section est :

Théorème 6.1.1

Soit $R[X_1, X_2, \dots, X_n]$ l'anneau polynômial de n indéterminées dans R . Alors :

$$\mathbf{G} - \mathbf{gldim}(\mathbf{R}[X_1, X_2, \dots, X_n]) = \mathbf{G} - \mathbf{gldim}(\mathbf{R}) + n.$$

Pour démontrer ce théorème, certains résultats sont indispensables.

Lemme 6.1.2

Pour tout R -module M , $\mathbf{Gpd}_{R[X]}(M[X]) \leq \mathbf{Gpd}_R(M)$.

Preuve. Un argument standard prouve que l'inégalité est une conséquence de l'implication : M est un R -module projectif de Gorenstein $\Rightarrow M[X]$ est un $R[X]$ -module projectif de Gorenstein. Alors, supposons que M est un R -module projectif de Gorenstein. On montre que $M[X]$ est un $R[X]$ -module projectif de Gorenstein.

D'après Théorème 2.1.7, M est un facteur direct d'un R -module projectif de Gorenstein fort N . Alors, par Proposition 8.1.6 (1), il existe une suite exacte courte de R -modules

$$0 \rightarrow N \rightarrow P \rightarrow N \rightarrow 0,$$

où P est projectif, et $\mathrm{Ext}_R(N, Q) = 0$ pour tout R -module projectif Q . Par conséquence, on a la suite exacte courte de $R[X]$ -modules suivante

$$0 \rightarrow N[X] \rightarrow P[X] \rightarrow N[X] \rightarrow 0,$$

telle que $P[X]$ est un $R[X]$ -module projectif, et d'après [54, Théorème 11.65] :

$$\mathrm{Ext}_{R[X]}(N[X], Q) \cong \mathrm{Ext}_R(N, Q) = 0$$

pour tout $R[X]$ -module projectif Q (puisque Q est aussi un R -module projectif). Ainsi, $N[X]$ est un $R[X]$ -module projectif de Gorenstein fort (par Proposition 8.1.6 (1)). Donc, $M[X]$ est un $R[X]$ -module projectif de Gorenstein étant un facteur direct du $R[X]$ -module projectif de Gorenstein fort $N[X]$ (par Théorème 1.4.3). ■

Lemme 6.1.3

Pour toute suite exacte courte de modules $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$, on a :

$$\text{Gpd}(C) \leq 1 + \sup\{\text{Gpd}(A), \text{Gpd}(B)\}.$$

Preuve. La preuve est analogue à celle de [22, Corollaire 1.2.9 (a)]. ■

Lemme 6.1.4

Pour tout anneau R , $\text{G-gldim}(R[X]) \leq \text{G-gldim}(R) + 1$.

Preuve. En combinant Lemmes 6.1.3 et 6.1.2, l'argument est analogue à la preuve de [54, Lemme 9.30]. ■

Lemme 6.1.5

Si tous les $R[X]$ -modules projectifs sont de dimension injective finie, alors, pour tout R -module M , $\text{Gpd}_{R[X]}(M[X]) = \text{Gpd}_R(M)$.

En particulier, $\text{G-gldim}(R) \leq \text{G-gldim}(R[X])$.

Preuve. D'après Lemme 6.1.2, il suffit de montrer : $\text{Gpd}_{R[X]}(M[X]) \geq \text{Gpd}_R(M)$.

Cette inégalité est une conséquence de l'implication : $M[X]$ est un $R[X]$ -module projectif de Gorenstein $\Rightarrow M$ est un R -module projectif de Gorenstein. Alors, supposons que $M[X]$ est un $R[X]$ -module projectif de Gorenstein. On montre que M est un R -module projectif de Gorenstein.

D'après Théorème 2.1.7, $M[X]$ est un facteur direct d'un $R[X]$ -module projectif de Gorenstein fort N . Pour un tel $R[X]$ -module N , et d'après Proposition 8.1.6 (1), il existe une suite exacte courte de $R[X]$ -modules

$$(\star) \quad 0 \rightarrow N \rightarrow P \rightarrow N \rightarrow 0,$$

où P est projectif (il est aussi projectif étant un R -module), et $\text{Ext}_{R[X]}(N, Q') = 0$ pour tout $R[X]$ -module Q' de dimension projective finie.

Notons que M est un facteur direct de N , puisqu'il est un facteur direct de $M[X]$. Alors, pour compléter la preuve, il suffit, d'après Théorème 1.4.3, de montrer que N est aussi un R -module projectif de Gorenstein fort. Pour ceci, et d'après la

6.1. LES DIMENSIONS DE GORENSTEIN DES ANNEAUX POLYNÔMIAUX

suite exacte courte $(\star)$, il suffit de montrer, d'après Proposition 8.1.6 (1), que $\text{Ext}_R^n(N, L) = 0$ pour un certain entier $n > 0$ et pour tout R -module projectif L . D'après [54, Théorème 11.65], $\text{Ext}_{R[X]}^i(N[X], L) \cong \text{Ext}_R^i(N, L)$ pour tout $R[X]$ -module L . Si L est un R -module projectif, alors $\text{pd}_{R[X]}(L) = 1$ (par [48, Théorème C, page 124]). Ainsi, les hypothèses impliquent que $\text{id}_{R[X]}(L)$ est finie. Par suite, il existe un entier $n > 0$ tel que $\text{Ext}_{R[X]}^n(N[X], L) = 0$. Donc, $\text{Ext}_R^n(N, L) = 0$, comme voulu.

Finalement, $\text{G-gldim}(R) \leq \text{G-gldim}(R[X])$ est claire et ceci complète la preuve de 6.1.5. ■

Preuve de Théorème 6.1.1. Par induction sur n , on suppose que $n = 1$, tels qu'on a $R[X] = R[X_1]$. Lemmes 6.1.4 et 6.1.5 donnent :

$$\text{G-gldim}(R) \leq \text{G-gldim}(R[X]) \leq \text{G-gldim}(R) + 1.$$

Alors, on suppose que $\text{G-gldim}(R)$ et $\text{G-gldim}(R[X])$ sont finies.

Soit $\text{G-gldim}(R) = m$ pour un certain entier positif m . D'après Lemme 8.1.2, il existe un R -module M et un R -module projectif P tel que $\text{Ext}_R^m(M, P) \neq 0$. Par suite, par le théorème de Rees [54, Théorème 9.37],

$$\text{Ext}_{R[X]}^{m+1}(M, P[X]) \cong \text{Ext}_R^m(M, P) \neq 0,$$

Ceci implique, d'après Théorème 1.4.13 et puisque $P[X]$ est un $R[X]$ -module projectif, que $\text{Gpd}_{R[X]}(M) \geq m + 1$. Donc, $\text{G-gldim}(R[X]) \geq m + 1$, d'où le résultat. ■

Corollaire 6.1.6

Soit $R[X_1, X_2, \dots, X_n, \dots]$ l'anneau polynômial avec une infinité d'indéterminées. Alors, $\text{G-gldim}(R[X_1, X_2, \dots, X_n, \dots]) = \infty$.

Preuve. Claire. ■

6.1. LES DIMENSIONS DE GORENSTEIN DES ANNEAUX POLYNÔMIAUX

Théorème 6.1.1 nous permet de donner une famille $\{R_i\}_{i \geq 0}$ d'anneaux commutatifs, telle que $G\text{-gldim}(R_i) = i$ et $\text{wdim}(R_i) = \infty$ pour tout $i \geq 0$, comme c'est bien démontré par l'exemple suivant.

Exemple 6.1.7

Considérons un anneau quasi-Frobenius non-semisimple (par exemple, $K[X]/(X^2)$, où K est un corps). Alors, pour tout entier $n \geq 1$, on a : $G\text{-gldim}(R[X_1, X_2, \dots, X_n]) = n$ et $\text{wdim}(R[X_1, X_2, \dots, X_n]) = \infty$.

Preuve. On a $G\text{-gldim}(R) = 0$ puisque R est quasi-Frobenius. D'autre part, $\text{gldim}(R)(= \text{wdim}(R)) = \infty$ par Proposition 8.1.8 puisque R est Noethérien et $\text{gldim}(R) \neq 0$ (puisque R est quasi-Frobenius mais non semisimple). ■

Maintenant, on se focalise sur la dimension faible de Gorenstein des anneaux polynômiaux.

Théorème 6.1.8

Si l'anneau polynômial $R[X]$ d'une indéterminée X dans R est cohérent, alors :
 $G\text{-wdim}(R[X]) = G\text{-wdim}(R) + 1$.

Preuve. Premièrement, notons que $R = R[X]/(X)$ est aussi cohérent (par [40, Théorème 4.1.1 (1)]), puisque R est un $R[X]$ -module de présentation finie (par la suite exacte courte de $R[X]$ -modules $0 \rightarrow R[X] \rightarrow R[X] \rightarrow R \rightarrow 0$), et puisque $R[X]$ est cohérent.

On procède d'une manière similaire à la preuve de Théorème 6.1.1. Alors, on montre d'abord que $G\text{-wdim}(R[X]) \leq G\text{-wdim}(R) + 1$. Cette inégalité est obtenue de la même façon que celle de Lemme 6.1.4 en utilisant Proposition 1.4.25 à la place de Lemme 6.1.2 et le fait que l'inégalité de Lemme 6.1.4 reste vraie dans les anneaux cohérents pour le cas de la dimension plate de Gorenstein.

Deuxièmement, on doit montrer que $G\text{-wdim}(R) \leq G\text{-wdim}(R[X])$. Pour ceci, il suffit de montrer l'inégalité $\text{Gfd}_{R[X]}(M[X]) \geq \text{Gfd}_R(M)$ pour tout R -module M . Aussi, la preuve de cette inégalité est similaire à celle de la preuve de Lemme 6.1.5,

6.2. LES DIMENSIONS DE GORENSTEIN DES PRODUITS DIRECTS DES ANNEAUX

en utilisant les propriétés des modules plats de Gorenstein forts au lieu de celles des modules projectifs de Gorenstein forts utilisées dans la preuve de Lemme 6.1.5, et en utilisant le fait que, dans un anneau cohérent, la classe des modules plats de Gorenstein est stable par facteur direct (Théorème 1.4.23). Et finalement, utilisons [54, Théorème 11.64], [48, Théorème 202]), et Théorème 8.2.8 au lieu de [54, Théorème 11.65], [48, Théorème C, page 124], et Proposition 8.1.10, respectivement.

Maintenant, on a les inégalités :

$$\mathrm{G-wdim}(R) \leq \mathrm{G-wdim}(R[X]) \leq \mathrm{G-wdim}(R) + 1.$$

Alors, on peut supposer que $\mathrm{G-wdim}(R)$ et $\mathrm{G-wdim}(R[X])$ sont finies.

Soit $\mathrm{G-wdim}(R) = m$ pour un certain entier positif m . Par conséquence, d'après Théorème 8.2.8, il existe un R -module de présentation finie M tel que $\mathrm{Ext}_R^m(M, R) \neq 0$. Alors, d'après le théorème de Rees [54, Théorème 9.37],

$$\mathrm{Ext}_{R[X]}^{m+1}(M, R[X]) \cong \mathrm{Ext}_R^m(M, R) \neq 0.$$

Le R -module M est aussi de présentation finie en étant un $R[X]$ -module (par [40, Théorème 2.1.7], et puisque R est un $R[X]$ -module de présentation finie, par la suite exacte courte de $R[X]$ -modules $0 \rightarrow R[X] \rightarrow R[X] \rightarrow R \rightarrow 0$). Alors, d'après Théorème 8.2.8, $\mathrm{G-wdim}(R[X]) \geq m + 1$, Ceci implique l'inégalité voulue. ■

6.2 Les dimensions de Gorenstein des produits directs des anneaux

L'objectif de cette section est de calculer les dimensions globale et faible de Gorenstein des produits directs des anneaux commutatifs.

