

# Master Mathématiques et Applications au Calcul Scientifique (MACS)

## MEMOIRE DE FIN D'ETUDES

### Pour l'obtention du Diplôme de Master Sciences et Techniques (MST)

# La structure des graphes de diviseur de zéro, de commutation et de Co-diviseur de zéro.

**Réalisé par :** Jamal ATTMANI

**Encadré par :** Pr. Lahcen OUKHTITE

**Soutenu le 17 juin 2019**

**Devant le jury composé de :**

- |                          |  |
|--------------------------|--|
| - Pr. Abdelmajid HILALI  | Faculté des Sciences et Techniques Fès |
| - Pr. Najib MAHDOU       | Faculté des Sciences et Techniques Fès |
| - Pr. Lahcen OUKHTITE    | Faculté des Sciences et Techniques Fès |
| - Pr. Mohamed TAMEKKANTE | Faculté des Sciences Meknès            |

**Année Universitaire 2018 / 2019**

FACULTE DES SCIENCES ET TECHNIQUES FES – SAISS

☒ B.P. 2202 – Route d'Imouzer – FES

# **La Structure des Graphes de Diviseur de Zéro, de Commutation et de Co-Diviseur de Zéro**

**Jamal ATTMANI**

Sous la direction du Professeur: **Lahcen OUKHTITE.**

17 juin 2019

---

À mon père, ma mère, mes frères , ma sœur...

À ma grande famille et mes amis...

**Je vous aime beaucoup.**

---

# REMERCIEMENTS

Au terme de ce travail, je voudrais exprimer mes remerciements et ma profonde reconnaissance à tout ceux qui ont contribué de prêt ou de loin à sa réalisation :

Je voudrais, en premier lieu, exprimer ma profonde reconnaissance à mon encadrant, Professeur **Lahcen OUKHTITE**, qui, grâce à ses orientations précieuses, ses encouragements valorisants, sa direction compétente de ce mémoire, son soutien dans les moments d'incertitude et sa disponibilité inconditionnelle, j'ai pu réaliser ce travail et s'initier à la recherche.

Je tiens également à exprimer toute ma gratitude et tout mon sentiment de reconnaissance aux professeurs **Abdelmajid HILALI**, **Najib MAHDOU** et **Mohamed TAMEKKANTE** pour l'honneur qu'ils me font d'accepter d'être membres de jury de ce mémoire.

J'adresse mes sincères remerciements et ma grande reconnaissance à tous mes professeurs du cycle Master Mathématiques et Applications aux calculs scientifiques.

J'exprime ma gratitude à tous **mes collègues** du cycle Master Mathématiques et Applications aux calculs scientifiques pour leur soutien amical durant ces deux années d'étude.

---

# TABLE DES MATIÈRES

<b>Remerciements</b>	<b>2</b>
<b>Table des figures</b>	<b>5</b>
<b>Introduction générale</b>	<b>7</b>
<b>1 Notions de base</b>	<b>10</b>
1.1 Théorie des graphes . . . . .	10
1.1.1 Concept de base . . . . .	10
1.1.2 Chemins et cycles . . . . .	12
1.1.3 Sous-graphes . . . . .	13
1.1.4 Connexité . . . . .	14
1.1.5 Graphes particuliers . . . . .	15
1.1.6 Représentations matricielle des graphes . . . . .	20
1.1.7 Stables et cliques-ensemble dominant . . . . .	21
1.1.8 Isomorphisme et automorphisme de graphes . . . . .	22
1.1.9 Coloration . . . . .	23
1.2 Les anneaux commutatifs . . . . .	25
1.2.1 Diviseur de zéro-Anneau intègre-Élément inversible . . . . .	26
1.2.2 Caractéristique d'un anneau unitaire . . . . .	28
1.2.3 Notion d'idéal d'un anneau commutatif . . . . .	28
1.2.4 Éléments nilpotents-Nilradical . . . . .	29
1.2.5 Anneaux Noethériens-Artiniens . . . . .	30
<b>2 Le graphe de diviseur de zéro des anneaux commutatifs</b>	<b>31</b>
2.1 Introduction . . . . .	31
2.2 La connexité de $\Gamma(R)$ . . . . .	33
2.3 Anneau associé à un graphe donné . . . . .	36
2.4 Caractérisation des anneaux particuliers . . . . .	38
2.5 Théorème de Beck et $\Gamma(\mathbb{Z}_N)$ . . . . .	42
<b>3 Le graphe de commutation des anneaux non-commutatifs</b>	<b>50</b>
3.1 Introduction . . . . .	50
3.2 La connexité du graphe de commutation . . . . .	51

3.3	Graphe de commutation des anneaux d'ordres $p^n$ . . . . .	54
3.3.1	Les anneaux d'ordres $p^2$ et $p^3$ . . . . .	54
3.3.2	Les anneaux d'ordres $p^4$ et $p^5$ . . . . .	56
3.4	Graphe de commutation d'ordre au plus vingt . . . . .	61
3.5	Graphe de commutation des anneaux d'ordres $p^n q$ . . . . .	64
3.5.1	Les anneaux d'ordres $pq$ et $p^2 q$ . . . . .	64
3.5.2	Les anneaux d'ordres $p^3 q$ . . . . .	66
3.6	Le graphe complémentaire $\overline{\Omega(R)}$ et les graphes planaires . . . . .	68
<b>4</b>	<b>Le graphe de co-diviseur de zéro des anneaux</b>	<b>74</b>
4.1	Introduction . . . . .	74
4.2	Graphe de co-diviseur de zéro des anneaux commutatifs . . . . .	75
4.2.1	Graphe de co-diviseur de zéro $\Gamma'(R)$ . . . . .	75
4.2.2	Sous-graphe $\Gamma'(R) \setminus J(R)$ du graphe de co-diviseur de zéro . . . . .	84
4.3	Graphe de co-diviseur de zéro des anneaux non-commutatifs . . . . .	86
4.3.1	Graphe de co-diviseur de zéro $\Gamma'(R)$ . . . . .	87
4.3.2	Graphe de co-diviseur de zéro des matrices . . . . .	91
	<b>Bibliographie</b>	<b>93</b>

