كلية العلوم و التقنيات فاس
ⵜⴰⴳⴻⵎⴰⵜ ⵏ ⵜⵎⵓⵙⵙⵏⵉⵏ ⴷ ⵜⵉⵏⴰⵔⴰⵜⵉⵏ
Faculté des Sciences et Techniques de Fès

جامعة سيدي محمد بن عبد الله
ⵜⴰⵙⴷⴰⵡⵉⵜ ⵙⵉⴷⵉ ⵎⵓⵃⵎⵎⴰⴷ ⴱⵏ ⵄⴱⴷⵍⵍⴰⵀ
Université Sidi Mohamed Ben Abdellah

Master Mathématique et Application au Calcul Scientifique

(MACS)

MEMOIRE DE FIN D'ETUDES

Pour l'obtention du Diplôme de Master Sciences et Techniques (MST)

Autour de la bi-amalgamation d'anneaux le long des idéaux

♦ ***Réalisé par : ANEBRI Adam***

♦ ***Encadré par : Pr. MAHDOU Najib***

Soutenu le 17 Juin 2019

Devant le jury composé de:

Abdelmajid HILALI	**Faculté des Sciences et Techniques Fès**	**Président**
Chahrazade BAKKARI	**Faculté des Sciences Meknès**	**Examinateur**
Najib MAHDOU	**Faculté des Sciences et Techniques Fès**	**Encadrant**
Lahcen OUKHTITE	**Faculté des Sciences et Techniques Fès**	**Examinateur**
Aziza RAHMOUNI HASSANI	**Faculté des Sciences et Techniques Fès**	**Examinateur**

Année Universitaire 2018 / 2019

RÉSUMÉ

L'objectif principal de ce mémoire est de présenter et traiter des extensions d'anneaux appelées les bi-amalgamées introduites par S. Kabbaj, K. Louartiti et M. Tamekkante en 2014. Il s'agit d'étudier le transfert de certaines propriétés des anneaux classiques ainsi que quelques propriétés homologiques à la structure des bi-amalgamées. Et enfin, nous terminons ce travail par quelques axes de recherches que nous souhaitons aborder et résoudre par la suite.

Mots clés :

Bi-amalgamations, amalgamations, extensions triviales, produits fibrés, anneaux arithmétiques, *pm*-anneaux, pm^+-anneaux, anneaux de caractère fini, anneaux h-locaux, anneaux et modules Nil_*-cohérents, anneaux et modules Nil_*-cohérents spéciaux .

DÉDICACES

A

Allah le tout miséricordieux

Ton amour, Ta miséricorde et Tes grâces à mon endroit m'ont fortifié dans la persévérance et l'ardeur au travail.

A

mes très chers parents

Inépuisable mine de patience, de soutien et d'abnégation. Toutes les expressions ne peuvent vous exprimer ma gratitude et mon amour.
Puisse Dieu vous procurer santé et vie prospère.

A

mes chers frères Khalid et Ali

En témoignage de mon affection fraternelle, de ma profonde tendresse et reconnaissance, je vous souhaite une vie pleine de bonheur et de succès et que Dieu, le tout puissant, vous protège et vous garde.

A

Mme C. Bakkari et Mr N. Mahdou

Je ne peux exprimer à travers ces lignes ma joie et mon honneur d'avoir autres parents comme vous avant qu'ils soient mes professeurs, je vous dédie ce mémoire en réponse à vos orientations précieuses, vos encouragements, votre aide permanente depuis mes études à la Fs Meknès jusqu'à ce jour. Vous trouverez dans ce travail, toute ma gratitude et tout mon respect.

A
Mr H. Abbi

Vous êtes le professeur qui a réussi à m'inspirer, à me donner confiance en moi et en l'avenir mais aussi qui a réussi à me donner l'envie d'apprendre et d'aimer les mathématiques. Merci pour tout ce que vous avez fait.

A
Mr L. Bouskouk

Je n'oublierai jamais le professeur " à l'école primaire " qui m'a appris avant de m'enseigner, je vous dédie ce travail en réponse à vos conseils et votre patience.

A
ma famille

Vous aviez fait preuve d'un amour et d'une affection sincère.

A
touts(es) mes amis(es)

Je ne peux trouver les mots justes et sincères pour vous exprimer mon affection et mes pensées. En témoignage de l'amitié qui nous unit et des souvenirs de tous les moments que nous avons passé ensemble, je vous dédie ce travail et je vous souhaite une vie pleine de réussite.

A
tous les membres de l'équipe de recherche Algèbre Commutative et Aspect Homologique de la faculté des sciences et techniques de Fès

Je remercie vivement tous les membres de cette équipe exceptionnelle de travail. Précisément, ZAHIR Youssef, ElKHALFI Abdelhaq, EL KHALFAOUI Rachida, MOUSSAOUI Sanae et ABOUNAAJA Khaoula.

REMERCIEMENTS

Au terme de ce travail, je voudrais exprimer mes remerciements et ma profonde reconnaissance à tout ceux qui ont contribué de prêt ou de loin à sa réalisation :

Je voudrais, en premier lieu, exprimer ma profonde reconnaissance à mon encadrant, Professeur NAJIB MAHDOU, qui, grâce à ses orientations précieuses, ses encouragements valorisants, sa direction compétente de ce mémoire, son soutien dans les moments d'incertitude et sa disponibilité inconditionnelle, j'ai pu réaliser ce travail et s'initier à la recherche.

Je tiens également à exprimer toute ma gratitude et tout mon sentiment de reconnaissance aux professeurs Abdelmajid HILALI, Chahrazade BAKKARI, Lahcen OUKHTITE et Aziza RAHMOUNI HASSANI pour avoir accepter d'examiner ce travail et de l'enrichir par leurs propositions.

Je voudrais aussi adresser mes chaleureux remerciements au Professeur Ahmed EL HILALI ALAOUI coordonnateur du cycle Master Mathématiques et Applications aux Calculs Scientifiques.

J' adresse mes sincères remerciements et ma grande reconnaissance à tous mes professeurs du cycle Master Mathématiques et Applications aux Calculs Scientifiques.

J' exprime ma gratitude à tous mes collègues du cycle Master Mathématiques et Applications aux Calculs Scientifiques pour leur soutien amical durant ces deux années d'étude.

Table des matières

1 Notions de base **3**

1.1 *Résultats sur les modules* . . . 3

1.1.1 *Modules libres* . . . 3

1.1.2 *Modules projectifs* . . . 4

1.1.3 *Modules plats* . . . 5

1.1.4 *Modules cohérents* . . . 6

1.2 *Résultats sur les anneaux* . . . 9

1.2.1 *Anneaux des fractions* . . . 9

1.2.2 *Anneaux Noethériens* . . . 10

1.2.3 *Domaines de valuation* . . . 10

1.2.4 *Anneaux semi-simples* . . . 11

1.2.5 *Anneaux réguliers au sens de Von Neumann* . . . 12

1.2.6 *Anneaux héréditaires - Domaines de Dedekind* . . . 13

1.2.7 *Anneaux semi-héréditaires - Domaines de Prüfer* . . . 14

1.2.8 *Anneaux cohérents* . . . 14

1.3 *Dimension globale faible* . . . 17

2 La bi-amalgamation d'anneaux **19**

2.1 *La construction de* $A \bowtie^{f,g} (J, J')$ . . . 19

2.2 *Cas particuliers de la bi-amalgamation d'anneaux* . . . 20

2.2.1 *L'amalgamation d'anneaux* $A \bowtie^{f} J$ . . . 20

2.2.2 *L'anneau* $f(A) + J$ . . . 20

2.3 *La bi-amalgamation et le produit fibré* . . . 21

2.4 *Quelques propriétés algébriques de* $A \bowtie^{f,g} (J, J')$ . . . 24

2.5 *La structure des idéaux premiers de la bi-amalgamation* . . . 27

3 Transfert de la propriété arithmétique à la bi-amalgamation **33**

3.1 *Définitions et propriétés* . . . 33

3.2 *Résultats* . . . 34

4 Bi-amalgamations de petite dimension globale faible **41**
4.1 *Introduction* 41
4.2 *Résultats* 42

5 Dimension faible des bi-amalgamations cohérentes **47**
5.1 *Dimension faible de* $A \bowtie^{f,g} (J, J')$ 47

6 Bi-amalgamations pm$^+$, de caractère fini et h-locales **56**
6.1 *Définitions et propriétés* 56
6.2 *Transfert de la propriété pm$^+$-anneau à la bi-amalgamation* 58
6.3 *La propriété pm-anneau* 59
6.4 *Les propriétés de caractère fini et h-local* 60

7 Anneaux et modules Nil$_*$-cohérents et Nil$_*$-cohérents spéciaux **62**
7.1 *La propriété Nil$_*$-cohérence* 62
7.2 *La propriété Nil$_*$-cohérence spéciale* 67
7.3 *Transfert à l'extension triviale* 70
7.4 *Transfert à l'amalgamation* 72

Bibliographie **78**

Introduction :

Le présent travail a pour but de présenter la nouvelle construction d'extension d'anneaux introduite par S. KABBAJ, K. LOUARTITI et M. TAMEKKANTE en 2014 appelée bi-amalgamation d'anneaux le long des idéaux. Ainsi, ce mémoire est divisé en sept chapitres et une conclusion :

Le premier chapitre :

Dans ce chapitre, nous avons présenté les notions de base concernant les modules et les anneaux classiques afin de faciliter le rappel aux lecteurs.

Le deuxième chapitre :

Le second chapitre est consacré à l'article de S. Kabbaj, K. Louartiti et M. Tamekkante **"Bi-amalgamated algebras along ideals"**, dans lequel ils construisent cette classe d'extensions.

Le troisième chapitre :

Ce chapitre concerne l'article de S. Kabbaj, N. Mahdou and M. A. S. Moutui ; " **Bi-amalgamations subject to the arithmetical property** " qui traite les conditions nécessaires et suffisantes pour que la bi-amalgamation soit enchaînée et arithmétique. Ainsi, il enrichit la littérature avec de nouveaux exemples.

Le quatrième chapitre :

Consacré à l'article de M. Tamekkante et E. M. Bouba ; " **Bi-Amalgamation of small weak global dimension** ", qui caractérise les extensions bi-amalgamées de dimension globale faible inférieure ou égale à 1.

Le cinquième chapitre :

Il s'agit de l'article de M. Tamekkante et E. M. Bouba ; " **Note on weak global dimension of coherent bi-amalgamation** " qui traite dans un cas particulier, les conditions nécessaires et suffisantes pour que la bi-amalgamation d'anneaux soit de dimension globale faible finie.

Le sixième chapitre :

Dans ce chapitre, nous abordons un article de M. Tamekkante et E. M. Bouba ; **“ On pm$^+$ and finite character bi-amalgamation ”** dans lequel ils étudient les propriétés pm^+, de caractère fini et h-locale.

Le dernier chapitre :

Sous thème **“ Commutative rings and modules that are Nil$_*$-coherent or special Nil$_*$-coherent”** , article de K. Alaoui Ismaili, D. E. Dobbs and N. Mahdou qui a pour but de définir les notions Nil$_*$-cohérence et Nil$_*$-cohérence spéciale et d'évoquer le transfert de ces propriétés à l'extension triviale et à l'amalgamation d'anneaux.

Perspectives :

Et pour conclure ce travail, nous allons présenter quelques perspectives de ce sujet, que nous souhaitions entamer prochainement.

Chapitre 1

Notions de base

1.1 *Résultats sur les modules*

1.1.1 *Modules libres*

***Définition* 1.1.1**
Un R-module E est dit libre s'il est somme directe de copies de R. Si $Ra_i \cong R$ et $E = \oplus_{i\in I} Ra_i$ où I est un ensemble d'indexation, l'ensemble $\{a_i \mid i \in I\}$ est appelé alors une base de E.
Un module libre est dit de rang n s'il admet une base de cardinal n.

***Théorème* 1.1.1 ([28], Corollaire 3.7)**
Soient R un anneau et E un R-module libre de rang n. Si $\{a_1, \ldots, a_n\}$ engendre E, alors c'est une base de E.

***Rappel* (Suites exactes)**

1) Une suite de R-modules et d'homomorphismes

$$\cdots M_{i-1} \xrightarrow{u_{i-1}} M_i \xrightarrow{u_i} M_{i+1} \xrightarrow{u_{i+1}} \cdots$$

est dite suite exacte en M_i si $Ker(u_i) = Im(u_{i-1})$. Cette suite est dite exacte si elle est exacte en chaque M_i.

2) Une suite exacte courte est une suite exacte de la forme :

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{u} M \xrightarrow{v} M'' \longrightarrow 0;$$

C'est à dire que u est injectif, v est surjectif et $Im(u) = Ker(v)$.

***Définition* 1.1.2**

1) *Une présentation d'un module M (de longueur 1) est une suite exacte :*

$$L_0 \longrightarrow L_1 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

où L_0 et L_1 sont des modules libres. Notamment, tout module admet une présentation.

2) *Un module M est dit de présentation finie s'il existe une suite exacte de R-modules*

$$L_0 \longrightarrow L_1 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

avec L_0 et L_1 sont libres de bases finise.

***Théorème* 1.1.2 ([26], Théorème 5.1.14)**

1) *Tout module de présentation finie est de type fini.*
2) *Un module est de présentation finie si et seulement s'il est isomorphe au quotient d'un module libre de base finie par un sous-module de type fini.*

***Théorème* 1.1.3 ([26], Théorème 5.1.15)**
Soit M un R-module de type fini. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1) *M est de présentation finie ;*
2) *Pour toute suite exacte : $0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow M \longrightarrow 0$, si B est de type fini alors A est de type fini.*

1.1.2 *Modules projectifs*

***Théorème* 1.1.4 ([26], Théorème 5.2.3)**
Soit P un module. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1) *Pour tout diagramme de modules :*

$$\begin{tikzcd} P \arrow[d, "\alpha"] \arrow[dr, "f"] & & \\ B \arrow[r, "g"] & A \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

où la ligne est exacte (i.e. g est surjectif), il existe $\alpha \in Hom(P, B)$ tel que le diagramme est commutatif ; c'est à dire $g \circ \alpha = f$.

2) *Toute suite exacte $0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow P \longrightarrow 0$ est scindée (c'est à dire $B \cong A \oplus P$) ;*
3) *P est un facteur direct d'un module libre ;*
4) *Le foncteur $Hom(P, .)$ est exact (i.e. pour tout suite exacte $A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$, la suite $Hom(P, A) \longrightarrow Hom(P, B) \longrightarrow Hom(P, C) \longrightarrow 0$ est exacte).*

***Définition* 1.1.3**
On dit qu'un module P est projectif s'il vérifie l'une des conditions équivalentes du Théorème précédent.

***Théorème* 1.1.5 ([26], Théorème 5.2.9)**
Soit R un anneau intègre. Alors tout idéal projectif de R est de type fini.

***Définition* 1.1.4**
Soient R un anneau intègre, I un idéal de R et $I^{-1} = (R : I) := \{x \in Frac(R) \mid xI \subseteq R\}$. L'idéal I est dit inversible si $II^{-1} = R$.

***Théorème* 1.1.6 ([26], Théorème 5.2.11)**
Soit I un idéal de R. Alors on a :

1) $II^{-1} \subseteq R$.
2) *Supposons que l'anneau R est intègre. Alors I est projectif si et seulement si I est inversible.*

1.1.3 *Modules plats*

***Définition* 1.1.5**
Un R-module E est dit plat si le foncteur $E \otimes_R .$ est exact ; c'est à dire, pour toute suite exacte de R-modules $0 \longrightarrow M \xrightarrow{u} N$, la suite

$$0 \longrightarrow E \otimes_R M \xrightarrow{1 \otimes u} E \otimes_R N$$

est exacte.

***Proposition* 1.1.1 ([26], Corollaire 6.1.12)**
Soient R un anneau intègre et K son corps des fractions. Alors K est un R-module plat.

***Théorème* 1.1.7 ([26], Théorème 6.1.18)**
Soit P un module. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1) *P est projectif de type fini ;*
2) *P est plat de présentation finie.*

***Définition* 1.1.6**
Soit R un anneau et I un idéal de R. On dit que I est un idéal pur de R si R/I est un R-module plat.

Le théorème suivant donne une caractérisation d'un idéal pur :

***Théorème* 1.1.8 ([17], Théorème 1.2.15)**
Soient R un anneau et I un idéal de R. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

1) *I est un idéal pur de R ;*

2) *$I_M = 0$ ou $I_M = I_R$, pour tout idéal maximal M de R.*

▶ ***Localisation***

Soit R un anneau. À partir d'un R-module M on construit le module des fractions $S^{-1}M$. Soient M un R-module et S une partie multiplicative de R. On définit une relation d'équivalence sur $M \times S$ par :

$$(m, s) \sim (m', s') \Leftrightarrow (ms' - m's)t = 0 \ \textit{ pour un certain } t \in S.$$

On note m/s la classe d'équivalence de (m, s) qu'on appelle fraction. l'ensemble de tous ces fractions est noté $S^{-1}M$, on définit l'addition et la modulation par :

$$(m/s) + (m'/s') = (s'm + sm')/(ss')$$

et

$$(a/t)(m/s) = (am)/(st).$$

où $a/t \in S^{-1}R$. $S^{-1}M$ devient ainsi un $S^{-1}R$-module (et aussi un R-module).
Pour $S = R \setminus P$ où P est un idéal premier de R, on note $S^{-1}M$ par M_P.

***Théorème* 1.1.9 ([26], Théorème 6.2.1)**
Soient S une partie multiplicative de R et M un R-module. Alors :

1) *Si M est un R-module de type fini, alors $S^{-1}M$ est un $S^{-1}R$-module de type fini.*
2) *Si M est un R-module libre, alors $S^{-1}M$ est un $S^{-1}R$-module libre.*
3) *Si M est un R-module de présentation finie, alors $S^{-1}M$ est un $S^{-1}R$-module de présentation finie.*
4) *Si M est un R-module projectif, alors $S^{-1}M$ est un $S^{-1}R$-module projectif.*
5) *Si M est un R-module plat, alors $S^{-1}M$ est un $S^{-1}R$-module plat.*

1.1.4 *Modules cohérents*

***Définition* 1.1.7**
Soit R un anneau. Un R-module M est dit cohérent s'il est de type fini et si tout sous module de type fini de M est de présentation finie.

***Remarques* 1.1.1**

1) Un sous module de type fini d'un R-module cohérent est un R-module cohérent.
2) Sur un anneau Noethérien, tout module de type fini est cohérent.

Théorème **1.1.10 ([24], Théorème 2.1.3)**
Soient R un anneau et $0 \to P \overset{\alpha}{\to} N \overset{\beta}{\to} M \to 0$ *une suite exacte de R-modules.*

1) *si N est un module cohérent et P est de type fini, alors M est cohérent.*
2) *Si M et P sont cohérents, alors N est cohérent.*
3) *Si M et N sont cohérents, alors P est aussi cohérent.*

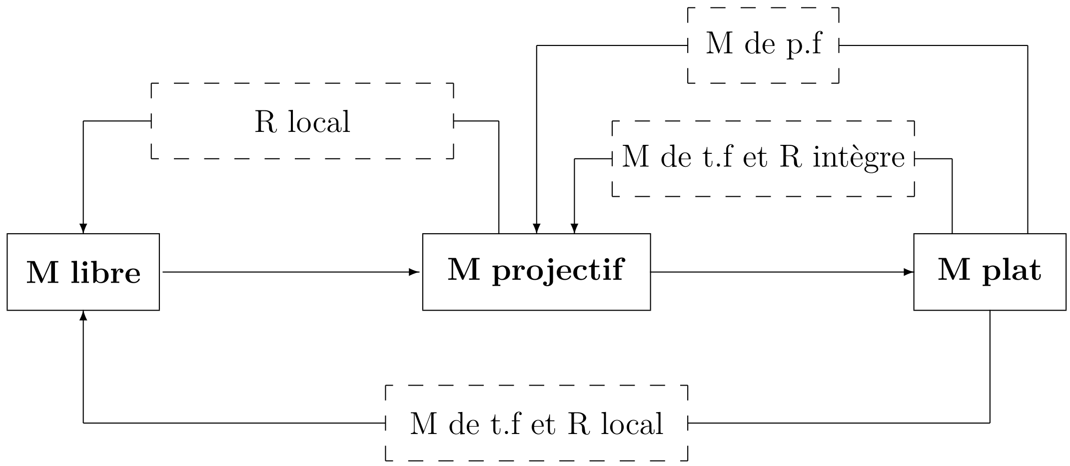
Corollaire **1.1.1**
Soient R un anneau et $\phi : M \longrightarrow N$ un morphisme de R-modules cohérents. Alors $Im(\phi)$, $\mathrm{Ker}(\phi)$ et $Coker(\phi)$ sont cohérents.

▶ De même, on obtient les deux résultats suivants :

Corollaire **1.1.2**
Toute somme directe finie de modules cohérents est un module cohérent.

Corollaire **1.1.3**
Soient R un anneau et M et N deux sous modules de type fini d'un module cohérent E. Alors $M + N$ et $M \cap N$ sont deux Modules cohérents.

RELATIONS ENTRE MODULE lIBRE, PROJECTIF ET PLAT



Clé :
- Les flèches continues sont des implications.
- Les flèches coupées par des rectangles pointillés sont des implications sous les conditions placées dans ces rectangles.
- p.f désigne présentation finie, et t.f désigne type fini.

1.2 *Résultats sur les anneaux*

1.2.1 *Anneaux des fractions*

Soient A un anneau et S une partie multiplicative de A (i.e. $S \subseteq A$, $1 \in S$, $0 \notin S$ et $\forall a, b \in S,\ ab \in S$). On définit une relation d'équivalence sur $A \times S$ par :

$$(a, s) \sim (a', s') \Leftrightarrow (as' - a's)t = 0 \textit{ pour un certain } t \in S.$$

On note a/s la classe d'équivalence de (a, s) qu'on appelle fraction. Sur l'ensemble de ces fractions noté $S^{-1}A$, on définit l'addition et la multiplication par :

$$(a/s) + (a'/s') = (as' + sa')/(ss')$$

et

$$(a/s) \times (a'/s') = (aa')/(ss').$$

***Définition* 1.2.1**
$S^{-1}A$ munit de l'addition et de la multiplication définies ci-dessus est un anneau commutatif unitaire d'élément nul $0/1$ et d'élément unité $1/1$ appelé anneau des fractions de A par rapport à S.

***Définitions* 1.2.1**
Soit R un anneau commutatif.

1) *Si R est intègre et $S = R \setminus \{0\}$ alors $S^{-1}R$ est le corps des fractions de R, noté $qf(R)$.*
2) *Si R n'est pas intègre et S l'ensemble des éléments réguliers de R (non diviseurs de zéro) alors $S^{-1}R$ est appelé l'anneau total des quotients de R, noté $T(R)$.*

<u>Localisation</u>

Soit P un idéal premier de R. On a $S := A \setminus P$ est une partie multiplicative de R. Dans ce cas $S^{-1}R$ noté R_P est un anneau local appelé la localisation de R en P. Ainsi, on a :

$$PR_P = \left\{ \frac{a}{s} \in S^{-1}A \mid a \in P \textit{ et } s \in S \right\}$$

est l'idéal maximal de R_P.

***Proposition* 1.2.1 ([26], Proposition 3.2.4)**
Soit R un anneau et I un idéal de R. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

1) $I = 0$;
2) $I_P = 0$ *pour tout idéal premier P de R*;
3) $I_M = 0$ *pour tout idéal maximal M de R.*

1.2.2 *Anneaux Noethériens*

***Proposition* 1.2.2 ([26], Théorème 7.1.1)**
Soit R un anneau. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. *Tout ensemble non vide d'idéaux de R admet un élément maximal ;*
2. *Toute suite croissante d'idéaux de R est stationnaire ;*
3. *Tout idéal de R est de type fini.*

***Définition* 1.2.2**
On dit qu'un anneau R est Noethérien s'il vérifie l'une des conditions équivalentes de la proposition (1.1.2).

***Proposition* 1.2.3 ([26], Proposition 7.1.9)**
Soient R un anneau Noethérien et $\varphi : R \to S$ un morphisme d'anneaux surjectif. Alors S est Noethérien.

***Corollaire* 1.2.1**
Soient $R \subseteq S$ une extension d'anneaux, où R est Noethérien et S est un R-module de type fini, alors S est Noethérien.

***Théorème* 1.2.1 (Théorème de Hilbert)**
Soient R un anneau Noethérien et X une indéterminée sur R. Alors $R[X]$ est Noethérien.

***Remarque* 1.2.1**
Si R est Noethérien, alors l'anneau $R[[X]]$ est Noethérien.

***Corollaire* 1.2.2**
Soient R un anneau Noethérien et $X_1, ..., X_n$ des indéterminées sur R. Alors $R[X_1, ..., X_n]$ est Noethérien.

1.2.3 *Domaines de valuation*

***Définition* 1.2.3**
Un anneau R est dit de valuation si pour tous $a, b \in R$, on a $a \in Rb$ ou $b \in Ra$. Si R est intègre, alors R est appelé domaine de valuation.

***Théorème* 1.2.2 ([25], Théorème 4.5.2)**
Soient R un anneau intègre et K son corps des fractions, les assertions suivantes sont équivalentes :

1. *R est un domaine de valuation ;*
2. *Pour tous $a, b \in R$, on a $Ra \subseteq Rb$ ou $Rb \subseteq Ra$;*
3. *Pour tout $x \in K$ on a $x \in R$ ou $x^{-1} \in R$.*

***Proposition* 1.2.4 ([25], Proposition 4.5.4)**
Soient R un domaine de valuation et K son corps des fractions. Alors on a :

1. *Tout domaine S tel que $R \subseteq S \subseteq K$ est un domaine de valuation.*
2. *R est un anneau local.*

***Corollaire* 1.2.3 ([25], Corollaire 4.5.5)**
Soient R un domaine de valuation et S une partie multiplicative de R. Alors $S^{-1}R$ est un domaine de valuation.

***Proposition* 1.2.5 ([25], Exercice 4.6.8)**
Tout domaine principal et local est un domaine de valuation.

1.2.4 *Anneaux semi-simples*

***Définitions* 1.2.2**
Soient R un anneau et M un R-module.

1) *M est dit simple si $M \neq 0$ et si M ne contient pas de sous modules propres.*
2) *M est dit semi-simple si M est produit fini de modules simples.*
3) *Un anneau R est dit semi-simple s'il est un module semi-simple.*

***Théorème* 1.2.3 ([26], Théorème 7.2.2)**
Soit R un anneau. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

1) *R est semi-simple ;*
2) *Tout R-module est semi-simple ;*
3) *Tout R-module est injectif ;*
4) *Tout suite exacte courte de R-modules est scindée ;*
5) *Tout R-module est projectif.*

Dans les anneaux commutatifs, on a la caractérisation suivante :

***Théorème* 1.2.4 ([26], Théorème 7.2.3)**
Soit R un anneau commutatif. R est semi-simple si et seulement si R est un produit fini de corps.

***Proposition* 1.2.6 ([28], Proposition 4.1)**
Un anneau R est semi-simple si et seulement si tout idéal I est un facteur direct de R.

***Corollaire* 1.2.4**
Tout idéal d'un anneau semi-simple est engendré par un élément idempotent.

1.2.5 *Anneaux réguliers au sens de Von Neumann*

***Théorème* 1.2.5 ([26], Théorème 7.3.1)**
Soit R un anneau commutatif. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1) *Pour tout $a \in R$, il existe $a' \in R$ tel que $a'a^2 = a$;*
2) *Pour tout $x \in R$, il existe $e \in R$ tel que $e^2 = e$ et $Rx = Re$;*
3) *Tout idéal de type fini de R est principal et engendré par un idempotent ; c'est à dire engendré par un élément e tel que $e^2 = e$;*
4) *Tout idéal de type fini est un facteur direct de R ;*
5) *Tout R-module est plat.*

***Définition* 1.2.4**
Un anneau R est dit régulier au sens de Von Neumann (ou absolument plat) s'il vérifie l'une des assertions du théorème précédent.