On commence par le cas de la dimension globale de Gorenstein, qui est une généralisation de l'égalité classique : $\mathrm{gldim}(\Pi_{i=1}^m R_i) = \sup\{\mathrm{gldim}(R_i), 1 \leq i \leq m\}$, où $\{R_i\}_{i=1, \dots, m}$ est une famille d'anneaux [20, Chapitre VI, Exercice 8, page 123].

Théorème 6.2.1

Soit $\{R_i\}_{i=1,\dots,m}$ une famille d'anneaux. Alors :

$$\text{G-gldim}\left(\prod_{i=1}^m R_i\right) = \sup\{\text{G-gldim}(R_i), 1 \leq i \leq m\}.$$

Pour démontrer ce théorème, les résultats suivants sont indispensables :

Lemme 6.2.2

Soit $R \rightarrow S$ un homomorphisme d'anneaux tel que S est un R -module projectif. Si M est un R -module projectif de Gorenstein (fort), alors $M \otimes_R S$ est un S -module projectif de Gorenstein (fort).

Notamment, on a : $\text{Gpd}_S(M \otimes_R S) \leq \text{Gpd}_R(M)$.

Preuve. Supposons d'abord que M est un R -module projectif de Gorenstein fort. Alors, il existe une suite exacte courte de R -modules

$$0 \rightarrow M \rightarrow P \rightarrow M \rightarrow 0,$$

où P est projectif, et $\text{Ext}_R(M, Q) = 0$ pour tout R -module projectif Q . Comme S est un R -module projectif (alors plat), on a une suite exacte courte de S -modules

$$0 \rightarrow M \otimes_R S \rightarrow P \otimes_R S \rightarrow M \otimes_R S \rightarrow 0,$$

telle que $P \otimes_R S$ est un S -module projectif, et pour tout S -module projectif (qui est alors un R -module projectif) L , $\text{Ext}_S(M \otimes_R S, L) = \text{Ext}_R(M, L) = 0$ (par [54, Théorème 11.65]). Ceci implique que $M \otimes_R S$ est un S -module projectif de Gorenstein fort.

Maintenant, soit M un R -module projectif de Gorenstein arbitraire. Alors, c'est un facteur direct d'un R -module projectif de Gorenstein fort N . Donc, $M \otimes_R S$ est un facteur direct du S -module $N \otimes_R S$ qui est projectif de Gorenstein fort. D'où, $M \otimes_R S$ est un S -module projectif de Gorenstein fort, comme voulu. ■

Lemme 6.2.3

Soit $\{R_i\}_{i=1,\dots,m}$ une famille d'anneaux telle que tous les R_i -modules projectifs sont de dimension injective finie pour $i=1,\dots,m$. Soit M_i un R_i -module pour $i=1,\dots,m$.

6.2. LES DIMENSIONS DE GORENSTEIN DES PRODUITS DIRECTS DES ANNEAUX

Si chaque M_i est un R_i -module projectif de Gorenstein (fort), alors $\prod_{i=1}^m M_i$ est un $(\prod_{i=1}^m R_i)$ -module projectif de Gorenstein (fort).

Notamment, on a : $\text{Gpd}_{(\prod_{i=1}^m R_i)}(\prod_{i=1}^m M_i) \leq \sup\{\text{Gpd}_{R_i}(M_i), 1 \leq i \leq m\}$.

Preuve. Par induction sur m , il suffit de montrer l'assertion pour $m = 2$.

Supposons d'abord que M_i est un R_i -module projectif de Gorenstein fort pour $i = 1, 2$. Alors, il existe une suite exacte courte de R_i -modules

$$0 \rightarrow M_i \rightarrow P_i \rightarrow M_i \rightarrow 0,$$

où P_i est projectif. Par conséquent, on a une suite exacte courte de $R_1 \times R_2$ -modules

$$0 \rightarrow M_1 \times M_2 \rightarrow P_1 \times P_2 \rightarrow M_1 \times M_2 \rightarrow 0,$$

où $P_1 \times P_2$ est un $R_1 \times R_2$ -module projectif (par [50, Lemme 2.5 (2)]).

D'autre part, soit Q un $R_1 \times R_2$ -module projectif. On a :

$$Q = Q \otimes_{R_1 \times R_2} (R_1 \times R_2) = Q \otimes_{R_1 \times R_2} (R_1 \times 0 \oplus 0 \times R_2) = Q_1 \times Q_2,$$

où $Q_i = Q \otimes_{R_1 \times R_2} R_i$ pour $i = 1, 2$. D'après [50, Lemme 2.5 (2)], Q_i est un R_i -module projectif pour $i = 1, 2$. Alors, par hypothèses, $\text{id}_{R_i}(Q_i) < \infty$ pour $i = 1, 2$, et d'après [20, Chapitre VI, Exercice 10, page 123], $\text{id}_{R_1 \times R_2}(Q_i) \leq \text{id}_{R_i}(Q_i) < \infty$ pour $i = 1, 2$. Ainsi, $\text{id}_{R_1 \times R_2}(Q_1 \times Q_2) < \infty$, d'où

$$\text{Ext}_{R_1 \times R_2}^k(M_1 \times M_2, Q_1 \times Q_2) = 0$$

pour un certain entier positif k . Ceci implique, d'après Proposition 8.1.6 (1), que $M_1 \times M_2$ est un $R_1 \times R_2$ -module projectif de Gorenstein fort.

Maintenant, soit M_i un R_i -module projectif de Gorenstein arbitraire pour $i = 1, 2$. Alors, il existe un R_i -module G_i et un R_i -module projectif de Gorenstein fort N_i pour $i = 1, 2$ tels que $M_i \oplus G_i = N_i$. Alors,

$$(M_1 \times M_2) \oplus (G_1 \times G_2) = (M_1 \oplus G_1) \times (M_2 \oplus G_2) = N_1 \times N_2.$$

Comme, $N_1 \times N_2$ est un $R_1 \times R_2$ -module projectif de Gorenstein fort, et d'après Théorème 2.1.7, $M_1 \times M_2$ est un $R_1 \times R_2$ -module projectif de Gorenstein, comme voulu. ■

Preuve de Théorème 6.2.1. Par induction sur m , il suffit de montrer l'égalité pour $m = 2$. Ceci est équivalent à montrer, pour tout entier positif d , l'équivalence suivante :

$$\text{G-gldim}(R_1 \times R_2) \leq d \iff \text{G-gldim}(R_1) \leq d \quad \text{and} \quad \text{G-gldim}(R_2) \leq d.$$

Alors, supposons que $\text{G-gldim}(R_1 \times R_2) \leq d$ pour un certain entier positif d .

Soit M_i un R_i -module pour $i = 1, 2$. Comme chaque R_i est un $R_1 \times R_2$ -module projectif, et d'après Lemme 6.2.2, on a :

$$\text{Gpd}_{R_i}(M_i) = \text{Gpd}_{R_i}((M_1 \times M_2) \otimes_{R_1 \times R_2} R_i) \leq \text{Gpd}_{R_1 \times R_2}(M_1 \times M_2) \leq d.$$

Ceci implique que $\text{G-gldim}(R_i) \leq d$ pour $i = 1, 2$.

Réciproquement, supposons que $\text{G-gldim}(R_i) \leq d$ pour $i = 1, 2$, où d est un entier positif, et considérons un $R_1 \times R_2$ -module M . On note $M = M_1 \times M_2$, où $M_i = M \otimes_{R_1 \times R_2} R_i$ pour $i = 1, 2$. Par hypothèses et d'après Proposition 8.1.10, on applique Lemme 6.2.3, et par suite on a

$$\text{Gpd}_{R_1 \times R_2}(M_1 \times M_2) \leq \sup\{\text{Gpd}_{R_1}(M_1), \text{Gpd}_{R_2}(M_2)\} \leq d.$$

Donc, $\text{G-gldim}(R_1 \times R_2) \leq d$. ■

Maintenant, on peut construire une famille d'anneaux non-Noethériens $\{R_i\}_{i \geq 1}$ telle que $\text{G-gldim}(R_i) = i$ et $\text{wdim}(R_i) = \infty$ pour tout $i \geq 1$, comme suit :

Exemple 6.2.4

Considérons un anneau quasi-Frobenius non-semisimple R , et un anneau héréditaire non-Noethérien S . Alors, pour tout entier $n \geq 1$, on a : $\text{G-gldim}(R \times S[X_1, X_2, \dots, X_n]) = n + 1$ et $\text{wdim}(R \times S[X_1, X_2, \dots, X_n]) = \infty$.

Preuve. Comme S est un anneau héréditaire, $\text{gldim}(S) = 1$. Alors, la première inégalité est une conséquence immédiate du théorème de syzygy de Hilbert, Théorème 6.2.1, et puisque $\text{G-gldim}(R) = 0$ (puisque R est quasi-Frobenius).

6.2. LES DIMENSIONS DE GORENSTEIN DES PRODUITS DIRECTS DES ANNEAUX

Maintenant, si $\text{wdim}(R \times S[X_1, X_2, \dots, X_n]) < \infty$, alors, d'après Proposition 8.1.8, on a :

$$\text{gldim}(R \times S[X_1, X_2, \dots, X_n]) = \text{G-gldim}(R \times S[X_1, X_2, \dots, X_n]) = n + 1.$$

Ainsi, $\text{gldim}(R) \leq n + 1$ (par [20, Chapitre VI, Exercice 10, page 123]). Ce qui est absurde, puisque R est un anneau quasi-Frobenius non-semisimple. ■

Maintenant, on étudie le cas de la dimension faible de Gorenstein.

Théorème 6.2.5

Soit $\{R_i\}_{i=1, \dots, m}$ une famille d'anneaux cohérents. Alors :

$$\text{G-wdim}\left(\prod_{i=1}^m R_i\right) = \sup\{\text{G-wdim}(R_i), 1 \leq i \leq m\}.$$

Similairement au cas de la dimension globale de Gorenstein, on a besoin des lemmes suivants :

Lemme 6.2.6

Soit $\{R_i\}_{i=1, \dots, m}$ une famille d'anneaux cohérents telle que tout R_i -module injectif est de dimension plate finie pour $i=1, \dots, m$. Soit M_i une famille de R_i -module pour $i=1, \dots, m$. Si chaque M_i est un R_i -module plat de Gorenstein (fort), alors $\prod_{i=1}^m M_i$ est un $(\prod_{i=1}^m R_i)$ -module plat de Gorenstein (fort).

Notamment, on a : $\text{Gfd}_{(\prod_{i=1}^m R_i)}(\prod_{i=1}^m M_i) \leq \sup\{\text{Gfd}_{R_i}(M_i), 1 \leq i \leq m\}$.

Preuve. Notons d'abord que $\prod_{i=1}^m R_i$ est aussi un anneau cohérent (par [40, Théorème 2.4.3]).