---

# TABLE DES FIGURES

1	Carte de l'Europe coloriée avec quatre couleurs . . . . .	8
1.1	Un graphe simple d'ordre 7 dont $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ . . . . .	11
1.2	Exemple de graphe simple $G$ . . . . .	13
1.3	Un graphe et un graphe partiel. . . . .	14
1.4	Un graphe et un sous-graphe induit. . . . .	14
1.5	Graphes complets d'ordres 1 à 5 . . . . .	16
1.6	Le nombre d'arêtes de $K_6$ est 15. . . . .	16
1.7	Un graphe complet et un graphe biparti complet. . . . .	17
1.8	Graphes étoiles. . . . .	17
1.9	Un graphe et son complémentaire. . . . .	17
1.10	Un graphe 5-cycle. . . . .	18
1.11	Un arbre. . . . .	18
1.12	Une forêt. . . . .	18
1.13	Le graphe $K_4$ est un graphe planaire . . . . .	19
1.14	cycle <b>Eulérien</b> , Chemin (cycle) <b>Hamiltonien</b> . . . . .	19
1.15	Un graphe double étoile. . . . .	20
1.16	Un graphe simple et sa matrice d'adjacence. . . . .	20
1.17	Représentation par listes d'adjacence du graphe de la figure 1.16. . . . .	21
1.18	La différence entre un stable maximal et un stable maximum. . . . .	22
1.19	Un graphe $G$ avec trois exemples d'ensembles dominants (constitués des sommets rouges) dont $\beta(G) = 2$ . . . . .	22
1.20	Deux graphes isomorphes et la bijection explicitée. . . . .	23
1.21	Le nombre chromatique des graphes complets d'ordres 1 à 5 . . . . .	24
1.22	Le nombre chromatique des cycles élémentaires d'ordres 3 à 6 . . . . .	24
1.23	Graphe admettant une 4-coloration . . . . .	24
2.1	Le graphe $\Gamma(\mathbb{Z}_4)$ . . . . .	32
2.2	Le graphe $\Gamma_0(\mathbb{Z}_4)$ . . . . .	32
2.3	Le graphe $\Gamma(\mathbb{Z}_4)$ , avec $diam(\mathbb{Z}_4) = 0$ . . . . .	34
2.4	Le graphe $\Gamma(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)$ dont le diamètre est 1 . . . . .	34
2.5	Le graphe $\Gamma(\mathbb{Z}_6)$ , avec $diam(\mathbb{Z}_6) = 2$ . . . . .	34
2.6	Le graphe $\Gamma(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)$ dont le diamètre est 3 . . . . .	34
2.7	Le graphe $\Gamma(\mathbb{Z}_2[X, Y] / (X^2, XY, Y^2))$ . . . . .	37

2.8	Le graphe $\Gamma(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3)$ . . . . .	37
2.9	Le graphe $\Gamma(R)$ supposé. . . . .	38
2.10	Les graphes $\Gamma_0(R)$ , où (a) $R$ intègre, (b) $\Gamma_0(\mathbb{Z}_4)$ et (c) $\Gamma_0(\mathbb{Z}_2[X]/(X^2))$ . . . . .	39
2.11	Le cycle $C$ . . . . .	49
3.1	Les graphes $3K_2$ et $3K_4$ . . . . .	51
3.2	Les graphes $7K_2$ , $K_2 \cup 2K_6$ et $4K_2 \cup K_6$ . . . . .	51
3.3	Le triangle $[x, x + y, y, x]$ . . . . .	52
3.4	Le graphe $3K_2$ . . . . .	63
3.5	Le graphe $3K_4$ . . . . .	63
3.6	Les graphes $\{7K_2, K_2 \cup 2K_2, 4K_2 \cup K_6\}$ . . . . .	63
3.7	Le graphe engendré par $\{a, a + x, y, b, b + x, a + b\}$ . . . . .	70
3.8	Le graphe $K_5$ . . . . .	70
3.9	Sous-graphe du graphe engendré par $\{a, a + z, c, b, b + z, a + b\}$ . . . . .	70
3.10	Sous-graphe du graphe engendré par $\{t, w, c, a, b, a + b\}$ . . . . .	71
3.11	Sous-graphe du graphe engendré par $\{a, y_1, y_2, b, a + b, c\}$ . . . . .	72
3.12	Sous-graphe du graphe engendré par $\{a, x_1, x_2, y, b, a + b\}$ . . . . .	72
3.13	Sous-graphe du graphe engendré par $\{x, y, c, a, b, a + b\}$ . . . . .	73
4.1	Cycle $[a_1, a_2, a_3, a_1]$ . . . . .	75
4.2	Un cycle dans $\Gamma'(R_1 \times R_2)$ . . . . .	76
4.3	Un cycle dans $\Gamma'(R_1 \times R_2)$ . . . . .	76
4.4	Le graphe $\Gamma'(\mathbb{Z}_2 \times F)$ . . . . .	76
4.5	Les graphes $\Gamma'(\mathbb{Z}_4)$ et $\Gamma'(\mathbb{Z}_2[X]/(X^2))$ . . . . .	77
4.6	Un cycle dans $\Gamma'(R)$ . . . . .	77
4.7	Un cycle dans $\Gamma'(R)$ . . . . .	78
4.8	Deux cycles dans $\Gamma'(R)$ . . . . .	78
4.9	Deux cycles dans $\Gamma'(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)$ . . . . .	79
4.10	Un carré dans $\Gamma'(R_2 \times R_2)$ . . . . .	80
4.11	Un sous-graphe de $\Gamma'(R_1 \times R_2)$ . . . . .	80
4.12	Le sous-graphe partiel de $\Gamma'(R)$ . . . . .	81
4.13	Un sous-graphe de $\Gamma'(R)$ . . . . .	82
4.14	Un sous-graphe de $\Gamma'(R)$ . . . . .	82
4.15	Le graphe de $\Gamma'(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3)$ . . . . .	82
4.16	Graphe partiel de $\Gamma'(R_1 \times R_2)$ . . . . .	83
4.17	Les triangles $[a, b, c, a]$ . . . . .	85
4.18	Le graphe $\Gamma'(R) \setminus J(R)$ . . . . .	85
4.19	Le graphe $\Gamma'(R) \setminus J(R)$ . . . . .	86
4.20	Le triangle $[a_1, a_2, a_3, a_1]$ . . . . .	88
4.21	Le carré $[a_1, b_1, a_2, b_2, a_1]$ . . . . .	88
4.22	Le plus petit cycle élémentaire dans $\Gamma'(R) \setminus J(R)$ . . . . .	89
4.23	Un triangle dans $\Gamma'(R) \setminus J(R)$ . . . . .	89
4.24	Un triangle dans $\Gamma'(R) \setminus J(R)$ . . . . .	89
4.25	Un triangle dans $\Gamma'(R) \setminus J(R)$ . . . . .	89

---

# INTRODUCTION GÉNÉRALE

L'histoire de la théorie des graphes débute peut-être avec les travaux d'Euler au 18<sup>ème</sup> siècle et trouve son origine dans l'étude de certains problèmes, tels que celui des ponts de Königsberg (les habitants de Königsberg se demandaient s'il était possible, en partant d'un quartier quelconque de la ville, de traverser tous les ponts sans passer deux fois par le même et de revenir à leur point de départ), la marche du cavalier sur l'échiquier ou le problème du coloriage de cartes et du plus court trajet entre deux points.