***Proposition* 1.2.7 ([26], Proposition 7.3.3)**
Soit R un anneau régulier au sens de Von Neumann. On a :

1) *Si S est une partie multiplicative de R, alors $S^{-1}R$ est régulier au sens de Von Neumann.*
2) *R est intègre si et seulement si R est un corps.*

Le théorème suivant donne des caractérisations des anneaux réguliers au sens de Von Neumann via les localisations :

***Théorème* 1.2.6 ([26], Théorème 7.3.4)**
Soit R un anneau. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1) *R est régulier au sens de Von Neumann ;*
2) *R_p est un corps pour tout $P \in \mathrm{Spec}(R)$;*
3) *R_M est un corps pour tout $M \in \mathrm{Max}(R)$.*

On a d'autres caractérisations des anneaux réguliers au sens de Von Neumann :

***Proposition* 1.2.8 ([23], Exercice 4.15)**
Un anneau R est régulier au sens de Von Neumann si et seulement si $\dim(R) = 0$ (au sens de Krull) et R est réduit.

***Théorème* 1.2.7 ([26], Théorème 7.3.5)**
Un anneau R est régulier au sens de Von Neumann si et seulement si tout module de présentation finie est projectif.

1.2.6 *Anneaux héréditaires - Domaines de Dedekind*

***Définition* 1.2.5**
Un anneau R est dit héréditaire si tout idéal de R est Projectif.
Si l'anneau est intègre, on parle de domaine de Dedekind.

▶ Notamment, tout domaine de Dedekind est Noethérien puisque tout idéal projectif est de type fini dans un domaine. Par contre, un anneau héréditaire n'est pas forcément Noethérien (voir [[26],Exemple 7.4.7]).

▶ Dans un anneau héréditaire on a le résultat suivant :

***Théorème* 1.2.8 (I. kaplansky)**
Soit R un anneau héréditaire. Alors tout sous module d'un module libre est somme directe d'idéaux.

***Corollaire* 1.2.5**
Soit R un anneau. Alors R est héréditaire si et seulement si tout sous module d'un module projectif est projectif.

▶ Dans le cas des domaines principaux, on obtient :

***Corollaire* 1.2.6**
Soit R un domaine principal. Alors on a :

1) *Tout sous module A d'un module libre F est libre et on a $rang(A) \leqslant rang(F)$.*
2) *Tout sous module d'un module de type fini $B =< b_1, ..., b_n >$ est de type fini et peut être engendré au maximum par n éléments.*
3) *Tout module projectif est libre.*

▶ Dans les anneaux Noethériens, on a les caractérisations suivantes des anneaux héréditaires :

***Théorème* 1.2.9 ([26], Théorème 7.4.6)**
Soit R un anneau Noethérien. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1) *R est héréditaire ;*
2) *R_P est un domaine de valuation discrète, pour tout $P \in \mathrm{Spec}(R)$;*
3) *R_M est un domaine de valuation discrète, pour tout $M \in \mathrm{Max}(R)$;*
4) *Tout idéal de R est plat.*

1.2.7 *Anneaux semi-héréditaires - Domaines de Prüfer*

***Définition* 1.2.6**
Un anneau est dit semi-héréditaire si tout idéal de type fini est projectif. Un anneau semi-héréditaire intègre est dit un domaine de Prüfer.

***Exemples* 1.2.1**
1) Tout anneau héréditaire est semi-héréditaire. si de plus l'anneau est Noethérien, alors on a l'équivalence.
2) R est un domaine de Dedekind si et seulement si R est un domaine de Prüfer Noethérien.

▶ Maintenant, on va donner une caractérisation des anneaux semi-héréditaires dans le cas des anneaux intègres et celui des anneaux cohérents.

***Proposition* 1.2.9 ([26], Proposition 7.5.3)**
Soit R un anneau. Considérons les assertions suivantes :
1) *R est semi-héréditaire ;*
2) *R_p est un domaine de valuation, pour tout $P \in \mathrm{Spec}(R)$;*
3) *R_M est un domaine de valuation, pour tout $M \in \mathrm{Max}(R)$;*
4) *Tout idéal de type fini est plat.*

On a $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 4$. Et si R est cohérent ou intègre, alors on a l'équivalence entre les quatre assertions

***Théorème* 1.2.10 ([26], Théorème 7.5.4)**
Si R est semi-héréditaire, alors tout sous module de type fini d'un module libre est somme directe d'idéaux de type fini.

***Corollaire* 1.2.7**
Soit R un anneau. Alors R est semi-héréditaire si et seulement si tout sous module de type fini d'un module projectif est un module projectif.

1.2.8 *Anneaux cohérents*

***Définition* 1.2.7**
Un anneau R est dit cohérent s'il est cohérent comme R-module, c'est à dire que tout idéal de type fini est de présentation finie.

***Exemple* 1.2.1**
Un anneau semi-héréditaire est cohérent puisque tout idéal de type fini projectif est de présentation finie.

▶ Maintenant, le théorème suivant présente des caractérisations des anneaux cohérents.

***Théorème* 1.2.11 ([24], Théorème 2.2.3)**
Soit R un anneau. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1) *R est un anneau cohérent ;*
2) *Tout R-module 1-présenté est un module cohérent ;*
3) *Tout sous module de type fini d'un module libre est un module 1-présenté ;*
4) *Tout R-module R^S (S est un ensemble arbitraire) est plat ;*
5) *tout produit direct de R-modules plats est un module plat ;*
6) *$(I : a)$ est un idéal de type fini pour tout idéal I de type fini et pour chaque $a \in R$;*
7) *$(0 : a)$ est un idéal de type fini pour tout $a \in R$ et l'intersection de deux idéaux de type fini est un idéal de type fini.*

***Remarque* 1.2.2**
L'assertion 3) du Théorème précédent peut-être énoncée autrement, en disant qu'un anneau R est cohérent si et seulement si tout R-module 1-présenté est 2-Présenté (donc infiniment présenté).

***Théorème* 1.2.12 ([17], Théorème 2.4.1)**

1) *Si R est un anneau cohérent et I est un idéal de type fini de R, alors R/I est cohérent.*
2) *Si R/I est cohérent et I est un R-module cohérent, alors R est un anneau cohérent.*

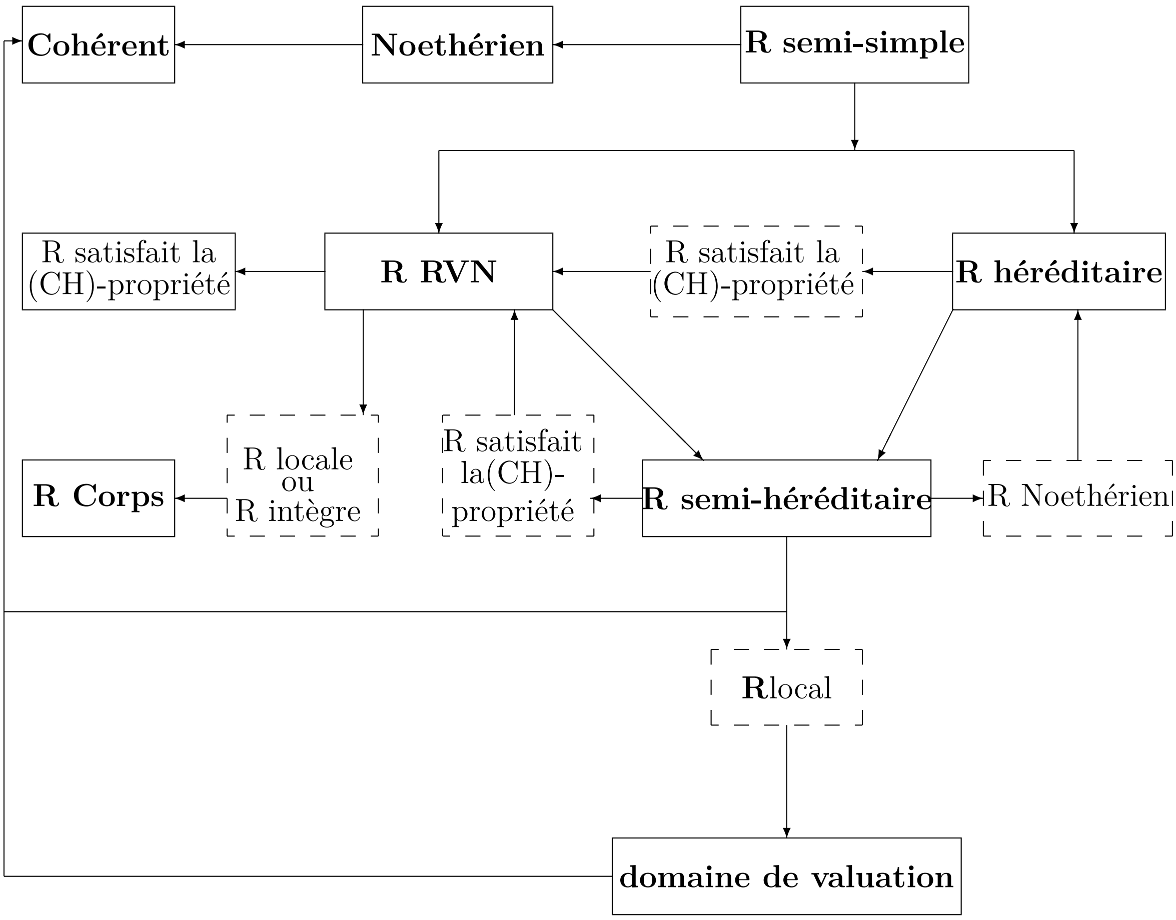
***Théorème* 1.2.13 ([17], Théorème 2.4.2)**
Soient R un anneau cohérent et S une partie multiplicative de R. Alors $S^{-1}R$ est un anneau cohérent.

En particulier, tous les localisés R_P de R sont cohérents, avec $P \in \mathrm{Spec}(R)$.

***Théorème* 1.2.14 ([24], Théorème 2.2.11)**
Soient $(R_i)_{i=1}^n$ une famille d'anneaux et $R = \Pi_{i=1}^n R_i$. Alors R est cohérent si et seulement si R_i est cohérent pour tout $i = 1, ..., n$.

RELATIONS ENTRE LES ANNEAUX

Soit R un anneau



Un anneau R est dit satisfait la (CH)-propriété si tout idéal propre de type fini admet un annulateur non nul.

Clé :
- Les flèches continues sont des implications.
- Les flèches coupées par des rectangles pointillés sont des implications sous les conditions placées dans ces rectangles.
- RVN désigne régulier au sens de Von-Neumann.

1.3 *Dimension globale faible*

Rappels

Soit M un module. Une résolution libre (respectivement projective, plate) de M est une suite exacte :

$$\cdots L_n \longrightarrow L_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow L_1 \longrightarrow L_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

où L_n est un R-module libre (respectivement projectif, plat) pour tout $n \geq 0$.

Tout module M admet une résolution libre (d'où une résolution projective et plate, puisque tout module libre est projectif et tout module projectif est plat).

***Définition* 1.3.1**

Soit M un R-module. On dit que la dimension plate de M est $\leq n$, s'il existe une résolution plate de la forme :

$$0 \longrightarrow F_n \longrightarrow F_{n-1} \longrightarrow \cdots \xrightarrow{d_2} F_1 \xrightarrow{d_1} F_0 \xrightarrow{d_0} M \longrightarrow 0$$

où F_i est plat pour tout i. On note $fd(M) \leq n$.

Si une telle résolution n'existe pas, la dimension plate de M est dite infinie. On note $fd(M) = \infty$.

Si une telle résolution existe et n est le plus petit entier qui vérifie une telle résolution, on dit que la dimension plate de M est égale à n, et on note $fd(M) = n$.

***Théorème* 1.3.1 ([26], Théorème 9.2.2)**

Soit M un R-module. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1) $fd(M) \leq n$;
2) $Tor_k(M, B) = 0$, *pour tout R-module B et tout $k \geq n+1$;*
3) $Tor_{n+1}(M, B) = 0$, *pour tout R-module B ;*
4) *Pour toute résolution plate de M, on a $Ker(d_{n-1})$ est plat ;*
5) *Il existe une résolution plate de M telle que $Ker(d_{n-1})$ est plat.*

***Définition* 1.3.2**

Soit R un anneau. On appelle dimension globale faible de R, ou simplement dimension faible de R, l'entier noté $wdim(R)$ et défini par :

$$wdim(R) = sup\{fd(M) \mid M \text{ est un module}\}.$$

***Théorème* 1.3.2 ([26], Théorème 9.2.4)**
Soit R un anneau. Alors $wdim(R) \leq n$ si et seulement si $Tor_{n+1}(A, B) = 0$ pour tous modules A et B.

***Théorème* 1.3.3 ([26], Théorème 9.2.5)**

1) $wdim(R) = 0$ *si et seulement si R est régulier au sens de Von Neumann.*

2) $wdim(R) \leq 1$ *si et seulement si tout sous module d'un module plat est plat.*

***Théorème* 1.3.4 ([26], Théorème 9.2.9)**
Soit R un anneau. Alors on a :

1) $wdim(R) = sup\{fd(R/I) \mid I \text{ un idéal de } R\}$

2) $wdim(R) = sup\{fd(R/I) \mid I \text{ un idéal de type fini de } R\}$.

***Théorème* 1.3.5 ([26], Théorème 9.2.10)**
Soit R un domaine qui n'est pas un corps. Alors R est un domaine de Prüfer si et seulement si $wdim(R) = 1$.

***Théorème* 1.3.6 ([5], Théorème 3.3)**
Soit R un anneau. Alors R est semi-héréditaire si et seulement si R est cohérent et la dimension globale faible de R est égale au plus à 1.

***Théorème* 1.3.7 ([17], Corollaire 4.2.4)**
Soit R un anneau cohérent avec $\text{w.dim}(R) < \infty$. Alors R_P est intègre pour tout idéal premier P de R.

Chapitre 2

La bi-amalgamation d'anneaux

S. Kabbaj, K. Louartiti, et M. Tamekkante; *Bi-amalgamated algebras along ideals*, COMMUTATIVE ALGEBRA 9(1),(2017), 65-87.

Soient $f : A \to B$ et $g : A \to C$ des homomorphismes d'anneaux.
L'intérêt de ce chapitre est d'étudier une nouvelle construction appelée bi-amalgamation, qui se pose comme un produit fibré $\alpha \times \beta$ tel que le carré suivant d'homomorphismes d'anneaux :

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ \downarrow{\scriptstyle g} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha} \\ C & \xrightarrow{\beta} & D \end{array}$$

est commutatif avec $\alpha \circ \pi_B(\alpha \times \beta) = \alpha \circ f(A)$, où π_B est la projection canonique de $B \times C$ dans B.

Cette construction a eu ses origines par S. Kabbaj, K. Louartiti et M. Tamekkante en 2014.

2.1 *La construction de* $A \bowtie^{f,g} (J, J')$

Soient $f : A \to B$ et $g : A \to C$ deux homomorphismes d'anneaux et J et J' deux idéaux de B et C respectivement tels que $f^{-1}(J) = g^{-1}(J')$. On considère le sous anneau

$$A \bowtie^{f,g} (J, J') := \{(f(a) + j, g(a) + j') \mid a \in A, \ (j, j') \in J \times J'\}$$

de $B \times C$ appelé la bi-amalgamation de A avec (B, C) le long de (J, J') en respectant (f, g).

2.2 *Cas particuliers de la bi-amalgamation d'anneaux*

2.2.1 *L'amalgamation d'anneaux* $A \bowtie^f J$

Cette nouvelle construction est une généralisation de l'amalgamation d'anneaux.

Soient $f : A \to B$ un homomorphisme d'anneaux et J un idéal de B. On pose $I := f^{-1}(J)$ et $\iota = id_A$. Alors on a :

$$\begin{aligned} A \bowtie^{\iota,f} (I, J) &= \left\{ (a+i, f(a)+j) \mid a \in A,\ (i,j) \in I \times J \right\} \\ &= \left\{ (a+i, f(a+i) - f(i) + j) \mid a \in A,\ (i,j) \in I \times J \right\} \\ &= \left\{ (a, f(a)+j) \mid a \in A,\ j \in J \right\} \\ &= A \bowtie^f J. \end{aligned}$$

2.2.2 *L'anneau* $f(A) + J$

Soient $f : A \to B$ un homomorphisme d'anneaux et J un idéal de B. On prend $I := f^{-1}(J)$ et $\pi : A \to A/I$ la surjection canonique. On a :

$$\begin{aligned} f(A) + J &\cong \left\{ (\bar{a}, f(a)+j) \mid a \in A \ et\ j \in J \right\} \\ &= A \bowtie^{\pi,f} (0, J). \end{aligned}$$

***Exemples* 2.2.1**

1) L'anneau CPI-extension

Soient A un anneau et I un idéal de A. $\overline{S} := (A/I) \setminus Z(A/I)$ et $S := \{s \in A \mid \bar{s} \in \overline{S}\}$ sont des parties multiplicatives de A/I et A, respectivement. Soit $\varphi : S^{-1}A \to Q(A/I) = (\overline{S})^{-1}(A/I)$ et $f : A \to S^{-1}A$ les homomorphismes canoniques. Alors, le sous anneau

$$C(A, I) := \varphi^{-1}(A/I) = f(A) + S^{-1}I$$

de $S^{-1}A$ est appelé le CPI-extension de A respectant I (au sens de Boisen-Sheldon). Soit $\pi : A \to A/I$ la surjection canonique. On a :

$$A \bowtie^{\pi,f} (0, S^{-1}I) \cong f(A) + S^{-1}I = C(A, I).$$

2) L'anneau $A + J$

Soient A un sous anneau de B, $i : A \hookrightarrow B$ l'injection canonique, J un idéal de B, $I := A \cap J$ et $\pi : A \to A/I$ la surjection canonique. Alors :

$$A + J \cong A \bowtie^{\pi,i} (0, J).$$

***Exemple* 2.2.1**
Soit $i : \mathbb{Z}[X] \hookrightarrow \mathbb{Q}[X]$ l'injection canonique, considérons l'homomorphisme $\pi : \mathbb{Z}[X] \to \mathbb{Z}[i],\ p(X) \mapsto p(i)$. Evidemment, $(X^2+1)\mathbb{Q}[X] \cap \mathbb{Z}[X] = (X^2+1)$ et $\dfrac{\mathbb{Z}[X]}{(X^2+1)} \cong \mathbb{Z}[i]$, alors :

$$R := \mathbb{Z}[X] + (X^2+1)\mathbb{Q}[X] \cong \mathbb{Z}[X] \bowtie^{\pi,i} \big(0, (X^2+1)\mathbb{Q}[X]\big).$$

2.3 *La bi-amalgamation et le produit fibré*

Tout au long de cette section, $f : A \to B$ et $g : A \to C$ désigneront deux homomorphismes d'anneaux, J et J' deux idéaux de B et C (respectivement) tels que $I := f^{-1}(J) = g^{-1}(J')$, et $A \bowtie^{f,g} (J, J')$ la bi-amalgamation de A avec (B, C) le long de (J, J') en respectant (f, g).

Cette section illustre la corrélation entre la construction du produit fibré et la bi-amalgamation.

***Proposition* 2.3.1**
Considérons deux homomorphismes d'anneaux $\alpha : f(A) + J \to A/I,\ f(a) + j \mapsto \bar{a}$ et $\beta : g(A) + J' \to A/I,\ g(a) + j' \mapsto \bar{a}$. Alors, la bi-amalgamation est donnée par le produit fibré suivant :

$$\begin{tikzcd} A \bowtie^{f,g} (J, J') \arrow[r, two heads] \arrow[d] & f(A) + J \arrow[d, "\alpha"] \\ g(A) + J' \arrow[r, "\beta"] & A/I \end{tikzcd}$$

c'est à dire que :

$$A \bowtie^{f,g} (J, J') = \alpha \times_{\frac{A}{I}} \beta.$$

Preuve.
Notons que les deux applications α et β sont bien définies puisque $I := f^{-1}(J) = g^{-1}(J')$ et sont des homomorphismes d'anneaux. D'une part l'inclusion $A \bowtie^{f,g} (J, J') \subseteq \alpha \times \beta$ est triviale. D'autre part, on a :

$$\alpha \times_{\frac{A}{I}} \beta = \{(f(a) + j, g(b) + j') \,|\, a, b \in A, (j, j') \in J \times J', \alpha(a) = \beta(b)\}.$$

La condition $\alpha(a) = \beta(b)$ implique que $f(b - a) \in J$ et $g(b - a) \in J'$. Donc, $g(b) + j' = g(a) + (j' + g(b - a))$ avec $j' + g(b - a) \in J'$. Et par suite on a $\alpha \times \beta \subseteq A \bowtie^{f,g} (J, J')$.

***Proposition* 2.3.2**
On considère les homomorphismes suivants :

$$\begin{array}{lccc} \iota_1 : & \dfrac{A}{I} & \longrightarrow & \dfrac{f(A)+J}{J} \times \dfrac{g(A)+J'}{J'} \\ & \bar{a} & \longmapsto & \left(\overline{f(a)}, \overline{g(a)}\right) \end{array}$$

$$\begin{array}{lccc} \mu_2 : & A \bowtie^{f,g} (J,J') & \longrightarrow & \dfrac{A}{I} \\ & (f(a)+j, g(a)+j') & \longmapsto & \bar{a} \end{array}$$

Alors, le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} A \bowtie^{f,g} (J,J') \arrow[r, "\iota_2"] \arrow[d, "\mu_2"] & (f(A)+J) \times (g(A)+J') \arrow[d, "\mu_1"] \\ \dfrac{A}{I} \arrow[r, "\iota_1"] & \dfrac{f(A)+J}{J} \times \dfrac{g(A)+J'}{J'} \end{tikzcd}$$

est un carré conducteur avec $\mathrm{Ker}(\mu_1) = J \times J'$, *où* ι_2 *est l'injection canonique et* μ_1 *est la surjection canonique.*

Preuve.
Les applications ι_1 et μ_2 sont bien définies puisque $I = f^{-1}(J) = g^{-1}(J')$ et sont des homomorphismes d'anneaux. Soient $R := \mu_1 \times \iota_1$, $a \in A$ et $(j,j') \in J \times J'$. Alors

$$\iota_2 \times \mu_2\big((f(a)+j, g(a)+j')\big) = \big((f(a)+j, g(a)+j'), \bar{a}\big)$$

avec

$$\mu_1\big((f(a)+j, g(a)+j')\big) = \big(\overline{f(a)}, \overline{g(a)}\big) = \iota_1(\bar{a}).$$

Ainsi, $\iota_2 \times \mu_2\big(A \bowtie^{f,g} (J,J')\big) \subseteq R$.
Maintenant, soit $\big((f(a)+j, g(a')+j'), \bar{b}\big) \in R$. Alors

$$\big(\overline{f(a)}, \overline{g(a')}\big) = \big(\overline{f(b)}, \overline{g(b)}\big).$$

Par conséquent, $f(a-b) \in J$ et $g(a'-b) \in J'$. D'où,

$$\iota_2 \times \mu_2\big((f(b)+f(a-b)+j, g(b)+g(a'-b)+j')\big) = \big((f(a)+j, g(a')+j'), \bar{b}\big).$$

Il en résulte que l'homomorphisme induit par $\iota_2 \times \mu_2$ de $A \bowtie^{f,g} (J,J')$ vers R est un isomorphisme puisque $\iota_2 \times \mu_2$ est injectif. Par conséquent, le diagramme ci-dessus est un produit fibré. En outre, il est clair que ι_1 est injectif et $Ker(\mu_1) = J \times J' = Ker(\mu_2)$.

Le résultat suivant donne une caractérisation pour qu'un produit fibré peut être vu comme une bi-amalgamation.

***Proposition* 2.3.3**
Considérons le diagramme d'homomorphismes d'anneaux suivant :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"] & B \arrow[d, "\alpha"] \\ C \arrow[r, "\beta"] & D \end{tikzcd}$$

Soit $\pi : B \times C \to B$ la projection canonique. Alors, les conditions suivantes sont équivalentes :

1) *$\alpha \times_D \beta = A \bowtie^{f,g} (J, J')$, pour certains idéaux J et J' de B et C (respectivement) avec $f^{-1}(J) = g^{-1}(J')$;*
2) *le diagramme ci-dessus est commutatif avec $\alpha \circ \pi(\alpha \times_D \beta) = \alpha \circ f(A)$.*

Preuve.
1) $\Rightarrow$ 2) Soit $a \in A$, par hypothèse, $(f(a), g(a)) \in \alpha \times_D \beta$, ce qui donne $\alpha \circ f(a) = \beta \circ g(a)$. Aussi on a $\pi(\alpha \times_D \beta) = f(A) + J$. De plus, pour tout $j \in J$, puisque $(j, 0) \in A \bowtie^{f,g} (J, J')$, on obtient $\alpha(j) = \beta(0) = 0$. Donc, $\alpha \circ \pi(\alpha \times_D \beta) = \alpha \circ f(A)$.

2) $\Rightarrow$ 1) Soit $J = Ker(\alpha)$ et $J' = Ker(\beta)$. Par supposition, pour tout $x \in f^{-1}(J)$, $\beta \circ g(x) = \alpha \circ f(x) = 0$. Donc, $g(x) \in J'$ et par conséquent $f^{-1}(J) \subseteq g^{-1}(J')$, de même pour l'inclusion inverse. Donc $f^{-1}(J) = g^{-1}(J')$. Soit $(f(a) + j, g(a) + j') \in A \bowtie^{f,g} (J, J')$. On a :

$$\alpha(f(a) + j) = \alpha \circ f(a) = \beta \circ g(a) = \beta(g(a) + j').$$

Donc $A \bowtie^{f,g} (J, J') \subseteq \alpha \times_D \beta$. D'autre part, soit $(b, c) \in \alpha \times_D \beta$. Par hypothèse, il existe $a \in A$ tel que :

$$\alpha(b) = \alpha \circ \pi(b, c) = \alpha(f(a)).$$

Donc $b - f(a) \in J$. En plus, on a :

$$\beta(c) = \alpha(b) = \alpha(f(a)) = \beta(g(a)).$$

Donc, $c - g(a) \in J'$. Ce qui donne :

$$(b, c) = (f(a) + b - f(a), g(a) + c - g(a)) \in A \bowtie^{f,g} (J, J').$$

Par conséquent, $\alpha \times_D \beta = A \bowtie^{f,g} (J, J')$, ce qui achève la preuve.

***Corollaire* 2.3.1**
Soient $\alpha : A \to D$ et $\beta : B \to D$ deux homomorphismes d'anneaux. Alors, $\alpha \times_D \beta = A \bowtie^f J$, pour un certain idéal J de B si et seulement si $\alpha = \beta \circ f$.

2.4 *Quelques propriétés algébriques de* $A \bowtie^{f,g} (J, J')$

Soient $f : A \to B$ et $g : A \to C$ deux homomorphismes d'anneaux, soient J et J' deux idéaux de B et C (respectivement) tels que $I_0 := f^{-1}(J) = g^{-1}(J')$, et soit $A \bowtie^{f,g} (J; J')$ la bi-amalgamation de A avec (B, C) le long de (J, J') en respectant (f, g).

Dans cette section on étudie quelque propriétés de la bi-amalgamation. Précisément on va donner les conditions nécessaires et suffisantes pour que la bi-amalgamation soit un anneau Noethérien, intègre ou réduit.

Nous commençons par quelques propriétés des idéaux de la bi-amalgamations. Pour cela, notons d'abord que $0 \times J'$, $J \times 0$, et $J \times J'$ sont des idéaux particuliers de $A \bowtie^{f,g} (J; J')$, et si I est un idéal de A, donc l'ensemble :

$$I \bowtie^{f,g} (J; J') := \{(f(i) + j, g(i) + j') \,|\, i \in I, (j, j') \in J \times J'\}$$

est un idéal de $A \bowtie^{f,g} (J; J')$ contenant $J \times J'$.

***Proposition* 2.4.1**
Soit I un idéal de A, alors on a les isomorphismes canoniques suivants :

1) $\dfrac{A \bowtie^{f,g} (J, J')}{I \bowtie^{f,g} (J, J')} \cong \dfrac{A}{I + I_0}$.

2) $\dfrac{A \bowtie^{f,g} (J, J')}{0 \times J'} \cong f(A) + J$ *et* $\dfrac{A \bowtie^{f,g} (J, J')}{J \times 0} \cong g(A) + J'$.