En utilisant les résultats des modules plats de Gorenstein (forts) (Théorème 2.2.5, Proposition 8.2.5, et Théorème 1.4.23), en utilisant le fait que, si I est un $R_1 \times R_2$ -module injectif, alors $I = \text{Hom}_{R_1 \times R_2}(R_1 \times R_2, I) = \text{Hom}_{R_1 \times R_2}(R_1, I) \times \text{Hom}_{R_1 \times R_2}(R_2, I)$, où chaque $\text{Hom}_{R_1 \times R_2}(R_i, I)$ pour $i = 1, 2$ est un R_i -module injectif, et par Lemme 6.2.7 ci-dessus, l'argument est similaire à la preuve de Lemme 6.2.3. ■

Lemme 6.2.7

Soit $R_1 \times R_2$ un produit des anneaux R_1 et R_2 , et soit F_i un R_i -module pour $i=1, 2$. Alors, $\text{fd}_{R_1 \times R_2}(F_1 \times F_2) = \sup\{\text{fd}_{R_1}(F_1), \text{fd}_{R_2}(F_2)\}$.

Preuve. On a :

$$(F_1 \times F_2) \otimes (R_1 \times 0) = (F_1 \times F_2) \otimes (R_1 \times R_2 / 0 \times R_2) = F_1 \times 0.$$

Alors, comme R_1 est un $R_1 \times R_2$ -module projectif, [20, Chapitre VI, Exercice 10, page 123] donne :

$$\text{fd}_{R_1}(F_1 \times 0) = \text{fd}_{R_1}((F_1 \times F_2) \otimes (R_1 \times 0)) \leq \text{fd}_{R_1 \times R_2}(F_1 \times F_2).$$

De même : $\text{fd}_{R_2}(0 \times F_2) \leq \text{fd}_{R_1 \times R_2}(F_1 \times F_2)$. Ainsi,

$$\sup\{\text{fd}_{R_1}(F_1), \text{fd}_{R_2}(F_2)\} \leq \text{fd}_{R_1 \times R_2}(F_1 \times F_2).$$

Réciproquement, d'après [20, Chapitre VI, Exercice 10, page 123], on a :

$$\begin{aligned} \text{fd}_{R_1 \times R_2}(F_1 \times 0) &\leq \text{fd}_{R_1 \times 0}(F_1 \times 0) = \text{fd}_{R_1 \times 0}(F_1) \quad \text{et} \\ \text{fd}_{R_1 \times R_2}(0 \times F_2) &\leq \text{fd}_{0 \times R_2}(0 \times F_2) = \text{fd}_{0 \times R_2}(F_2). \end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned} \text{fd}_{R_1 \times R_2}(F_1 \times F_2) &= \sup\{\text{fd}_{R_1 \times R_2}(F_1 \times 0), \text{fd}_{R_1 \times R_2}(0 \times F_2)\} \\ &\leq \sup\{\text{fd}_{R_1}(F_1), \text{fd}_{R_2}(F_2)\}. \end{aligned}$$

Ceci complète la preuve. ■

Preuve de Théorème 6.2.5. En utilisant Théorème 8.2.8, Proposition 1.4.25, et Lemme 6.2.6, la preuve est similaire à celle de Théorème 6.2.1. ■

Le Théorème 6.2.5 nous permet de construire une famille d'anneaux cohérents non-Noéthériens $\{R_i\}_{i \geq 1}$ telle que $\text{G-wdim}(R_i) = i$, $\text{G-gldim}(R_i) > i$, et $\text{wdim}(R_i) = \infty$ pour tout $i \geq 1$, comme suit :

Exemple 6.2.8

Considérons un anneau quasi-Frobenius non-semisimple R , et un anneau semi-héréditaire S qui n'est pas héréditaire. Alors, pour $n \geq 1$, on a :

$G\text{-wdim}(R \times S[X_1, X_2, \dots, X_n]) = n + 1$, $G\text{-gldim}(R \times S[X_1, X_2, \dots, X_n]) > n + 1$,
et $\text{wdim}(R \times S[X_1, X_2, \dots, X_n]) = \infty$.

Preuve. Rappelons, d'abord, que tout anneau semi-héréditaire T est stablement cohérent, et donc l'anneau polynômial $T[X_1, \dots, X_j]$ est cohérent pour tout entier $j \geq 1$ [40, Corollaire 7.3.4].

La preuve de la première et la dernière égalités est similaire à celle de Exemple 6.2.4.

Maintenant, raisonnons par absurde, et supposons que $G\text{-gldim}(R \times S[X_1, X_2, \dots, X_n]) \leq n + 1$. D'après Théorème 6.2.1, $G\text{-gldim}(S[X_1, X_2, \dots, X_n]) \leq n + 1$. Mais, Comme S est semi-héréditaire, $\text{wdim}(S) \leq 1$, alors $\text{wdim}(S[X_1, X_2, \dots, X_n]) \leq n + 1$. Ainsi, d'après Proposition 8.1.8, on a :

$$\text{gldim}(S[X_1, X_2, \dots, X_n]) = G\text{-gldim}(S[X_1, X_2, \dots, X_n]) \leq n + 1.$$

Par conséquent, $\text{gldim}(S) \leq 1$. D'où S est héréditaire ce qui contredit les hypohèses

. ■

Dimensions globales de Gorenstein et Dimension de Cotorsion des anneaux

D. Bennis, N. Mahdou. (2009), *Global Gorenstein Dimensions and Cotorsion Dimension of Rings*. Communications in Algebra 37 (5), 1709–1718.

La dimension globale de cotorsion des anneaux et la propriété de la n -perfection (voir page 25) sont utilisées pour donner une borne supérieure à la dimension globale des anneaux (voir Théorème 0.0.15).

Dans ce chapitre, notre principal objectif est de généraliser ce résultat, de façon à établir une borne supérieure à la dimension globale de Gorenstein des anneaux cohérents en utilisant la dimension globale de cotorsion des anneaux.

On utilise ce résultat pour calculer la dimension globale de Gorenstein de certains cas particuliers des extensions triviales des anneaux et des anneaux de groupes.

7.1 Résultats principaux

Notre principal résultat est le suivant :

Théorème 7.1.1

Si R est un anneau cohérent, alors :

$$\text{cot.D}(R) \leq G - \text{gldim}(R) \leq G - \text{wdim}(R) + \text{cot.D}(R).$$

7.1. RÉSULTATS PRINCIPAUX

En particulier :

- Si $\text{cot.D}(R) = 0$ (i.e., R est parfait), alors $\text{G-wdim}(R) = \text{gldim}(R)$.
- Si $\text{G-wdim}(R) = 0$ (i.e., R est un IF-anneau), alors $\text{cot.D}(R) = \text{G-gldim}(R)$.

Pour montrer ce théorème, on a besoin du résultat suivant, qui est une généralisation de la caractérisation de la dimension projective de Gorenstein dans les anneaux Iwanaga-Gorenstein [36, Théorème 2.1].

Lemme 7.1.2

Soit R un anneau qui est à la fois n -FC et m -parfait, où n et m sont des entiers positifs. Pour un R -module M quelconque, on a l'équivalence suivante, pour un entier positif k :

$\text{Gpd}_R(M) \leq k \Leftrightarrow \text{Ext}_R^j(M, P) = 0$ pour tout $j \geq k + 1$ et tout module P avec $\text{pd}_R(P)$ finie.

Dans la preuve de ce lemme, on utilise la notion de la préenveloppe plate de modules qui est définie comme suit :

Définition 7.1.3 ([32])

Soit R un anneau et soit F un R -module plat. Pour un R -module M , un homomorphisme $\varphi : M \rightarrow F$ est appelé une préenveloppe plate, si pour un homomorphisme quelconque $\varphi' : M \rightarrow F'$ avec F' est un module plat, il existe un homomorphisme $f : F \rightarrow F'$ tel que $\varphi' = f\varphi$.

Les anneaux cohérents peuvent être caractérisés par la notion de la préenveloppe plate des modules comme suit :

Lemme 7.1.4 ([32], Proposition 6.5.1)

Un anneau R est cohérent si et seulement si tout R -module admet une préenveloppe plate.

Preuve de Lemme 7.1.2. L'implication directe est déjà vérifiée pour un anneau quelconque par Théorème 1.4.13.

Réciproquement, considérons une suite exacte de R -modules :

$$0 \rightarrow K_n \rightarrow P_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow P_0 \rightarrow M \rightarrow 0$$

où chaque P_i est projectif. On a $\text{Ext}^{n+i}(M, Q) \cong \text{Ext}^i(K_n, Q)$ pour tout $i \geq 1$ et tout module Q . Alors, pour montrer cette implication, il suffit de la montrer pour $k = 0$. Alors, supposons que $\text{Ext}^i(M, P) = 0$ pour tout $i \geq 1$ et tout R -module P de dimension projective finie, et on montre que M est projectif de Gorenstein. Ceci est équivalent à montrer, d'après Proposition 1.4.1, qu'il existe une suite exacte de R -modules :

$$\alpha = \quad 0 \rightarrow M \rightarrow P^0 \rightarrow P^1 \rightarrow \cdots ,$$

où chaque P^i est projectif, tel que $\text{Hom}_R(-, P)$ conserve l'exactitude de la suite α dès que P est un R -module projectif.

La preuve de cette implication est analogue à celle de [36, Théorème 2.1 (1 $\Rightarrow$ 4)]. Pour compléter, on donne une preuve ici.

Comme d'habitude (voir par exemples les preuves de [22, Théorèmes 4.2.6 et 5.1.7]), pour construire la suite α , il suffit de montrer l'existence d'une suite exacte courte de R -modules :

$$0 \rightarrow M \rightarrow P^0 \rightarrow G^0 \rightarrow 0,$$

où P^0 est projectif, tel que $\text{Ext}^i(G^0, P) = 0$ pour tout $i > 0$ et tout R -module P de dimension projective finie (et alors la suite α est construite par récurrence).

D'abord, montrons que M peut être injecté dans un R -module plat. Pour ceci, choisissons une suite exacte courte de R -modules $0 \rightarrow M \rightarrow I \rightarrow E \rightarrow 0$, où I est injectif. Pour ce module I , on choisit une suite exacte courte de R -modules $0 \rightarrow Q \rightarrow P \rightarrow I \rightarrow 0$, où P est projectif. Considérons le diagramme pullback

7.1. RÉSULTATS PRINCIPAUX

suivant :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & Q & = & Q & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \rightarrow & D & \rightarrow & P & \rightarrow & E \rightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\
 0 & \rightarrow & M & \rightarrow & I & \rightarrow & E \rightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & &
 \end{array}$$

Comme I est injectif, $\text{pd}(I) < \infty$ (D'après Théorème 8.2.8 et puisque R est m -parfait). Alors, $\text{pd}(Q) < \infty$. Par hypothèses, $\text{Ext}(M, Q) = 0$, et par suite la première suite exacte verticale est scindée, donc M s'injecte dans D qui est un R -sous module du R -module projectif (alors plat) P .

Le fait que M s'injecte (se plonge) dans un R -module plat implique, d'après Lemme 7.1.4 et Définition 7.1.3, que M admet une préenveloppe plate injective $\varphi : M \rightarrow F$. Pour un tel R -module plat F , considérons une suite exacte courte de R -modules $0 \rightarrow H \rightarrow P^0 \xrightarrow{f} F \rightarrow 0$, où P^0 est projectif, alors H est un R -module plat, et donc de dimension projective finie (puisque R est m -parait). Alors, $\text{Ext}(M, H) = 0$. Ainsi, on a la suite exacte suivante :

$$0 \longrightarrow \text{Hom}(M, H) \longrightarrow \text{Hom}(M, P^0) \xrightarrow{\text{Hom}(M, f)} \text{Hom}(M, F) \longrightarrow \text{Ext}(M, H) = 0.$$

Alors, il existe $\bar{\varphi} : M \rightarrow P^0$ tel que $\varphi = f\bar{\varphi}$. Comme φ est injectif, $\bar{\varphi}$ est aussi injectif, et par suite on obtient la suite exacte de R -modules suivante :

$$(*) \quad 0 \rightarrow M \xrightarrow{\bar{\varphi}} P^0 \rightarrow G^0 \rightarrow 0.$$

Maintenant, pour compléter la preuve, il reste à montrer que $\text{Ext}^i(G^0, F') = 0$ pour tout $i > 0$ et tout R -module F' de dimension projective finie.