La théorie des graphes s'est alors développée dans diverses disciplines telles que la chimie, la biologie, les sciences sociales (réseaux de transports), gestion de projets, informatique (topologie des réseaux, complexité algorithmique, protocoles de transferts), la physique quantique, etc.

Depuis le début du 20<sup>ème</sup> siècle, elle constitue une branche à part entière des mathématiques, grâce aux travaux de König, Menger, Cayley puis de Berge et d'Erdős. Cette branche des mathématiques a connu un grand regain d'intérêt suite à l'émergence des réseaux sociaux Internet dont les connexions entre "amis" et "suiveurs" constituent des graphes dont l'analyse topologique et statistique peut nous apprendre de nombreuses choses.

De manière générale, un graphe permet de représenter la structure, les connexions d'un ensemble complexe en exprimant les relations entre ses éléments : réseau de communication, réseaux routiers, interaction de diverses espèces animales, circuits électriques.

Les graphes constituent donc une méthode de pensée qui permet de modéliser une grande variété de problèmes en les ramenant à l'étude de sommets et d'arcs.

Le problème de coloration de graphes est l'un des origines de la théorie des graphes, ce problème remonte au 19<sup>ème</sup> siècle lorsque Guthrie a remarqué que quatre couleurs étaient suffisantes pour colorer la carte d'Angleterre, sans donner la même couleur à deux régions ayant une frontière commune. Il pose alors la question de savoir si quatre couleurs suffisent toujours pour colorier n'importe quelle carte géographique de sorte que deux régions voisins n'aient pas la même couleur. Malgré un énoncé simple, cette conjecture est restée non résolue pendant plus d'un siècle. Il fallut attendre 1978 pour qu'Appel et Haken parviennent à démontrer ce résultat à l'aide d'un ordinateur. Même si le problème des cartographes est résolu, celui des mathématiciens ne l'est pas, car ce théorème traite seulement du cas particulier des graphes planaires.



FIGURE 1 – Carte de l'Europe coloriée avec quatre couleurs .

Au cours de la dernière décennie du 19<sup>ème</sup> siècle, la littérature sur l'application de la théorie des graphes en algèbre a énormément augmenté et de nombreux articles de recherche ont été publiés dans ce domaine de la théorie des graphes. L'application de la théorie des graphes en algèbre est un sujet fascinant qui concerne l'interaction entre l'algèbre et la théorie des graphes. Les outils algébriques peuvent être utilisés pour donner des preuves surprenantes et élégantes des faits théoriques sur les graphes. De nombreux objets algébriques intéressants sont associés aux graphes. Ces dernières années, l'application de la théorie des graphes en algèbre est devenue un sujet de recherche intéressant. On étudie les propriétés des graphes en les traduisant en structures algébriques et en utilisant les résultats et les méthodes de l'algèbre pour en déduire des théorèmes. D'autre part, de nombreuses structures algébriques peuvent également être étudiées en les traduisant en graphes et en utilisant les propriétés des graphes.

La première branche de l'interaction entre l'algèbre et la théorie des graphes comprend l'étude des graphes en relation avec l'algèbre linéaire. Les différentes matrices associées à un graphe sont principalement des structures algébriques qui ont permis de caractériser le graphe. En particulier, cela implique l'étude du spectre de la matrice d'adjacence ou de la matrice laplacienne d'un graphe. Un graphe peut être complètement déterminé par sa matrice d'adjacence et les propriétés spectrales de cette matrice sont étroitement liées aux propriétés du graphe. Par exemple, si un graphe est régulier, les valeurs propres de la matrice d'adjacence du graphe sont liées en valeurs absolues par le degré du graphe. Dans le cas du graphique linéaire, il existe une forte limite inférieure pour les valeurs propres. Matrice d'incidence, matrice de cycle, matrice diagonale sont d'autres matrices associées à un graphe qui aident à caractériser un graphe. Cette branche est classée dans la théorie des graphes spectraux.

Voici un résumé des différents chapitres qui composent ce travail.

Le premier chapitre est consacré aux notions de base, nous donnons des définitions fondamentaux et rappels sur les notions de base en théorie des graphes, que nous utiliserons aux cours de ce mémoire. Nous donnons également un bref

aperçu de la théorie des anneaux en insistant sur les notions fondamentales.

Le deuxième chapitre porte sur le graphe de diviseur de zéro des anneaux commutatifs. Nous parlerons de ce graphe avec ses différentes caractérisations.

Dans le troisième chapitre, nous présentons un nouveau graphe dit graphe de commutation des anneaux non-commutatifs, et quelques propriétés fondamentales de ce type des graphes.

Dans le dernier chapitre nous définissons un autre graphe dit graphe de co-diviseur de zéro, que ce soit des anneaux commutatifs ou non-commutatifs, ainsi quelques propriétés de la structure de ces graphes.

---

---

# CHAPITRE 1

---

## NOTIONS DE BASE

Introduire une nouvelle matière n'est pas toujours chose plaisante car il s'agit souvent d'une accumulation de définitions ! Et c'est hélas la situation rencontrée ici. Nous allons donc agrémente cette présentation, autant que faire se peut, d'exemples mettant en lumière l'intérêt pratique de la théorie des graphes dans l'aspect des anneaux. Comme l'indique le titre de ce chapitre, nous présentons ici les notions de base : les graphes et les anneaux. Le lecteur habitué au sujet peut se dispenser de lire ce chapitre. Bien que toutes les définitions de théories des graphes et utiles à la compréhension de ce rapport soient données rigoureusement, le lecteur novice préférera sans doute consulter un ouvrage classique [[14],[22]]. Pour ce qui est de théories des anneaux, nous ne donnons pas d'exposé rigoureux, mais un simple aperçu des définitions et des résultats les plus classiques.

### 1.1 Théorie des graphes

De nombreuses situations peuvent se décrire commodément au moyen d'un diagramme fait de points et de lignes reliant certaines paires de ces points. Par exemple, les points peuvent représenter des personnes, et les lignes des paires d'amis ; ou bien les points peuvent être des centres de communication et les lignes représenter des liaisons entre les centres. Il faut noter que dans de tels diagrammes on s'intéresse principalement au fait que deux points sont reliés ou non par une ligne ; la façon de relier ces deux points est sans importance. Une abstraction mathématique des situations de ce type a engendré le concept de graphe.