3) $\dfrac{A}{I_0} \cong \dfrac{A \bowtie^{f,g} (J, J')}{J \times J'} \cong \dfrac{f(A) + J}{J} \cong \dfrac{g(A) + J'}{J'}$.

Preuve.

1) Considérons l'application suivante :

$$\begin{array}{cccc} \varphi & : & A & \longrightarrow & \dfrac{A \bowtie^{f,g} (J, J')}{I \bowtie^{f,g} (J, J')} \\ & & a & \longmapsto & \overline{(f(a), g(a))} \end{array}$$

Clairement, φ est un homomorphisme d'anneaux surjectif, et on peut vérifier que $Ker(\varphi) = I + I_0$.

2) Si $f(a) + j = 0$ pour certain $a \in A$ et $j \in J$, donc $g(a) + j' \in J'$ pour tout $j' \in J'$. Donc le noyau de l'homomorphisme canonique surjectif $A \bowtie^{f,g} (J, J') \twoheadrightarrow f(A) + J$ coïncide avec $0 \times J'$, par conséquent on a le premier isomorphisme, et on fait la même chose pour avoir le deuxième.

3) Le premier isomorphisme est un cas particulier de (1) pour $I = 0$. D'autre part, si $f(a) + j \in J$ pour certains $a \in A$ et $j \in J$, donc $g(a) + j' \in J'$ pour tout $j' \in J'$. Alors le noyau de l'homomorphisme surjectif $A \bowtie^{f,g} (J, J') \twoheadrightarrow \dfrac{f(A)+J}{J}$ coïncide avec $J \times J'$.

***Remarque* 2.4.1**
Le fait que la bi-amalgamation peut être représentée comme un produit fibré est un outil très important, qu'on peut utiliser pour montrer les propriétés de cette construction.

***Proposition* 2.4.2**
$A \bowtie^{f,g} (J, J')$ est Noethérien si et seulement si $f(A) + J$ et $g(A) + J'$ le sont.

Preuve.
De la deuxième assertion de la proposition 2.4.1, il suffit de monter l'implication inverse.

D'après la proposition 2.3.1, on a $A \bowtie^{f,g} (J, J') = \alpha \times_{\frac{A}{I_0}} \beta$ déterminée par les homomorphismes d'anneaux $\alpha : f(A) + J \to A/I_0$, $f(a) + j \mapsto \bar{a}$ et $\beta : g(A) + J' \to A/I_0$, $g(a) + j' \mapsto \bar{a}$. Lorsque $f(A) + J$ est Noethérien et d'après [10, Proposition 4.10], il suffit de vérifier que $Ker(\beta) = J'$ est un $A \bowtie^{f,g} (J, J')$-module Noethérien, avec la structure du module induite par la surjection canonique $A \bowtie^{f,g} (J, J') \twoheadrightarrow g(A) + J'$. Or, les sous $A \bowtie^{f,g} (J, J')$-modules de J' sont exactement les sous-idéaux de J' de l'anneau Noethérien $g(A) + J'$. Cela conduit à la conclusion.

***Corollaire* 2.4.1**
$A \bowtie^{f} J$ est Noethérien si et seulement si A est $f(A) + J$ le sont.

Rappelons que le spectre d'un anneau R est Noethérien si l'ensemble des idéaux radicaux de R satisfait la condition de chaîne ascendante.

***Proposition* 2.4.3**
$\mathrm{Spec}(A \bowtie^{f,g} (J, J'))$ *est Noethérien si et seulement si* $\mathrm{Spec}(f(A) + J)$ *et* $\mathrm{Spec}(g(A) + J')$ *le sont.*

Preuve.
En utilisant la proposition 2.3.1, on a $A \bowtie^{f,g} (J, J') = \alpha \times_{\frac{A}{I_0}} \beta$. D'après [15, Corollaire 1.6], on a $\mathrm{Spec}(A \bowtie^{f,g} (J, J'))$ et $\mathrm{Spec}(A/I_0)$ sont Noethériens si et seulement si $\mathrm{Spec}(f(A) + J)$ et $\mathrm{Spec}(g(A) + J')$ le sont. Or, $\mathrm{Spec}(A \bowtie^{f,g} (J, J'))$ est Noethérien implique que $\mathrm{Spec}(A/I_0)$ l'est, d'après la proposition 2.4.1 (3) et la stabilité de cette notion par l'image homomorphe.

Le résultat suivant caractérise les extensions bi-amalgamées intègres.

***Proposition* 2.4.4**
Les assertions suivantes sont équivalentes :

1) *$A \bowtie^{f,g} (J, J')$ est intègre.*

2) *"$J=0$ et $g(A)+J'$ est intègre" ou "$J'=0$ et $f(A)+J$ est intègre".*

Preuve.
Supposons que $A \bowtie^{f,g} (J,J')$ est intègre. Si $J \neq 0$ et $J' \neq 0$, alors pour les éléments non nuls $j \in J$ et $j' \in J'$ on a $(0,j')(j,0)=(0,0)$. Par conséquent, l'un des J et J' doit être nul ; dans ce cas, d'après la proposition 2.4.1 (2), $A \bowtie^{f,g} (J,J')$ est isomorphe à $f(A)+J$ ou à $g(A)+J'$. Ce qui termine la preuve.

***Corollaire* 2.4.2**
on suppose que $J \neq 0$. Alors,

$$A \bowtie^{f} J \text{ est intègre} \Leftrightarrow f^{-1}(J)=0 \text{ et } f(A)+J \text{ est intègre.}$$

Le résultat suivant caractérise le cas où l'anneau bi-amalgamé est réduit.

***Proposition* 2.4.5**
Considérons les assertions suivantes :

(a) *$f(A)+J$ est réduit et $J' \cap \mathrm{Nil}(C)=0$,*

(b) *$g(A)+J'$ est réduit et $J \cap \mathrm{Nil}(B)=0$,*

(c) *$A \bowtie^{f,g} (J,J')$ est réduit,*

(d) *$J \cap \mathrm{Nil}(B)=0$ et $J' \cap \mathrm{Nil}(C)=0$.*

Alors :

1) *(a) ou (b) $\Rightarrow$ (c) $\Rightarrow$ (d).*

2) *Si I_0 est radical, les quatre assertions sont équivalentes.*

3) *Si f est surjective et $Ker(f) \subseteq Ker(g)$, alors :*

$$A \bowtie^{f,g} (J,J') \text{ est réduit} \Leftrightarrow B \text{ est réduit et } J' \cap \mathrm{Nil}(C)=0.$$

Preuve.

1) Soit $(f(a)+j, g(a)+j') \in \mathrm{Nil}(A \bowtie^{f,g} (J,J'))$. Alors $f(a)+j \in \mathrm{Nil}(f(A)+J)=0$. Par conséquent $a \in I_0$. Ainsi, $g(a)+j' \in J' \cap \mathrm{Nil}(C)=0$. Ce qui donne $\mathrm{Nil}(A \bowtie^{f,g} (J,J'))=0$.
Cela prouve (a) $\Rightarrow$ (c), de même pour (b) $\Rightarrow$ (c).
Soit $j \in \mathrm{Nil}(B) \cap J$. Alors, il existe un entier positif n tel que $0=(j^n,0)=(j,0)^n$ dans $A \bowtie^{f,g} (J,J')$. Et par suite $j=0$, donc $\mathrm{Nil}(B) \cap J=0$. De même, $\mathrm{Nil}(C) \cap J'=0$. D'où ($c$) $\Rightarrow$ (d).

2) Maintenant, supposons que I_0 est radical, $J \cap \mathrm{Nil}(B)=0$ et $J' \cap \mathrm{Nil}(C)=0$. Soit $f(a)+j \in \mathrm{Nil}(f(A)+J)$. Alors, il existe un entier positif n tel que $(f(a)+j)^n=0$. Par conséquent, $f(a)^n \in J$ et donc $a^n \in I_0$; c'est à dire $a \in I_0$. Donc, $f(a)+j \in J \cap \mathrm{Nil}(B)=0$, d'où ($d$) $\Rightarrow$ (a). De même pour (d) $\Rightarrow$ (b).

3) D'après **1)**, il suffit d'observer que $f(a^n) = 0$, pour un certain entier positif, donc $(f(a), g(a))^n = 0$ et par suite $f(a) = 0$.

***Remarque* 2.4.2**
Si $f(A) + J$ et $g(A) + J'$ sont réduits, alors $A \bowtie^{f,g} (J, J')$ l'est. Mais, la réciproque n'est pas vraie en général. Un contre-exemple est donné dans [10, Remarque 5.5 (3)].

***Corollaire* 2.4.3**
$A \bowtie^f J$ est réduit si et seulement si A est réduit et $J \cap \mathrm{Nil}(B) = 0$.

***Exemple* 2.4.1**
On considère l'homomorphisme d'anneaux surjectif $f : \mathbb{Z}[X] \twoheadrightarrow \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$, $p(X) \mapsto p(\sqrt{2})$ et l'idéal principal $J := (\sqrt{2})$ de $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$. Soit $p \in \mathbb{Z}[X]$, on peut écrire $p = (X^2 - 2)q(X) + aX + b$ où $a, b \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{Z}[X]$. Alors, $p(\sqrt{2}) \in J$ si et seulement si $b \in 2\mathbb{Z}$. Ainsi,

$$I_0 := f^{-1}(J) = \big\{p \in \mathbb{Z}[X] \mid p(0) \in 2\mathbb{Z}\big\}.$$

Maintenant, considérons l'homomorphisme $\alpha : \mathbb{Z}[\sqrt{2}] \twoheadrightarrow \dfrac{\mathbb{Z}[X]}{I_0}$, $a + b\sqrt{2} \mapsto \bar{a}$. D'après la proposition 2.3.1 et Propositions 2.4.2, 2.4.4 & 2.4.5, on en déduit que :

$$\mathbb{Z}[X] \bowtie^{f,f} (J, J) = \alpha \times_{\frac{\mathbb{Z}[X]}{I_0}} \alpha = \big\{(a + b\sqrt{2}, c + d\sqrt{2}) \mid a, b, c, d \in \mathbb{Z},\ a - c \in 2\mathbb{Z}\big\}$$

est un anneau réduit Noethérien non intègre (puisque $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ est intègre Noethérien et $J \neq 0$).

2.5 *La structure des idéaux premiers de la bi-amalgamation*

Dans cette section, on examine la structure des idéaux premiers de la bi-amalgamation, ainsi que sa localisation en idéaux premiers, et également les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une bi-amalgamation soit locale.
Ensuite, nous décrivons les idéaux premiers (et maximaux) des bi-amalgamations. Pour cela on considère la notation suivante :

$$Y := \mathrm{Spec}(f(A) + J)$$
$$Y' := \mathrm{Spec}(g(A) + J')$$

Et, pour $L \in Y$ et $L' \in Y'$, on considère les idéaux premiers de $A \bowtie^{f,g} (J, J')$ donnés par :

$$\begin{aligned}\overline{L} :&= (L \times (g(A) + J')) \cap (A \bowtie^{f,g} (J, J')) \\ &= \{f(a) + j, g(a) + j') \mid a \in A, (j, j') \in J \times J', f(a) + j \in L\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{L'} &:= ((f(A)+J)\times L')\cap (A\bowtie^{f,g}(J,J'))\\ &= \{f(a)+j, g(a)+j') \mid a\in A, (j,j')\in J\times J', g(a)+j'\in L'\}.\end{aligned}$$

Les deux lemmes suivants sont nécessaires pour la preuve de la proposition 2.5.1. Rappelons que si I est un idéal de A, alors

$$I\bowtie^{f,g}(J,J') := \{(f(i)+j, g(i)+j') \mid i\in I, (j,j')\in J\times J'\}$$

est un idéal de $A\bowtie^{f,g}(J,J')$. Comme résultat direct de la proposition 2.4.1 (1) on obtient le lemme suivant :

***Lemme* 2.5.1**
Soit I un idéal de A. $I\bowtie^{f,g}(J,J')$ est un idéal premier (respectivement maximal) de $A\bowtie^{f,g}(J,J')$ si et seulement si $I+I_0$ est un idéal premier (respectivement maximal) de A.

Un élément de Y (respectivement Y') contenant J (respectivement J') a une forme spéciale comme illustre le lemme suivant :

***Lemme* 2.5.2**
Soit $L\in Y$ (respectivement Y') contenant J (respectivement J'). Alors

$$\overline{L} = f^{-1}(L)\bowtie^{f,g}(J,J')\ (respectivement,\ = g^{-1}(L)\bowtie^{f,g}(J,J')).$$

Preuve.
Soit $L\in Y$ contenant J. Notons d'abord que $f^{-1}(L)$ est un idéal premier de A contenant I_0 de telle sorte que $f^{-1}(L)\bowtie^{f,g}(J,J')$ est un idéal premier de $A\bowtie^{f,g}(J,J')$ d'après le lemme 2.5.1. De plus, pour tout $a\in A$ et $j\in J$, on peut facilement vérifier que $f(a)+j\in L$ si et seulement si $a\in f^{-1}(L)$. Ainsi, $\overline{L} = f^{-1}(L)\bowtie^{f,g}(J,J')$. De même pour $L\in Y'$.

***Proposition* 2.5.1**
Soit P un idéal premier de $A\bowtie^{f,g}(J,J')$. Alors,

1) $J\times J'\subseteq P \Leftrightarrow \exists!\mathfrak{p}\supseteq I_0$ *dans* Spec(A) *tel que* $P=\mathfrak{p}\bowtie^{f,g}(J,J')$.
   Dans ce cas, $\exists L\supseteq J$ dans Y et $\exists L'\supseteq J'$ dans Y' tels que $P=\overline{L}=\overline{L'}$.
2) *$J\times J'\nsubseteq P\Leftrightarrow \exists! L\in Y$ (ou Y') tel que $J\nsubseteq L$ (ou $J'\nsubseteq L$) et $P=\overline{L}$.*
   Dans ce cas $(A\bowtie^{f,g}(J,J'))_{\mathfrak{p}}\cong (f(A)+J))_L$ (ou $(A\bowtie^{f,g}(J,J'))_{\mathfrak{p}}\cong (g(A)+J')_L$).
   Par conséquent, on a :

$$\mathrm{Spec}(A\bowtie^{f,g}(J,J')) = \{\overline{L} \mid L\in \mathrm{Spec}(f(A)+J)\cup \mathrm{Spec}(g(A)+J')\}.$$

Preuve.

1) Nous avons seulement besoin de prouver ($\Rightarrow$). Supposons que $J\times J'\subseteq P$ et considérons l'idéal $\mathfrak{p}$ de A donné par :

$$\mathfrak{p} := \{a\in A \mid \exists (j,j')\in J\times J'\ tel\ que\ (f(a)+j, g(a)+j')\in P\}$$

Or, $J \times J' \subseteq P$, donc forcément $I_0 \subseteq \mathfrak{p}$. De plus, on a $P \subseteq \mathfrak{p} \bowtie^{f,g} (J, J')$. Pour l'inclusion inverse, soit $a \in \mathfrak{p}$. Alors, il existe $(j_1, j_1') \in J \times J'$ tel que $(f(a)+j_1, g(a)+j_1') \in P$. Donc, pour tout $(j, j') \in J \times J'$, on obtient :

$$(f(a) + j, g(a) + j') = (f(a) + j_1, g(a) + j_1') + (j - j_1, j' - j_1') \in P.$$

Puisque $J \times J' \subseteq P$. Il s'ensuit que

$$P = \mathfrak{p} \bowtie^{f,g} (J, J').$$

Par le lemme 2.5.1, $\mathfrak{p}$ est un idéal premier de A. D'après la proposition 2.4.1 (1), $\mathfrak{p}$ est unique puisqu'il contient I_0.

Ensuite, soit $L := f(\mathfrak{p}) + J$. On peut vérifier que L est un idéal premier de $f(A) + J$ avec $\mathfrak{p} \subseteq f^{-1}(L)$. Maintenant, prenons $a \in f^{-1}(L)$. Alors $f(a) = f(x) + j$ pour certains $x \in \mathfrak{p}$ et $j \in J$. Par conséquent $(a - x) \in I_0 \subseteq \mathfrak{p}$, d'où $a \in \mathfrak{p}$. Alors, $f^{-1}(L) = \mathfrak{p}$.
Donc, via le lemme 2.5.2 on a :

$$\overline{L} = f^{-1}(L) \bowtie^{f,g} (J, J') = \mathfrak{p} \bowtie^{f,g} (J, J').$$

Notons que pour $L' := g(\mathfrak{p}) + J'$, les mêmes arguments donnent :

$$P = \overline{L} = \overline{L'}.$$

2) Il suffit de prouver ($\Rightarrow$). Supposons que $J \times J' \nsubseteq P$. D'après la proposition 2.3.2 et [16, Lemme 1.1.4 (3)], il existe un unique idéal premier Q de $(f(A)+J) \times (g(A)+J')$ tel que :

$$P = Q \cap A \bowtie^{f,g} (J, J') \textit{ avec } ((f(A) + J) \times (g(A) + J'))_Q = (A \bowtie^{f,g} (J, J'))_P.$$

Alors, soit $Q = L \times (g(A) + J')$ pour un certain idéal premier $L \in Y$ ou $Q = (f(A) + J) \times L'$ pour un certain idéal premier $L' \in Y'$. donc, $P = \overline{L}$ ou $P = \overline{L'}$.
Par suite, on a :

$$(A \bowtie^{f,g} (J, J'))_P \cong (f(A) + J)_L \textit{ ou } (A \bowtie^{f,g} (J, J'))_P \cong (g(A) + J')_{L'}.$$

Ce qui termine la preuve.

Ensuite, en appliquant la proposition 2.5.1, nous établissons les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une bi-amalgamation soit locale. Notons que la condition $f^{-1}(J) = g^{-1}(J')$ montre que $J \neq B$ si et seulement si $J' \neq C$.

***Proposition* 2.5.2**
1) *$A \bowtie^{f,g} (J, J')$ est local $\Leftrightarrow$ $J \neq B$ et $f(A) + J$ & $g(A) + J'$ sont locaux.*
De plus, l'idéal maximal de $A \bowtie^{f,g} (J, J')$ est de la forme $\mathfrak{m} \bowtie^{f,g} (J, J')$, où $\mathfrak{m}$ est l'unique idéal maximal de A contenant I_0.

2) *Supposons que A est local. Alors :*

$$A \bowtie^{f,g} (J, J') \text{ est local } \Leftrightarrow J \times J' \subseteq Jac(B \times C).$$

Preuve.

1) Remarquons d'abord que si $J = B$, (d'où $J' = C$) alors $A \bowtie^{f,g} (J, J') = B \times C$ qui n'est jamais local. Supposons que $A \bowtie^{f,g} (J, J')$ est local. Alors $J \neq B$ et, d'après la proposition 2.4.1 (2), on a $f(A) + J$ et $g(A) + J'$ sont locaux. De plus, $I_0 \neq A$. Par conséquent, il existe $\mathfrak{m} \supseteq I_0$ maximal dans A. Par le lemme 2.5.1, $\mathfrak{m} \bowtie^{f,g} (J, J')$ est l'idéal maximal de $A \bowtie^{f,g} (J, J')$. Ensuite, l'unicité de $\mathfrak{m}$ est assurée par la proposition 2.4.1 (1).

   Supposons ensuite que $J \neq B$ et $f(A) + J$ & $g(A) + J'$ sont locaux. Soit M un idéal maximal de $A \bowtie^{f,g} (J, J')$. Montrons que $J \times J' \subseteq M$ par l'absurde, supposons que $J \times J' \nsubseteq M$. Ensuite, d'après la proposition 2.5.1 (2), il existe un et un seul idéal premier L, de $f(A) + J$ tel que $M = \overline{L}$ et $J \nsubseteq L$. D'autre part, L est l'idéal maximal de $f(A) + J$ (d'après l'unicité de L et la maximalité de M). Par suite on a $J \subseteq L$, d'où la contradiction (car $J \neq B$). Donc, $J \times J' \subseteq M$. Ainsi, d'après la proposition 2.5.1 (1), il existe un idéal premier (unique) de A contenant I_0 tel que :

$$M = \mathfrak{m} \bowtie^{f,g} (J, J').$$

   D'après le lemme 2.5.1, $\mathfrak{m}$ est maximal dans A. Et par la proposition 2.4.1 (3), $\dfrac{A}{I_0} \cong \dfrac{f(A) + J}{J}$ est local avec $\dfrac{\mathfrak{m}}{I_0}$. Donc forcément M est l'unique idéal maximal de $A \bowtie^{f,g} (J, J')$.

2) $(\Rightarrow)$ Dans ce sens, on n'a pas besoin de l'hypothèse "A est local". On suppose que $A \bowtie^{f,g} (J, J')$ est local. D'après (1), nécessairement, son idéal maximal contient $J \times J'$. Soit $(j, j') \in J \times J'$ et $(b, c) \in B \times C$. Ensuite, $(b, c)(j, j') \in J \times J'$. Ainsi, $(1, 1) - (b, c)(j, j')$ est inversible dans $A \bowtie^{f,g} (J, J')$ (donc dans $B \times C$). Par conséquent, $J \times J' \subseteq Jac(B \times C)$.
   $(\Leftarrow)$ Supposons que A est local et $J \times J' \subseteq Jac(B \times C)$. Soit a un élément inversible de A. Alors $(f(a)+j, g(a)+j')$ l'est aussi dans $A \bowtie^{f,g} (J, J')$ pour tout $(j, j') \in J \times J'$. En effet, $f(a) + j$ et $g(a) + j'$ sont respectivement des éléments inversibles dans B et C, puisque $J \times J' \subseteq Jac(B \times C)$. Ainsi, il existe $u \in B$ et $v \in C$ tels que $(f(a) + j)u = 1$ et $(g(a) + j')v = 1$. D'où

$$(f(a) + j, g(a) + j')(f(a^{-1}) - uf(a^{-1})j, g(a^{-1}) - vg(a^{-1})j') = (1, 1);$$

   C'est à dire, $(f(a) + j, g(a) + j')$ est inversible dans $A \bowtie^{f,g} (J, J')$. Ensuite, soit $(f(a) + j_1, g(a) + j'_1)$ un élément non inversible de $A \bowtie^{f,g} (J, J')$. Donc, a l'est aussi dans A. De plus, pour tout $(f(b) + j_2, g(b) + j'_2) \in A \bowtie^{f,g} (J, J')$ on a :

$$(1, 1) - (f(b) + j_2, g(b) + j'_2)(f(a) + j_1, g(a) + j'_1) = (f(1 - ba) + j_3, g(1 - ba) + j'_3)$$

pour certains $j_3 \in J$ et $j'_3 \in J'$. De plus, $1 - ba$ est inversible dans A puisque A est local. Donc, $(1,1) - (f(b) + j_2, g(b) + j'_2)(f(a) + j_1, g(a) + j'_1)$ est aussi inversible dans $A \bowtie^{f,g} (J, J')$. Cela prouve que $A \bowtie^{f,g} (J, J')$ est local.

***Corollaire* 2.5.1**
Les assertions suivantes sont équivalentes :

1) $A \bowtie^f J$ *est local ;*
2) $J \neq B$ *et* A & $f(A) + J$ *sont locaux ;*
3) A *est local et* $J \subseteq Jac(B)$.

***Corollaire* 2.5.2**
Soient A *un anneau et* I *un idéal propre de* A*. Alors* $A \bowtie I$ *est local si et seulement si* A *l'est.*

La proposition suivante décrit la localisation de la bi-amalgamation lorsque l'idéal premier contient $J \times J'$. Rappelons que si R un anneau, I un idéal de R et S une partie multiplicative de R avec $S \cap I = \emptyset$, alors $S + I$ est une partie multiplicative de R.

***Proposition* 2.5.3**
Soit $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A)$ *tel que* $I_0 \subseteq \mathfrak{p}$ *et soit* $P := \mathfrak{p} \bowtie^{f,g} (J, J')$*. Considérons les parties multiplicatives* $S := f(A \setminus \mathfrak{p}) + J$ *et* $S' := g(A \setminus \mathfrak{p}) + J'$ *de* B *et* C *respectivement. Soient* $f_{\mathfrak{p}} : A_{\mathfrak{p}} \to B_S$ *et* $g_{\mathfrak{p}} : A_{\mathfrak{p}} \to C_{S'}$ *les homomorphismes induits par* f *et* g*. Alors :*

$$f_{\mathfrak{p}}^{-1}(J_S) = g_{\mathfrak{p}}^{-1}(J'_{S'}) = (I_0)_{\mathfrak{p}}$$

et

$$\left(A \bowtie^{f,g} (J, J')\right)_P \cong A_{\mathfrak{p}} \bowtie^{f_{\mathfrak{p}}, g_{\mathfrak{p}}} (J_S, J'_{S'}).$$

Preuve.
Il est facile de voir que $f_{\mathfrak{p}}^{-1}(J_S) = g_{\mathfrak{p}}^{-1}(J'_{S'}) = (I_0)_{\mathfrak{p}}$. De plus, D'après la proposition (2.3.1), $A_{\mathfrak{p}} \bowtie^{f_{\mathfrak{p}}, g_{\mathfrak{p}}} (J_S, J'_{S'})$ est le produit fibré de $\alpha : f_{\mathfrak{p}}(A_{\mathfrak{p}}) + J_S \to A_{\mathfrak{p}}/(I_0)_{\mathfrak{p}}$ et $\beta : g_{\mathfrak{p}}(A_{\mathfrak{p}}) + J'_{S'} \to A_{\mathfrak{p}}/(I_0)_{\mathfrak{p}}$. D'autre part, $\pi_B(A \bowtie^{f,g} (J, J') \setminus P) = S$ et $\pi_C(A \bowtie^{f,g} (J, J') \setminus P) = S'$. Alors, $(A \bowtie^{f,g} (J, J'))_P$ est isomorphe à $A_{\mathfrak{p}} \bowtie^{f_{\mathfrak{p}}, g_{\mathfrak{p}}} (J_S, J'_{S'})$ d'après [15, Proposition 1.9].

***Remarque* 2.5.1**
Si P est un idéal premier de $A \bowtie^{f,g} (J, J')$ contenant $J \times J'$. Alors, d'après la proposition 2.5.1, il existe un (unique) idéal premier $\mathfrak{p}$ de A (contenant I_0) tel que $P = \mathfrak{p} \bowtie^{f,g} (J, J')$.

D'où, d'après les propositions 2.3.2 & 2.5.3, on obtient un carré conducteur sous la forme :

$$\begin{tikzcd}
(A \bowtie^{f,g} (J,J'))_P \arrow[r, "\iota_2"] \arrow[d, two heads, "\mu_2"] & (f_{\mathfrak{p}}(A_{\mathfrak{p}}) + J_S) \times (g_{\mathfrak{p}}(A_{\mathfrak{p}}) + J'_{S'}) \arrow[d, two heads, "\mu_1"] \\
\dfrac{A_{\mathfrak{p}}}{I_0 A_{\mathfrak{p}}} \arrow[r, "\iota_1"] & \dfrac{A_{\mathfrak{p}}}{I_0 A_{\mathfrak{p}}} \times \dfrac{A_{\mathfrak{p}}}{I_0 A_{\mathfrak{p}}}
\end{tikzcd}$$

Chapitre 3

Transfert de la propriété arithmétique à la bi-amalgamation

`S.Kabbaj, N. Mahdou and M. A. S. Moutui;` *`Bi-amalgamations subject to the arithmetical property`*`, Journal of Algebra and Its Applications 16(1) (2016) 1750030, 11 p.`

Ce chapitre étudie les propriétés : arithmétique et semi-héréditaire ainsi que la dimension faible de l'extension bi-amalgamée.

3.1 *Définitions et propriétés*

***Définition* 3.1.1**
On dit qu'un anneau R est arithmétique si tout idéal I de type fini de R est localement principal (i.e. I_P est principal, pour tout $P \in \mathrm{Spec}(R)$).

***Théorème* 3.1.1**
Un anneau R est arithmétique si et seulement si l'ensemble des idéaux de R_M est totalement ordonné (par l'inclusion).

Le résultat suivant donne la relation entre les trois notions dont on aura besoin dans la suite du chapitre.

***Proposition* 3.1.1**
Soit R un anneau. On a le diagramme des implications suivant :

$$R \text{ est semi-héréditaire}$$
$$\Downarrow$$
$$\text{w.dim}(R) \leq 1$$
$$\Downarrow$$
$$R \text{ est arithmétique}$$

Si R est intègre, on a les équivalences; Dans ce cas, la notion d'anneau arithmétique est la même que la notion de domaine de Prüfer.