D'abord, supposons F' est projectif. Comme φ est une préenveloppe plate de M , il existe, pour tout $\alpha \in \text{Hom}(M, F')$, un homomorphisme $g : F \rightarrow F'$ tel que $\alpha = g\varphi$,

donc $\alpha = gf\overline{\varphi}$. Ceci veut dire que le foncteur $\text{Hom}(-, F')$ conserve l'exactitude de la suite courte $(*)$. Alors, par la suite exacte longue

$$0 \rightarrow \text{Hom}(G^0, F') \rightarrow \text{Hom}(P^0, F') \rightarrow \text{Hom}(M, F') \rightarrow \text{Ext}(G^0, F') \rightarrow \text{Ext}(P^0, F') = 0,$$

on déduit que $\text{Ext}(G^0, F') = 0$. Aussi, la suite exacte courte $(*)$ nous permet de déduire que $\text{Ext}^i(G^0, F') = 0$ pour tout $i > 0$ et tout R -module projectif F' . Ceci implique directement que $\text{Ext}^i(G^0, F') = 0$ pour tout $i > 0$ et tout R -module F' de dimension projective finie. ■

Preuve de Théorème 7.1.1. D'abord, d'après [27, Théorème 7.2.5 (2)] et Théorème 1.4.19, l'inégalité $\text{cot.D}(R) \leq \text{G-gldim}(R)$ est vérifiée pour tout anneau R arbitraire.

Alors, on montre l'inégalité $\text{G-gldim}(R) \leq \text{G-wdim}(R) + \text{cot.D}(R)$ si R est cohérent. Pour ceci, supposons que $\text{cot.D}(R) = m$ et $\text{G-wdim}(R) = n$ sont finies (i.e., R est m -parfait et n -FC). Soit M un R -module, et considérons une suite exacte de R -modules :

$$0 \rightarrow K_n \rightarrow P_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow P_0 \rightarrow M \rightarrow 0,$$

où chaque P_i est projectif, et, d'après Théorème 8.2.8, K_n est plat de Gorenstein. On a :

$$(*) \quad \text{Ext}^{n+k}(M, Q) \cong \text{Ext}^k(K_n, Q) \quad \text{pour tout } k \geq 1 \text{ et tout module } Q.$$

Supposons que Q est un R -module projectif, et considérons une suite exacte de R -modules :

$$0 \rightarrow Q \rightarrow C_0 \rightarrow \cdots \rightarrow C_{m-1} \rightarrow C_m \rightarrow 0,$$

où C_i est injectif pour $i = 1, \dots, m-1$, et donc, d'après [27, Proposition 7.2.1], C_m est de cotorsion. On a :

$$(**) \quad \text{Ext}^{m+i}(K_n, Q) \cong \text{Ext}^i(K_n, C_m) \quad \text{pour tout } i \geq 1.$$

Comme $\text{G-wdim}(R)$ est finie, chacun des R -modules $C_0, \dots, C_{m-1}$ est de dimension plate finie (d'après Théorème 8.2.8). Alors, C_m est de dimension plate finie. Ainsi,

7.1. RÉSULTATS PRINCIPAUX

$\text{Ext}^i(K_n, C_m) = 0$ pour tout $i \geq 1$ (d'après [42, Proposition 3.22] et puisque K_n est plat de Gorenstein). Alors, par $(*)$ et $(**)$, $\text{Ext}^{n+m+i}(M, Q) = 0$ pour tout $i \geq 1$. Ceci implique, d'après Lemme 7.1.2, que $\text{Gpd}(M) \leq n + m$, comme voulu. ■

Théorème 7.1.1 nous permet de calculer la dimension globale de Gorenstein de certains cas particuliers d'extensions triviales des anneaux et des anneaux de groupes.

Rappelons que l'extension triviale d'un anneau R par un R -module M est l'anneau noté $R \ltimes M$ dont le groupe additif est $A \times M$ et la multiplication est définie par $(r, m)(r', m') = (rr', rm' + r'm)$ (voir par exemple [38] et [40, Chapitre 4, Section 4]). Le résultat suivant calcule la dimension globale de Gorenstein d'un cas particulier d'extension triviale d'anneaux. Pour ceci, on utilise la notion de dimension projective finitiste des anneaux. Rappelons que la dimension projective finitiste d'un anneau R , notée $\text{FPD}(R)$, est définie par :

$$\text{FPD}(R) = \sup\{\text{pd}_R(M) \mid M \text{ } R\text{-module avec } \text{pd}_R(M) < \infty\}.$$

D'après Théorème 1.4.19, on a pour tout anneau R : $\text{FPD}(R) \leq \text{G-gldim}(R)$, avec égalité si $\text{G-gldim}(R)$ est finie.

Proposition 7.1.5

Soit $R \ltimes R$ l'extension triviale d'un anneau R par R . Alors, $\text{FPD}(R \ltimes R) = \text{FPD}(R)$, $\text{cot.D}(R \ltimes R) = \text{cot.D}(R)$, et $\text{gldim}(R \ltimes R) = \infty$.

De plus, si R est cohérent, alors $\text{G-gldim}(R \ltimes R) = \text{G-gldim}(R)$.

La preuve de ce théorème nécessite les résultats suivants :

Lemme 7.1.6 ([38], Théorème 4.28 et Remarque page 81)

Soit R un anneau et soit M un R -module cyclique non nul quelconque. Alors, $\text{gldim}(R \ltimes M) = \infty$ et $\text{FPD}(R \ltimes M) = \sup\{\text{pd}_R(N) < \infty : \text{Tor}_i^R(M, N) = 0 \text{ pour tout } i > 0\}$.

En particulier, si F est un $R \ltimes M$ -module de dimension projective finie, alors $\text{pd}_{R \ltimes M}(F) = \text{pd}_R(R \otimes_{R \ltimes M} F)$.

Lemme 7.1.7 ([38], Théorème 4.32)

Soit R un anneau et soit M un R -module tel que :

$$\mathrm{Ext}_R^i(M, M) \cong \begin{cases} R & \text{if } i=0; \\ 0 & \text{if } i>0. \end{cases}$$

Alors, $\mathrm{id}_{R \ltimes M}(R \ltimes M) = \mathrm{id}_R(M)$.

Preuve de Proposition 7.1.5. D'après Lemme 7.1.6, $\mathrm{FPD}(R \ltimes R) = \mathrm{FPD}(R)$ et $\mathrm{gldim}(R \ltimes R) = \infty$.

on montre que $\mathrm{cot.D}(R \ltimes R) = \mathrm{cot.D}(R)$. D'après Lemme 7.1.6, on a :

$$\mathrm{pd}_{(R \ltimes R)}(F) = \mathrm{pd}_R(R \otimes_{(R \ltimes R)} F)$$

pour tout $R \ltimes R$ -module F de dimension projective finie. Ceci implique que $\mathrm{cot.D}(R \ltimes R) \leq \mathrm{cot.D}(R)$. Réciproquement, considérons un R -module plat F , alors $F \otimes_R (R \ltimes R)$ est un $R \ltimes R$ -module plat. Ainsi, comme $R \ltimes R$ est un R -module libre tel que $R \ltimes R \cong_R R^2$ on a :

$$\mathrm{pd}_R(F \otimes_R R) = \mathrm{pd}_R(F \otimes_R (R \ltimes R)) \leq \mathrm{pd}_{(R \ltimes R)}(F \otimes_R (R \ltimes R)) \leq \mathrm{cot.D}(R \ltimes R).$$

Donc, $\mathrm{cot.D}(R) \leq \mathrm{cot.D}(R \ltimes R)$, comme voulu.

Maintenant, supposons que R est cohérent, et on montre l'égalité $\mathrm{G-gldim}(R \ltimes R) = \mathrm{G-gldim}(R)$.

D'abord supposons que $\mathrm{G-gldim}(R)$ est finie. Alors, pour la raison ci-dessus et d'après Théorème 1.4.19, $\mathrm{FPD}(R \ltimes R) = \mathrm{FPD}(R) = \mathrm{G-gldim}(R)$ est finie. Donc $\mathrm{cot.D}(R \ltimes R)$ est finie. D'autre part, d'après Lemme 7.1.7, $\mathrm{id}_{(R \ltimes R)}(R \ltimes R) = \mathrm{id}_R(R)$ qui est finie (d'après Lemme 8.1.2 et puisque $\mathrm{G-gldim}(R)$ est finie). Alors, d'après Théorème 8.2.8, $\mathrm{G-wdim}(R) = \mathrm{FP-id}_R(R) \leq \mathrm{id}_R(R)$ est finie. Alors, d'après Théorème 7.1.1, $\mathrm{G-gldim}(R \ltimes R)$ est finie. Donc, d'après Théorème 1.4.19, $\mathrm{G-gldim}(R \ltimes R) = \mathrm{FPD}(R \ltimes R) = \mathrm{G-gldim}(R)$.

Similairement, on montre que $\mathrm{G-gldim}(R \ltimes R) = \mathrm{G-gldim}(R)$ dès que $\mathrm{G-gldim}(R \ltimes R)$ est finie, et ceci nous donne le résultat voulu. ■

Comme mentionné dans l'introduction, les anneaux Noethériens de dimension globale de Gorenstein finie sont les mêmes que les anneaux de Iwanaga-Gorenstein ; et dans la classe des anneaux de dimension faible finie la dimension globale et la dimension globale de Gorenstein coïncident. Dans l'exemple suivant, on construit une famille des anneaux cohérents non-Noethériens $\{S_i\}_{i \geq 1}$ tels que $\text{G-gldim}(S_i) = i$ et $\text{wdim}(S_i) = \infty$ pour tout $i \geq 1$.

Exemple 7.1.8

Soit $R_n = R[X_1, X_2, \dots, X_n]$ l'anneau polynômial de n indéterminées dans un anneau héréditaire non-Noethérien R . Soit $S_i = R_{i-1} \ltimes R_{i-1}$ l'extension triviale de R_{i-1} par R_{i-1} pour $i \geq 1$ (tel que $R_0 = R$). Alors, pour tout $i \geq 1$, S_i est un anneau cohérent non-Noethérien avec $\text{G-gldim}(S_i) = i$ et $\text{wdim}(S_i) = \infty$.

Preuve. D'après [40, Théorème 7.3.1], $R_n = R[X_1, X_2, \dots, X_n]$ est cohérent pour tout $n \geq 1$. Et par le théorème de syzygy de Hilbert, $\text{gldim}(R_n) = \text{gldim}(R) + n = 1 + n$. Donc, Proposition 7.1.5 implique que $\text{G-gldim}(S_i) = i$ pour tout $i \geq 1$.

Finalement, $\text{wdim}(S_i) = \infty$ pour tout $i \geq 1$ d'après Proposition 8.1.10 et puisque $\text{gldim}(S_i) = \infty$ d'après Proposition 7.1.5. ■

On termine ce papier par une étude de la dimension globale de cotorsion des anneaux de groupe, et par suite la dimension globale de Gorenstein d'un anneau de groupe particulier sera calculée.