#### 1.1.1 Concept de base

Intuitivement un graphe simple  $G$ , est un ensemble de points ou sommets (que nous supposerons toujours non vide et fini dans la suite) dont certaines paires sont reliées, formant ainsi les extrémités d'une arête. Plus formellement :

**Définition 1.1.** *Si  $A$  est un ensemble fini, on dénote par  $A \times A$  l'ensemble des paires non ordonnées  $\{x, y\}$ , avec  $x, y \in A$  et  $x \neq y$ .*

**Définition 1.2.** Un graphe simple fini  $G$  est la donnée d'un couple d'ensembles finis  $G = (V, E)$  où  $V$  est non-vide et  $E \subseteq V \times V$  (une relation binaire sur  $V$ ). Les éléments de  $V$  sont appelés **les sommets** de  $G$  (Vertices en Anglais), et les éléments de  $E$  sont appelés **les arêtes** de  $G$  (Edges en Anglais).

Une arête  $e$  de l'ensemble  $E$  est définie par une paire non ordonnée de sommets, appelés les extrémités de  $e$ . Si l'arête  $e$  relie les sommets  $u$  et  $v$ , on dira que ces sommets sont adjacents, ou incidents avec  $e$ , ou bien que l'arête  $e$  est incidente avec les sommets  $u$  et  $v$ .

On appelle **ordre** du graphe  $G$  le nombre de sommets de ce graphe, et on appelle **taille** du graphe  $G$  le nombre d'arêtes.

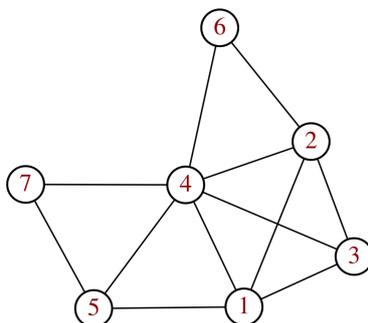


FIGURE 1.1 – Un graphe simple d'ordre 7 dont  $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ .

**Remarque 1.1.** • Un graphe simple sans sommet (et donc sans arête) est **le graphe nul** (ou graphe vide). Un graphe simple avec uniquement un sommet est dit **trivial**.  
 • Un graphe fini est un graphe dont l'ensemble de sommets est fini (et donc aussi l'ensemble d'arêtes). Dans le cas contraire, c'est un graphe infini. Le plus souvent, les graphes considérés sont tacitement supposés finis.

Dans la suite tous les graphes que nous considérerons seront simples. Deux sommets  $u$  et  $v$  d'un graphe simple  $G$  formant les extrémités d'une même arête  $(u, v)$ , sont dit **adjacents** ou **voisins**, ce que l'on note  $u \sim v$ , et dans le cas contraire non-adjacents ou non-voisins ( $u \not\sim v$ ). On définit alors le voisinage d'un sommet :

**Définition 1.3.** - Le **voisinage** d'un sommet  $v$  de  $G$ , noté  $V(v)$ , est l'ensemble des sommets qui lui sont adjacents.

Dans la figure 1.1, on a :

- ▶  $V(1) = \{2, 3, 4, 5\}$        $V(7) = \{4, 5\}$ .
- ▶  $V(4) = V \setminus \{4\}$ .

Un sommet n'ayant aucun voisin est qualifié d'**isolé**.

On définit également le voisinage d'un ensemble de sommets :

**Définition 1.4.** Le **voisinage** (ouvert) d'un ensemble de sommets  $S \subset V$ , noté  $V(S)$ , est l'ensemble

$$\{u \in V \setminus S \mid \exists v \in S, \{u, v\} \in E\}$$

Dans la même figure 1.1 , prenons  $S = \{2, 3\}$  alors

$$V(S) = V(\{2, 3\}) = \{6, 4, 1\}.$$

**Définition 1.5.** Le **degré** d'un sommet  $v$ , noté  $d(v)$ , est égal au nombre des arêtes incidents à  $v$ , autrement dit  $d(v) = |V(v)|$ .

Soit  $G$  un graphe simple, le plus petit degré d'un graphe  $G$  est noté  $\delta(G)$  et le plus grand degré est noté  $\Delta(G)$ , plus formellement :

$$\delta(G) = \min_{v \in V} d(v)$$

et

$$\Delta(G) = \max_{v \in V} d(v)$$

**Exemple 1.1.** Dans la figure 1.1, on a :

- ▶  $d(1) = d(2) = 4, d(3) = d(5) = 3, d(4) = 6$  et  $d(6) = d(7) = 2$ .
- ▶  $\delta(G) = \min_{v \in V} d(v) = d(6) = d(7) = 2$ .
- ▶  $\Delta(G) = \max_{v \in V} d(v) = d(4) = 6$ .

Il est facile de démontrer le résultat suivant, que l'on trouve déjà dans l'article d'**Euler** sur les sept ponts de Königsberg :

**Lemme 1.1.** Soit  $G = (V, E)$  un graphe simple, alors  $\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$ .

*Démonstration.* Il suffit de constater que chaque arête compte pour deux degrés (un pour chacune de ses extrémités). C'est-à-dire chaque paire  $\{u, v\}$  de  $E$  est comptée deux fois, une fois pour  $d(v)$  et une seconde fois pour  $d(u)$ . □

**Définition 1.6.** Soit  $k$  un entier, un graphe  $G$  est  **$k$ -régulier** si tout sommet est de degré  $k$ .

Un graphe 3-régulier est dit **cubique**.

### 1.1.2 Chemins et cycles

Les définitions suivantes sont toute assez naturelles et intuitives, mais il faut bien les préciser au moins une fois de manière rigoureuse pour savoir de quoi on parle exactement.

**Définition 1.7.** Un **chemin**  $C$  dans un graphe  $G = (V, E)$  reliant  $u$  à  $v$  est définie par une suite finie de sommets de type

$$C = [v_0, v_1, v_2, \dots, v_{p-1}, v_p]$$

où  $v_0 = u, v_p = v$  et  $\{v_i, v_{i+1}\} \in E$  pour tout  $i \in \{0, 1, \dots, p-1\}$ .

Le nombre  $p \geq 2$  est la **longueur** du chemin  $C$ . Le chemin  $C$  est un **cycle** si  $u = v$ .

**Définition 1.8.** Un *chemin simple* (resp. *cycle simple*)  $C$  dans un graphe  $G = (V, E)$  est un chemin (resp. cycle) ne passant pas deux fois par une même arête, c'est-à-dire dont toutes les arêtes sont distinctes.