***Définition* 3.1.2**
On dit qu'un anneau R est enchaîné (ou de valuation) si R est arithmétique et local. Autrement, si l'ensemble des idéaux de R est totalement ordonné.

On suppose dans la suite que J et J' sont des idéaux propres de B et C, respectivement.

3.2 *Résultats*

Soient $f : A \to B$ et $g : A \to C$ deux homomorphismes d'anneaux et J et J' deux idéaux de B et C (respectivement) tels que $f^{-1}(J) = g^{-1}(J)$.

Le théorème suivant caractérise l'anneau bi-amalgamé enchaîné et arithmétique :

***Théorème* 3.2.1**
1) *$A \bowtie^{f,g} (J, J')$ est enchaîné si et seulement si $f(A) + J$ et $g(A) + J'$ sont enchaînés et $J = 0$ ou $J' = 0$.*
2) *$A \bowtie^{f,g} (J, J')$ est arithmétique si et seulement si $f(A) + J$ et $g(A) + J'$ sont arithmétiques et pour tout $\mathfrak{m} \in \text{Max}(A, I)$, $J_{f(\mathfrak{m})+J} = 0$ ou $J'_{g(\mathfrak{m})+J'} = 0$.*

Preuve.

1) On peut voir $A \bowtie^{f,g} (J, J')$ comme le produit fibré $D := \alpha \times_{\frac{A}{I}} \beta$ avec $\text{Ker}(\alpha) = J$, $\text{Ker}(\beta) = J'$ et $p_1(D) = f(A) + J$ $\big(\text{resp. } p_2(D) = g(A) + J'\big)$, où p_1 (resp. p_2) est la restriction à D de la projection de $(f(A) + J) \times (g(A) + J')$ sur $f(A) + J$ (resp. sur $g(A) + J'$).
   D'après [14, Proposition 4.9], on a $A \bowtie^{f,g} (J, J')$ est enchaîné si et seulement si "$J' = 0$ et $f(A) + J$ est enchaîné" ou "$J = 0$ et $g(A) + J'$ est enchaîné". Comme $\frac{f(A)+J}{J} \cong \frac{g(A)+J'}{J'}$ et la notion d'anneau enchaîné est stable par l'anneau quotient, on obtient dans tous les cas que $f(A) + J$ et $g(A) + J'$ sont enchaînés.
2) Rappelons que $A \bowtie^{f,g} (J, J')$ est local si et seulement si $f(A) + J$ et $g(A) + J'$ sont locaux (puisque $J \neq B$). Dans ce cas, on a $\mathfrak{m} \bowtie^{f,g} (J, J')$ est l'idéal maximal de $A \bowtie^{f,g} (J, J')$ où $\mathfrak{m}$ est l'unique idéal maximal de A contenant I. De plus, d'après

l'isomorphisme :

$$\frac{A \bowtie^{f,g} (J, J')}{0 \times J'} \cong f(A) + J,$$

on peut déduire que :

$$\frac{\mathfrak{m} \bowtie^{f,g} (J, J')}{0 \times J'} \simeq f(\mathfrak{m}) + J$$

est l'idéal maximal de $f(A) + J$. De la même manière, $g(\mathfrak{m}) + J'$ est l'idéal maximal de $g(A) + J'$. Par conséquent, $S_{\mathfrak{m}}$ et $S'_{\mathfrak{m}}$ constituent par les éléments inversibles de $f(A) + J$ et $g(A) + J'$, respectivement. D'où $J_{S_{\mathfrak{m}}} = J$ et $J'_{S'_{\mathfrak{m}}} = J'$.
Maintenant, on suppose que $A \bowtie^{f,g} (J, J')$ est arithmétique. Soient $\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(A, I)$ et $M := \mathfrak{m} \bowtie^{f,g} (J, J')$. On a :

$$A_{\mathfrak{m}} \bowtie^{f_{\mathfrak{m}},g_{\mathfrak{m}}} (J_{S_{\mathfrak{m}}}, J'_{S'_{\mathfrak{m}}}) \cong (A \bowtie^{f,g} (J, J'))_M$$

est un anneau enchaîné (puisque la propriété arithmétique est stable par la localisation). D'après (1), $J_{S\mathfrak{m}} = 0$ ou $J'_{S'_{\mathfrak{m}}} = 0$. Il est clair que la propriété arithmétique est locale. Soit $L \in \mathrm{Spec}(f(A) + J)$ et considérons l'idéal premier de $A \bowtie^{f,g} (J, J')$ donné par :

$$\overline{L} := (L \times (g(A) + J')) \cap (A \bowtie^{f,g} (J, J')).$$

Si $J \not\subseteq L$, alors

$$(f(A) + J)_L \cong (A \bowtie^{f,g} (J, J'))_{\overline{L}}$$

est arithmétique. D'autre part, supposons que $J \subseteq L$, on a :

$$\overline{L} := \mathfrak{p} \bowtie^{f,g} (J, J')$$

où $\mathfrak{p} := f^{-1}(L) \in \mathrm{Spec}(A, I)$ et on peut facilement vérifier que $L = f(\mathfrak{p}) + J$. Ainsi,

$$A_{\mathfrak{p}} \bowtie^{f_{\mathfrak{p}},g_{\mathfrak{p}}} (J_{S_{\mathfrak{p}}}, J'_{S'_{\mathfrak{p}}}) \cong (A \bowtie^{f,g} (J, J'))_{\overline{L}}$$

est anneau enchaîné. D'après (1), $f_{\mathfrak{p}}(A_{\mathfrak{p}}) + J_{S_{\mathfrak{p}}}$ est un anneau enchaîné avec l'idéal maximal $f_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}) + J_{S_{\mathfrak{p}}}$. Le fait que $f_{\mathfrak{p}}(A_{\mathfrak{p}}) + J_{S_{\mathfrak{p}}}$ est local montre que $f_{\mathfrak{p}}(A_{\mathfrak{p}}) + J_{S_{\mathfrak{p}}} = (f(A) + J)_L$. En effet, remarquons que :

$$S_{\mathfrak{p}} = (f(A) + J) \setminus (f(\mathfrak{p}) + J) = (f(A) + J) \setminus L$$

et par conséquent, $f_{\mathfrak{p}}(A_{\mathfrak{p}}) + J_{S_{\mathfrak{p}}}$ et $(f(A) + J)_L$ sont des sous-anneaux de $B_{S_{\mathfrak{p}}}$. L'inclusion directe est facile, il reste à prouver l'inclusion inverse.
Soit $x \in (f(A) + J)_L$, donc

$$x = \frac{f(a) + i}{f(s) + j} = \left(\frac{1}{f(s) + j}\right)\left(\frac{f(a)}{1}\right) + \frac{i}{f(s) + j}$$

pour certains $a \in A$, $s \in A \setminus \mathfrak{p}$ et i, $j \in J$. Clairement, il suffit de montrer que :

$$\frac{1}{f(s)+j} \in f_{\mathfrak{p}}(A_{\mathfrak{p}}) + J_{S_{\mathfrak{p}}}.$$

Ce qui est vrai puisqu'on peut vérifier que :

$$\frac{f(s)+j}{1} = \frac{f(s)}{1} + \frac{j}{1} \notin f_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}) + J_{S_{\mathfrak{p}}}.$$

Comme $f_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}) + J_{S_{\mathfrak{p}}}$ est l'idéal maximal de $f_{\mathfrak{p}}(A_{\mathfrak{p}}) + J_{S_{\mathfrak{p}}}$, on a le résultat.
D'après (1), $(f(A)+J)_L$ est arithmétique. On en déduit que $f(A)+J$ est (localement) arithmétique et ainsi $g(A) + J'$ l'est par des arguments similaires.
Inversement, supposons que $f(A) + J$ et $g(A) + J'$ sont arithmétiques et, $\forall \mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(A, I)$, $J_{S_{\mathfrak{m}}}$ ou $J'_{S_{\mathfrak{m}}}$ est nul. Soit $M \in \mathrm{Max}(A \bowtie^{f,g} (J, J'))$. Supposons que $J \times J' \nsubseteq M$. Il existe L dans $\mathrm{Spec}(f(A) + J)$ par exemple, tel que :

$$(A \bowtie^{f,g} (J, J'))_M \cong (f(A) + J)_L.$$

Dans ce cas, on a $(A \bowtie^{f,g} (J, J'))_M$ est évidemment arithmétique. Ensuite, supposons que $J \times J' \subseteq M$. Alors, il existe un unique $\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(A, I)$ tel que :

$$M = \mathfrak{m} \bowtie^{f,g} (J, J').$$

Par hypothèse, on a $J'_{S'_{\mathfrak{m}}} = 0$. Maintenant, soit $L := f(\mathfrak{m}) + J$ un idéal premier de $f(A) + J$. Par suite,

$$\begin{aligned}
(A \bowtie^{f,g} (J, J'))_M &\cong A_{\mathfrak{m}} \bowtie^{f_{\mathfrak{m}},g_{\mathfrak{m}}} (J_{S_{\mathfrak{m}}}, 0) \\
&\cong f_{\mathfrak{m}}(A_{\mathfrak{m}}) + J_{S_{\mathfrak{m}}} \\
&= (f(A) + J)_L.
\end{aligned}$$

On obtient que $(A \bowtie^{f,g} (J, J'))_M$ est arithmétique pour tout $M \in \mathrm{Max}(A \bowtie^{f,g} (J, J'))$. Par conséquent, $A \bowtie^{f,g} (J, J')$ est arithmétique, ce qui termine la preuve du théorème.

***Remarque* 3.2.1**
On a déjà vu dans le chapitre précédent que toute bi-amalgamation $A \bowtie^{f,g} (J, J')$ peut être vue comme un carré conducteur avec l'idéal conducteur est $J \times J'$. Boynton a examiné le transfert de la propriété arithmétique aux carrés conducteurs dans un cas particulier où l'idéal conducteur est régulier [7, Théorème 3.3] (et aussi [8, Théorème 4.1]). Nous ne pouvons pas faire appel à ce résultat dans le contexte du Théorème 3.2.1 puisque, sous l'hypothèse "$J \times J'$ est régulier", la bi-amalgamation $A \bowtie^{f,g} (J, J')$ ne peut jamais satisfaire la propriété arithmétique (à cause de la condition nécessaire : $\forall \mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(A, I_0)$, $J_{S_{\mathfrak{m}}} = 0$ ou $J'_{S'_{\mathfrak{m}}} = 0$). Cette remarque est également valable pour le Corollaire 3.2.3 (sur la dimension globale faible) et le Corollaire 3.2.6 (sur la propriété semi-héréditaire).

Nous proposons un exemple d'anneau arithmétique non réduit qui se présente sous la forme de la bi-amalgamation.

***Exemple* 3.2.1**
Soit $(A, \mathfrak{m})$ un domaine de valuation, $K := qf(A)$, E un A-module de type fini tel que $E_{\mathfrak{m}} = 0$ et $B := A \propto E$ l'extension triviale de l'anneau A par E, et $C := K[[X]]$. Considérons les homomorphismes d'anneaux injectifs $f : A \hookrightarrow B$ et $g : A \hookrightarrow C$ et soit $J := 0 \propto E$. Alors, la bi-amalgamation $R := A \bowtie^{f,g} (J, 0)$ est un anneau arithmétique non réduit. En effet, notons d'abord que $f^{-1}(J) = g^{-1}(0) = 0$, $f(A) + J = B$ et $g(A) = A$. De plus, B est arithmétique par [27, Théorème 3.1]. Donc, R est enchaîné d'après le théorème précédent. D'autre part, R n'est pas réduit puisque $J^2 = 0$.

Le corollaire suivant donne une caractérisation pour que l'amalgamation soit un anneau enchaîné et arithmétique.

***Corollaire* 3.2.1**
1) *$A \bowtie^f J$ est enchaîné si et seulement si A et $f(A) + J$ sont enchaînés et $J = 0$ ou $f^{-1}(J) = 0$.*

2) *$A \bowtie^f J$ est arithmétique si et seulement si A et $f(A) + J$ sont arithmétiques, et pour tout $\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(A, f^{-1}(J))$, $J_{S_{\mathfrak{m}}} = 0$ ou $f_{\mathfrak{m}}^{-1}(J_{S_{\mathfrak{m}}}) = 0$.*

***Remarque* 3.2.2**
Finocchiaro a prouvé le résultat suivant pour le transfert de la propriété arithmétique aux amalgamations : *"Supposons que, pour tout $\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(A, f^{-1}(J))$, soit $f_{\mathfrak{m}}$ est surjective ou $f_{\mathfrak{m}}^{-1}(J_{S_{\mathfrak{m}}}) \neq 0$. Alors, $A \bowtie^f J$ est arithmétique si et seulement si A est arithmétique, $J_{S_{\mathfrak{m}}} = 0$ pour tout $\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(A, f^{-1}(J))$, et pour tout $\mathfrak{m}' \in \mathrm{Max}(B)$ ne contenant pas J, l'ensemble des idéaux de $B_{\mathfrak{m}'}$ est totalement ordonné par l'inclusion"* [14, Proposition 4.10].
Le Corollaire 3.2.1 donne ce résultat car si $f_{\mathfrak{m}}$ est surjective et $J_{S_{\mathfrak{m}}} \neq 0$ alors $f_{\mathfrak{m}}^{-1}(J_{S_{\mathfrak{m}}}) \neq 0$; combiné avec les deux structures d'idéaux maximaux de $A \bowtie^f J$ $\big($voir [11, Proposition 2.6] ; [14, Proposition 2.5]$\big)$; précisément, $A_{\mathfrak{m}} \cong (A \bowtie^f J)_{\mathfrak{m} \bowtie^f J}$ lorsque $J_{S_{\mathfrak{m}}} = 0$ et $B_{\mathfrak{m}'} \cong (A \bowtie^f J)_{\overline{\mathfrak{m}'}}$ où $\overline{\mathfrak{m}'} = \{(a, f(a) + j) \in A \bowtie^f J \mid f(a) + j \in \mathfrak{m}'\}$.

***Remarque* 3.2.3**
Supposons que $J \neq 0$. D'après le théorème 3.2.1 et le corollaire 2.4.2, on a : $A \bowtie^f J$ est un anneau enchaîné (respectivement, domaine de valuation) si et seulement si $f^{-1}(J) = 0$ et $f(A) + J$ est un anneau enchaîné (respectivement, domaine de valuation).

***Exemple* 3.2.2**
Soit $(A, \mathfrak{m})$ un domaine de valuation, E un A-module divisible non nul dont les sous-modules sont totalement ordonnés par l'inclusion (par exemple $E := qf(A)$) et $B := A \propto E$ l'extension triviale de l'anneau A par E. Considérons l'injection canonique $f : A \hookrightarrow B$ et soit $J := 0 \propto E$. Ainsi, l'amalgamation $R := A \bowtie^f J$ est un anneau arithmétique non réduit. En effet, $f^{-1}(J) = 0$, A est semi-héréditaire (puisque $A_{\mathfrak{m}}$ est un domaine

de valuation) et $f(A)+J = B$ est un anneau enchaîné d'après [4, Théorème 4.16]. Donc, R est un anneau enchaîné d'après le corollaire précédent mais n'est pas réduit (car $J \cap \mathrm{Nil}(B) \neq 0$).

Le corollaire suivant retrouve les conditions nécessaires et suffisantes pour que la duplication soit enchaînée et arithmétique.

***Corollaire* 3.2.2**

1) *$A \bowtie I$ est enchaîné si et seulement si A est enchaîné et $I = 0$.*
2) *$A \bowtie I$ est arithmétique si et seulement si A est arithmétique, et pour tout $\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(A, I)$, $I_{\mathfrak{m}} = 0$.*

Une autre application du théorème 3.2.1 donne des conditions nécessaires et suffisantes pour que la dimension globale faible d'une bi-amalgamation soit inférieure à 1.

***Corollaire* 3.2.3**
Supposons que $\mathrm{w.dim}(f(A)+J) \leq 1$, $\mathrm{w.dim}(g(A)+J') \leq 1$, $J \cap \mathrm{Nil}(B) = 0$, $J' \cap \mathrm{Nil}(C) = 0$ *et,* $\forall \mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(A, I)$, $J_{S_{\mathfrak{m}}} = 0$ *ou* $J'_{S'_{\mathfrak{m}}} = 0$. *Alors* $\mathrm{w.dim}(A \bowtie^{f,g} (J, J') \leq 1$. *La réciproque est vraie si I est radical.*

Preuve.
Rappelons que pour un anneau R, $\mathrm{w.dim}(R) \leq 1$ si et seulement si R est arithmétique et réduit [5, Théorème 3.5]. Le résultat découle facilement du théorème 3.2.1 et la proposition 2.4.5.

***Corollaire* 3.2.4**
$\mathrm{w.dim}(A \bowtie^f J) \leq 1$ *si et seulement si* $\mathrm{w.dim}(A) \leq 1$, *$f(A)+J$ est arithmétique,* $J \cap \mathrm{Nil}(B) = 0$ *et pour tout* $\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(A, f^{-1}(J))$, $J_{S_{\mathfrak{m}}} = 0$ *ou* $f_{\mathfrak{m}}^{-1}(J_{S_{\mathfrak{m}}}) = 0$.

Preuve.
D'après les corollaires 2.4.3 et 3.2.1 (2), on obtient le résultat.

***Corollaire* 3.2.5**
$\mathrm{w.dim}(A \bowtie I) \leq 1$ *si et seulement si* $\mathrm{w.dim}(A) \leq 1$ *et pour tout* $\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(A, I)$, $I_{\mathfrak{m}} = 0$.

Maintenant, on peut utiliser les corollaires 3.2.3 et 3.2.5 pour enrichir la littérature par de nouveaux exemples d'anneaux non semi-héréditaires de dimension faible globale inférieure à 1.

***Exemple* 3.2.3**
Soient A_0 un anneau Noethérien avec $\mathrm{w.dim}(A_0) \leq 1$ et I un idéal propre de A_0 tel que $I_{\mathfrak{m}} = 0$, $\forall \mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(A_0, I)$ (par exemple, $A_0 := \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ et $I := 4\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$; Clairement, $I_{\mathfrak{m}_1} = 0$ et $I_{\mathfrak{m}_2} = 0$ où $\mathfrak{m}_1 := 2\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ et $\mathfrak{m}_2 := 3\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$). Soit $A := A_0 \bowtie I$ la duplication amalgamée de A_0 le long de I. D'après le corollaire 3.2.5 , on a $\mathrm{w.dim}(A) \leq 1$. Soit D un anneau non cohérent avec $\mathrm{w.dim}(D) \leq 1$ (par exemple [18, Exemple 4.1]). De plus, considérons les homomorphismes d'anneaux $f : A \twoheadrightarrow A_0$ et $g : A \hookrightarrow A \times D$ et prenons $J := I$

et $J' := (I \bowtie I) \times D$. Alors, la bi-amalgamation $R := A \bowtie^{f,g} (J, J')$ est un anneau non semi-héréditaire de dimension faible inférieure à 1. En effet, notons d'abord que $f^{-1}(J) = g^{-1}(J') = I \bowtie I$. En suite, on a $\text{w.dim}(f(A)+J) = \text{w.dim}(A_0) \leq 1$ et $\text{w.dim}(g(A)+J') = \text{w.dim}\big((A\times 0)+((I \bowtie I)\times D)\big) = \text{w.dim}(A\times D) = \sup\{\text{w.dim}(A), \text{w.dim}(D)\} \leq 1$. De plus, soit $\mathfrak{m} \bowtie I \in \text{Max}(A, I \bowtie I)$. Alors, $\mathfrak{m} \in \text{Max}(A_0, I)$. Par conséquent, $S_{\mathfrak{m}\bowtie I} = f(A \setminus (\mathfrak{m} \bowtie I)) + J = (A_0 \setminus \mathfrak{m}) + I$ et donc $J_{S_{\mathfrak{m}\bowtie I}} = I_{\mathfrak{m}} = 0$. Maintenant, A_0 et D sont réduits et donc de même pour A et $A \times D$. D'après le corollaire 3.2.3, $\text{w.dim}(R) \leq 1$. Enfin, notons que R n'est pas cohérent (à fortiori, non semi-héréditaire) puisque $\frac{R}{J\times 0} \cong g(A) + J' = A \times D$ n'est pas cohérent (car D n'est pas cohérent) et $J \times 0$ est un idéal de type fini de R (car A_0 est Noethérien).

***Corollaire* 3.2.6**
Supposons que $f(A) + J$ et $g(A) + J'$ sont des anneaux semi-héréditaires et Noethériens, $J \cap \text{Nil}(B) = 0$, $J' \cap \text{Nil}(C) = 0$ et $\forall \mathfrak{m} \in \text{Max}(A, I_0)$, $J_{S_{\mathfrak{m}}} = 0$ ou $J'_{S'_{\mathfrak{m}}} = 0$. Alors, $A \bowtie^{f,g} (J, J')$ est un anneau semi-héréditaire et Noethérien. La réciproque est vraie si I est radical.

Les réciproques des corollaires 3.2.3 et 3.2.6 ne sont pas vraies en général. Un contre-exemple est donné ci-dessous dans le cas trivial d'une amalgamation où $A \bowtie^f J \cong A$ et $f(A) + J = B$.

***Exemple* 3.2.4**
Considérons l'homomorphisme surjectif canonique d'anneaux $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ et prenons J l'idéal nul de $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$. Alors, $\mathbb{Z} \bowtie^f J \cong \mathbb{Z}$ est un domaine de Dedekind et $f(\mathbb{Z}) + J = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ n'est pas réduit de sorte que $\text{w.dim}(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}) > 1$.

***Exemple* 3.2.5**
Soient A un anneau semi-héréditaire Noethérien et I un idéal propre de A tel que $I_{\mathfrak{m}} = 0$, $\forall \mathfrak{m} \in \text{Max}(A, I)$ (par exemple $A := \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ et $I := 4\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$). Soit $B := A \bowtie I$ la duplication amalgamée de A le long de I et soit D un anneau semi-héréditaire Noethérien. Considérons les injections canoniques $f : A \hookrightarrow B$ et $g : A \hookrightarrow A \times D$ et prenons $J := I \bowtie I = I \times I$ et $J' := I \times D$. Alors, l'anneau $R := A \bowtie^{f,g} (J, J')$ est semi-héréditaire Noethérien. En effet, notons que $f^{-1}(J) = g^{-1}(J') = I$ et $\forall \mathfrak{m} \in \text{Max}(A, I)$, $S_{\mathfrak{m}} := f(A \setminus \mathfrak{m}) + I \times I = ((A \setminus \mathfrak{m}) + I) \times ((A \setminus \mathfrak{m}) + I)$. Donc, $J_{S_{\mathfrak{m}}} = (I \times I)_{S_m} \cong I_{\mathfrak{m}} \times I_{\mathfrak{m}} = 0$. De plus, $f(A) + J = A \bowtie A = A \times A$ et $g(A) + J' = A \times 0 + I \times D = A \times D$ sont des anneaux semi-héréditaires Noethériens (puisque A et D le sont). Par suite, le corollaire 3.2.6 donne directement le résultat.

Rappelons le résultat suivant qui étudie le transfert de la cohérence aux amalgamations dans un cas particulier.

***Lemme* 3.2.1 ([1], Théorème 2.2)**
On suppose que $f^{-1}(J)$ et J sont des idéaux de type fini de A et $f(A)+J$, respectivement. Alors, $A \bowtie^f J$ est cohérent si et seulement si A et $f(A) + J$ le sont.

***Corollaire* 3.2.7**
Supposons que $f^{-1}(J)$ *et* J *sont des idéaux de type fini de* A *et* $f(A)+J$*, respectivement. Alors* $A \bowtie^f J$ *est semi-héréditaire si et seulement si* A *est semi-héréditaire,* $f(A)+J$ *est cohérent et arithmétique,* $J \cap \mathrm{Nil}(B) = 0$ *et pour tout* $\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(A, f^{-1}(J))$*,* $J_{S_\mathfrak{m}} = 0$ *ou* $f_\mathfrak{m}^{-1}(J_{S_\mathfrak{m}}) = 0$.

***Corollaire* 3.2.8**
On suppose que I *est un idéal de type fini de* A*. Alors,* $A \bowtie I$ *est semi-héréditaire si et seulement si* A *est semi-héréditaire et pour tout* $\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(A, I)$*,* $I_\mathfrak{m} = 0$.

Chapitre 4

Bi-amalgamations de petite dimension globale faible

Mohammed TAMEKKANTE et El Mehdi BOUBA, *Bi-amalgamation of small weak global dimension*, International Electronic Journal of Algebra, Volume 21 (2017) 127-136

4.1 *Introduction*

Considérons le diagramme d'homomorphismes suivant :

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{\iota_2} & R_1 \\ \downarrow{\scriptstyle \mu_2} & & \downarrow{\scriptstyle \mu_1} \\ R_2 & \xrightarrow{\iota_1} & R' \end{array}$$

On suppose que l'homomorphisme induit par $\iota_2 \times \mu_2 : R \to R_1 \times R_2$ est un isomorphisme de R vers le sous anneau $\mu_1 \times \iota_1$ de $R_1 \times R_2$. Alors la dimension globale faible du produit fibré R est étudiée précédemment. En 1992, S. Scrivanti a obtenu la relation suivante de la dimension globale faible de R, en supposant que ι_1 est surjectif,

$$\text{w.dim}(R) \leq \max\{\text{w.dim}(R_1) + \text{fd}_R(R_1), \text{w.dim}(R_2) + \text{fd}_R(R_2)\}$$

Dans ce cadre, on peut étudier la dimension globale faible de la bi-amalgamation qui présente une sous-classe des produits fibrés.

4.2 *Résultats*

Soient $f : A \to B$ et $g : A \to C$ deux homomorphismes d'anneaux et soient J et J' deux idéaux propres de B et C (respectivement) tels que $I := f^{-1}(J) = g^{-1}(J')$.

Dans le cadre où $J = B$ (si et seulement si $J' = C$), on a $A \bowtie^{f,g} (J, J') = B \times C$. Par conséquent, dans cette section, nous allons éviter ce cas (i.e., J et J' sont propres) puisque $\text{w.dim}(B \times C) = \max\{\text{w.dim}(B), \text{w.dim}(C)\}$.

Nous caractériserons dans cette section les bi-amalgamations de dimension globale faible inférieure ou égale à 1.

Les anneaux avec une dimension globale faible égale à zéro sont ceux pour lesquels tous les modules sont plats. Ce sont exactement les anneaux réguliers au sens de Von Neumann (aussi appelés anneaux absolument plats).

***Lemme* 4.2.1**

$$\dim(A \bowtie^{f,g} (J, J')) = \max\{\dim(f(A) + J), \dim(g(A) + J')\}.$$

Preuve.
D'après [22, Théorème 48], il suffit de montrer que tout élément $(f(a) + j, g(b) + j')$ de $(f(A) + J) \times (g(A) + J')$ est entier sur l'anneau $A \bowtie^{f,g} (J, J')$ (*i.e.* il existe un polynôme unitaire à coefficients dans $A \bowtie^{f,g} (J, J')$ s'annulant en $(f(a) + j, g(b) + j')$).

Soit $(f(a) + j, g(b) + j') \in (f(A) + J) \times (g(A) + J')$. On vérifie immédiatement qu'il s'agit d'une racine du polynôme unitaire

$$g(X) = (X - (f(a) + j, g(a)))\,(X - (f(b), g(b) + j'))$$

Il est facile de voir que $g(X) \in A \bowtie^{f,g} (J, J')[X]$. Par conséquent, l'anneau $(f(A) + J) \times (g(A) + J')$ est entier sur $A \bowtie^{f,g} (J, J')$. Il s'ensuit que :

$$\dim(A \bowtie^{f,g} (J, J')) = \dim((f(A) + J) \times (g(A) + J'))$$

Ainsi, la conclusion est une conséquence directe du fait que $\text{Spec}((f(A)+J)\times(g(A)+J'))$ est homéomorphe à la réunion disjointe de $\text{Spec}(f(A) + J)$ et $\text{Spec}(g(A) + J')$.