Soit R un anneau et soit G un groupe abélien écrit multiplicativement. Le R -module libre d'éléments de G avec la multiplication induite par G est un anneau, appelé anneau de groupe G dans R et noté RG (voir par exemple [40, Chapitre 8, Section 2]).

Dans [59], on a RG est parfait si et seulement si R est parfait et G est fini. Ici, on pose l'extension suivante.

Théorème 7.1.9

Soit R un anneau et soit G un groupe abélien. Alors,

$$\text{cot.D}(R) \leq \text{cot.D}(RG) \leq \text{cot.D}(R) + \text{pd}_{RG}(R).$$

De plus, si G et $\text{pd}_{RG}(R)$ sont finis, alors $\text{cot.D}(R) = \text{cot.D}(RG)$.

Pour montrer ce résultat, on a besoin du lemme suivant.

Lemme 7.1.10 ([20], page 352)

Soit R un anneau, soit G un groupe abélien, et soit M et N des RG -modules satisfaisant $\text{Ext}_R^p(M, N) = 0$ pour tout $p > 0$. Alors,

$$\text{Ext}_{RG}^n(M, N) \cong \text{Ext}_{RG}^n(R, \text{Hom}_R(M, N))$$

pour tout $n > 0$, où $\text{Hom}_R(M, N)$ est le RG -module défini par $(gf)(x) = g[f(g^{-1}x)]$ pour $x \in M$, $f \in \text{Hom}_R(M, N)$, et $g \in G$.

Preuve de Théorème 7.1.9. D'abord, on montre l'inégalité $\text{cot.D}(R) \leq \text{cot.D}(RG)$.

On suppose que $\text{cot.D}(RG) = n$ est finie. Soit F un R -module plat, alors $F \otimes_R RG$ est un RG -module plat. Comme $RG \cong R^{(G)}$ est un R -module libre, $\text{pd}_R(F) = \text{pd}_R(F^{(G)}) = \text{pd}_R(F \otimes_R RG) \leq \text{pd}_{RG}(F \otimes_R RG) \leq n$. Ceci implique l'inégalité voulue.

Maintenant, on montre l'inégalité $\text{cot.D}(RG) \leq \text{cot.D}(R) + \text{pd}_{RG}(R)$. Pour ceci on suppose que $\text{cot.D}(R) = s$ et $\text{pd}_{RG}(R) = r$ sont finies. Soit F un RG -module plat (alors F est aussi plat étant un R -module), et considérons une suite exacte de RG -modules :

$$0 \rightarrow P_s \rightarrow \cdots \rightarrow P_0 \rightarrow F \rightarrow 0,$$

où $P_0, \dots, P_{s-1}$ sont des RG -modules projectifs, alors ils sont projectifs étant des R -modules, d'où P_s est un R -module projectif (puisque $\text{cot.D}(R) = s$). Ainsi, $\text{Ext}_R^p(P_s, N) = 0$ pour tout $p > 0$ et tout R -module N . Alors, d'après Lemme 7.1.10 ci-dessus et comme $\text{pd}_{RG}(R) = r$,

$$\text{Ext}_{RG}^n(P_s, N) \cong \text{Ext}_{RG}^n(R, \text{Hom}_R(P_s, N)) = 0$$

pour tout $n > r$ et tout RG -module N . Ainsi, $\text{pd}_{RG}(P_s) \leq r$ et donc $\text{pd}_{RG}(F) \leq s+r$. Alors, $\text{cot.D}(RG) \leq s + r$, comme voulu.

Supposons maintenant que G et $\text{pd}_{RG}(R)$ sont finies. D'après [17, Lemme 3.2 (a)],

7.1. RÉSULTATS PRINCIPAUX

R est projectif étant un RG -module, et par les inégalités ci-dessus, $\text{cot.D}(R) = \text{cot.D}(RG)$, comme voulu. ■

Le résultat ci-dessus et le résultat principal (Théorème 7.1.1) sont utilisés pour calculer la dimension globale de Gorenstein d'un anneau de groupe particulier comme suit :

Proposition 7.1.11

Soit R un anneau avec $G\text{-wdim}(R) = 0$. Si G est un groupe fini tel que son ordre est inversible dans R , alors $G\text{-wdim}(RG) = 0$ et $G\text{-gldim}(RG) = G\text{-gldim}(R)$.

Preuve. D'abord, notons que R est cohérent et par suite c'est un IF-anneau (d'après [21, Théorème 6] et [57, Proposition 4.2]). Alors, d'après [25, Théorème 3 page 250], RG est un IF-anneau et donc $G\text{-wdim}(RG) = 0$.

Maintenant, par Théorème 7.1.1, $G\text{-gldim}(R) = \text{cot.D}(R)$ et $G\text{-gldim}(RG) = \text{cot.D}(RG)$. Et d'après [40, Théorème 8.2.7], R est projectif étant un RG -module. Ainsi, d'après Théorème 7.1.9, $\text{cot.D}(RG) = \text{cot.D}(R)$. Ceci implique l'égalité souhaitée $G\text{-gldim}(RG) = G\text{-gldim}(R)$. ■

Dimensions Globales de Gorenstein

D. Bennis, N. Mahdou. (February 2010), *Global Gorenstein Dimensions*.
Proceeding of The American Mathematical Society, Vol. 138 (2), 461-465.

Dans ce chapitre, on étudie les dimensions homologiques de Gorenstein des anneaux commutatifs (les dimensions projective, injective et plate de Gorenstein des anneaux). On généralise et on fait étendre certains résultats connus. Et notre objectif principal sera d'arriver au fait que les dimensions projective et injective de Gorenstein de tout anneau quelconque coïncident.

8.1 La dimension globale de Gorenstein des anneaux

Cette section est consacrée à l'étude des dimensions projective et injective de Gorenstein des anneaux, qui sont canoniquement définies, pour un anneau R , comme suit :

— La *dimension projective de Gorenstein* de R est :

$$\text{GPD}(R) = \sup\{\text{Gpd}_R(M) \mid M \text{ est un } R\text{-module}\}.$$

— La *dimension injective de Gorenstein* de R est :

$$\mathbf{GID}(R) = \sup\{\mathbf{Gid}_R(M) \mid M \text{ est un } R\text{-module}\}.$$

On commence par un résultat principal, qui est une extension du résultat classique [54, Théorème 9.10] : la dimension globale d'un anneau R est précisément la valeur commune des deux quantités égales : $\mathbf{PD}(R) = \sup\{\mathbf{pd}_R(M) \mid M \text{ est un } R\text{-module}\}$ et $\mathbf{ID}(R) = \sup\{\mathbf{id}_R(M) \mid M \text{ est un } R\text{-module}\}$. Le résultat principal suivant est aussi une généralisation de [32, Théorème 12.3.1] (voir Théorème 0.0.13).

Théorème 8.1.1

Pour tout anneau R , $\mathbf{GPD}(R) = \mathbf{GID}(R)$.

Pour montrer ce théorème, on a besoin des résultats suivants :

On a besoin de certaines caractérisations fonctorielles de la dimension projective de Gorenstein des anneaux :

Lemme 8.1.2

Soit R un anneau. Si R est de dimension projective de Gorenstein finie, alors, pour un entier positif n , les conditions suivantes sont équivalentes :

1. $\mathbf{GPD}(R) \leq n$;
2. $\mathbf{Gpd}_R(M) \leq n$ pour tout R -module de type fini M ;
3. $\mathbf{Gpd}_R(R/I) \leq n$ pour tout idéal I de R ;
4. $\mathbf{Ext}_R^i(M, P') = 0$ pour tout $i > n$, tout R -module (de type fini) M , et tout R -module P' de $\mathbf{pd}_R(P')$ finie (i.e., $\mathbf{id}_R(P') \leq n$ pour tout R -module P' avec $\mathbf{pd}_R(P')$ finie) ;
5. $\mathbf{Ext}_R^i(M, P) = 0$ pour tout $i > n$, tout R -module (de type fini) M , et tout R -module projectif P (i.e., $\mathbf{id}_R(P) \leq n$ pour tout R -module projectif P).

Preuve. Toutes les implications non évidentes sont des conséquences immédiates de Théorème 1.4.13, [54, Théorème 9.8], et [54, Lemme 9.11]. ■

Un argument dual à la preuve de Lemme 8.1.2 donne les caractérisations fonctorielle de la dimension injective de Gorenstein des anneaux.

Lemme 8.1.3

Soit R un anneau. Si R est de dimension injective de Gorenstein finie, alors, pour un entier positif n , les conditions suivantes sont équivalentes :

1. $\text{GID}(R) \leq n$;
2. $\text{Ext}_R^i(I', M) = 0$ pour tout $i > n$, tout R -module M , et tout R -module I' de $\text{id}_R(I')$ finie (i.e., $\text{pd}_R(I') \leq n$ pour tout R -module I' avec $\text{id}_R(I')$ finie).
3. $\text{Ext}_R^i(I, M) = 0$ pour tout $i > n$, tout R -module M , et tout R -module injectif I (i.e., $\text{pd}_R(I) \leq n$ pour tout R -module injectif I).

Lemme 8.1.4

Soit R un anneau.

1. Si $\text{GPD}(R) \leq n$, alors $\text{pd}_R(E) \leq n$ pour tout R -module E avec $\text{id}_R(E)$ finie.
2. Si $\text{GID}(R) \leq n$, alors $\text{id}_R(P) \leq n$ pour tout R -module P avec $\text{pd}_R(P)$ finie.

Preuve. Il suffit de montrer la première assertion. La deuxième se montre dualement.

On raisonne par induction sur $\text{id}_R(E)$.

D'abord, supposons que E est un R -module injectif. On a $\text{Gpd}(E) \leq n$ (puisque $\text{GPD}(R) \leq n$). Le cas où $\text{Gpd}(E) = 0$ est facile. Alors, on se permet de supposer que $0 < \text{Gpd}(E) \leq n$. Ainsi, d'après Théorème 1.4.6, il existe une suite exacte courte

$$(F_1) \quad 0 \longrightarrow P \longrightarrow G \longrightarrow E \longrightarrow 0$$

où G est projectif de Gorenstein et $\text{pd}_R(P) \leq n - 1$.

Appliquons le foncteur $\text{Hom}_R(G_0, -)$ to (F_1) , où G_0 est un R -module projectif de Gorenstein, on a la suite exacte longue :

$$\cdots \rightarrow \text{Ext}(G_0, P) \rightarrow \text{Ext}(G_0, G) \rightarrow \text{Ext}(G_0, E) \rightarrow \cdots$$

8.1. LA DIMENSION GLOBALE DE GORENSTEIN DES ANNEAUX

Comme $\text{Ext}(G_0, E) = 0$ (puisque E est injectif), et $\text{Ext}(G_0, P) = 0$ (d'après Théorème 1.4.13 et puisque P est projectif), on a :

$$(\star) \quad \text{Ext}(G_0, G) = 0.$$

D'autre part, comme G est projectif de Gorenstein, il existe (par Définition 0.0.1) une suite exacte courte

$$(F_2) \quad 0 \longrightarrow G \longrightarrow Q \longrightarrow G' \longrightarrow 0$$

où Q est projectif et G' est projectif de Gorenstein.

D'après l'égalité $(\star)$, $\text{Ext}(G', G) = 0$, donc la suite (F_2) est scindée. Alors, G est projectif étant un facteur direct du module projectif Q .

Finalement, l'inégalité standard [19, §8, N°1, Corollaire 2 (b)] appliquée à (F_1) nous donne le résultat voulu $\text{pd}_R(E) = \text{pd}_R(P) + 1 \leq n$.