Un *chemin élémentaire* (resp. *cycle élémentaire*) d'ordre  $n$ , noté  $P_n$  (resp.  $C_n$ ), est un chemin (resp. cycle) ne passant pas deux fois par un même sommet, c'est-à-dire dont tous les sommets sont distincts.

Un graphe  $G = (V, E)$  sans cycle élémentaire est appelé **acyclique**.

Un graphe  $G = (V, E)$  qui ne contient qu'un seul cycle élémentaire est appelé **unicyclique**.

Par abus de langage, on parlera plus simplement de **cycle (im)pair** pour désigner un cycle de longueur (im)paire.

**Exemple 1.2.** Considérons le graphe suivant

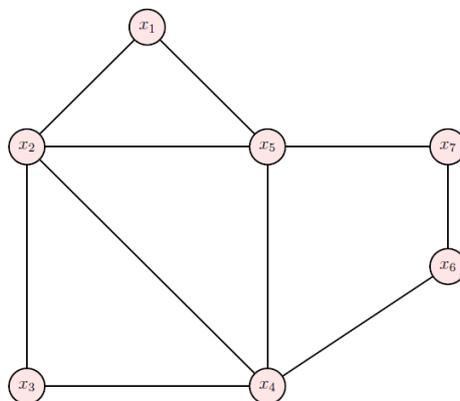


FIGURE 1.2 – Exemple de graphe simple  $G$ .

Dans ce graphe on a :

- $[x_1, x_2, x_4, x_5, x_2, x_3]$  est un chemin simple non élémentaire.
- $[x_1, x_2, x_3, x_4, x_6]$  est un chemin élémentaire.
- $[x_1, x_2, x_3, x_4, x_2, x_5, x_1]$  est un cycle simple non élémentaire.
- $[x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_1]$  est un cycle élémentaire.

**Définition 1.9.** Dans un graphe  $G$  qui a au moins un cycle, la longueur d'un plus long cycle élémentaire est appelée **la circonférence** et la longueur d'un plus court cycle élémentaire est appelée **la maille**.

Dans le graphe simple 1.2, la maille de  $G$  est 3, et la circonférence égale à 7.  
Pour un graphe qui ne contient pas de cycle ; par convention, sa maille est l'infini.

### 1.1.3 Sous-graphes

La majorité des problèmes de théorie des graphes consiste en l'étude, l'existence ou l'optimalité de certains sous-objets contenus dans un graphe. Dans cette section, nous formalisons ce type de construction. Un sous-graphe d'un graphe

donné est un graphe obtenu en supprimant certains sommets et/ou arêtes. En théorie des graphes, un sous-graphe est un graphe contenu dans un autre graphe. Formellement,

**Définition 1.10.** Un graphe  $H = (V', E')$  est un **sous-graphe** de  $G = (V, E)$  si  $V' \subseteq V$  et  $E' \subseteq \{a \in E / \text{les extrémités de l'arête } a \text{ sont dans } V'\}$ ;  $G$  est alors un **sur-graphe** de  $H$ .

**Définition 1.11.** Un **sous-graphe partiel** (ou parfois graphe couvrant) de  $G = (V, E)$  est un sous-graphe  $H = (V, E')$  (c'est-à-dire qu'on peut l'obtenir à partir de  $G$  en supprimant uniquement des arêtes).

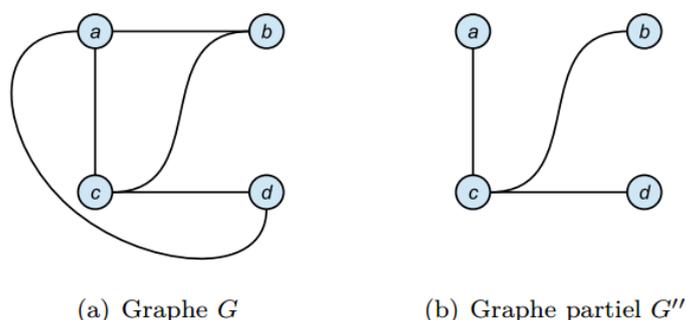


FIGURE 1.3 – Un graphe et un graphe partiel.

**Définition 1.12.** Le sous-graphe de  $G = (V, E)$  **induit** par  $W \subseteq V$  (ou engendré par  $W \subseteq V$ ), noté  $G[W]$ , est le sous-graphe ayant pour ensemble de sommets  $W$  et pour ensemble d'arêtes toutes les arêtes de  $G$  ayant leurs extrémités dans  $W$ .

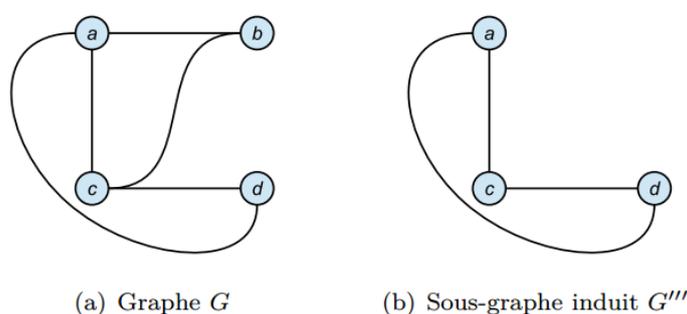


FIGURE 1.4 – Un graphe et un sous-graphe induit.

### 1.1.4 Connexité

La connexité d'un graphe est une mesure importante de sa robustesse quand on le considère comme un réseau (réseau de transport, réseau informatique ...)

**Définition 1.13.** Un graphe est dit **connexe** si pour toute paire de sommets  $x$  et  $y$  de  $G$ , il existe un chemin entre  $x$  et  $y$ , on dit alors que les sommets  $x$  et  $y$  sont **connectés**.

La connexité définit une relation d'équivalence sur l'ensemble des sommets, et chacune des classes d'équivalence est appelée **composante connexe** (connected component) du graphe. Autrement dit, un graphe est connexe si et seulement s'il ne contient qu'une seule composante connexe. Intuitivement, le nombre de composantes connexes correspond au nombre de « morceaux » du graphe quand on le dessine. Un résultat classique énonce que :

**Lemme 1.2.** Pour tout graphe  $G$ ,  $G$  est connexe ou  $\overline{G}$  est connexe.

*Démonstration.* Supposons  $G = (V, E)$  non connexe et montrons que son complémentaire  $\overline{G} = (V', E')$  l'est en montrant que pour tout  $v_1, v_2 \in V = V'$ , il existe un chemin dans  $\overline{G}$  allant de  $v_1$  à  $v_2$ .