***Proposition* 4.2.1**
L'anneau $A \bowtie^{f,g} (J, J')$ *est régulier au sens de Von Neumann si et seulement si* $f(A) + J$ *et* $g(A) + J'$ *le sont.*

Preuve.

($\Rightarrow$) Soit $f(a) + j \in f(A) + J$, alors il existe $(f(b) + j_1, g(b) + j_1') \in A \bowtie^{f,g} (J, J')$ tel que $(f(a)+j, g(a))^2(f(b)+j_1, g(b)+j_1') = (f(a)+j, g(a))$. Donc $(f(a)+j)^2(f(b)+j_1) =$

$(f(a)+j)$, par suite $f(A)+J$ est régulier au sens de Von Neumann. De même pour $g(A)+J'$.

($\Leftarrow$) Supposons que $f(A)+J$ et $g(A)+J'$ sont réguliers au sens de Von Neumann, alors $A \bowtie^{f,g} (J,J')$ est réduit. D'autre part $\dim(A \bowtie^{f,g} (J,J')) = 0$.

***Corollaire* 4.2.1**
$A \bowtie^{f} J$ est régulier au sens de Von Neumann si et seulement si A et $f(A)+J$ le sont.

Rappelons qu'un entier n est dit sans facteur carré (ou square-free) si n n'est pas divisible par un carré parfait.

***Exemple* 4.2.1**
Soient n,k deux entiers positifs tels que $0<k<n$ et soit R un sous anneau de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^2$ défini par :

$$R := \{(\bar{a},\bar{b}) \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^2 \mid k \textit{ divise } a-b\}.$$

Alors $\operatorname{gldim}(R)=0$ si n est un entier sans facteur carré, et ∞ sinon.

Preuve.
Considérons la surjection canonique $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et $J=(\bar{k})$. On a :

$$\mathbb{Z} \bowtie^{f,f} (J,J) = \{(\overline{a+kc},\overline{a+kd}) \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^2 \mid a,c,d \in \mathbb{Z}\} = R.$$

Notons que R est Noethérien puisque $f(\mathbb{Z})+J=\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ l'est. Donc $\operatorname{gldim}(R)=\operatorname{w.dim}(R)$. Si $\operatorname{gldim}(R)<\infty$, alors R est régulier. D'après [29, Corollaire 8.5], on a $\operatorname{gldim}(R)=\dim(R)$. D'autre part, en utilisant le lemme 4.2.1, on a $\dim(R)=\dim(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})=0$. Donc $\operatorname{gldim}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})=0$. De plus, d'après la proposition 4.2.1, on a $\operatorname{gldim}(R)=0$ si et seulement si $\operatorname{gldim}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})=0$. Or, sachant que $\operatorname{gldim}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})=0$ si n est un entier sans facteur carré, et ∞ sinon. D'où la dimension globale de R est égale à 0 si et seulement si n est un entier sans facteur carré, et ∞ sinon.

On note $\operatorname{Max}(A,I) := \operatorname{Max}(A)\cap \operatorname{V}(I) = \{\mathfrak{m}\in\operatorname{Max}(A) \mid I\subseteq\mathfrak{m}\}$.

Pour tout $\mathfrak{m}\in\operatorname{Max}(A,I)$, on considère les parties multiplicatives :

$$S_{\mathfrak{m}} := (f(A)+J)\backslash(f(\mathfrak{m})+J) = f(A\backslash\mathfrak{m})+J, \quad S'_{\mathfrak{m}} := (g(A)+J')\backslash(g(\mathfrak{m})+J') = g(A\backslash\mathfrak{m})+J'$$

de B et C, respectivement. On vérifie facilement que $J_{f(\mathfrak{m})+J} = J_{S_{\mathfrak{m}}}$ (resp. $J'_{g(\mathfrak{m})+J'} = J'_{S'_{\mathfrak{m}}}$) où $J_{f(\mathfrak{m})+J}$ (resp. $J'_{g(\mathfrak{m})+J'}$) est la localisation de J (resp. J') comme étant un idéal de $f(A)+J$ (resp. $g(A)+J'$), et $J_{S_{\mathfrak{m}}}$ (resp. $J'_{S'_{\mathfrak{m}}}$) est la localisation de J (resp. J') comme étant un idéal de B (resp. C).

Tout au long de ce chapitre, J (resp. J') est vu comme un idéal de $f(A)+J$ (resp. $g(A)+J'$).

***Proposition* 4.2.2**
L'anneau $A \bowtie^{f,g} (J, J')$ *est réduit si et seulement si :*

1) $\mathrm{Nil}(B) \cap J = (0)$ *et* $\mathrm{Nil}(C) \cap J' = (0)$.
2) $f^{-1}(\mathrm{Nil}(B) + J) \cap g^{-1}(\mathrm{Nil}(C) + J') = I$.

Preuve.

($\Rightarrow$) Supposons que $A \bowtie^{f,g} (J, J')$ est réduit, la condition (1) est vérifiée. Il reste à montrer que $f^{-1}(\mathrm{Nil}(B) + J) \cap g^{-1}(\mathrm{Nil}(C) + J') = I$.
Soit $x \in f^{-1}(\mathrm{Nil}(B) + J) \cap g^{-1}(\mathrm{Nil}(C) + J')$, donc il existe $(j, j') \in J \times J'$ tel que $f(x)+j \in \mathrm{Nil}(B)$ et $g(x)+j' \in \mathrm{Nil}(C)$. Alors il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $(f(x)+j, g(x)+j')^n = ((f(x)+j)^n, (g(x)+j')^n) = (0, 0)$. D'où $f(x)+j = 0$ et $g(x)+j' = 0$, puisque $A \bowtie^{f,g} (J, J')$ est réduit. Ce qui donne que $x \in I$. L'inclusion inverse est facile.

($\Leftarrow$) Soit $(f(x) + j, g(x) + j') \in A \bowtie^{f,g} (J, J')$ tel que $(f(x) + j, g(x) + j')^n = (0, 0)$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Donc $f(x) + j \in \mathrm{Nil}(B)$ et $g(x) + j' \in \mathrm{Nil}(C)$. Autrement $x \in f^{-1}(\mathrm{Nil}(B) + J) \cap g^{-1}(\mathrm{Nil}(C) + J') = I$, donc $f(x) + j \in \mathrm{Nil}(B) \cap J = (0)$ et $g(x) + j' \in \mathrm{Nil}(C) \cap J' = (0)$.

***Corollaire* 4.2.2**
$A \bowtie^f J$ *est réduit si et seulement si* A *est réduit et* $\mathrm{Nil}(B) \cap J = 0$.

Preuve.
$A \bowtie^f J$ est réduit si et seulement si :

(1) $\mathrm{Nil}(A) \cap f^{-1}(J) = (0)$ et $\mathrm{Nil}(B) \cap J = (0)$.
(2) $(\mathrm{Nil}(A) + f^{-1}(J)) \cap f^{-1}(\mathrm{Nil}(B) + J) = f^{-1}(J)$.

Or $\mathrm{Nil}(A) + f^{-1}(J) \subseteq f^{-1}(\mathrm{Nil}(B) + J)$, donc $\mathrm{Nil}(A) + f^{-1}(J) = f^{-1}(J)$, c'est à dire $\mathrm{Nil}(A) \subseteq f^{-1}(J)$. On en déduit que $A \bowtie^f J$ est réduit si et seulement si A est réduit et $\mathrm{Nil}(B) \cap J = 0$.

***Proposition* 4.2.3**
$\mathrm{w.dim}(A \bowtie^{f,g} (J, J')) \leq 1$ *si et seulement si :*

1) $f(A) + J$ *et* $g(A) + J'$ *sont arithmétiques et pour tout* $\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(A, I)$, $J_{f(\mathfrak{m})+J} = (0)$ *ou* $J'_{g(\mathfrak{m})+J'} = (0)$.
2) $\mathrm{Nil}(B) \cap J = (0)$ *et* $\mathrm{Nil}(C) \cap J' = (0)$.
3) $f^{-1}(\mathrm{Nil}(B) + J) \cap g^{-1}(\mathrm{Nil}(C) + J') = I$.

***Corollaire* 4.2.3**
$\mathrm{w.dim}(A \bowtie^f J) \leq 1$ *si et seulement si* $\mathrm{w.dim}(A) \leq 1$, $f(A) + J$ *est arithmétique,* $\mathrm{Nil}(B) \cap J = (0)$ *et pour tout* $\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(A, I)$, $I_{\mathfrak{m}} = (0)$ *ou* $J_{f(\mathfrak{m})+J} = (0)$.

***Remarque* 4.2.1**
Si A est local et $I \neq (0)$, alors $\mathrm{w.dim}(A \bowtie^f J) \leq 1$ implique que J est un idéal pur de $f(A) + J$.
En effet, si $\mathfrak{m}$ est l'idéal maximal de A, donc $J_{f(\mathfrak{m})+J} = (0)$ puisque $I \neq (0)$ (et $I_{\mathfrak{m}} \neq (0)$).

Remarquons que $f(\mathfrak{m}) + J$ est l'unique idéal maximal de $f(A) + J$ contenant J. En effet, soit $P \in \mathrm{Max}(f(A) + J)$ tel que $J \subseteq P$. Soit $f(x) + j \in P$, donc $x \in f^{-1}(P) \subseteq \mathfrak{m}$.
Ainsi, pour tout $L \in \mathrm{Spec}(f(A) + J) \setminus \{f(\mathfrak{m}) + J\}$, $J \nsubseteq L$, et donc $J_L = (f(A) + J)_L$. D'après le théorème 1.1.8, on déduit que J est un idéal pur de $f(A) + J$.

***Corollaire* 4.2.4**
Si $A \bowtie^{f,g} (J, J')$ *est local, alors* $\mathrm{w.dim}(A \bowtie^{f,g} (J, J')) \leq 1$ *si et seulement si "* $J = 0$ *et* $\mathrm{w.dim}(g(A) + J') \leq 1$ *" ou "* $J' = 0$ *et* $\mathrm{w.dim}(f(A) + J) \leq 1$ *".*

Preuve.
Supposons que $A \bowtie^{f,g} (J, J')$ est local, alors il existe un unique idéal maximal $\mathfrak{m}$ de A contenant I. Ainsi, $f(\mathfrak{m}) + J$ (*resp.* $g(\mathfrak{m}) + J'$) est l'unique idéal maximal de $f(A) + J$ (*resp.* $g(A)+J'$). Comme $\mathrm{w.dim}(A \bowtie^{f,g} (J, J')) \leq 1$, alors $J_{f(\mathfrak{m})+J} = (0)$ ou $J'_{g(\mathfrak{m})+J'} = (0)$.
Si $J_{f(\mathfrak{m})+J} = (0)$, alors $J = 0$ puisque $f(A) + J$ est local. Donc $A \bowtie^{f,g} (J, J') \cong g(A) + J'$ et par suite $\mathrm{w.dim}(g(A) + J') \leq 1$.
De même, si $J'_{g(\mathfrak{m})+J'} = (0)$, alors $J' = 0$. D'où $\mathrm{w.dim}(f(A) + J) \leq 1$ (puisque $A \bowtie^{f,g} (J, J') \cong f(A) + J$).

***Corollaire* 4.2.5**
$\mathrm{w.dim}(A \bowtie^{f,f} (J, J)) \leq 1$ *si et seulement si* $\mathrm{w.dim}(f(A) + J) \leq 1$ *et* J *est un idéal pur de* $f(A) + J$*.*

Preuve.
On a $\mathrm{w.dim}(A \bowtie^{f,f} (J, J)) \leq 1$ si et seulement si :
(1) $f(A) + J$ est un anneau arithmétique.
(2) Pour tout $\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(A, I)$, $J_{f(\mathfrak{m})+J} = (0)$.
(3) $\mathrm{Nil}(B) \cap J = (0)$.
(4) $f^{-1}(\mathrm{Nil}(B) + J) = I$.

D'autre part, pour tout $L \in \mathrm{Max}(f(A)+J)$ tel que $J \nsubseteq L$, on a $J_L = (f(A)+J)_L$. Donc, la condition (2) est équivalente à $J_L = (0)$ ou $J_L = (f(A)+J)_L$ pour tout $L \in \mathrm{Max}(f(A)+J)$. D'où J est un idéal pur.
Si (3) et (4) sont vérifiées, alors pour tout $f(x)+j \in \mathrm{Nil}(f(A)+J)$, on a $f(x) \in \mathrm{Nil}(f(A)+J) + J$. Donc $x \in f^{-1}(\mathrm{Nil}(B) + J) = I$. Par conséquent $f(x) + j \in J \cap \mathrm{Nil}(f(A) + J) \subset J \cap \mathrm{Nil}(B) = (0)$. On en déduit que $f(A) + J$ est réduit.
Réciproquement, si $f(A) + J$ est réduit. On a (3) est vérifiée puisque $J \cap \mathrm{Nil}(B) \subseteq J \cap \mathrm{Nil}(f(A) + J) = (0)$ (car $x \in \mathrm{Nil}(B) \subseteq J$, alors $x = f(0) + x \in J \cap \mathrm{Nil}(f(A) + J)$). De plus, soit $x \in f^{-1}(\mathrm{Nil}(B) + J)$, $f(x) \in \mathrm{Nil}(B) + J$. Alors, il existe $j \in J$ tel que $f(x) + j \in \mathrm{Nil}(B) \cap (f(A) + J) = \mathrm{Nil}(f(A) + J) = (0)$. D'où $x \in I$. Il en résulte que la condition (4) est vérifiée.

***Corollaire* 4.2.6**
$\mathrm{w.dim}(A \bowtie I) \leq 1$ *si et seulement si* $\mathrm{w.dim}(A) \leq 1$ *et* I *est un idéal pur de* A*.*

***Proposition* 4.2.4**
Les conditions suivantes sont équivalentes :

1) $\sup\{\text{w.dim}(A/I)\,,\ \text{w.dim}(A \bowtie^{f,g} (J,J')\,\} \leq 1$ *;*
2) $\sup\{\text{w.dim}(f(A){+}J)\,,\ \text{w.dim}(g(A){+}J')\,\} \leq 1$ *et pour tout* $\mathfrak{m} \in \text{Max}(A,I)$, $J_{f(\mathfrak{m})+J} = (0)$ *ou* $J'_{g(\mathfrak{m})+J'} = (0)$.

Preuve.

(⇒) Comme $\text{w.dim}(A/I) \leq 1$, alors A/I est réduit, et donc I est radical, d'où la condition (2) est vérifiée, d'après le corollaire 3.2.3 (puisque $\text{w.dim}(A \bowtie^{f,g} (J,J') \leq 1)$.

(⇐) Puisque $\sup\{\text{w.dim}(f(A)+J)\,,\ \text{w.dim}(g(A)+J')\,\} \leq 1$, alors $f(A)+J$ et $g(A)+J'$ sont des anneaux arithmétiques et réduits. Par conséquent $\text{w.dim}(A \bowtie^{f,g} (J,J')) \leq 1$.
Maintenant, soit $\mathfrak{m} \in \text{Max}(A,I)$, considérons l'homomorphisme d'anneaux suivant :

$$\begin{array}{cccc} \psi & : & \dfrac{A}{I} & \longrightarrow & \dfrac{f(A)+J}{J} \\ & & \overline{a} & \longmapsto & \overline{f(a)} \end{array}$$

On a $\psi(\dfrac{\mathfrak{m}}{I}) = \dfrac{f(\mathfrak{m})+J}{J}$. Ainsi, ψ induit un isomorphisme de $\left(\frac{A}{I}\right)_{\frac{\mathfrak{m}}{I}}$ vers $\left(\frac{f(A)+J}{J}\right)_{\frac{f(\mathfrak{m})+J}{J}}$.
Alors, on obtient :

$$\left(\frac{A}{I}\right)_{\frac{\mathfrak{m}}{I}} \cong \frac{(f(A)+J)_{f(\mathfrak{m})+J}}{J_{f(\mathfrak{m})+J}}$$

De même, on a l'isomorphisme d'anneaux suivant :

$$\left(\frac{A}{I}\right)_{\frac{\mathfrak{m}}{I}} \cong \frac{(g(A)+J')_{g(\mathfrak{m})+J'}}{J'_{g(\mathfrak{m})+J'}}$$

Puisque pour tout $\mathfrak{m} \in \text{Max}(A,I)$, $J_{f(\mathfrak{m})+J} = (0)$ ou $J'_{g(\mathfrak{m})+J'} = (0)$, toute localisation de $\frac{A}{I}$ par son idéal maximal qui est isomorphe soit à la localisation de $f(A)+J$ ou bien à la localisation de $g(A)+J'$. Alors, d'après [17, Théorème 1.3.14], $\text{w.dim}\,(A/I) \leq 1$.

Chapitre 5

Dimension faible des bi-amalgamations cohérentes

Mohammed TAMEKKANTE et El Mehdi BOUBA; ***Note on the weak global dimension of coherent bi-amalgamations***, Vietnam J. Math (2016)

L'objectif de ce chapitre est l'étude de la dimension globale faible des bi-amalgamations d'anneaux cohérentes.

5.1 *Dimension faible de* $A \bowtie^{f,g} (J, J')$

Le premier résultat caractérise la bi-amalgamation d'anneaux locale cohérente de dimension faible finie :

***Proposition* 5.1.1**
L'anneau $A \bowtie^{f,g} (J, J')$ *est local cohérent avec* $\mathrm{w.dim}(A \bowtie^{f,g} (J, J')) < \infty$ *si et seulement si "*$J = 0$ *et* $g(A) + J'$ *est local cohérent avec* $\mathrm{w.dim}(g(A) + J') < \infty$*" ou "*$J' = 0$ *et* $f(A) + J$ *est local cohérent avec* $\mathrm{w.dim}(f(A) + J) < \infty$*".*

Preuve.

(⇐) Facile.

(⇒) Il suffit de montrer que $J = 0$ ou $J' = 0$.
Comme $A \bowtie^{f,g} (J, J')$ est cohérent avec $\mathrm{w.dim}(A \bowtie^{f,g} (J, J')) < \infty$, alors, d'après [17, Corollaire 4.2.4], on a $\left(A \bowtie^{f,g} (J, J')\right)_P$ est intègre pour tout idéal premier P de $A \bowtie^{f,g} (J, J')$. En particulier $A \bowtie^{f,g} (J, J') \cong \left(A \bowtie^{f,g} (J, J')\right)_M$ est intègre (où

M est le seul idéal maximal de $A \bowtie^{f,g} (J, J')\big)$. On en déduit que $J = 0$ ou $J' = 0$. Ce qui achève la preuve.

La proposition suivante donne une caractérisation de la cohérence de la bi-amalgamation dans un cas particulier :

***Proposition* 5.1.2**
Supposons que J et J' sont des idéaux de type fini de $f(A)+J$ et $g(A)+J'$, respectivement. Alors, $A \bowtie^{f,g} (J, J')$ est cohérent si et seulement si $f(A) + J$ et $g(A) + J'$ le sont.

Preuve.
Avant de commencer la démonstration, on aura besoin de quelques résultats :

- Rappelons que $(f(A)+J)\times(g(A)+J')$ est un $\big(A \bowtie^{f,g} (J, J')\big)$-module via l'injection canonique $\iota : A \bowtie^{f,g} (J, J') \hookrightarrow (f(A) + J) \times (g(A) + J')$. Par cette modulation, $(f(A) + J) \times (g(A) + J')$ est de type fini engendré par $(1, 0)$ et $(1, 1)$. En effet, soit $(f(a) + j, g(b) + j') \in (f(A) + J) \times (g(A) + J')$, on a :

$$(f(a) + j, g(b) + j') = (1, 0)(f(a - b), g(a - b)) + (1, 1)(f(b) + j, g(b) + j').$$

  Donc, tout $\big((f(A) + J) \times (g(A) + J')\big)$-module de type fini est un $\big(A \bowtie^{f,g} (J, J')\big)$-module de type fini.

- Considérons l'application suivante :

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & (f(A) + J) \times (g(A) + J') & \longrightarrow & \dfrac{A \bowtie^{f,g} (J, J')}{J \times J'} \\ & (f(a) + j, g(b) + j') & \longmapsto & \overline{(f(a - b), g(a - b))} \end{array}$$

  Il est facile de vérifier que φ est un homomorphisme surjectif de $\big(A \bowtie^{f,g} (J, J')\big)$-modules. De plus,

$$\ker(\varphi) = \{(f(a)+j, g(b)+j') \in (f(A)+J)\times(g(A)+J') \mid a-b \in I\} = A \bowtie^{f,g} (J, J').$$

  On obtient la suite exacte suivante :

$$0 \longrightarrow A \bowtie^{f,g} (J, J') \hookrightarrow (f(A) + J) \times (g(A) + J') \longrightarrow \frac{A \bowtie^{f,g} (J, J')}{J \times J'} \longrightarrow 0.$$

- Puisque J et J' sont des idéaux de type fini de $f(A)+J$ et $g(A)+J'$, respectivement. Alors, l'idéal $J \times J'$ est un idéal de type fini de $A \bowtie^{f,g} (J, J')$. En effet, si $J = \sum_{i=1}^{n} j_i(f(A) + J)$ et $J' = \sum_{i=1}^{m} j'_i(g(A) + J')$, alors

$$J \times J' = \sum_{i=1}^{n}(j_i, 0)A \bowtie^{f,g} (J, J') + \sum_{i=1}^{m}(0, j'_i)A \bowtie^{f,g} (J, J').$$

  Ainsi, $\dfrac{A \bowtie^{f,g} (J, J')}{J \times J'}$ est un $\big(A \bowtie^{f,g} (J, J')\big)$-module de présentation finie.

Revenons à la preuve de la proposition.

($\Rightarrow$) Si $A \bowtie^{f,g} (J,J')$ est cohérent. Alors $f(A)+J \cong \dfrac{A \bowtie^{f,g} (J,J')}{0 \times J'}$ et $g(A)+J' \cong \dfrac{A \bowtie^{f,g} (J,J')}{J \times 0}$ sont cohérents puisque $0 \times J'$ et $J \times 0$ sont des idéaux de type fini de $\big(A \bowtie^{f,g} (J,J')\big)$.

($\Leftarrow$) On suppose que $f(A)+J$ et $g(A)+J'$ sont cohérents. Pour montrer que $\big(A \bowtie^{f,g} (J,J')$ est cohérent, il suffit de prouver que $J \times 0$ (ou $0 \times J'$) est un $\big(A \bowtie^{f,g} (J,J')\big)$-module cohérent.

Soit M un sous $\big(A \bowtie^{f,g} (J,J')\big)$-module de type fini de $J \times 0$. Donc $M = \sum_{i=1}^{n} (j_i, 0) A \bowtie^{f,g} (J,J')$ où $j_i \in J$. Ainsi, $M = N \times (0)$ avec $N = \sum_{i=1}^{n} j_i (f(A)+J)$. Alors, M est un idéal de type fini de $(f(A)+J) \times (g(A)+J')$ qui est cohérent. Par conséquent, M est un $\big((f(A)+J) \times (g(A)+J')\big)$-module de présentation fini. Maintenant, on considère la suite exacte :

$$0 \longrightarrow \operatorname{Ker}(\nu) \hookrightarrow \left((f(A)+J) \times (g(A)+J')\right)^n \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

avec ν est défini par :

$$\nu\left((f(a_i)+k_i, g(b_i)+k'_i)_{i=1,\dots,n}\right) = \sum_{i=1}^{n} (j_i,0)(f(a_i)+k_i, g(b_i)+k'_i) = \left(\sum_{i=1}^{n} j_i(f(a_i)+k_i), 0\right).$$

Puisque M est de présentation finie, alors $\operatorname{Ker}(\nu)$ est un $\big((f(A)+J) \times (g(A)+J')\big)$-module de type fini et donc c'est un $\big(A \bowtie^{f,g} (J,J')\big)$-module de type fini.

Soit μ la restriction de ν sur $\big(A \bowtie^{f,g} (J,J')\big)^n$. Donc μ est aussi surjectif et $\operatorname{Ker}(\mu) = \operatorname{Ker}(\nu) \cap \big(A \bowtie^{f,g} (J,J')\big)^n$. Par suite, on a le diagramme commutatif de $\big(A \bowtie^{f,g} (J,J')\big)$-modules suivant :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & 0 & & 0 & & 0 & \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
0 \longrightarrow & \operatorname{Ker}(\mu) & \longrightarrow & \big(A \bowtie^{f,g} (J,J')\big)^n & \longrightarrow & M & \longrightarrow 0 \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \| & \\
0 \longrightarrow & \operatorname{Ker}(\nu) & \longrightarrow & \left((f(A)+J) \times (g(A)+J')\right)^n & \longrightarrow & M & \longrightarrow 0 \\
 & \downarrow & & \downarrow & & & \\
 & \operatorname{Ker}(\nu)/\operatorname{Ker}(\mu) & \longrightarrow & \left(\dfrac{A \bowtie^{f,g} (J,J')}{J \times J'}\right)^n & & & \\
 & \downarrow & & \downarrow & & & \\
 & 0 & & 0 & & &
\end{array}$$

D'après le lemme du serpent, on a $\operatorname{Ker}(\nu)/\operatorname{Ker}(\mu) \cong \left(\dfrac{A \bowtie^{f,g} (J,J')}{J \times J'}\right)^n$ et donc $\operatorname{Ker}(\nu)/\operatorname{Ker}(\mu)$ est un $\big(A \bowtie^{f,g} (J,J')\big)$-module de présentation finie. Donc $\operatorname{Ker}(\mu)$

est de type fini puisque $\mathrm{Ker}(\nu)$ est de type fini. D'où M est un $\big(A \bowtie^{f,g} (J, J')\big)$-module de présentation finie. Ainsi, $J \times 0$ est cohérent. Il en résulte que $A \bowtie^{f,g} (J, J')$ est cohérent.

***Corollaire* 5.1.1**
On suppose que $f^{-1}(J)$ et J sont des idéaux de type fini de A et $f(A)+J$, respectivement. Alors, $A \bowtie^f J$ est cohérent si et seulement si A et $f(A)+J$ le sont.

***Exemple* 5.1.1**
Soient $\iota_1 : \mathbb{Z}[X] \hookrightarrow \mathbb{Z} + X\mathbb{Q}[X]$ et $\iota_2 : \mathbb{Z}[X] \hookrightarrow \mathbb{Z}[[X]]$ les injections canoniques. Soit n un entier positif $n > 0$, considérons les idéaux :

$$J = n\mathbb{Z} + X\mathbb{Q}[X] \ \ et \ \ J' = n\mathbb{Z} + X\mathbb{Z}[[X]]$$

de $\mathbb{Z} + X\mathbb{Q}[X]$ et $\mathbb{Z}[[X]]$, respectivement. Alors,

$$T := \mathbb{Z}[X] \bowtie^{\iota_1,\iota_2} (J, J') = \{(A, B) \in (\mathbb{Z} + X\mathbb{Q}[X]) \times \mathbb{Z}[[X]] \mid n \ divise \ A(0) - B(0)\}$$

est un anneau cohérent non Noethérien.

Preuve.
D'abord, on a J et J' sont des idéaux de type fini de $\mathbb{Z}+X\mathbb{Q}[X]$ et $\mathbb{Z}[[X]]$, respectivement. D'autre part, d'après [17, Corollaires 5.2.5 et 5.2.9], on a :

$$\iota_1(\mathbb{Z}[X]) + J = \mathbb{Z}[X] + n\mathbb{Z} + X\mathbb{Q}[X] = \mathbb{Z} + X\mathbb{Q}[X]$$

est un anneau cohérent mais n'est pas Noethérien. De plus,

$$\iota_2(\mathbb{Z}[X]) + J' = \mathbb{Z}[X] + n\mathbb{Z} + X\mathbb{Z}[[X]] = \mathbb{Z}[[X]]$$

qui est Noethérien. Par conséquent, T est cohérent non Noethérien.