Maintenant, supposons que $\text{id}_R(E) = m > 0$.

Choisissons une suite exacte courte :

$$0 \longrightarrow E \longrightarrow I \longrightarrow L \longrightarrow 0$$

où I est un R -module injectif, et $\text{id}(L) = m - 1$.

Par induction, $\text{pd}(I) \leq n$ et $\text{pd}(L) \leq n$. Alors, et aussi d'après [19, §8, N°1, Corollaire 2 (c)], on a $\text{pd}(E) \leq \sup\{\text{pd}(I), \text{pd}(L) - 1\} \leq n$. Ainsi, la preuve est complétée.

■

Lemme 8.1.5

Pour toute suite exacte courte de modules $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$, on a l'inégalité :

$$\text{Gid}(C) \leq \sup\{\text{Gid}(B), \text{Gid}(A) - 1\}$$

Preuve. En utilisant la version duale du Lemme de Horseshoe (voir la remarque en dessous de [54, Lemme 6.20]), la preuve est essentiellement duale à celle de [22, Corollaire 1.2.9 (a)]. ■

De même, on a besoin de la notion de modules projectif et injectif de Gorenstein forts (voir Chapitre 2). Comme mentionné, dans Chapitre 2, les modules projectif et injectif de Gorenstein forts ont de simples caractérisations (Proposition 2.1.9 et Remarque 2.1.10). La suite est une généralisation de ces caractérisations :

Proposition 8.1.6

1. Un module M est projectif de Gorenstein fort si et seulement s'il existe une suite exacte courte $0 \rightarrow M \rightarrow P \rightarrow M \rightarrow 0$ où P est un module projectif, et $\text{Ext}^i(M, Q) = 0$ pour un certain entier $i > 0$ et pour tout module Q de dimension projective finie (ou pour tout module projectif Q).
2. Un module M est injectif de Gorenstein fort si et seulement s'il existe une suite exacte courte $0 \rightarrow M \rightarrow E \rightarrow M \rightarrow 0$ où E est un module injectif, et $\text{Ext}^i(I, M) = 0$ pour un certain entier $i > 0$ et pour tout module I de dimension injective finie (ou pour tout module injectif I).

Preuve. On montre le cas projectif, car le cas injectif est analogue.

Notons que si on a une suite exacte courte $0 \rightarrow M \rightarrow P \rightarrow M \rightarrow 0$ où P est un module projectif, alors, pour tout module L et tout $i > 0$, on a la suite exacte longue :

$$0 = \text{Ext}^i(P, L) \rightarrow \text{Ext}^i(M, L) \rightarrow \text{Ext}^{i+1}(M, L) \rightarrow \text{Ext}^{i+1}(P, L) = 0$$

Par suite on a $\text{Ext}^i(M, L) \cong \text{Ext}^{i+1}(M, L)$, pour tout entier $i > 0$ et tout R -module L .

Par conséquence, l'équivalence voulue est obtenue directement d'après la première caractérisation des modules projectifs de Gorenstein forts Proposition 2.1.9. ■

Preuve du Théorème 8.1.1. Pour montrer ce théorème, il suffit, d'après Lemmes 8.1.2 et 8.1.3, en utilisant Lemme 8.1.4, de montrer l'équivalence suivante :

$$\text{GPD}(R) < \infty \iff \text{GID}(R) < \infty.$$

On montre l'implication $\text{GPD}(R) < \infty \Rightarrow \text{GID}(R) < \infty$, et la réciproque est montrée dualement.

8.1. LA DIMENSION GLOBALE DE GORENSTEIN DES ANNEAUX

Alors, soit $\text{GPD}(R) \leq n$ (pour un certain entier positif n).

D'abord, on montre que pour tout R -module projectif de Gorenstein fort L , $\text{Gid}(L) \leq n$.

D'après Proposition 8.1.6, il existe une suite exacte courte $0 \rightarrow L \rightarrow P \rightarrow L \rightarrow 0$ où P est projectif.

D'après la version duale de Lemme de Horseshoe (voir la remarque en dessous de [54, Lemme 6.20]), avec une résolution injective de L , on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \rightarrow & L & \rightarrow & P & \rightarrow & L \rightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \rightarrow & I_0 & \rightarrow & I_0 \oplus I_0 & \rightarrow & I_0 \rightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \rightarrow & I_n & \rightarrow & E_n & \rightarrow & I_n \rightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 0 & & 0 & & 0
 \end{array}$$

où I_i est injectif pour $i = 0, \dots, n-1$.

On montre que I_n est injectif de Gorenstein fort, et donc $\text{Gid}(L) \leq n$.

Comme P est projectif, $\text{id}(P) \leq n$ (d'après Lemme 8.1.2), alors E_n est injectif.

D'autre part, d'après Lemme 8.1.4, $\text{pd}(E) \leq n$ pour tout R -module injectif E . Alors, $\text{Ext}^i(E, I_n) = 0$ pour tout $i \geq n+1$. Donc, d'après Proposition 8.1.6 (2), I_n est injectif de Gorenstein fort.

Ceci implique, d'après Proposition 1.4.11, que $\text{Gid}(Q) \leq n$ pour tout R -module projectif de Gorenstein Q , puisque tout module projectif de Gorenstein est un facteur direct d'un module projectif de Gorenstein fort (Par Théorème 2.1.7).

Maintenant, considérons un R -module M . On suppose que $0 < \text{Gpd}(M) \leq n$.

Alors, il existe une suite exacte courte

$$0 \rightarrow K \rightarrow N \rightarrow M \rightarrow 0$$

telle que N est projectif de Gorenstein et $\text{Gpd}(K) \leq n - 1$ (Proposition 1.4.10).

Alors, par induction, $\text{Gid}(K) \leq n$ et $\text{Gid}(N) \leq n$. Finalement, d'après Lemme 8.1.5, $\text{Gid}(M) \leq n$. Ainsi, la preuve est complète . ■

Désormais, on note par $\mathbf{G-gldim}(\mathbf{R})$ la valeur commune de $\text{GPD}(R)$ et $\text{GID}(R)$, et on l'appelle *dimension globale de Gorenstein* de R .

Remarques 8.1.7

D'après Lemme 8.1.2, on déduit que si, pour un anneau R , $\mathbf{G-gldim}(R)$ est finie, alors $\mathbf{G-gldim}(R)$ est déterminée par les formules :

$$\begin{aligned} \mathbf{G-gldim}(R) &= \sup\{\text{Gpd}_R(R/I) \mid I \text{ est un idéal de } R\} \\ &= \sup\{\text{Gpd}_R(M) \mid M ; \text{ est un } R\text{-module de type fini}\}. \end{aligned}$$

Ceci est une généralisation de [32, Corollaire 12.3.2].

Les dimensions projective et injective de Gorenstein des modules sont des raffinements des dimensions projective et injective classiques, respectivement (Proposition 1.4.16). Maintenant, il est naturel d'étudier combien la dimension globale classique d'un anneau diffère de sa dimension globale de Gorenstein.

Proposition 8.1.8

Pour tout anneau R , $\mathbf{G-gldim}(R) \leq \text{gldim}(R)$.

L'égalité est vérifiée si $\text{wdim}(R) < \infty$.

Pour montrer cette proposition, on a besoin du lemme suivant, qui généralise le Corollaire 2.1.11 :

Lemme 8.1.9

Un module projectif de Gorenstein fort est projectif si et seulement s'il a une dimension plate finie.

8.1. LA DIMENSION GLOBALE DE GORENSTEIN DES ANNEAUX

En conséquent, si R est un anneau de dimension globale finie, alors la classe de tous les R -modules projectifs et celle de tous les R -modules projectifs de Gorenstein sont la même classe.

Preuve. Utiliser le Corollaire 2.1.11 et [17, Théorème 2.5]. ■

Preuve de Proposition 8.1.8. L'inégalité est déjà vérifiée puisque tout module projectif est projectif de Gorenstein, et l'égalité est une conséquence de Lemme 8.1.9. ■

Maintenant, on étudie le comportement des modules dans les anneaux de dimension globale de Gorenstein finie.

Le résultat suivant est une généralisation du résultat de Iwanaga (voir [32, Proposition 9.1.10]). Il implique, pour un anneau de dimension globale de Gorenstein finie, la classe de tous les modules de dimension projective finie, la classe de tous les modules de dimension injective finie, et la classe de tous les modules de dimension plate finie sont toutes la même classe. On note par Ω cette classe.

Proposition 8.1.10

Si R est un anneau avec $\text{G-gldim}(R) \leq n$ pour un certain entier positif n , alors les conditions suivantes sont équivalentes pour un R -module M :

1. $\text{pd}_R(M) < \infty$;
2. $\text{pd}_R(M) \leq n$;
3. $\text{id}_R(M) < \infty$;
4. $\text{id}_R(M) \leq n$;
5. $\text{fd}_R(M) < \infty$;
6. $\text{fd}_R(M) \leq n$.

Preuve. D'après les Lemmes 8.1.2, 8.1.3, et 8.1.4, seule l'implication (5) $\Rightarrow$ (1) est à montrer. Alors, cette implication se montre immédiatement en utilisant le fait que

si $\text{FPD}(R)$ est finie, alors tout R -module plat est de dimension projective finie [46, Proposition 6]. ■

La proposition suivante est une extension de [32, Proposition 11.5.7].

Proposition 8.1.11

Soit R un anneau avec $\text{G-gldim}(R) < \infty$, et soit M un R -module. Alors, pour un entier positif m , les conditions suivantes sont équivalentes :

1. $\text{Gpd}_R(M) \leq m$;
2. $\text{Ext}_R^{m+1}(M, X) = 0$ pour tout $X \in \Omega$;
3. $\text{Ext}_R^i(M, X) = 0$ pour tout $i > m$ et tout $X \in \Omega$.

Preuve. Facile d'après Lemme 8.1.2. ■

Pour les modules projectifs de Gorenstein forts, on a :

Proposition 8.1.12

Soit R un anneau. Si $\text{G-gldim}(R) < \infty$, alors un R -module M est projectif de Gorenstein fort si et seulement s'il existe une suite exacte courte $0 \rightarrow M \rightarrow P \rightarrow M \rightarrow 0$ où P est un R -module projectif.

Preuve. Ceci est obtenu immédiatement d'après Proposition 8.1.10 et Proposition 2.1.9. ■

Remarque 8.1.13

Chacune des deux Propositions 8.1.12 et 8.1.11 a une version injective de Gorenstein.

8.2 La dimension faible de Gorenstein des anneaux

Dans cette section, on étudie la dimension plate de Gorenstein des anneaux commutatifs, qui est définie canoniquement, pour un anneau R , comme suite :

La dimension plate de Gorenstein de R est :

$$\mathbf{GFD}(R) = \sup\{\mathbf{Gfd}_R(M) \mid M \text{ est un } R\text{-module}\}.$$

Pour la raison ci-dessous (Théorème 8.2.1) et en l'accordant à la terminologie classique des dimensions homologiques des anneaux, La dimension plate de Gorenstein d'un anneau R sera appelée *dimension faible de Gorenstein* de R , notée $\mathbf{G-wdim}(R)$.

On commence par la relation entre la dimension faible de Gorenstein et la dimension globale de Gorenstein des anneaux.

Théorème 8.2.1

Pour un anneau R , $\mathbf{G-wdim}(R) \leq \mathbf{G-gldim}(R)$.

Preuve. Conséquence immédiate du lemme suivant. ■

Lemme 8.2.2

Si R est un anneau avec $\mathbf{G-gldim}(R) < \infty$, alors tout R -module projectif de Gorenstein est plat de Gorenstein.