- Si  $v_1$  et  $v_2$  ne sont pas dans la même composante connexe, alors  $\{v_1, v_2\} \notin E$ , donc  $\{v_1, v_2\} \in E'$ , ainsi  $v_1$  et  $v_2$  sont connectés dans  $\overline{G}$ .
- Si  $v_1$  et  $v_2$  appartiennent à la même composante connexe, comme  $G$  n'est pas connexe il existe un sommet  $v_3$  de  $G$  qui n'est pas dans la même composante connexe que  $v_1$  et  $v_2$ . On en déduit alors en appliquant deux fois le raisonnement précédent que  $\{v_1, v_3\}$  et  $\{v_3, v_2\}$  sont des arêtes de  $\overline{G}$  qui forment un chemin de  $v_1$  à  $v_2$  ( $[v_1, v_3, v_2]$ ).

□

**Définition 1.14.** Soit  $G = (V, E)$  un graphe simple connexe. La **distance** entre deux sommets  $a$  et  $b$  est la longueur du plus court chemin joignant  $a$  et  $b$ . On la note  $d(a, b)$ . Le **diamètre** de  $G$  est défini par

$$\text{diam}(G) = \max_{a, b \in V} d(a, b).$$

Soit  $G = (V, E)$  un graphe simple non connexe ; par convention, le diamètre de  $G$  est défini par

$$\text{diam}(G) = +\infty.$$

**Définition 1.15.** Soit  $G$  un graphe connexe.

Un **point** (resp. ensemble) **d'articulation** dans  $G$  est un sommet (resp. ensemble de sommets) de  $G$  tel que sa suppression rend le graphe  $G$  non connexe.

### 1.1.5 Graphes particuliers

Certains graphes, comme la griffe, interviennent si souvent que les chercheurs leur ont attribué un nom ou une notation spéciale. Ce sont notamment les graphes complets, les graphes bipartis, les cycles et les chemins.

**Définition 1.16.** Le graphe **complet** d'ordre  $n$ , noté  $K_n$ , est le graphe où chaque sommet est adjacent aux  $n - 1$  autres sommets.

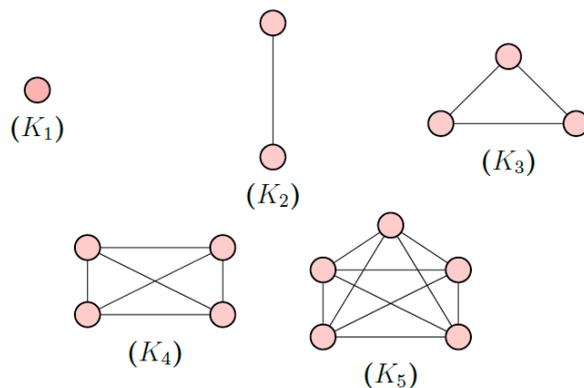


FIGURE 1.5 – Graphes complets d’ordres 1 à 5

**Proposition 1.1.** *Le nombre d’arêtes de  $K_n$  est :*

$$\frac{n(n-1)}{2}.$$

*Démonstration.* Dans un graphe complet ayant  $n$  sommets, chaque sommet étant relié aux  $n - 1$  autres sommets, le degré de chaque sommet est  $n - 1$ . Le nombre d’arêtes d’un graphe est égal à la moitié de la somme des degrés de tous ses sommets. Par conséquent, un graphe simple complet ayant  $n$  sommets aura  $\frac{n(n-1)}{2}$  arêtes.  $\square$

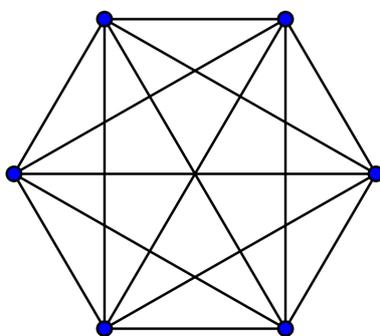


FIGURE 1.6 – Le nombre d’arêtes de  $K_6$  est 15.

**Définition 1.17.** *Un graphe **biparti**  $G = (V, E)$  est un graphe dont on peut partitionner l’ensemble des sommets  $V$  en deux ensembles  $A$  et  $B$  non vides tels que toute arête de  $G$  a une extrémité dans  $A$  et l’autre dans  $B$ . On note alors  $G = (A, B; E)$ .*

**Définition 1.18.** *Un graphe **biparti complet** est un graphe biparti  $G = (A, B; E)$  où tout sommet de  $A$  est adjacent à tout sommet de  $B$ . On le note  $K_{n,m}$ , dans le cas où  $n = |A|$  et  $m = |B|$ .*

La figure 1.7 illustre quelques-uns de ces graphes particuliers.

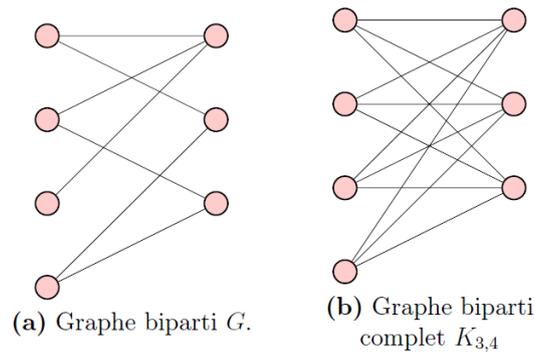


FIGURE 1.7 – Un graphe complet et un graphe biparti complet.

**Définition 1.19.** Le graphe  $K_{1,n}$  avec  $n \in \mathbb{N}^*$  est dit un *graphe étoile*. Son centre est le sommet de la partie d'ordre une.

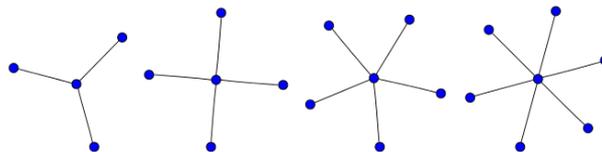


FIGURE 1.8 – Graphes étoiles.

**Définition 1.20.** Un graphe simple  $G = (V, E)$  est dit *t-biparti complet* s'elle existe une partition  $V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_t = V$  de  $V$ , et tel pour tout  $v_i$  et  $v_j$  de  $V$  on a

$$\{v_i, v_j\} \in E \iff v_i \text{ et } v_j \text{ contient dans deux parties différentes.}$$

De plus si  $|V_k| = n_k$  pour tout  $k \in \{1, 2, \dots, t\}$ , alors  $G$  sera noté par  $K_{n_1, n_2, \dots, n_t}$ .