Sous les mêmes notations que la proposition 2.5.3. Soit $\mathfrak{m} \in Max(A, I)$, considérons les parties multiplicatives

$$S_{\mathfrak{m}} := (f(A) + J) \setminus (f(\mathfrak{m}) + J) = f(A \setminus \mathfrak{m}) + J$$
$$\big(resp. \ S'_{\mathfrak{m}} := (g(A) + J') \setminus (g(\mathfrak{m}) + J') = g(A \setminus \mathfrak{m}) + J'\big)$$

de $f(A)+J$ et B (resp. de $g(A)+J'$ et C). Et soit $f_{\mathfrak{m}} : A_{\mathfrak{m}} \to B_{S_{\mathfrak{m}}}$ $\big($resp. $g_{\mathfrak{m}} : A_{\mathfrak{m}} \to C_{S'_{\mathfrak{m}}}\big)$ l'homomorphisme canonique induit par f (resp. par g). De plus, on a :

$$(f(A) + J)_{f(\mathfrak{m})+J} = f_{\mathfrak{m}}(A_{\mathfrak{m}}) + J_{f(\mathfrak{m})+J}.$$

En effet, $f_{\mathfrak{m}}(A_{\mathfrak{m}}) + J_{f(\mathfrak{m})+J}$ est un sous-anneau de $(f(A) + J)_{f(\mathfrak{m})+J}$. Inversement, soit $x \in (f(A) + J)_{f(\mathfrak{m})+J}$,

$$x = \frac{f(a) + j}{f(s) + j'} = \frac{f(a)}{f(s)} + \frac{jf(s) - j'f(a)}{f(s^2) + j'f(s)} \in f_{\mathfrak{m}}(A_{\mathfrak{m}}) + J_{f(\mathfrak{m})+J}$$

pour certains $a \in A$, $s \in A \backslash \mathfrak{m}$ et $j, j' \in J$.
D'une manière similaire, on a :

$$(g(A) + J')_{g(m)+J'} = g_{\mathfrak{m}}(A_{\mathfrak{m}}) + J'_{g(\mathfrak{m})+J'}\,.$$

Adoptons la notation suivante :

$$\begin{array}{rcl} Y & := & \mathrm{Max}(f(A) + J) \\ Y' & := & \mathrm{Max}(g(A) + J') \end{array}$$

La proposition suivante nous permet de déterminer la dimension faible des extensions bi-amalgamées cohérentes.

***Proposition* 5.1.3**
Supposons que l'anneau $A \bowtie^{f,g} (J, J')$ est cohérent et soit $n \in \mathbb{N}$.
Alors $\mathrm{w.dim}\left(A \bowtie^{f,g} (J, J')\right) \leq n$ *si et seulement si :*

1) *Pour tout* $\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(A, I)$, $J_{f(\mathfrak{m})+J} = (0)$ *ou* $J'_{g(\mathfrak{m})+J'} = (0)$.
2) $\mathrm{w.dim}\left((f(A) + J)_L\right) \leq n$ *et* $\mathrm{w.dim}\left((f(A) + J)_{f(\mathfrak{m})+J}\right) \leq n$ *pour tout* $J \nsubseteq L \in Y$ *et tout* $\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(A, I)$ *tel que* $J'_{g(\mathfrak{m})+J'} = (0)$.
3) $\mathrm{w.dim}\left((g(A) + J')_{L'}\right) \leq n$ *et* $\mathrm{w.dim}\left((g(A) + J')_{g(\mathfrak{m})+J'}\right) \leq n$ *pour tout* $J' \nsubseteq L' \in Y'$ *et tout* $\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(A, I)$ *tel que* $J_{f(\mathfrak{m})+J} = (0)$.

Preuve.
Rappelons que si R un anneau, on a :

$$\mathrm{w.dim}(R) = \sup\{\mathrm{w.dim}(R_{\mathfrak{m}}) \mid \mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(R)\} = \sup\{\mathrm{w.dim}(R_{\mathfrak{p}}) \mid \mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)\}.$$

($\Rightarrow$) Soit $\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(A, I)$ et soit $M = \mathfrak{m} \bowtie^{f,g} (J, J')$. Puisque $A \bowtie^{f,g} (J, J')$ est cohérent avec $\mathrm{w.dim}\left(A \bowtie^{f,g} (J, J')\right) < \infty$, alors

$$\left(A \bowtie^{f,g} (J, J')\right)_M \cong A_{\mathfrak{m}} \bowtie^{f_{\mathfrak{m}}, g_{\mathfrak{m}}} (J_{S_{\mathfrak{m}}}, J'_{S'_{\mathfrak{m}}})$$

est un anneau intègre. Par suite, $J_{f(\mathfrak{m})+J} = J_{S_{\mathfrak{m}}} = (0)$ ou $J'_{g(\mathfrak{m})+J'} = J'_{S'_{\mathfrak{m}}} = (0)$.
Si $J'_{g(\mathfrak{m})+J'} = (0)$, alors,

$$\left(A \bowtie^{f,g} (J, J')\right)_M \cong f_{\mathfrak{m}}(A_{\mathfrak{m}}) + J_{S_{\mathfrak{m}}} = (f(A) + J)_{f(\mathfrak{m})+J}\,.$$

Donc, $\mathrm{w.dim}\left((f(A) + J)_{f(\mathfrak{m})+J}\right) \leq n$.
Maintenant, on suppose que $L \in Y$ tel que $J \nsubseteq L$ et soit $M = \overline{L}$. Alors, M est un idéal maximal de $A \bowtie^{f,g} (J, J')$ et on a :

$$(A \bowtie^{f,g} (J, J'))_M \cong (f(A) + J)_L\,.$$

Ainsi, $\mathrm{w.dim}\left((f(A) + J)_L\right) \leq n$.
De la même manière, on montre que la condition (3) est vérifiée.

($\Leftarrow$) Soit $M \in \operatorname{Max}\left(A \bowtie^{f,g} (J, J')\right)$.
Si $J \times J' \nsubseteq M$, on obtient, d'après les conditions (2) et (3), que :

$$\text{w.dim}\left((A \bowtie^{f,g} (J, J'))_M\right) \leq n.$$

Si $J \times J' \subseteq M$, alors il existe $\mathfrak{m} \in \operatorname{Max}(A, I)$ tel que $M = \mathfrak{m} \bowtie^{f,g} (J, J')$ et on a :

$$\left(A \bowtie^{f,g} (J, J')\right)_M \cong A_{\mathfrak{m}} \bowtie^{f_{\mathfrak{m}}, g_{\mathfrak{m}}} (J_{S_{\mathfrak{m}}}, J'_{S'_{\mathfrak{m}}}).$$

Ainsi, par la condition (1), on a :

$$\left(A \bowtie^{f,g} (J, J')\right)_M \cong \begin{cases} f_{\mathfrak{m}}(A_{\mathfrak{m}}) + J_{S_{\mathfrak{m}}} = (f(A) + J)_{f(\mathfrak{m})+J} & \text{si } J'_{g(\mathfrak{m})+J'} = (0) \\ g_{\mathfrak{m}}(A_{\mathfrak{m}}) + J'_{S'_{\mathfrak{m}}} = (g(A) + J')_{g(\mathfrak{m})+J'} & \text{si } J_{f(\mathfrak{m})+J} = (0) \end{cases}$$

D'après (2) et (3), on en déduit que $\text{w.dim}\left(A \bowtie^{f,g} (J, J')\right) \leq n$. D'où le résultat.

***Proposition* 5.1.4**
On suppose que $A \bowtie^{f,g} (J, J')$ est cohérent et soit $n \in \mathbb{N}$. Alors, les assertions suivantes sont équivalentes :

1) $\sup\left\{\text{w.dim}\left(\frac{A}{I}\right), \text{w.dim}\left(A \bowtie^{f,g} (J, J')\right)\right\} \leq n$ *;*
2) $\sup\{\text{w.dim}(f(A) + J), \text{w.dim}(g(A) + J')\} \leq n$ *et pour tout* $\mathfrak{m} \in \operatorname{Max}(A, I)$*,* $J_{f(\mathfrak{m})+J} = (0)$ *ou* $J'_{g(\mathfrak{m})+J'} = (0)$*.*

Preuve.
On a pour tout $\mathfrak{m} \in \operatorname{Max}(A, I)$,

$$\left(\frac{A}{I}\right)_{\frac{\mathfrak{m}}{I}} \cong \frac{(f(A) + J)_{f(\mathfrak{m})+J}}{J_{f(\mathfrak{m})+J}} \quad et \quad \left(\frac{A}{I}\right)_{\frac{\mathfrak{m}}{I}} \cong \frac{(g(A) + J')_{g(\mathfrak{m})+J'}}{J'_{g(\mathfrak{m})+J'}}.$$

($\Rightarrow$) D'après la proposition 5.1.3, il suffit de montrer que $\text{w.dim}\left((f(A) + J)_{f(\mathfrak{m})+J}\right) \leq n$ (resp. $\text{w.dim}\left((g(A) + J')_{g(\mathfrak{m})+J'}\right) \leq n$) pour tout $\mathfrak{m} \in \operatorname{Max}(A, I)$ tel que $J_{f(\mathfrak{m})+J} = (0)$ (resp. $J'_{g(\mathfrak{m})+J'} = (0)$).
Soit $\mathfrak{m} \in \operatorname{Max}(A, I)$, on a :

$$\left(\frac{A}{I}\right)_{\frac{\mathfrak{m}}{I}} \cong (f(A) + J)_{f(\mathfrak{m})+J} \quad \left(\text{resp. } \left(\frac{A}{I}\right)_{\frac{\mathfrak{m}}{I}} \cong (g(A) + J')_{g(\mathfrak{m})+J'}\right).$$

Puisque $\text{w.dim}\left(\left(\frac{A}{I}\right)_{\mathfrak{m}}\right) \leq n$, on obtient le résultat.

($\Leftarrow$) Réciproquement, on a évidement $\text{w.dim}\left(A \bowtie^{f,g} (J, J')\right) \leq n$.
D'autre part, soit $\mathfrak{m} \in \operatorname{Max}(A, I)$. D'après l'hypothèse, on a :

$$\left(\frac{A}{I}\right)_{\frac{\mathfrak{m}}{I}} \cong (f(A) + J)_{f(\mathfrak{m})+J} \quad ou \quad \left(\frac{A}{I}\right)_{\frac{\mathfrak{m}}{I}} \cong (g(A) + J')_{g(\mathfrak{m})+J'}.$$

Comme $J_{f(\mathfrak{m})+J} = (0)$ ou $J'_{g(\mathfrak{m})+J'} = (0)$, alors toute localisation de $\left(\dfrac{A}{I}\right)$ est isomorphe à une localisation de $f(A) + J$ ou de $g(A) + J'$. Or,

$$\sup \{\text{w.dim}(f(A) + J), \text{w.dim}(g(A) + J')\} \leq n,$$

d'où w.dim $\left(\frac{A}{I}\right) \leq n$.

***Corollaire* 5.1.2**
On suppose que A/I est un corps, J et J' sont des idéaux de type fini de $f(A) + J$ et $g(A) + J'$ et soit $n \in \mathbb{N}$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

1) *$A \bowtie^{f,g} (J, J')$ est cohérent de dimension faible au plus égale à n ;*
2) *$f(A) + J$ et $g(A) + J'$ sont cohérents de dimensions faibles au plus égales à n et J (ou J') est engendré par un élément idempotent.*

Preuve.
Puisque J et J' sont des idéaux de type fini de $f(A) + J$ et $g(A) + J'$, respectivement. Alors $A \bowtie^{f,g} (J, J')$ est cohérent si et seulement si $f(A) + J$ et $g(A) + J'$ sont cohérents.

($\Rightarrow$) Il suffit de montrer que J ou J' est engendré par un élément idempotent. D'après la proposition 2.4.1, on a J (resp. J') est un idéal maximal de $f(A) + J$ (resp. de $g(A) + J'$) et $\text{Max}(A, I) = \{I\}$. Ainsi, $J = f(I) + J$ et $J' = g(I) + J'$, et donc $J_J = (0)$ ou $J'_{J'} = (0)$. D'où J ou J' est un idéal pur. Or J et J' sont de type fini. Alors, d'après [12, Proposition pages $293-294$], on obtient que J ou J' est engendré par un élément idempotent.

($\Leftarrow$) Si par exemple, J' est engendré par un idempotent, alors $J'_{g(I)+J'} = J'_{J'} = (0)$, d'après la proposition 5.1.4, on a w.dim $\left(A \bowtie^{f,g} (J, J')\right) \leq n$.

Le corollaire 5.1.2 enrichit la littérature par des exemples d'anneaux non Noethériens cohérents de dimensions faibles finies.

***Exemple* 5.1.2**
Soient R un anneau non Noethérien, régulier au sens de Von Neumann et $(S, \mathfrak{m})$ un anneau local régulier tel que gldim$(S) = n$. Considérons les surjections $f : R \times S \to S\,;\ (r, s) \mapsto s$ et $g : R \times S \to R \times S/\mathfrak{m}\,;\ (r, s) \mapsto (r, \bar{s})$. Alors,

$$T := (R \times S) \bowtie^{f,g} (\mathfrak{m}, R \times (\bar{0})) = \{(s, (r, \bar{s})) \mid r \in R,\ s \in S\}$$

est un anneau non Noethérien, cohérent et de dimension faible finie.

Preuve.
Notons que :

$$I = f^{-1}(\mathfrak{m}) = g^{-1}\big(R \times (\bar{0})\big) = R \times \mathfrak{m},$$

et que $\frac{R\times S}{R\times \mathfrak{m}} \cong \frac{S}{\mathfrak{m}}$ est un corps. En outre, T est un anneau non Noethérien (puisque $R\times S/\mathfrak{m}$ est non Noethérien) et cohérent. D'autre part, $R \times (\bar{0})$ est engendré par $(1, \bar{0})$ qui est idempotent dans $R \times S/\mathfrak{m}$. D'après le corollaire, on en déduit que T est de dimension faible finie.

Le résultat suivant étudie un cas particulier de la duplication. Soit A un anneau et I un idéal propre de A.

***Corollaire* 5.1.3**
On suppose que $A \bowtie I$ est cohérent et soit $n \in \mathbb{N}$. Alors $\text{w.dim}(A \bowtie I) \leq n$ *si et seulement si* $\text{w.dim}(A) \leq n$ *et I est un idéal pur de A.*

En particulier, si I est de type fini et A est cohérent, alors $\text{w.dim}(A \bowtie I) \leq n$ *si et seulement si* $\text{w.dim}(A) \leq n$ *et I est engendré par un idempotent.*

Preuve.
En utilisant la proposition 5.1.3, puisque $A \bowtie I$ est cohérent, alors $\text{w.dim}(A \bowtie I) \leq n$ et $I_{\mathfrak{m}} = (0)$ pour tout $\mathfrak{m} \in \text{Max}(A, I)$. Cette dernière condition est équivalente à I est un idéal pur de A.

Maintenant, si I est de type fini et A est cohérent, alors $A \bowtie I$ est cohérent d'après [9, Lemme 4.2]. De plus, les idéaux purs de type fini sont exactement les idéaux engendrés par un idempotent.

***Exemple* 5.1.3**
Pour tout entier $k > 1$, on a :

$$\text{w.dim}\big(\mathbb{Z} \bowtie (k\mathbb{Z})\big) = \text{gldim}\big(\mathbb{Z} \bowtie (k\mathbb{Z})\big) = \infty.$$

En effet, $\mathbb{Z} \bowtie (k\mathbb{Z})$ est Noethérien (puisque $\mathbb{Z}$ est Noethérien) et $k\mathbb{Z}$ n'est jamais engendré par un idempotent puisque $\mathbb{Z}$ est intègre.

Rappelons qu'un anneau R est semi-héréditaire si et seulement si R est cohérent et $\text{w.dim}(R) \leq 1$. Le corollaire suivant récupère un résultat connu pour les duplications.

***Corollaire* 5.1.4**
Supposons que I est un idéal de type fini de A. Alors, $A \bowtie I$ est semi-héréditaire si et seulement si A est semi-héréditaire et I est engendré par un idempotent.

Nous terminons ce chapitre par un résultat dans lequel nous traitons la dimension globale des bi-amalgamations Noethériennes.

***Proposition* 5.1.5**
On suppose que $f(A) + J$ et $g(A) + J'$ sont Noethériens de dimensions globales finies. Alors, les assertions suivantes sont équivalentes :

1) $\sup\left\{\text{gldim}\left(\frac{A}{I}\right), \text{gldim}\left(A \bowtie^{f,g} (J, J')\right)\right\} \leq n$ *;*
2) $\sup\{\text{gldim}(f(A) + J), \text{gldim}(g(A) + J')\} \leq n$ *et pour tout* $\mathfrak{m} \in \text{Max}(A, I)$, $J_{f(\mathfrak{m})+J} = (0)$ *ou* $J'_{g(\mathfrak{m})+J'} = (0)$.

***Exemple* 5.1.4**
Soient A_0 un anneau semi-simple qui n'est pas un corps et I un idéal propre de A_0 (par exemple $A_0 := \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ et $I := 3\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$). Soit $A = A_0 \bowtie I$ la duplication de A_0 le long de I. Soit n un entier positif $n > 0$, $D = A_0[X_1, X_2, ..., X_n]$. Considérons $f : A \twoheadrightarrow A_0$ et $g : A \hookrightarrow A_0 \times D$. Et posons $J = I$ et $J' = I \times D$. Alors $A \bowtie^{f,g} (J, J')$ est de dimension globale finie.

Preuve.
Notons que $f^{-1}(J) = g^{-1}(J') = I \times I$. De plus, soit $\mathfrak{m} \bowtie I \in \mathrm{Max}(A, I \times I)$. Alors, on a nécessairement $\mathfrak{m} \in (A_0, I)$ et

$$J_{f(\mathfrak{m} \bowtie I)+J} = I_{\mathfrak{m}+I} = I_{\mathfrak{m}} = (0)$$

puisque I est engendré par un idempotent (car A_0 est semi-simple). D'autre part,

$$\mathrm{gldim}\,(f(A) + J) = \mathrm{gldim}\,(A_0 + I) = \mathrm{gldim}(A_0) = 0,$$

et

$$\begin{aligned} \mathrm{gldim}\,(g(A) + J') = \mathrm{gldim}\,(A + (I \times D)) &= \mathrm{gldim}\,(A_0 \times D) \\ &= \sup\{\mathrm{gldim}(A_0), \mathrm{gldim}(D)\} = n. \end{aligned}$$

Ainsi, $A \bowtie^{f,g} (J, J')$ est de dimension globale finie.

Chapitre 6

Bi-amalgamations pm^+, de caractère fini et h-locales

Mohammed TAMEKKANTE et El Mehdi BOUBA; *On Pm+ and finite character bi-amalgamation*, Bulletin of the Iranian Mathematical Society Vol. 43 (2017), No. 5, pp. 1237-1244

Dans ce chapitre, on va étudier le transfert des notions de pm-anneaux, pm^+-anneaux, anneaux de caractère fini et anneaux h-locaux aux bi-amalgamations d'anneaux.

6.1 *Définitions et propriétés*

***Définitions* 6.1.1**
Soit R un anneau commutatif.

1) *R est appelé pm-anneau si tout idéal premier de R est contenu dans un unique idéal maximal de R, ce qui est équivalent à, R/P est un anneau local pour tout idéal premier P de R.*
2) *R est appelé pm^+-anneau si les idéaux premiers contenant un tel idéal premier forment une chaîne.*
3) *R est un anneau "clean" si pour tout $a \in R$, a peut s'écrire sous forme $a = u + e$ tel que $u \in U(R)$ et $e \in Idem(R)$ où $Idem(R)$ est l'ensemble des éléments idempotents de R.*
4) *R est dit anneau de caractère fini si tout idéal propre est contenu dans un nombre fini d'idéaux maximaux. Autrement dit, R/I est un anneau semi-local, pour tout idéal I de R.*

5) *R est un anneau h-local s'il est pm-anneau et est de caractère fini, c'est équivaut à dire que, tout idéal premier de R est contenu dans un unique idéal maximal et tout idéal propre est contenu dans un nombre fini d'idéaux maximaux de R.*

***Proposition* 6.1.1**
Tout anneau de valuation est un pm^+-anneau.

Preuve.
Soit R un anneau de valuation et montrons que R est un pm^+-anneau.

Soient $P \in \mathrm{Spec}(R)$ et $P_1, P_2 \in V(P)$. Supposons que $P_1 \nsubseteq P_2$ et $P_2 \nsubseteq P_1$. Alors il existe $a \in P_1 \setminus P_2$ et $b \in P_2 \setminus P_1$. Ainsi $aR \subseteq bR$ ou $bR \subseteq aR$ puisque R est de valuation. D'où $a \in P_2$ ou $b \in P_1$. Ce qui est absurde.

***Définition* 6.1.1**
Soit R un anneau. Un idéal premier P de R est dit minimal s'il ne contient aucun idéal premier.

***Exemple* 6.1.1**
Si R est un anneau Artinien, alors tout idéal maximal de R est un idéal premier minimal.

***Proposition* 6.1.2 ([3], Théroème 5)**
Tout anneau "clean" est un pm-anneau. On a l'équivalence si l'anneau a un nombre fini d'idéaux premiers minimaux.

***Proposition* 6.1.3**
Tout anneau Noethérien a un nombre fini d'idéaux premiers minimaux.

Preuve.
Soit R un anneau Noethérien, alors pour tout idéal I de R, on a :

$$\sqrt{I} = \mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{p}_2 \cap \cdots \cap \mathfrak{p}_n,$$

où $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, ..., \mathfrak{p}_n \in \mathrm{Spec}(R)$.

Soit P un idéal premier minimal de R. Comme $(0) \subseteq P$, alors $\sqrt{(0)} \subseteq \sqrt{P} = P$. Donc il existe $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, ..., \mathfrak{p}_n \in \mathrm{Spec}(R)$ tels que $\sqrt{(0)} = \mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{p}_2 \cap \cdots \cap \mathfrak{p}_n \subseteq P$. Ainsi, il existe $i_0 \in \{1, ..., n\}$ tel que $\mathfrak{p}_{i_0} \subseteq P$. Or P est minimal, d'où $P = \mathfrak{p}_{i_0}$. Ce qui achève la preuve.

***Proposition* 6.1.4 ([3], Corollaire 11)**
Tout anneau de dimension 0 (*au sens de Krull*) *est "clean".*

6.2 Transfert de la propriété pm^+-anneau à la bi-amalgamation

***Proposition* 6.2.1**
$A \bowtie^{f,g} (J, J')$ est un pm^+-anneau si et seulement si $f(A) + J$ et $g(A) + J'$ le sont.

Preuve.

($\Rightarrow$) On suppose que $A \bowtie^{f,g} (J, J')$ est pm^+-anneau. Puisque l'image homomorphe d'un pm^+-anneau est un pm^+-anneau et $\dfrac{A \bowtie^{f,g} (J, J')}{0 \times J'} \cong f(A) + J$ et $\dfrac{A \bowtie^{f,g} (J, J')}{J \times 0} \cong g(A) + J'$. Alors $f(A) + J$ et $g(A) + J'$ sont des pm^+-anneaux.

($\Leftarrow$) Réciproquement, soit P un idéal premier de $A \bowtie^{f,g} (J, J')$. Montrons que deux idéaux premiers contenant P sont comparables. Soient P_1 et $P_2 \in \mathrm{Spec}(A \bowtie^{f,g} (J, J'))$ contenant P.
Si $J \times J' \subseteq P$, alors $J \times J' \subseteq P_1$ et $J \times J' \subseteq P_2$, donc il existe $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{p}_2 \in \mathrm{Spec}(A)$ tels que :

$$P = \mathfrak{p} \bowtie^{f,g} (J, J'),\ P_1 = \mathfrak{p}_1 \bowtie^{f,g} (J, J') \text{ et } P_2 = \mathfrak{p}_2 \bowtie^{f,g} (J, J').$$

Le fait que $P \subseteq P_1$ et $P \subseteq P_2$ donne $\dfrac{\mathfrak{p}}{I} \subseteq \dfrac{\mathfrak{p}_1}{I}$ et $\dfrac{\mathfrak{p}}{I} \subseteq \dfrac{\mathfrak{p}_2}{I}$. D'autre part $\dfrac{A}{I} \cong \dfrac{f(A) + J}{J}$ est un pm^+-anneau. D'où $\dfrac{\mathfrak{p}_1}{I}$ et $\dfrac{\mathfrak{p}_2}{I}$ sont comparables et donc de même pour $\mathfrak{p}_1$ et $\mathfrak{p}_2$. Par conséquent P_1 et P_2 sont comparables.

Si $J_1 \times J_2 \nsubseteq P$, alors il existe L dans $\mathrm{Spec}(f(A) + J)$ ou dans $\mathrm{Spec}(g(A) + J')$ avec $J \nsubseteq L$ ou $J' \nsubseteq L$ tel que $P = \overline{L}$. On suppose que $L \in \mathrm{Spec}(f(A) + J)$ (de même si $L \in \mathrm{Spec}(g(A) + J')$). On a $0 \times J' \subseteq (L \times (g(A) + J')) \cap (A \bowtie^{f,g} (J, J')) = \overline{L} = P$. Donc $0 \times J' \subseteq P_1$ et $0 \times J' \subseteq P_2$. D'autre part $\dfrac{P_1}{0 \times J'}$ et $\dfrac{P_2}{0 \times J'}$ sont des idéaux premiers contenant $\dfrac{P}{0 \times J'}$ de $\dfrac{A \bowtie^{f,g} (J, J')}{0 \times J'} \cong f(A) + J$ qui est un pm^+-anneau. D'où $\dfrac{P_1}{0 \times J'}$ et $\dfrac{P_2}{0 \times J'}$ sont comparables et de même pour P_1 et P_2. Ce qui montre que $A \bowtie^{f,g} (J, J')$ est un pm^+-anneau.

***Corollaire* 6.2.1**

1) *$A \bowtie^{f} J$ est un pm^+-anneau si et seulement si A et $f(A) + J$ le sont.*
2) *$A \bowtie I$ est un pm^+-anneau si et seulement si A l'est.*

***Exemple* 6.2.1**
Soit p un nombre premier, considérons l'anneau $\mathbb{Z}_p$ des entiers p-adic. On sait que $\mathbb{Z}_p$ est un domaine de valuation, donc est un pm^+-anneau. Ainsi, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, l'anneau $\mathbb{Z}_p \bowtie (p^n\mathbb{Z}_p)$ est un pm^+-anneau.

6.3 *La propriété* pm*-anneau*

***Proposition* 6.3.1**
$A \bowtie^{f,g} (J, J')$ est un pm-anneau si et seulement si $f(A) + J$ et $g(A) + J'$ le sont.

Preuve.

($\Rightarrow$) Claire, puisque l'image homomorphe d'un pm-anneau est un pm-anneau.

($\Leftarrow$) Soit $P \in \mathrm{Spec}\big(A \bowtie^{f,g} (J, J')\big)$ contenant dans $M_1, M_2 \in \mathrm{Max}\big(A \bowtie^{f,g} (J, J')\big)$.
Si $J \times J' \subseteq P$, alors $J \times J' \subseteq M_1$ et $J \times J' \subseteq M_2$, donc il existe $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$, $\mathfrak{m}_1$, $\mathfrak{m}_2 \in \mathrm{Max}(A)$ tels que :

$$P = \mathfrak{p} \bowtie^{f,g} (J, J'),\ M_1 = \mathfrak{m}_1 \bowtie^{f,g} (J, J') \ et\ M_2 = \mathfrak{m}_2 \bowtie^{f,g} (J, J').$$

D'une manière analogue que la preuve précédente, on a $\dfrac{\mathfrak{m}_1}{I}$ et $\dfrac{\mathfrak{m}_2}{I}$ sont des idéaux maximaux de $\dfrac{A}{I}$ (qui est isomorphe au pm-anneau $\dfrac{f(A)+J}{J}$) contenant $\dfrac{\mathfrak{p}}{I}$. D'où $\dfrac{\mathfrak{m}_1}{I} = \dfrac{\mathfrak{m}_2}{I}$. Ainsi $M_1 = M_2$..

Maintenant, on suppose que $J_1 \times J_2 \nsubseteq P$, alors il existe L dans $\mathrm{Spec}(f(A) + J\big)$ (ou dans $\mathrm{Spec}(g(A) + J')\,)$ avec $J \nsubseteq L$ $\big($ou $J' \nsubseteq L\big)$ tel que $P = \overline{L}$. Dans le cas où $L \in \mathrm{Spec}(f(A) + J)$ $\big($de même si $L \in \mathrm{Spec}(g(A) + J')\,\big)$, on a $0 \times J' \subseteq P$. Donc $0 \times J' \subseteq M_1$ et $0 \times J' \subseteq M_2$. Ainsi, $\dfrac{M_1}{0 \times J'}$ et $\dfrac{M_2}{0 \times J'}$ sont des idéaux maximaux du pm-anneau $\dfrac{A \bowtie^{f,g} (J, J')}{0 \times J'}$ contenant l'idéal premier $\dfrac{P}{0 \times J'}$. D'où $\dfrac{M_1}{0 \times J'} = \dfrac{M_2}{0 \times J'}$ et donc $M_1 = M_2$. Ce qui achève la preuve.