Preuve. Soit $\mathbf{G-gldim}(R) \leq n$ pour un certain entier positif n . D'après la preuve de [42, Proposition 3.4], il suffit de montrer, pour tout R -module injectif I , que le module caractère de I (i.e., Le R -module $I^+ = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(I, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$) est de dimension projective finie.

En effet, pour un R -module injectif I , $\text{fd}_R(I) < \infty$ (d'après Proposition 8.1.10). Alors, $\text{id}_R(I^+) < \infty$ (d'après [54, Théorème 3.52]). Donc, d'après Proposition 8.1.10, $\text{pd}_R(I^+) < \infty$. ■

Notons que ce résultat donne une nouvelle condition pour qu'un module projectif de Gorenstein soit plat de Gorenstein (voir [42, Proposition 3.4] et Proposition 0.0.9).

Remarque 8.2.3

D'après Théorème 0.0.13, on a $\mathbf{G-wdim}(R) = \mathbf{G-gldim}(R)$ pour un anneau Noethérien R quelconque. C'est une extension de l'inégalité déjà connue $\text{wdim}(R) = \text{gldim}(R)$ dès que R est un anneau Noethérien.

Le résultat suivant montre que la dimension faible de Gorenstein est un raffinement de la dimension faible d'un anneau arbitraire.

Proposition 8.2.4

Pour un anneau quelconque R , $G\text{-wdim}(R) \leq \text{wdim}(R)$.

L'égalité est vérifiée une fois on a $\text{wdim}(R) < \infty$.

Preuve. L'inégalité est déjà vérifiée puisque tout module plat est plat de Gorenstein, et l'égalité est une conséquence immédiate de Corollaire 2.2.8. ■

Similairement à Proposition 8.1.6, on donne une généralisation de Proposition 2.2.6.

Proposition 8.2.5

Un module M est plat de Gorenstein fort si et seulement s'il existe une suite exacte courte $0 \rightarrow M \rightarrow F \rightarrow M \rightarrow 0$ où F est un module plat, et $\text{Tor}_i(M, I) = 0$ pour un certain entier $i > 0$ et pour tout module I de dimension injective finie (ou pour tout module injectif I).

Similairement à Proposition 8.1.12, on donne une caractérisation des modules plats de Gorenstein forts dans les anneaux de dimension faible de Gorenstein finie.

Proposition 8.2.6

Soit R un anneau. Si $G\text{-wdim}(R) < \infty$, alors un R -module M est plat de Gorenstein fort si et seulement s'il existe une suite exacte courte $0 \rightarrow M \rightarrow F \rightarrow M \rightarrow 0$ où F est un R -module plat.

Preuve. Le résultat est une conséquence immédiate de Proposition 8.2.5 et du lemme suivant. ■

Lemme 8.2.7

Soit R un anneau. Si $G\text{-wdim}(R) = n < \infty$ pour un certain entier positif n , alors $\text{fd}_R(I) \leq n$ pour tout R -module injectif I (ou tout R -module I avec $\text{id}_R(I)$ finie).

Preuve. Supposons que $\text{G-wdim}(R) = n < \infty$. Alors, pour tout R -module M , $\text{Tor}_i^R(M, I) = 0$ pour tout $i > n$ et tout R -module injectif I (ou pour tout R -module I avec $\text{id}_R(I)$ finie). Ceci implique le résultat voulu. ■

Maintenant, on donne des caractérisations fonctorielles de la dimension faible de Gorenstein des anneaux cohérents, étroitement liée à la notion d'anneaux n -FC, pour caractériser ensuite la dimension FP-injective des modules (voir Définition 0.0.5). En fait, en utilisant l'approche de la dimension faible (plate) de Gorenstein, cette caractérisation donne et étend la liste des propriétés caractérisant les anneaux n -FC [21, Théorème 7].

Théorème 8.2.8

Si R est un anneau cohérent, alors, pour un entier positif n , les conditions suivantes sont équivalentes :

1. $\text{G-wdim}(R) \leq n$;
2. $\text{Gfd}_R(G) \leq n$ pour tout R -module injectif de Gorenstein G ;
3. $\text{Gfd}_R(M) \leq n$ pour tout R -module de présentation finie M ;
4. $\text{Gfd}_R(R/I) \leq n$ pour tout idéal de type finie I de R ;
5. $\text{Tor}_i^R(M, E) = 0$ pour tout $i > n$, tout R -module (de présentation finie) M , et tout R -module FP-injectif E (i.e., $\text{fd}(\mathbf{E}) \leq \mathbf{n}$ **pour tout R -module FP-injectif $\mathbf{E}$**) ;
6. $\text{Tor}_i^R(M, E') = 0$ pour tout $i > n$, tout R -module (de présentation finie) M , et tout R -module E' avec $\text{FP-id}_R(E')$ finie (i.e., $\text{fd}(\mathbf{E}') \leq \mathbf{n}$ **pour tout R -module $\mathbf{E}'$ avec $\text{FP-id}_R(\mathbf{E}')$ finie**) ;
7. $\text{Tor}_i^R(M, I) = 0$ pour tout $i > n$, tout R -module M (de présentation finie), et tout R -module injectif I (i.e., $\text{fd}(\mathbf{I}) \leq \mathbf{n}$ **pour tout R -module injectif $\mathbf{I}$**) ;
8. $\text{Tor}_i^R(M, I') = 0$ pour tout $i > n$, tout R -module (de présentation finie) M , et tout R -module I' avec $\text{id}_R(I')$ finie (i.e., $\text{fd}(\mathbf{I}') \leq \mathbf{n}$ **pour tout R -module**

I' avec $\text{id}_R(I')$ finie);

9. $\text{Ext}_R^i(M, F') = 0$ pour tout $i > n$, et tout R -module de présentation finie M , et tout R -module F' avec $\text{fd}_R(F')$ finie (i.e., **$\text{FP-id}_R(F') \leq n$ pour tout R -module F' avec $\text{fd}_R(F')$ finie**);

10. $\text{Ext}_R^i(M, F) = 0$ pour tout $i > n$, tout R -module de présentation finie M , et tout R -module plat F (i.e., **$\text{FP-id}_R(F) \leq n$ pour tout R -module plat F**);

11. $\text{Ext}_R^i(M, R) = 0$ pour tout $i > n$, tout R -module de présentation finie M (i.e., **R est n -FC**).

En conséquence, la dimension faible de Gorenstein de R est aussi déterminée par les formules :

$$\begin{aligned} \text{G-wdim}(R) &= \sup\{\text{Gfd}_R(R/I) \mid I \text{ est un idéal de } R \text{ de type fini}\} \\ &= \sup\{\text{Gfd}_R(M) \mid M \text{ est un } R\text{-module de présentation finie}\} \\ &= \sup\{\text{Gpd}_R(R/I) \mid I \text{ est un idéal de } R \text{ de type fini}\} \\ &= \sup\{\text{Gpd}_R(M) \mid M \text{ est un } R\text{-module de type fini}\}. \end{aligned}$$

Pour montrer ce théorème, on a besoin de caractériser la dimension FP-injective des modules dans les anneaux cohérents.

Lemme 8.2.9

Soit R un anneau cohérent et soit M un R -module. Alors, pour un entier positif n , les conditions suivantes sont équivalentes :

1. $\text{FP-id}_R(M) \leq n$;
2. $\text{Ext}_R^i(P, M) = 0$ pour tout $i > n$ et tout R -module de présentation finie P ;
3. $\text{fd}_R(M^+) \leq n$, où $M^+ = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ est le module caractère de M .

Preuve. D'après Définitions 0.0.5 (1), l'implication (2) $\Rightarrow$ (1) est évidente.

On montre (1) $\Rightarrow$ (2). Comme R est cohérent, pour tout R -module de présentation

finie P , on a la suite exacte courte de R -modules :

$$0 \rightarrow K \rightarrow L \rightarrow P \rightarrow 0,$$

où L est libre de type fini et K est de présentation finie. Ainsi, en considérant la suite exacte longue :

$$0 = \text{Ext}^i(L, M) \rightarrow \text{Ext}^i(K, M) \rightarrow \text{Ext}^{i+1}(P, M) \rightarrow \text{Ext}^{i+1}(L, M) = 0$$

et par induction on obtient le résultat voulu.

L'équivalence (2) $\Leftrightarrow$ (3) peut être déduite simplement de l'isomorphisme [40, Théorème 2.6.6] :

$$(\text{Ext}_R^i(P, M))^+ \cong \text{Tor}_i^R(M^+, P)$$

pour tout R -module de présentation finie P . ■

Preuve de Théorème 8.2.8. D'abord, notons que dans la dernière inégalité on a aussi la dimension projective de Gorenstein des modules, ceci est d'après Proposition 0.0.9.

Les implications (1) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (4) sont évidentes.

(4) $\Rightarrow$ (7). Conséquence de Théorème 1.4.29 et [40, Théorème 1.3.8].

(7) $\Rightarrow$ (8). Facile, en utilisant l'induction sur $\text{id}_R(I')$.

(8) $\Rightarrow$ (9). Soit M un R -module de présentation finie. D'après [40, Théorème 2.6.6], on a l'isomorphisme suivant :

$$(\text{Ext}_R^i(M, F))^+ \cong \text{Tor}_i^R(M, F^+)$$

pour tout $i \geq 0$, et tout R -module F .

Si un tel R -module F est plat, alors F^+ est un R -module injectif (d'après [40, Théorème 1.2.1]). Alors, par hypothèses, $\text{Tor}_i^R(M, F^+) = 0$, d'où $(\text{Ext}_R^i(M, F))^+ = 0$. Donc, $\text{Ext}_R^i(M, F) = 0$ (d'après [54, Lemme 3.51]).

(9) $\Rightarrow$ (10) $\Rightarrow$ (11) Claire.

(11) $\Rightarrow$ (1). C'est Théorème 0.0.6.

(1) $\Leftrightarrow$ (2). L'implication directe est immédiate. Pour la réciproque, il suffit, d'après les implications ci-dessus de montrer l'implication (2) $\Rightarrow$ (7). Soit donc I un R -module injectif. On montre $\text{fd}_R(I) \leq n$. Comme I est injectif, I est injectif de Gorenstein. Alors, $\text{Gfd}_R(I) \leq n$ (par (2)). Le cas $\text{Gfd}_R(I) = 0$ (i.e., I est plat de Gorenstein) est évident. Alors, on suppose que $0 < \text{Gfd}_R(I) \leq n$. Ainsi, d'après [42, Théorème 3.23], il existe une suite exacte courte $0 \rightarrow K \rightarrow G \rightarrow I \rightarrow 0$ où G est plat de Gorenstein et $\text{fd}_R(K) \leq n - 1$. D'après Définition 0.0.3, il existe une suite exacte courte $0 \rightarrow G \rightarrow F \rightarrow G' \rightarrow 0$ où F est plat et G' est plat de Gorenstein. Considérons le diagramme pushout suivant :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & 0 & & 0 & \\
 & & & \downarrow & & \downarrow & \\
 0 & \rightarrow & K & \rightarrow & G & \rightarrow & I \rightarrow 0 \\
 & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \rightarrow & K & \rightarrow & F & \rightarrow & D \rightarrow 0 \\
 & & & \downarrow & & \downarrow & \\
 & & & G' & = & G' & \\
 & & & \downarrow & & \downarrow & \\
 & & & 0 & & 0 &
 \end{array}$$

D'après la suite horizontale du milieu $\text{fd}_R(D) \leq n$. D'autre part, comme I est injectif, la suite verticale à droite est scindée. Donc, $\text{fd}_R(I) \leq n$.