**Exemple 1.3.** Dans le cas où  $t = 2$ , on aura dans le cas des graphes bipartis complets 1.18.

Quand on recherche les propriétés d'un graphe, il est parfois plus simple d'étudier son complémentaire :

**Définition 1.21.** Le *complémentaire* d'un graphe  $G = (V, E)$  est le graphe noté  $\overline{G} = (V', E')$  défini par :

$$V' = V \quad \text{et} \quad e \in E' \iff e \notin E$$



FIGURE 1.9 – Un graphe et son complémentaire.

**Définition 1.22.** Un cycle élémentaire de longueur  $n \geq 3$  est dit un graphe  $n$  – cycle.

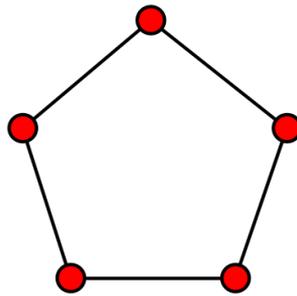


FIGURE 1.10 – Un graphe 5 – cycle.

**Remarque 1.2.** — Un graphe triangle est un  $n$  – cycle, où  $n = 3$ .  
— Un graphe carré est un  $n$  – cycle, avec  $n = 4$ .

**Définition 1.23.** On appelle **arbre** tout graphe connexe sans cycle (acyclique).

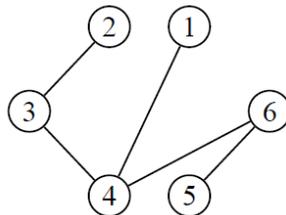


FIGURE 1.11 – Un arbre.

**Définition 1.24.** On appelle **forêt** tout graphe acyclique.

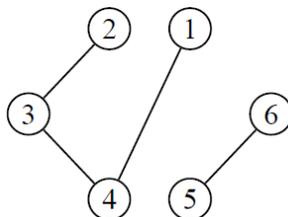


FIGURE 1.12 – Une forêt.

**Définition 1.25.** Un graphe est planaire s'il peut être tracé dans un plan sans qu'aucune de ses arêtes en croise une autre. Un tel tracé est appelé une représentation planaire du graphe.

**Exemple 1.4.** Le graphe  $K_4$  est-il un graphe planaire ?

*Solution :* Oui, car on peut le représenter sans intersection comme le montre la figure suivante :



FIGURE 1.13 – Le graphe  $K_4$  est un graphe planaire

**Proposition 1.2** (Caractérisation de Kuratowski et de Wagner). *Un graphe fini est planaire si et seulement s'il ne contient pas de sous-graphe partiel qui est une expansion de  $K_5$  (le graphe complet à 5 sommets) ou  $K_{3,3}$  (le graphe complet biparti à 3+3 sommets).*

**Définition 1.26.**

- Un **chemin Eulérien** est un chemin dans le graphe qui passe par toutes les arêtes juste une seule fois. Si les extrémités de ce chemin sont coïncident, on parlera de **cycle Eulérien**.
- Un **chemin Hamiltonien** est un chemin dans le graphe qui passe par tous les sommets une et une seule fois. Si les extrémités de ce chemin se coïncident, on parlera de **cycle Hamiltonien**.

**Définition 1.27.**

- Un graphe est dit **Hamiltonien** s'il possède un cycle Hamiltonien.
- Un graphe est dit **Eulérien** s'il possède un cycle Eulérien.

**Exemple 1.5.**

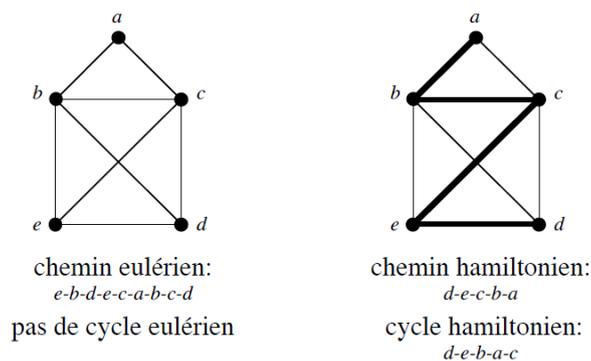


FIGURE 1.14 – cycle **Eulérien**, Chemin (cycle) **Hamiltonien**

Il existe des critères de base qui permettent de déterminer si un multigraphe contient un cycle eulérien (ou un chemin eulérien). Euler découvrit ces critères lorsqu'il résolut le fameux problème des ponts de Königsberg.

**Théorème 1.1.** *Un graphe simple connexe a un chemin Eulérien si et seulement si tous ses sommets sont de degrés pairs sauf au plus deux. Si le graphe n'a pas de sommets impaire, alors il a un cycle Eulérien.*

**Remarque 1.3.** Deux graphes sont disjoints s'ils n'ont aucun sommet en commun, et arête disjoints s'ils n'ont aucune arête en commun.

La manière la plus simple de combiner des graphes sont l'union :

**Définition 1.28.** La réunion des graphes simples  $G = (V, E)$  et  $H = (V', E')$  est le graphe  $G \cup H$  d'ensemble de sommets  $V$  et  $V'$  et d'ensemble d'arêtes  $E \cup E'$ .

**Remarque 1.4.** Si  $G$  et  $H$  sont disjoints, on dit que leur réunion est disjointe, et on la note généralement par  $G + H$ .

**Définition 1.29.** La réunion disjoint de deux graphes étoiles, dont les centres sont adjacent est dit graphe double étoile.

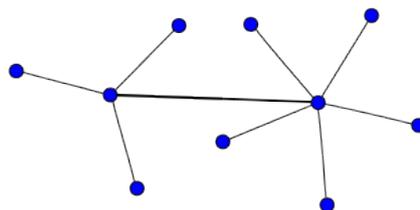


FIGURE 1.15 – Un graphe double étoile.

### 1.1.6 Représentations matricielle des graphes

#### Matrice d'adjacence

**Définition 1.30.** Soit  $V = \{1, 2, \dots, n\}$ . La matrice d'adjacence d'un graphe  $G = (V, E)$  est la matrice carrée  $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$  de taille  $n$  telle que  $a_{ij} = 1$  s'il existe une arête entre les sommets  $i$  et  $j$ , et  $a_{ij} = 0$  sinon.

Notons que la matrice d'adjacence d'un graphe dépend de la numérotation des sommets du graphe qu'elle représente.