***Corollaire* 6.3.1**

1) *$A \bowtie^f J$ est un pm-anneau si et seulement si A et $f(A) + J$ le sont.*
2) *$A \bowtie I$ est un pm-anneau si et seulement si A l'est.*

***Corollaire* 6.3.2**

1) *Si $A \bowtie^{f,g} (J, J')$ est "clean", alors $f(A) + J$ et $g(A) + J'$ le sont.*
2) *Si $f(A) + J$ et $g(A) + J'$ ont un nombre fini d'idéaux premiers minimaux, alors $A \bowtie^{f,g} (J, J')$ est "clean" si et seulement si $f(A) + J$ et $g(A) + J'$ le sont.*

   En particulier, $A \bowtie^{f,g} (J, J')$ est Noethérien et "clean" si et seulement si $f(A) + J$ et $g(A) + J'$ sont Noethériens et "clean".

Preuve.

1) L'image homomorphe d'un anneau "clean" est "clean".

2) Montrons que $A \bowtie^{f,g} (J, J')$ a un nombre fini d'idéaux premiers minimaux. Si $J = 0$ (resp. $J' = 0$), alors on a $A \bowtie^{f,g} (J, J') \cong g(A) + J'$ (resp. $A \bowtie^{f,g} (J, J') \cong f(A) + J$), donc $A \bowtie^{f,g} (J, J')$ vérifie la propriété.

Maintenant, on suppose que $J \neq 0$ et $J' \neq 0$.
Soit P un idéal premier minimal de $A \bowtie^{f,g} (J, J')$. Donc il existe $L \in \mathrm{Spec}(f(A)+J)$ ou $L \in \mathrm{Spec}(g(A) + J')$ tel que $P = \overline{L}$. Si $L \in \mathrm{Spec}(f(A) + J)$, montrons que L est minimal. Soit $K \in \mathrm{Spec}(f(A) + J)$ tel que $K \subseteq L$. Alors $0 \times J' \subseteq \overline{K} \subseteq \overline{L} = P$. Donc $\overline{K} = \overline{L}$ et donc $K = L$. Or $f(A) + J$ et $g(A) + J'$ ont un nombre fini d'idéaux premiers minimaux. D'où le résultat.

***Exemple* 6.3.1**
Soit n un entier tel que $n > 1$. Sachant que l'anneau Noethérien $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est de dimension de Krull 0. Ainsi, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un anneau "clean". Alors pour tout $1 < m < n$, l'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \bowtie (\bar{m})$ est un anneau "clean".

6.4 *Les propriétés de caractère fini et h-local*

***Proposition* 6.4.1**
On suppose que $J \neq 0$ et $J' \neq 0$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

1) *$A \bowtie^{f,g} (J, J')$ est semi-local ;*
2) *$A \bowtie^{f,g} (J, J')$ est de caractère fini ;*
3) *$f(A) + J$ et $g(A) + J'$ sont semi-locaux.*

Preuve.
1) $\Rightarrow$ 2) Claire.

2) $\Rightarrow$ 3) Puisque $J \times 0$ et $0 \times J'$ sont des idéaux non nuls de $A \bowtie^{f,g} (J, J')$, alors il existe un nombre fini d'idéaux maximaux de $A \bowtie^{f,g} (J, J')$ contenant $J \times 0$ et $0 \times J'$, respectivement.
D'où $\dfrac{A \bowtie^{f,g} (J, J')}{0 \times J'} \cong f(A) + J$ et $\dfrac{A \bowtie^{f,g} (J, J')}{J \times 0} \cong g(A) + J'$ sont semi-locaux.
2) $\Rightarrow$ 3) On a :

$$\mathrm{Max}(A \bowtie^{f,g} (J, J')) = \{\overline{L} \mid L \in \mathrm{Max}(f(A) + J) \cup \mathrm{Max}(g(A) + J')\}.$$

Donc $\mathrm{Max}(A \bowtie^{f,g} (J, J'))$ est fini puisque $\mathrm{Max}(f(A) + J)$ et $\mathrm{Max}(g(A) + J')$ sont finis.

***Corollaire* 6.4.1**
Supposons que J et $I := f^{-1}(J)$ sont des idéaux non nuls de B et A, respectivement. Alors, $A \bowtie^{f} J$ est de caractère fini si et seulement si A et $f(A) + J$ sont semi-locaux.

Le transfert de la propriété h-local à la bi-amalgamation est déduit facilement des propositions 6.3.1 et 6.4.1.

***Corollaire* 6.4.2**
Supposons que J et J' sont des idéaux non nuls de B et C, respectivement. Alors, $A \bowtie^{f,g} (J, J')$ est un anneau h-local si et seulement si $f(A)+J$ et $g(A)+J'$ sont des pm-anneaux et semi-locaux.

***Corollaire* 6.4.3**
On suppose que J et $I := f^{-1}(J)$ sont des idéaux non nuls de B et A, respectivement. Alors, $A \bowtie^{f} J$ est h-local si et seulement si A et $f(A) + J$ sont des pm-anneaux et semi-locaux.

***Exemple* 6.4.1**
Soit R un anneau Artinien (par exemple $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$) et I un idéal non nul de R. Puisque R est de dimension de Krull 0 (et donc pm-anneau) et est semi-local, alors $R \bowtie I$ est un anneau h-local.

Chapitre 7

Anneaux et modules Nil_*-cohérents et Nil_*-cohérents spéciaux

K. A. Ismaili, D. E. Dobbs and N. Mahdou; ***Commutative rings and modules that are Nil_*-coherent or special Nil_*-coherent***, Journal of Algebra and Its Applications Vol. 16, No. 10 (2017) 1750187.

Ce chapitre étudie la propriété Nil_*-cohérence, définir une autre notion appelée Nil_*-cohérence spéciale et transférer ces notions à l'amalgamation d'anneaux.

7.1 *La propriété Nil_*-cohérence*

***Définitions* 7.1.1**

1) *Un R-module M est dit Nil_*-cohérent si tout sous R-module de type fini de M contenu dans* $\text{Nil}(R)M$ *est de présentation finie.*
2) *Un anneau R est dit Nil_*-cohérent s'il est Nil_*-cohérent comme R-module. Autrement, si tout idéal de type fini de R contenu dans* $\text{Nil}(R)$ *est de présentation finie.*

La remarque suivante présente certaines classes immédiates d'anneaux Nil_*-cohérents.

***Remarque* 7.1.1**
Soit R un anneau. Alors,

1) Tout sous-module d'un R-module Nil_*-cohérent est Nil_*-cohérent.
2) Tout R-module cohérent est Nil_*-cohérent. En particulier, tout anneau cohérent est Nil_*-cohérent.

3) Si R est Noethérien, alors tout R-module est Nil_*-cohérent (puisque tout R-module est cohérent).

Rappelons qu'un R-module M est dit pseudo-cohérent si tout sous R-module de type fini de M est de présentation finie. D'autre part, un anneau R est dit J-cohérent si tout idéal de type fini de R contenu dans $\mathrm{Jac}(R)$ est de présentation finie. D'après la remarque 7.1.1, on a tout R-module pseudo-cohérent est Nil_*-cohérent et tout anneau J-cohérent est Nil_*-cohérent puisque $\mathrm{Nil}(R) \subseteq \mathrm{Jac}(R)$.

Théorème 7.1.1

Soient R un anneau et $0 \to M_1 \xrightarrow{v} M_2 \xrightarrow{u} M_3 \to 0$ une suite exacte de R-modules. Alors,

1) *Si M_1 est de type fini avec $v(M_1) \subseteq \mathrm{Nil}(R)M_2$ et M_2 est Nil_*-cohérent, alors M_3 est Nil_*-cohérent.*
2) *Si M_1 est cohérent et M_3 est Nil_*-cohérent, alors M_2 est Nil_*-cohérent.*
3) *Si M_2 est Nil_*-cohérent, alors M_1 l'est.*

Preuve.

1) Puisque M_1 est de type fini, alors on peut considérer la suite exacte $0 \to T_1 \to R^n \to M_1 \to 0$, où n est un entier positif et T_1 est un R-module. Soit N_3 un sous module de type fini de M_3 tel que $N_3 \subseteq \mathrm{Nil}(R)M_3$, montrons que N_3 est de présentation finie. Prenons la suite exacte $0 \to T_3 \to R^s \to N_3 \to 0$ pour un certain s entier positif et un certain R-module T_3. D'autre part, on a $v(M_1) = u^{-1}(0) \subseteq u^{-1}(N_3)$, donc on peut construire la suite exacte $0 \to M_1 \to u^{-1}(N_3) \to N_3 \to 0$. De plus, $0 \to R^n \to R^{n+s} \to R^s \to 0$ est une suite exacte. Par la même technique dans la construction de la résolution projective dans [28, Lemme 6.20], on obtient alors le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & (a) & & (b) & & (c) & & & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & & & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
0 & \longrightarrow & T_1 & \longrightarrow & T_2 & \longrightarrow & T_3 & \longrightarrow & 0 & & (1) \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
0 & \longrightarrow & R^n & \longrightarrow & R^{n+s} & \longrightarrow & R^s & \longrightarrow & 0 & & (2) \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
0 & \longrightarrow & M_1 & \longrightarrow & u^{-1}(N_3) & \longrightarrow & N_3 & \longrightarrow & 0 & & (3) \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & & & &
\end{array}$$

Pour montrer que N_3 est de présentation finie, il suffit de montrer que T_3 est de type fini. Ainsi, il reste à prouver que $u^{-1}(N_3)$ est de présentation finie.
Comme $u^{-1}(N_3)$ est de type fini, M_2 est Nil_*-cohérent et

$$u^{-1}(N_3) \subseteq u^{-1}(\mathrm{Nil}(R)M_3) \subseteq \mathrm{Nil}(R)u^{-1}(M_3)+\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Nil}(R)M_2+v(M_1) = \mathrm{Nil}(R)M_2.$$

Alors, $u^{-1}(N_3)$ est de présentation finie. Ce qui achève la preuve.

2) On peut voir M_1 comme un sous-module de M_2 $\big(M_1 \cong v(M_1)\big)$. Soit N_2 un sous-module de type fini de M_2 tel que $N_2 \subseteq \mathrm{Nil}(R)M_2$. Montrons que N_2 est de présentation finie. On considère le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Ker}(u|_{N_2}) \arrow[r] \arrow[d] & N_2 \arrow[r] \arrow[d] & u(N_2) \arrow[r] \arrow[d] & 0 & (1) \\
0 \arrow[r] & M_1 \arrow[r, "v"] & M_2 \arrow[r, "u"] & M_3 \arrow[r] & 0 & (2)
\end{tikzcd}$$

avec l'homomorphisme $\mathrm{Ker}(u|_{N_2}) \to M_1$ est l'injection canonique (puisque $\mathrm{Ker}(u|_{N_2}) \subseteq M_1$).

Montrons que $\mathrm{Ker}(u|_{N_2})$ et $u(N_2)$ sont de présentation finie. Le fait que $u(N_2)$ est de type fini de M_3 avec $u(N_2) \subseteq \mathrm{Nil}(R)M_3$ et M_3 est Nil_*-cohérent montre que $u(N_2)$ est de présentation finie. Par suite, $\mathrm{Ker}(u|_{N_2})$ est un sous-module de type fini de M_1 qui est cohérent. D'où $\mathrm{Ker}(u|_{N_2})$ est de présentation finie. On en déduit que N_2 est de présentation finie.

3) Facile, d'après la remarque 7.1.1 (1).

***Corollaire* 7.1.1**

Soient R un anneau et I un idéal de R. Alors,

1) *Si R est Nil_*-cohérent et I est de type fini tel que $I \subseteq \mathrm{Nil}(R)$, alors R/I est un anneau Nil_*-cohérent.*
2) *Si R/I est Nil_*-cohérent et I est un R-module cohérent, alors R est Nil_*-cohérent.*

Preuve.

1) Montrons que R/I est un (R/I)-module Nil_*-cohérent. Soit J un idéal de R tel que $J \supseteq I$ et J/I est de type fini contenu dans $\mathrm{Nil}(R/I)$. D'après [19, Théorème 1], il suffit de montrer que J/I est de présentation finie comme R-module. Notons que $J \subseteq \mathrm{Nil}(R)$. Ainsi, $J/I \subseteq (\mathrm{Nil}(R) + I)/I = \mathrm{Nil}(R)(R/I)$. De plus, en appliquant le théorème 7.1.1 (1) sur la suite exacte $0 \to I \to R \to R/I \to 0$. On obtient que R/I est un R-module Nil_*-cohérent.

2) Considérons la suite exacte $0 \to I \to R \to R/I \to 0$. D'après 7.1.1 (2), il reste à vérifier que R/I est un R-module Nil_*-cohérent. Soit J un idéal de R tel que $J \supseteq I$

et J/I est un sous R-module de R/I contenu dans $\mathrm{Nil}(R)(R/I)$. Montrons que J/I est un R-module de présentation finie. On a $J/I \subseteq \mathrm{Nil}(R/I)$ et R/I est un anneau Nil_*-cohérent, alors J/I est de présentation finie comme (R/I)-module. Or puisque I est de type fini et d'après [20, Lemme 1], on obtient que J/I est un R-module de présentation finie. Ainsi, R/I est un R-module Nil_*-cohérent.

***Corollaire* 7.1.2**
Soient R un anneau, M et N deux R-modules et $f : M \to N$ un homomorphisme de modules. Alors,

1) *Si M est Nil$_*$-cohérent, alors* $\mathrm{Ker}(f)$ *l'est.*
2) *Si N est Nil$_*$-cohérent, alors* $\mathrm{Im}(f)$ *l'est.*
3) *Si M est Nil$_*$-cohérent et* $\mathrm{Ker}(f)$ *est un R-module de type fini tel que* $\mathrm{Ker}(f) \subseteq \mathrm{Nil}(R)M$, *alors* $\mathrm{Im}(f)$ *est Nil$_*$-cohérent.*
4) *Si N est Nil$_*$-cohérent et* $\mathrm{Im}(f)$ *est un R-module de type fini tel que* $\mathrm{Im}(f) \subseteq \mathrm{Nil}(R)N$, *alors* $\mathrm{Coker}(f)$ *est Nil$_*$-cohérent.*

Preuve.
(1) et (2) sont des applications directes du théorème 7.1.1 (3) ou de la remarque 7.1.1 (1).

Considérons les suites exactes $0 \to \mathrm{Ker}(f) \to M \to \mathrm{Im}(f) \to 0$ et $0 \to \mathrm{Im}(f) \to N \to \mathrm{Coker}(f) \to 0$ et appliquons le théorème 7.1.1 (1). On obtient alors (3) et (4).

Le théorème suivant transfère la notion de Nil_*-cohérence aux produits directs de modules et d'anneaux.

***Théorème* 7.1.2**

1) *Soient R un anneau et $\{M_i \mid 1 \leq i \leq n\}$ une famille finie de R-modules. Alors, $\bigoplus_{i=1}^{n} M_i$ est Nil$_*$-cohérent si et seulement si M_i est Nil$_*$-cohérent, pour tout $i = 1, ..., n$.*
2) *Soit $\{R_i \mid 1 \leq i \leq n\}$ une famille finie d'anneaux. Alors $R = \prod_{i=1}^{n} R_i$ est Nil$_*$-cohérent si et seulement si R_i est Nil$_*$-cohérent, pour tout $i = 1, ..., n$.*

Preuve.

1) L'implication réciproque est assurée d'après la remarque 7.1.1 (1).

   Par récurrence, pour $n = 2$. Supposons que M_1 et M_2 deux R-modules Nil_*-cohérents et montrons que $M := M_1 \oplus M_2$ est Nil_*-cohérent. Soit N un sous R-module de type fini de M contenu dans $\mathrm{Nil}(R)M\ \big(= \mathrm{Nil}(R)M_1 \oplus \mathrm{Nil}(R)M_2\big)$. Notons que pour tout $i = 1, 2$, $N_i := \pi_i(N)$ est un sous R-module de type fini de $\mathrm{Nil}(R)M_i$ (avec $\pi_i : M \to M_i$ est la projection canonique). Or, M_i est Nil_*-cohérent. Alors tout sous R-module de N_i est de présentation finie. Autrement, N_i est pseudo-cohérent. Donc, $N_1 \oplus N_2$ est pseudo-cohérent d'après [6, Exercice 11(c)]. D'autre part, remarquons que N est un sous R-module de type fini de $N_1 \oplus N_2$, ce qui montre que N est un R-module de présentation finie.

2) Supposons que R_i est un anneau Nil$_*$-cohérent, pour tout $i = 1, ..., n$. Soit I un idéal de type fini de R tel que $I \subseteq \text{Nil}(R) \left(= \prod_{i=1}^{n} \text{Nil}(R_i) \right)$. Alors $I = \bigoplus_{i=1}^{n} I_i$, où I_i est un idéal de type fini de R_i avec $I_i \subseteq \text{Nil}(R_i)$, pour tout $i = 1, ..., n$. Donc, pour tout i, I_i est de présentation finie. D'après [13, Proposition 1.2.3], on peut obtenir une présentation finie de I à partir des n présentations finies de I_i.

   Inversement, Prenons $n = 2$. Supposons que $R \cong R_2 \times R_1$ est Nil$_*$-cohérent. Soit I_1 un idéal de type fini de R_1 contenu dans Nil(R_1). On a $I := I_1 \oplus (0)$ est un idéal de type fini de R tel que $I \subseteq \text{Nil}(R)$. Alors, I est un R-module de présentation finie. D'après [13, Propositions 1.2.1–1.2.3], I_1 et (0) sont des idéaux de R_1 et R_2 de présentation finie, respectivement.

   D'une manière similaire, on montre que R_2 est Nil$_*$-cohérent.

***Corollaire* 7.1.3**

Soient R un anneau, M un R-module de type fini et N un R-module Nil$_*$-cohérent, alors $Hom_R(M, N)$ est un R-module Nil$_*$-cohérent.

Preuve.

Considérons la suite exacte $0 \to \text{Ker}(u) \to R^n \to M \to 0$, pour un certain n entier positif. Comme le foncteur contravariant $Hom_R(., N)$ est exact à gauche d'après [26, Théorème 4.3.7], alors la suite $0 \to Hom_R(M, N) \to Hom_R(R^n, N)$ est exacte. Autrement, $Hom_R(M, N)$ est isomorphe à un sous R-module de $Hom_R(R^n, N)$. Or, $Hom_R(R^n, N) \cong N^n$ est Nil$_*$-cohérent (puisque N l'est). On en déduit que $Hom_R(M, N)$ est un R-module Nil$_*$-cohérent.

Soient R et S deux anneaux et $\varphi : R \to S$ un homomorphisme d'anneaux (on peut voir S comme un R-module), alors R est dit module rétracté de S (respectant φ), s'il existe un homomorphisme de R-modules $\psi : S \to R$ tel que $\psi \circ \varphi = Id_R$. Dans ce cas, $0 \to R \to S \to S/R \to 0$ est une suite exacte scindée de R-modules et donc R est un facteur direct de S comme R-module.

***Théorème* 7.1.3**

Soit $\varphi : R \to S$ un homomorphisme d'anneaux tel que R est un module rétracté de S. Si S est un anneau Nil$_*$-cohérent, alors R l'est.

Preuve.

Supposons que S est Nil$_*$-cohérent. Soit I est un idéal de type fini de R tel que $I \subseteq \text{Nil}(R)$, alors $I = \sum_{i=1}^{p} Ra_i$ pour certains $a_i \in I$. Notons que $IS = \sum_{i=1}^{p} Sa_i$ est un idéal de S contenu dans Nil(S). Comme S est Nil$_*$-cohérent, alors IS est de présentation finie comme S-module. Considérons l'homomorphisme surjectif de S-modules $v : S^p \to IS, \big((s_j)\big) \mapsto \sum_{i=1}^{p} s_i a_i$. On a Ker$(v)$ est un idéal de type fini de S^p. D'autre part, $\psi^p : S^p \to R^p$,

$\big((s_j)\big) \mapsto \big(\psi(s_j)\big)$ est un homomorphisme surjectif de R-modules et $\psi^p\big(\,\mathrm{Ker}(v)\big)$ est un idéal de type fini de R^p.

Considérons l'homomorphisme surjectif $u : R^p \to I,\ (\alpha_j) \mapsto \sum_{i=1}^{p} \alpha_i a_i$. Il suffit de montrer que $\mathrm{Ker}(u)$ est de type fini. On a facilement $\mathrm{Ker}(u) \subseteq \psi^p\big(\,\mathrm{Ker}(v)\big)$ puisque $\big(\psi(\alpha_j)\big) = (\alpha_j)$, pour tout $(\alpha_j) \in R^p$. Inversement, soit $(s_j) \in S^p$ tel que $\sum_{i=1}^{p} s_i a_i = 0$. Alors, on a, $\sum_{i=1}^{p} \psi(s_i) a_i = \psi\left(\sum_{i=1}^{p} s_i a_i\right) = \psi(0) = 0$. D'où, $\mathrm{Ker}(u) = \psi^p\big(\,\mathrm{Ker}(v)\big)$ est de type fini de R^p.

***Théorème* 7.1.4**
Soit R un anneau. Alors, les assertions suivantes sont équivalentes :

1) *R est Nil$_*$-cohérent ;*
2) *$(0 :_R a)$ est un idéal de type fini de R pour tout $a \in \mathrm{Nil}(R)$ et l'intersection de deux idéaux de type fini de R contenus dans $\mathrm{Nil}(R)$ est aussi de type fini de R.*

7.2 *La propriété Nil$_*$-cohérence spéciale*

Cette section étudie les anneaux et les modules satisfaisant la propriété Nil$_*$-cohérence spéciale.

***Définitions* 7.2.1**

1) *Un R-module M est Nil$_*$-cohérent spécial si $\mathrm{Nil}(R)M$ est un R-module cohérent. Autrement, $\mathrm{Nil}(R)M$ est un R-module de type fini et tout sous module de $\mathrm{Nil}(R)M$ de type fini est de présentation finie.*
2) *Un anneau R est Nil$_*$-cohérent spécial s'il vérifie la propriété comme R-module.*

La remarque suivante donne certaines classes immédiates de modules Nil$_*$-cohérents spéciaux.

***Remarques* 7.2.1**
Soient R un anneau et M un R-module.

1) M est Nil$_*$-cohérent spécial est équivalent à M est Nil$_*$-cohérent et $\mathrm{Nil}(R)M$ est un R-module de type fini. En particulier, R est Nil$_*$-cohérent spécial est équivalent à R est Nil$_*$-cohérent spécial et $\mathrm{Nil}(R)$ est un idéal de type fini. Ainsi, tout R-module (resp. anneau) Nil$_*$-cohérent spécial est Nil$_*$-cohérent.
2) Si $\mathrm{Nil}(R)M = 0$, alors M est un R-module Nil$_*$-cohérent spécial. En particulier, si R est réduit (par exemple intègre), alors (tout R-module) M est Nil$_*$-cohérent spécial (resp. Nil$_*$-cohérent) et R est un anneau Nil$_*$-cohérent spécial (resp. Nil$_*$-cohérent).

3) Un R-module Nil_*-cohérent spécial n'est pas en général cohérent. En effet, il suffit de voir un anneau intègre n'est pas cohérent.

Le théorème suivant caractérise les anneaux Nil_*-cohérents spéciaux.

***Théorème* 7.2.1**
Soient R un anneau. Alors, les assertions suivantes sont équivalentes :

1) *R est Nil_*-cohérent spécial ;*
2) *Tout R-module plat de présentation finie est un R-module Nil_*-cohérent spécial ;*
3) $\text{Nil}(R)$ *est un idéal de type fini de R et pour tout R-module libre L, tout sous R-module de type fini de* $\text{Nil}(R)L$ *est un R-module de présentation finie ;*
4) *R est Nil_*-cohérent et* $\text{Nil}(R)$ *est un idéal de type fini de R.*

Preuve.
On a (1) $\Leftrightarrow$ (4). De plus, (3) $\Rightarrow$ (4) en posant $L := R$, et de même (2) $\Rightarrow$ (1). Il reste à vérifier (1) $\Rightarrow$ (2) et (1) $\Rightarrow$ (3).

(1) $\Rightarrow$ (2) Supposons que la condition (1) est vérifiée. D'après le théorème 7.1.2 (1), tout R-module libre de base finie est Nil_*-cohérent. Maintenant, soit M un R-module plat de présentation finie . D'après le théorème 1.1.7, M est projectif de type fini. Ainsi, il existe deux R-modules F et U tels que F est libre de base finie et $F = M \oplus U$. Par suite, F est un R-module Nil_*-cohérent et donc M l'est. D'autre part, M et $\text{Nil}(R)$ sont de type fini comme R-modules, alors $\text{Nil}(R)M$ est de type fini. D'où M est Nil_*-cohérent spécial.

(1) $\Rightarrow$ (3) Montrons que pour tout R-module libre L, on aura tout sous R-module de type fini M de $\text{Nil}(R)L$ est de présentation finie. Notons que $M \subseteq \text{Nil}(R)F$ où F est un sous R-module libre de type fini de L. Donc, F est Nil_*-cohérent, c'est à dire que M est de présentation finie.

***Remarque* 7.2.1**
D'après le théorème ci-dessus, les deux implications (1) $\Rightarrow$ (2) et (2) $\Rightarrow$ (1) montrent aussi le résultat suivant : Un anneau R est Nil_*-cohérent si et seulement si tout R-module plat de présentation finie est un R-module Nil_*-cohérent.

***Corollaire* 7.2.1**
Soient R et S deux anneaux et $f : R \to S$ un homomorphisme d'anneaux rendant S un R-module plat de présentation finie. Si R est un anneau Nil_*-cohérent spécial, alors S est un R-module Nil_*-cohérent spécial.

***Remarque* 7.2.2**
On ne peut pas déduire du corollaire ci-dessus, que S est un anneau Nil_*-cohérent spécial. Par exemple, prenons R un anneau réduit non cohérent, et soit l'injection canonique $R \hookrightarrow S := R \propto R$. Comme $S \cong R \oplus R$ est un R-module libre de base finie (donc plat de présentation finie). Alors, S est un R-module Nil_*-cohérent spécial. Toutefois, S est un anneau non Nil_*-cohérent d'après [30, Proposition 2.7] (puisque R n'est pas cohérent).

Le théorème suivant donne une condition suffisante pour qu'un produit tensoriel soit module Nil_*-cohérent spécial.

***Théorème* 7.2.2**
Soient R un anneau et M et N deux R-modules plats tels que M est de présentation finie et N est Nil_*-cohérent spécial. Alors, $M \otimes_R N$ est un R-module Nil_*-cohérent spécial.

Preuve.
Montrons que $\mathrm{Nil}(M \otimes_R N)$ est un R-module cohérent. Soit $F_1 \stackrel{u}{\to} F_0 \stackrel{v}{\to} M \to 0$ une présentation finie de M. Comme $\mathrm{Nil}(R)N \otimes_R .$ est un foncteur exact à droite, alors $\mathrm{Nil}(R)N \otimes_R F_1 \stackrel{1\otimes u}{\to} \mathrm{Nil}(R)N \otimes_R F_0 \stackrel{1\otimes v}{\to} \mathrm{Nil}(R)N \otimes_R M \to 0$ est exacte. Or, $\mathrm{Nil}(R)N$ est cohérent. Donc, d'après [6, Exercice 11 (c)], on en déduit que $\mathrm{Nil}(R)N \otimes_R F_0$ et $\mathrm{Nil}(R)N \otimes_R F_1$ sont des R-modules cohérents $\big($puisque $\mathrm{Nil}(R)N \otimes_R F_0$ et $\mathrm{Nil}(R)N \otimes_R F_1$ sont des produits directs finis de $\mathrm{Nil}(R)N\big)$. Ainsi, $\mathrm{Coker}(1 \otimes u)$ est un R-module cohérent d'après [6, Exercice 11 (b)]. Autrement, $\mathrm{Nil}(R) \otimes_R M$ est cohérent. Il reste à prouver que $\mathrm{Nil}(R)(M \otimes_R N) \cong \mathrm{Nil}(R)N \otimes_R M$. En effet, On a $M \otimes_R N$ et N sont plats. Alors, $\mathrm{Nil}(R)(M \otimes_R N) \cong \mathrm{Nil}(R) \otimes_R (M \otimes_R N) \cong$

$$\mathrm{Nil}(R) \otimes_R (N \otimes_R M) \cong (\mathrm{Nil}(R) \otimes_R N) \otimes_R M \cong \mathrm{Nil}(R)N \otimes_R M.$$

***Proposition* 7.2.1**
Soient R un anneau et $\{M_i \mid 1 \leq i \leq n\}$ une famille finie de R-modules. Alors $\bigoplus_{i=1}^{n} M_i$ est Nil_*-cohérent spécial si et seulement si M_i l'est, pour tout $i = 1, ..., n$.