(5) $\Leftrightarrow$ (7). L'implication directe est facile puisque tout module injectif est FP-injectif.

Pour la réciproque, il suffit, d'après les implications ci-dessus de montrer l'implication (10) $\Rightarrow$ (5). Cette dernière est déduite simplement d'après Lemme 8.2.9 et de l'isomorphisme suivant (Théorème 1.2.17) (1) : $(\text{Tor}_R^i(M, E))^+ \cong \text{Ext}_i^R(M, E^+)$.

Finalement, similairement à l'équivalence (5) $\Leftrightarrow$ (7) ci-dessus on montre l'équivalence (6) $\Leftrightarrow$ (8). ■

Comme, dans les anneaux Noethériens la classe de tous les modules FP-injectifs

et la classe de tous les modules injectifs sont la même classe, et comme les anneaux n -Gorenstein sont n -FC, le résultat suivant est une extension de [32, Proposition 9.1.10] aux anneaux n -FC.

Corollaire 8.2.10

Soit R un anneau n -FC et soit M un R -module. Alors, pour un entier positif n , les conditions suivantes sont équivalentes :

1. $\text{FP-id}_R(M) < \infty$;
2. $\text{FP-id}_R(M) \leq n$;
3. $\text{fd}_R(M) < \infty$;
4. $\text{fd}_R(M) \leq n$.

Preuve. Conséquence immédiate de Théorème 8.2.8. ■

Bibliographie

- [1] F. W. Anderson and K. R. Fuller, *Rings and Categories of Modules*, Graduate Texts Mathematics, vol. 13, 2nd edition, Springer-Verlag, New York, 1992.
- [2] M. Auslander, *Anneaux de Gorenstein et torsion en algèbre commutative*, Secrétariat mathématique, Paris, 1967, Séminaire d'algèbre commutative dirigé par Pierre Samuel, 1966/67. Texte rédigé, d'après des exposés de Maurice Auslander, par Marquerite Mangeney, Christian Peskine et Lucien Szpiro, Ecole Normale Supérieure de Jeunes Filles.
- [3] M. Auslander and M. Bridger, *Stable module theory*, Memoirs. Amer. Math. Soc., 94, American Mathematical Society, Providence, R.I., 1969.
- [4] M. Auslander and D. Buchbaum, *Homological dimension in Noetherian rings*, Proc. Nat. Acad. U.S.A. **42** (1956), 36-38.
- [5] L. L. Avramov and A. Martsinkovsky, *Absolute, relative, and Tate cohomology of modules of finite Gorenstein dimension*, Proc. London Math. Soc. **85** (2002), 393-440.
- [6] H. Bass, *Finitistic dimension and a homological generalization of semi-primary rings*, Trans. Amer. Math. Soc. **95** (1960), 466-488.
- [7] H. Bass, *On the ubiquity of Gorenstein rings*, Math. Z. **82** (1963), 8-28.
- [8] D. Bennis, *Rings over which the class of Gorenstein flat modules is closed under extensions*. Communications in Algebra 37 (3) (2009), 855-868.

- [9] D. Bennis and N. Mahdou, *Strongly Gorenstein projective, injective, and flat modules*, J. Pure Appl. Algebra **210** (2007), 437-445.
- [10] N. Mahdou and M. Tamekkante (2018), *Strongly n -Gorenstein projective, injective and flat modules*. Acta Mathematica Universitatis Comeniana, vol. 87, no. 1, 3553.
- [11] D. Bennis and N. Mahdou, *Global Gorenstein Dimensions*. Proceeding of The American Mathematical Society, Vol. 138 (2) (February 2010), 461-465.
- [12] D. Bennis and N. Mahdou, *Global Gorenstein dimensions of polynomial rings and of direct products of rings*. Houston Journal of Mathematics, Vol. 25 (4), (2009), 1019-1028.
- [13] D. Bennis and N. Mahdou, *Global Gorenstein Dimensions and Cotorsion Dimension of Rings*. Communications in Algebra 37 (5) (2009) 1709-1718.
- [14] D. Bennis, N. Mahdou, and K. Ouarghi, *Rings over which all modules are strongly Gorenstein projective*. Rocky Mountain Journal of Mathematics, Vol. 40 (3) (2010) 749- 759.
- [15] D. Bennis and N. Mahdou, *A generalization of strongly projective, injective and flat modules*, Journal of Algebra and its Applications, Vol. 8 (2) (2009) 219-242.
- [16] N. Mahdou and K. Ouarghi, *Gorenstein dimensions in trivial ring extensions*, Commutative Algebra and Applications, Walter De Gruyter, (2009) 293-302.
- [17] D. J. Benson and K. R. Goodearl, *Periodic flat modules, and flat modules for finite groups*, Pacific J. Math. **196** (2000), 45-66.
- [18] A. J. Berrick and M. E. Keating, *An Introduction to Rings and Modules*, Cambridge University Press, 2000.
- [19] N. Bourbaki, *Algèbre Homologique*, Chapitre 10, Masson, Paris, 1980.
- [20] H. Cartan and S. Eilenberg, *Homological Algebra*, Princeton University Press, 1956.

- [21] J. Chen and N. Ding, *Coherent rings with finite self-FP-injective dimension*, Comm. Algebra **24** (1996), 2963-2980.
- [22] L. W. Christensen, *Gorenstein Dimensions*, Lecture Notes in Math., Springer-Verlag, Berlin, 2000.
- [23] L. W. Christensen, H. -B. Foxby, and A. Frankild, *Restricted homological dimensions and Cohen-Macaulayness*, J. Algebra **251** (2002), 479-502.
- [24] L. W. Christensen, A. Frankild, and H. Holm, *On Gorenstein projective, injective and flat dimensions - a functorial description with applications*, J. Algebra **302** (2006), 231-279.
- [25] R. R. Colby, *On Rings wich have flat injective modules*, J. Algebra **35** (1975), 239-252.
- [26] I. G. Connell, *On the group rings*, Canad. J. Math. **15** (1963), 650-685.
- [27] N. Ding and L. Mao, *The cotorsion dimension of modules and rings*, Abelian groups, rings, modules, and homological algebra, Lect. Notes Pure Appl. Math., **249** (2005), 217-233.
- [28] D. E. Dobbs, S. E. Kabbaj, and N. Mahdou, *n-Coherent rings and modules*, Lecture Notes in Pure and Appl. Math., vol. 185, Marcel Dekker, Inc., New York, (1997), 269-281.
- [29] Sh. Endo, *On flat modules over commutative rings*, J. Math. Soc. Japan **14** (1962), 284-291.
- [30] E. E. Enochs and O. M. G. Jenda, *On Gorenstein injective modules*, Comm. Algebra **21** (1993), 3489-3501.
- [31] E. E. Enochs and O. M. G. Jenda, *Gorenstein injective and projective modules*, Math. Z. **220** (1995), 611-633.
- [32] E. E. Enochs and O. M. G. Jenda, *Relative Homological Algebra*, de Gruyter Expositions in Mathematics, Walter de Gruyter & Co., Berlin, 2000.
- [33] E. E. Enochs, O. M. G. Jenda, and J. A. López-Ramos, *Dualizing modules and n-perfect rings*, Proc. Edinb. Math. Soc. **48** (2005), 75-90.

- [34] E. E. Enochs, O. M. G. Jenda, and B. Torrecillas, *Gorenstein flat modules*, Nanjing Daxue Xuebao Shuxue Bannian Kan **10** (1993), 1-9.
- [35] E. E. Enochs, O. M. G. Jenda, and J. Xu, *Foxby duality and Gorenstein injective and projective modules*, Trans. Amer. Math. Soc. **348** (1996), 3223-3234.
- [36] E. E. Enochs and J. Xu, *Gorenstein Flat Covers of Modules over Gorenstein Rings*, J. Algebra **181** (1996), 288-313.
- [37] A. Facchini, D. Herbera and I. Sakhaev, *Finitely generated modules and a characterization of semiperfect rings*, Comm. Algebra **31** (2003), 4195-4215.
- [38] R. M. Fossum, P. A. Griffith, and I. Reiten, *Trivial extensions of abelian categories*, Lecture Notes in Math., Springer-Verlag, Berlin, 1975.
- [39] H. -B. Foxby, *Gorenstein dimension over Cohen-Macaulay rings*, Proceedings of international conference on commutative algebra (W. Bruns, ed.), Universität Onsabrück, 1994.
- [40] S. Glaz, *Commutative Coherent Rings*, Lecture Notes in Math., Springer-Verlag, Berlin, 1989.
- [41] L. Gruson and M. Raynaud, *Critères de platitude et de projectivité. Techniques de platification d'un module*, Inv. Math. **13** (1971), 1-89.
- [42] H. Holm, *Gorenstein homological dimensions*, J. Pure Appl. Algebra **189** (2004), 167-193.
- [43] H. Holm, *Gorenstein Homological Algebra*, Ph.D. thesis, University of Copenhagen, Denmark, 2004.
- [44] Y. Iwanaga, *On rings with finite self-injective dimension*, Comm. Algebra **7** (1979), 393-414.
- [45] C. Jain, *Flat and FP-injectivity*, Proc. AMS. **41** (1973), 437-442.
- [46] C. U. Jensen, *On the vanishing of $\varprojlim^{(i)}$* , J. Algebra **15** (1970), 151-166.
- [47] S. E. Kabbaj and N. Mahdou, *Trivial extensions defined by coherent-like conditions*, Comm. Algebra **32** (2004), 3937-3953.

- [48] I. Kaplansky, *Commutative Rings*, rev. ed., Univ. Chicago Press, Chicago, 1974.
- [49] J. Lambelk, *Lectures on Rings and Modules*, Blaisdell Publishing Company, Waltham-Toronto-London, 1966.
- [50] N. Mahdou, *On Costa's conjecture*, Comm. Algebra **29** (2001), 2775-2785.
- [51] W. K. Nicholson and M. F. Youssif, *Quasi-Frobenius Rings*, Cambridge University Press, 2003.
- [52] D. S. Passman, *The Algebraic Structure of Group Rings*, Wiley-Interscience, New York, 1977.
- [53] G. Puninski and P. Rothmaler, *When every finitely generated flat module is projective*, J. Algebra **277** (2004), 542-558.
- [54] J. J. Rotman, *An Introduction to Homological Algebra*, Academic Press, New York, 1979.
- [55] Sakhaiev, *On a criterion of projectivity of finitely generated flat modules*, Izv. Vuzov **10** (1991), 68-75.
- [56] J.-P. Serre, *Sur la dimension homologique des anneaux et des modules Noethériens*, Proc. Intern. Symp., Tokyo-Nikko, 1955, 175-189.
- [57] B. Stenström, *Coherent rings and FP-injective modules*, J. London Math. Soc. **2** (1970), 323-329.
- [58] W. V. Vasconcelos, *On finitely generated flat modules*, Trans. Amer. Math. Soc. **138** (1969), 505-512.
- [59] S. M. Woods, *On perfect group rings*, Proc. Amer. Math. Soc. **27** (1971), 49-52.
- [60] J. Xu, *Flat Covers of Modules*, Lecture Notes in Math., Springer-Verlag, Berlin, 1996.
- [61] F. Borceux, *Handbook of categorical algebra*, vol.1, Basic category Theory, Cambridge University Press (1994).

- [62] J. P. Lafon ; *Les Formalismes Fondamentaux de L'Algèbre Commutative*, Hermann (1974).