Preuve.
Pour $n = 2$. On a, $\mathrm{Nil}(R)(M_1 \oplus M_2) = \mathrm{Nil}(R)(M_1) \oplus \mathrm{Nil}(R)(M_2)$. Donc, $\mathrm{Nil}(R)(M_1 \oplus M_2)$ est cohérent si et seulement si $\mathrm{Nil}(R)(M_1)$ et $\mathrm{Nil}(R)(M_2)$ le sont.

***Théorème* 7.2.3**
Soient R un anneau et S une partie multiplicative de R. Si M est un R-module Nil_*-cohérent spécial, alors $S^{-1}M$ est un $S^{-1}R$-module Nil_*-cohérent spécial.

Preuve.
On a $\mathrm{Nil}(S^{-1}R) = S^{-1}(\mathrm{Nil}(R))$. Alors, $\mathrm{Nil}(S^{-1}R)(S^{-1}M) \cong S^{-1}(\mathrm{Nil}(R))(S^{-1}M) \cong S^{-1}(\mathrm{Nil}(R)M)$. D'après [17, Théorème 2.2.6], on a $\mathrm{Nil}(S^{-1}R)(S^{-1}M)$ est un $(S^{-1}R)$-module cohérent. D'où, $S^{-1}M$ est un $(S^{-1}R)$-module Nil_*-cohérent spécial.

***Corollaire* 7.2.2**
Soient R un anneau Nil_*-cohérent spécial et S une partie multiplicative de R. Alors l'anneau $S^{-1}R$ est aussi Nil_*-cohérent spécial.

7.3 *Transfert à l'extension triviale*

***Lemme* 7.3.1**
Soient (R, M) *un anneau local et* E *un* R*-module tel que* $ME = 0$*. Alors,*

1) $(r, e)^n = (r^n, 0)$, *pour tout* $r \in M$, $e \in E$ *et* $n \in \mathbb{N}^*$.

2) $\mathrm{Nil}(R \propto E) = \mathrm{Nil}(R) \propto E$.

***Théorème* 7.3.1**
Soient (R, M) *un anneau local et* $K := R/M$*. Soit* E *un* R*-module tel que* $ME = 0$ *(c'est à dire* K*-espace vectoriel) et posons* $A := R \propto E$*. Alors,*

1) $\mathrm{Nil}(A)$ *est un idéal de type fini de* A *si et seulement si* $\mathrm{Nil}(R)$ *est un idéal de type fini de* R *et* E *est de dimension finie.*

2) A *est* Nil_**-cohérent (resp.* Nil_**-cohérent spécial) si et seulement si* R *est* Nil_**-cohérent (resp.* Nil_**-cohérent spécial) et* E *est de dimension finie.*

Preuve.

1) Si $\mathrm{Nil}(A)$ est un idéal de type fini de A, alors il existe $\{r_1, ..., r_n\} \subseteq \mathrm{Nil}(R)$ et $\{e_1, ..., e_n\} \subseteq E$ tels que :
$$\mathrm{Nil}(R) \propto E = \sum_{i=1}^{n} A(r_i, e_i) = \sum_{i=1}^{n} \{(br_i, be_i) \mid b \in R\}$$
(puisque $r_i E \subseteq ME = 0$, pour tout i). Donc, $\mathrm{Nil}(R) = \sum_{i=1}^{n} Rr_i$ et $E = \sum_{i=1}^{n} Re_i$.
Inversement, soient $\{r_i \mid 1 \leq i \leq n\}$ $\big($resp. $\{e_i \mid 1 \leq i \leq n\}\big)$ une famille génératrice de $\mathrm{Nil}(R)$ (resp. de E). Soit $(r, e) \in \mathrm{Nil}(A)$. Donc, il existe $(a_i)_i$ et $(b_i)_i$ dans R tels que $r = \sum_{i=1}^{n} a_i r_i$ et $e = \sum_{i=1}^{n} b_i e_i$, de sorte que :
$$(r, e) = \sum_{i=1}^{n} (a_i, 0)(r_i, 0) + \sum_{i=1}^{n} (b_i, 0)(0, e_i).$$
Par conséquent, $\{(r_i, 0)\} \cup \{(0, e_i)\}$ engendre $\mathrm{Nil}(A)$. D'où $\mathrm{Nil}(A)$ est un idéal de type fini de A.

2) Supposons que A est Nil_*-cohérent. Soit $\varphi : R \to A$, $r \mapsto (r, 0)$ l'injection canonique et considérons l'homomorphisme surjectif de R-modules $\psi : A \to R$, $(r, e) \mapsto r$. Remarquons que $\psi \circ \varphi = 1_R$. Ainsi, R est un module rétracté de A. D'après le théorème 7.1.3, on en déduit que R est un anneau Nil_*-cohérent. D'autre part, soient $e \in E$ et $a := (0, e)$. On a $(0 :_R e) = M$ et donc $(0 :_A a) = M \propto E$. Or $a \in \mathrm{Nil}(A)$ et A est Nil_*-cohérent. D'après le théorème 7.1.4, E est donc de dimension finie.
Réciproquement, soit J un idéal de type fini de A contenu dans $\mathrm{Nil}(A)$. Soit $\{(r_i, e_i) \mid 1 \leq i \leq n\}$ une famille génératrice de J, où $r_i \in M$ (puisque $r_i \in \mathrm{Nil}(R)$) et $e_i \in E$, pour

tout i. Ainsi, $I := \sum_{i=1}^{n} Rr_i$ est un idéal de type fini de R contenu dans $\mathrm{Nil}(R)$. Considérons l'homomorphisme surjectif de A-modules (resp. de R-modules) $u : A^n \to J$ (resp. $v : R^n \to I$), où l'image de la ième composante de la base canonique de A (resp. de R) est (r_i, e_i) (resp. est r_i). Soient $\rho_i \in R$ et $f_i \in E$, on a :

$$u((\rho_i, f_i)) = \sum_{i=1}^{n}(\rho_i, f_i)(r_i, e_i) = \sum_{i=1}^{n}(\rho_i r_i, \rho_i e_i),$$

car $r_i f_i \in \mathrm{Nil}(R)E \subseteq ME = 0$. Il s'ensuit que

$$\mathrm{Ker}(u) = \{((\rho_i, f_i)) \in A^n \mid (\rho_i) \in \mathrm{Ker}(v)\} \subseteq A^n.$$

On peut identifier le R-module A^n avec $R^n \oplus E^n$. Ainsi, en identifiant $\mathrm{Ker}(u)$ avec $\mathrm{Ker}(v) \oplus E^n$, et comme R est Nil_*-cohérent, alors I est de présentation finie, de sorte que $\mathrm{Ker}(v)$ est de type fini. D'où $\mathrm{Ker}(u)$ est de type fini puisque $\dim_K E < \infty$.

***Corollaire* 7.3.1**

1) *Soient (R, M) un anneau local cohérent tel que M est de type fini et $K := R/M$. Soit E un R-module de type fini tel que $ME = 0$ (espace vectoriel sur K de dimension finie). Alors $A := R \propto E$ est cohérent.*
2) *Soient K un corps et E un K-espace vectoriel non nul de dimension finie. Alors $A := K \propto E$ est cohérent (en fait, Noethérien et donc Nil_*-cohérent spécial) est non réduit.*

Preuve.

1) D'après [20, page 125], il suffit de montrer que E est un R-module cohérent. On a E est de dimension finie. Alors, E est une somme directe finie de K. Il reste à montrer que K est un R-module cohérent. Soit $0 \to M \to R \to K \to 0$ une suite exacte. D'après [6, Exercice 11 (a)], on obtient que K est un R-module cohérent (puisque M est de type fini). D'où A est cohérent.
2) En appliquant (1) où R est un corps K (donc cohérent). D'autre part, $A := K \propto E$ est Noethérien puisque l'idéal premier $0 \propto E$ est de type fini (car $\dim_K E < \infty$). Toutefois, A n'est pas réduit puisque $\mathrm{Nil}(A) = 0 \propto E \neq 0$.

Les deux corollaires suivants présentent des exemples d'anneaux Nil_*-cohérents spéciaux non cohérents.

***Corollaire* 7.3.2**

Soient (R, M) un anneau local Nil_*-cohérent spécial non cohérent et E un (R/M)-espace vectoriel de dimension finie. Alors, $R \propto E$ est Nil_*-cohérent spécial non cohérent.

Preuve.

Le résultat découle directement du théorème 7.3.1 et [21, Théorème 2.6 (2)].

***Corollaire* 7.3.3**
Soit (R, M) un anneau local intègre non cohérent. Alors, $R \propto R/M$ est un anneau Nil$_*$-cohérent spécial non cohérent.

Preuve.
D'après la remarque 7.2.1 (2), R est Nil$_*$-cohérent spécial (puisqu'il est intègre) et $\dim(R/M)$ est égale à 1. Ce qui termine la preuve.

7.4 *Transfert à l'amalgamation*

Cette section étudie les propriétés Nil$_*$-cohérence et Nil$_*$-cohérence spéciale pour certaines constructions de l'amalgamation.

***Lemme* 7.4.1**
Soient $f : A \to B$ un homomorphisme d'anneaux et J un idéal de B. On suppose que $f^{-1}(J)$ et J sont des idéaux de type fini de A et $f(A)+J$ (respectivement), que $f^{-1}(J) \subseteq \mathrm{Nil}(A)$ et que A est un anneau Nil$_*$-cohérent. Alors $f^{-1}(J) \times \{0\}$ est un $(A \bowtie^f J)$-module cohérent.

Preuve.
On a $f^{-1}(J) \times \{0\}$ est un idéal de $A \bowtie^f J$ (c'est donc un $(A \bowtie^f J)$-module). Posons $T := A \bowtie^f J$ et $\mathcal{J} := f^{-1}(J) \times \{0\}$. Montrons que $\mathcal{J}$ est cohérent. D'après l'hypothèse, $f^{-1}(J)$ est de type fini, donc $f^{-1}(J) = \sum_{i=1}^{n} Ar_i$ où $\{r_1, ..., r_n\} \subseteq f^{-1}(J)$. Alors, $\mathcal{J} = \sum_{i=1}^{n} T(r_i, 0)$. Autrement, $\mathcal{J}$ est de type fini.
D'autre part, soit W un sous $(A \bowtie^f J)$-module de type fini de $\mathcal{J}$, alors W est de la forme $I \times 0$, avec I un idéal de type fini de A contenu dans $f^{-1}(J)$. Notons que $I = \sum_{i=1}^{n} Ar_i$ où $\{r_1, ..., r_n\} \subseteq I$. Maintenant, on considère l'homomorphisme surjectif $v : A^n \to I$, $(a_i) \mapsto \sum_{i=1}^{n} a_i r_i$. On obtient alors la suite exacte de A-modules suivante :

$$0 \to \mathrm{Ker}(v) \to A^n \to I \to 0$$

où $\mathrm{Ker}(v) = \left\{ (a_i) \in A^n \;\mid\; \sum_{i=1}^{n} a_i r_i = 0 \right\}$.
Comme $I \subseteq \mathrm{Nil}(A)$ et A est Nil$_*$-cohérent, alors $\mathrm{Ker}(v)$ est de type fini. De même, on considère la suite exacte de T-modules :

$$0 \to \mathrm{Ker}(u) \to T^n \to W \to 0$$

avec $u((a_i, f(a_i)+j_i)) := \sum_{i=1}^{n}(a_i, f(a_i)+j_i)(r_i, 0) = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i r_i, 0\right)$. Ainsi,

$$\mathrm{Ker}(u) = \left\{((a_i, f(a_i)+j_i)) \in T^n \mid \sum_{i=1}^{n} a_i r_i = 0\right\}.$$

Soit l'homomorphisme $f^n : A^n \to B^n$, $(a_i) \mapsto (f(a_i))$. D'après [1, page 3], il existe un isomorphisme de T^n vers $A^n \bowtie^{f^n} J^n$. D'une manière analogue, on peut montrer que $\mathrm{Ker}(u) \cong \mathrm{Ker}(v) \bowtie^{f^n} J^n$ comme T-modules. Comme J est un idéal de type fini de $f(A)+J$, on obtient d'après [1, Lemme 2.4 (1)] que $\mathrm{Ker}(u)$ est un T-module de type fini. D'où W est de présentation finie.

***Lemme* 7.4.2**
Soient $f : A \to B$ un homomorphisme d'anneaux et J un idéal de B. Alors,

$$\mathrm{Nil}(A \bowtie^f J) = \mathrm{Nil}(A) \bowtie^f (J \cap \mathrm{Nil}(f(A)+J)) = \mathrm{Nil}(A) \bowtie^f (J \cap \mathrm{Nil}(B)).$$

Preuve.
Il est facile de vérifier que $J \cap \mathrm{Nil}(f(A)+J) = J \cap \mathrm{Nil}(B)$. Reste à prouver que $\mathrm{Nil}(A \bowtie^f J) = \mathrm{Nil}(A) \bowtie^f (J \cap \mathrm{Nil}(f(A)+J))$.

Soit $(a, f(a)+j) \in \mathrm{Nil}(A \bowtie^f J)$. Alors $a \in \mathrm{Nil}(A)$ et $f(a)+j \in \mathrm{Nil}(f(A)+J)$, donc $f(a) \in \mathrm{Nil}(f(A)) \subseteq \mathrm{Nil}(f(A)+J)$. Ainsi, $j = f(a)+j-f(a) \in J \cap \mathrm{Nil}(f(A)+J)$. C'est-à-dire que $(a, f(a)+j) \in \mathrm{Nil}(A) \bowtie^f (J \cap \mathrm{Nil}(f(A)+J))$.

Inversement, soient $a \in \mathrm{Nil}(A)$ et $j \in J \cap \mathrm{Nil}(f(A)+J)$. On a donc $f(a)+j \in Nil(f(A)+J)$. D'où $(a, f(a)+j) \in \mathrm{Nil}(A \bowtie^f J)$. Ce qui termine la preuve.

***Théorème* 7.4.1**
Soient $f : A \to B$ un homomorphisme d'anneaux et J un idéal propre de B. Alors,

1) *Si $A \bowtie^f J$ est Nil$_*$-cohérent (resp. Nil$_*$-cohérent spécial), alors A l'est.*
2) *Si $f^{-1}(J)$ est un idéal de type fini de A, $f^{-1}(J) \subseteq \mathrm{Nil}(A)$ et $A \bowtie^f J$ est Nil$_*$-cohérent, alors $f(A)+J$ l'est.*
3) *On suppose que $f^{-1}(J)$ et J sont des idéaux de type fini de A et $f(A)+J$ (respectivement), et que $f^{-1}(J) \subseteq \mathrm{Nil}(A)$. Alors, $A \bowtie^f J$ est Nil$_*$-cohérent si et seulement si A et $f(A)+J$ le sont.*
4) *Supposons que $f^{-1}(J)$ et $\mathrm{Nil}(A)$ sont des idéaux de type fini de A, $f^{-1}(J) \subseteq \mathrm{Nil}(A)$ et les idéaux J et $J \cap \mathrm{Nil}(B)$ sont de type fini de $f(A)+J$. Alors $A \bowtie^f J$ est Nil$_*$-cohérent spécial si et seulement si A est Nil$_*$-cohérent spécial et $f(A)+J$ est Nil$_*$-cohérent.*

Preuve.

1) Si $A \bowtie^f J$ est Nil$_*$-cohérent, alors A l'est puisque A est un module rétracté de $A \bowtie^f J$.

Supposons que $A \bowtie^f J$ est Nil$_*$-cohérent spécial. Alors $A \bowtie^f J$ est Nil$_*$-cohérent et Nil$(A \bowtie^f J)$ est un idéal de type fini de $A \bowtie^f J$. D'après ce qui précède et le lemme 7.4.2, on obtient que A est Nil$_*$-cohérent et Nil(A) est un idéal de type fini de A. D'où A est Nil$_*$-cohérent spécial.

2) Par hypothèse, il existe $\{r_1, ..., r_n\} \subseteq \text{Nil}(A)$ tel que $f^{-1}(J) = \sum_{i=1}^{n} Ar_i$. Alors, $\sum_{i=1}^{n}(A \bowtie^f J)(r_i, 0) = f^{-1}(J) \times \{0\} \ \big(\subseteq \text{Nil}(A \bowtie^f J)\big)$. Par conséquent, $f(A) + J \cong \frac{A\bowtie^f J}{f^{-1}(J)\times\{0\}}$ est Nil$_*$-cohérent d'après le corollaire 7.1.1 (1).

3) Si $A \bowtie^f J$ est Nil$_*$-cohérent, alors A et $f(A) + J$ le sont. Réciproquement, si A et $f(A) + J$ sont Nil$_*$-cohérents. D'après le lemme 7.4.1, on a $f^{-1}(J) \times \{0\}$ est un $(A \bowtie^f J)$-module cohérent. En utilisant le corollaire 7.1.1 (2). Il en résulte que $A \bowtie^f J$ est Nil$_*$-cohérent (car $f(A) + J \cong \frac{A\bowtie^f J}{f^{-1}(J)\times\{0\}}$ est Nil$_*$-cohérent).

4) Supposons que $A \bowtie^f J$ est Nil$_*$-cohérent spécial. Alors A est Nil$_*$-cohérent spécial et $f(A)+J$ est Nil$_*$-cohérent. Inversement, d'après (3), on a $A \bowtie^f J$ est Nil$_*$-cohérent. il suffit de vérifier que Nil$(A \bowtie^f J)$ est de type fini. On a Nil$(A \bowtie^f J) = \text{Nil}(A) \bowtie^f (J \cap \text{Nil}(B))$. D'après [2, Lemme 2.2], on a Nil$(A \bowtie^f J)$ est de type fini. Ce qui achève la preuve.

***Corollaire* 7.4.1**
Soient A un anneau et I un idéal de type fini de A tel que $I \subseteq \text{Nil}(A)$. Alors,

1) *$A \bowtie I$ est Nil$_*$-cohérent si et seulement si A l'est.*
2) *Si de plus,* Nil(A) *est un idéal de type fini de A. Alors $A \bowtie I$ est Nil$_*$-cohérent spécial si et seulement si A l'est.*

***Corollaire* 7.4.2**
Soient $f : A \to B$ un homomorphisme d'anneaux injectif et J un idéal propre de B. On suppose que $f^{-1}(J)$ et Nil(A) *sont des idéaux de type fini de A, J est un idéal de type fini de $f(A) + J$ et $J \subseteq \text{Nil}(B)$. Alors, $A \bowtie^f J$ est Nil$_*$-cohérent spécial si et seulement si A est Nil$_*$-cohérent spécial et $f(A) + J$ est Nil$_*$-cohérent.*

Preuve.
Le fait que $J \subseteq \text{Nil}(B)$ et f est injectif assure que $f^{-1}(J) \subseteq \text{Nil}(A)$. D'où le résultat en appliquant le théorème 7.4.1 (4).

Rappelons que [1, Théorème 2.2 (2)] donne une caractérisation pour que l'extension amalgamée soit cohérente. En utilisant ce résultats avec le théorème 7.4.1 pour avoir les deux corollaires suivants.

***Corollaire* 7.4.3**
Soient $f : A \to B$ un homomorphisme d'anneaux et J un idéal propre de B. On suppose

que $f^{-1}(J)$ et J sont de type fini de A et $f(A)+J$, respectivement, et que $f^{-1}(J) \subseteq \mathrm{Nil}(A)$. Alors,

1) *Si de plus, A et $f(A)+J$ sont Nil$_*$-cohérents et A ou $f(A)+J$ n'est pas cohérent, alors $A \bowtie^f J$ est Nil$_*$-cohérent non cohérent.*
2) *Si de plus, $\mathrm{Nil}(A)$ est un idéal de type fini de A, $J \subseteq \mathrm{Nil}(B)$, A est Nil$_*$-cohérent spécial, $f(A)+J$ est Nil$_*$-cohérent et A ou $f(A)+J$ n'est pas cohérent, alors $A \bowtie^f J$ est Nil$_*$-cohérent spécial non cohérent.*

***Corollaire* 7.4.4**
Soient A un anneau et I un idéal de type fini de A tel que $I \subseteq \mathrm{Nil}(A)$. Alors,

1) *Si A est Nil$_*$-cohérent non cohérent, alors $A \bowtie I$ est aussi Nil$_*$-cohérent non cohérent.*
2) *On suppose de plus, que $\mathrm{Nil}(A)$ est de type fini. Si A est Nil$_*$-cohérent spécial non cohérent, alors $A \bowtie I$ est aussi Nil$_*$-cohérent spécial non cohérent.*

***Exemple* 7.4.1**
Soit $(R, \mathfrak{m})$ un anneau local intègre non cohérent et E' un $(R/\mathfrak{m})$-espace vectoriel de dimension finie. On pose $A := R \propto E'$ et $M := \mathfrak{m} \propto E'$. Soient E un (A/M)-espace vectoriel de dimension finie, $f : A \to A \propto E$ l'homomorphisme canonique et $J := \mathrm{Nil}(A) \propto E$. Alors, $A \bowtie^f J$ est Nil$_*$-cohérent spécial non cohérent.

Preuve.
D'après le théorème 7.3.1 (2), on a A est Nil$_*$-cohérent spécial. Puisque R n'est pas cohérent, alors [21, Théorème 2.6 (2)] donne que A n'est pas cohérent. De plus, $A \propto E$ est Nil$_*$-cohérent spécial. Donc, on obtient directement le résultat en appliquant le corollaire 7.4.3.

***Exemple* 7.4.2**
Soit $f : A \to B$ un homomorphisme d'anneaux avec A n'est pas cohérent et B est intègre. Soit J un idéal propre de B tel que $f^{-1}(J) = \{0\}$. Alors $A \bowtie^f J$ est Nil$_*$-cohérent spécial non cohérent.

Preuve.
Puisque $f^{-1}(J) = \{0\}$, on a alors $A \bowtie^f J \cong f(A) + J$ est intègre non cohérent.

***Exemple* 7.4.3**
Soient $f : A \to B$ un homomorphisme d'anneaux où A et B sont intègres et A n'est pas cohérent, et soit J un idéal propre de B. Alors $A \bowtie^f J$ est Nil$_*$-cohérent spécial non cohérent.

Preuve.
Le fait que A et B sont intègres donne que $\mathrm{Nil}(A \bowtie^f J) = \{0\}$. Donc $A \bowtie^f J$ est Nil$_*$-cohérent spécial (car réduit) non cohérent.

Perspectives

Nous terminons ce travail, par quelques perspectives de recherche que nous souhaitions aborder prochainement.

La première question :

Quelle est la dimension globale faible de la bi-amalgamation dans le cas général ?

La deuxième question :

Quelles sont les conditions nécessaires et suffisantes pour que la bi-amalgamation soit un anneau Nil_*-cohérent et Nil_*-cohérent spécial ?

Bibliographie

[1] K. Alaoui Ismaili and N. Mahdou, Coherence in amalgamated algebra along an ideal, Bull. Iranian Math. Soc. 41 (3) (2015) 625–632.

[2] K. Alaoui Ismaili and N. Mahdou, Finite conductor property in amalgamated algebra, J. Taibah University for Science 9 (2015), 332–339, Elsevier.

[3] D.D. Anderson and V.P. Camillo, Commutative rings whose elements are a sum ofa unit and an idempotent, *Comm. Algebra* **30** (2002), no. 7, 3327–3336.

[4] D. D. Anderson and M. Winders, Idealization of a module, J. Commut. Algebra 1 (1) (2009) 3–56.

[5] S. Bazzoni and S. Glaz, Prüfer rings, in : J. Brewer, S. Glaz, W. Heinzer, B. Olberding (Eds.), Multiplicative Ideal Theory in Commutative Algebra : A tribute to the work of Robert Gilmer, Springer, New York, 2006, pp. 55–72.

[6] N. Bourbaki, Algèbre Commutative, Chaps. 1-2, Éléments de Mathématique XXVII, Hermann, Paris, 1961.

[7] J. G. Boynton, Pullbacks of arithmetical rings, Comm. Algebra 35 (2007) 2671–2684.

[8] J. G. Boynton, Pullbacks of Prüfer rings, J. Algebra 320 (2008) 2559–2566.

[9] M. Chhiti, M. Jarrar, S. Kabbaj, N. Mahdou, Prüfer conditions in an amalgamated duplication of a ring along an ideal. Commun. Algebra 43, 249–261 (2015)

[10] M. D'Anna, C. Finocchiaro and M. Fontana, Amalgamated algebras along an ideal, in : M. Fontana, S. Kabbaj, B. Olberding, I. Swanson (Eds.), Commutative Algebra and its Applications, Walter de Gruyter, Berlin, 2009, pp. 155–172.

[11] M. D'Anna, C. Finocchiaro and M. Fontana, Properties of chains of prime ideals in an amalgamated algebra along an ideal, J. Pure Appl. Algebra 214 (9) (2010) 1633–1641.

[12] G. DeMarco ; Projectivity of Pure Ideals, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, 68, 289–304(1983).

[13] D. E. Dobbs, Cech cohomology and a dimension theory for commutative rings, Ph. D. thesis, Cornell Univ., Ithaca, NY (1969).

[14] C. Finocchiaro, Prüfer-like conditions on an amalgamated algebra along an ideal, Houston J. Math. 40 (1) (2014) 63–79.

[15] M. Fontana, Topologically defined classes of commutative rings, Ann. Mat. Pura Appl. 123 (1980), 331–355.

[16] M. Fontana, J. A. Huckaba and I. J. Papick, Prüfer Domains, Marcel Dekker, New York, 1997.

[17] S. Glaz ; Commutative coherent rings, Springer-Verlag, Lecture Notes in Mathematics, 1371 (1989).

[18] S. Glaz and R. Schwarz, Prüfer conditions in commutative rings, Arab. J. Sci. Eng. 36 (2011) 967–983.

[19] M. E. Harris, Some results on coherent rings, Proc. Amer. Math. Soc. 17 (1966), 474–479.

[20] M. E. Harris, Some results on coherent rings II, Glasgow Math. J. 8 (1967), 123–126.

[21] S. Kabbaj and N. Mahdou, Trivial extensions defined by coherent-like conditions, Comm. Algebra 32 (2004), 3937–3953.

[22] I. Kaplansky, Commutative Rings, The University of Chicago Press, Chicago, 1974.

[23] T.Y. Lam, Exercises in Classical Ring Theory, Problem Books in Mathematics. Springer-Verlag, New York, First edition, 1995.

[24] N. Mahdou, Anneaux commutatifs cohérents et la (n,d)propriété.

[25] N. Mahdou, Cours et exercices corrigés : Structure algébrique.

[26] N. Mahdou, Introduction à l'algèbre homologique.

[27] A. Mimouni, M. Kabbour, and N. Mahdou, Trivial ring extensions defined by arithmetical-like properties, Comm. Algebra 41 (2013) 4534–4548.

[28] J. Rotman ; An Introduction to Homological Algebra, Academic press, Pure and Appl. Math., A Series of Monographs and Textbooks, 25 (1979).

[29] S. Greco and P. Salmon, Topics in m-adic Topologies, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1971.

[30] Y. Xiang and L. Ouyang, Nil_*-coherent rings, Bull. Korean Math. Soc. 51 (2014), 579–594.