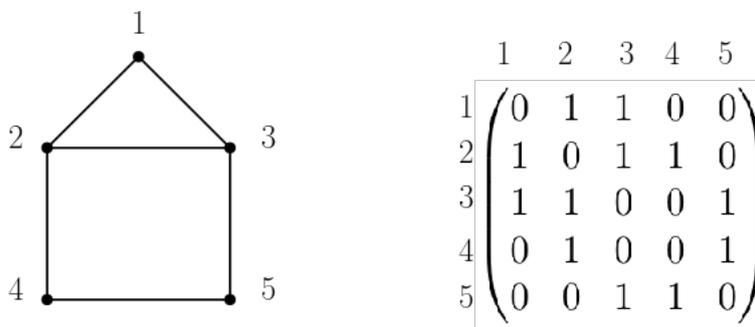


FIGURE 1.16 – Un graphe simple et sa matrice d'adjacence.

## Matrice d'incidence

**Définition 1.31.** Soit  $V = \{1, 2, \dots, n\}$ . La matrice d'incidence d'un graphe  $G = (V, E)$  de taille  $m$  est la matrice  $B = (b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}}$  de taille  $n \times m$ , telle que  $b_{ij} = 1$  si le sommet  $i$  est une extrémité de l'arête  $j$ , 0 sinon.

	Les arêtes					
	{1, 2}	{1, 3}	{2, 3}	{2, 4}	{3, 5}	{4, 5}
1	)	1	1	0	0	0
2		1	0	1	1	0
3		0	1	1	0	1
4		0	0	0	1	0
5		0	0	0	0	1

FIGURE 1.17 – Représentation par listes d'adjacence du graphe de la figure 1.16.

### 1.1.7 Stables et cliques-ensemble dominant

**Définition 1.32.** Soit  $G$  un graphe simple d'ordre au moins deux.

- Un **stable** (ou *independant*) dans  $G$  est un ensemble de sommets deux à deux non adjacents.
- Une **clique** dans  $G$  est un ensemble de sommets deux à deux adjacents.

Ainsi, une clique dans un graphe est un stable dans son complémentaire et inversement. De plus, tout graphe induit par une clique étant un graphe complet, les deux termes sont le plus souvent confondus, de même, un graphe sans arête est régulièrement appelé stable.

**Définition 1.33.** - Un ensemble (de sommets, d'arêtes. . .) est **minimal** (resp. **maximal**) pour une propriété  $P$  s'il ne contient (resp. n'est contenu dans) aucun ensemble vérifiant la propriété  $P$ .

- Un ensemble (de sommets, d'arêtes. . .) est **minimum** (resp. **maximum**) pour une propriété  $P$  s'il est de cardinalité minimale (resp. maximale) pour la propriété  $P$ .

Il est facile de voir qu'un ensemble maximum est aussi maximal ; mais un ensemble maximal n'est pas nécessairement maximum. Par exemple, le stable formé par les sommets rouges sur la figure 1.18(a) est maximal (il est en effet impossible d'ajouter à ce stable un autre sommet pour former un stable de cardinalité supérieure), mais il n'est pas maximum (puisque'il est possible de trouver un autre stable, de cardinalité supérieure (fig. 1.18(b))).

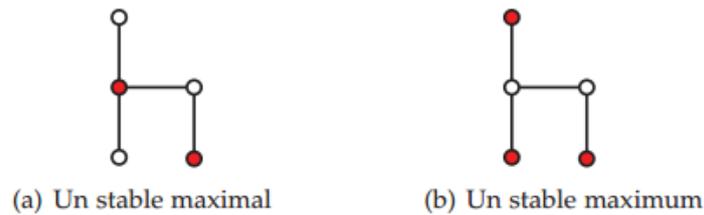


FIGURE 1.18 – La différence entre un stable maximal et un stable maximum.

**Remarque 1.5.** Dans un graphe simple il est possible de trouver plusieurs stables maximaux.

La taille d'un stable maximum de  $G$  est notée  $\alpha(G)$ , et celle d'une clique maximum est notée  $\omega(G)$ . Naturellement, on a

$$\alpha(G) = \omega(\overline{G}).$$

Déterminer un stable maximum ou une clique maximum dans un graphe arbitraire n'est pas du tout trivial.

**Définition 1.34.** • Un ensemble dominant (ou dominating set en anglais) d'un graphe  $G = (V, E)$  est un sous-ensemble  $S$  de l'ensemble  $V$  des sommets tel que tout sommet qui n'appartient pas à  $S$  possède au moins une arête commune avec un sommet de  $S$ .  
 • L'ordre de plus petit ensemble dominant d'un graphe  $G$  est noté  $\beta(G)$ .

**Exemple 1.6.**

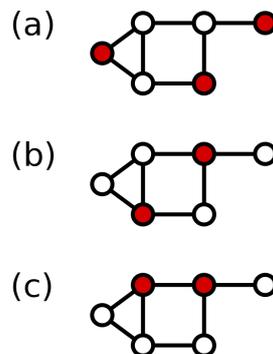


FIGURE 1.19 – Un graphe  $G$  avec trois exemples d'ensembles dominants (constitués des sommets rouges) dont  $\beta(G) = 2$ .

### 1.1.8 Isomorphisme et automorphisme de graphes

**Définition 1.35.** Deux graphes  $G = (V, E)$  et  $H = (V', E')$  sont isomorphes s'il existe une bijection  $f : V \rightarrow V'$  telle que  $\forall u, v \in V$ ,  $u$  et  $v$  sont adjacents dans  $G$  si et seulement si  $f(u)$  et  $f(v)$  sont adjacents dans  $H$ . On note alors  $G \simeq H$ .

Intuitivement, deux graphes sont isomorphes s'ils ont la même « structure », i.e. s'il est possible de déplacer les sommets de l'un pour qu'il soit la copie conforme de l'autre (au nom des sommets près). La figure 1.20 illustre cette définition.

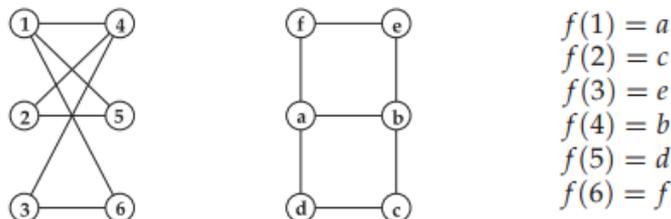


FIGURE 1.20 – Deux graphes isomorphes et la bijection explicitée.

**Remarque 1.6.** 1. Lorsqu'un graphe est isomorphe à son complémentaire, on dit qu'il est *autocomplémentaire*. C'est le cas par exemple de  $P_4$  ou de  $C_5$ .  
 2. La relation "être isomorphe à" est une relation d'équivalence.

**Définition 1.36.** Un *automorphisme* d'un graphe simple  $G = (V, E)$  est un isomorphisme du  $G$  dans lui même; autrement dit, un automorphisme de  $G$  est une permutation de son ensemble de sommets  $V$ , qui préserve l'adjacence.

Notons que la composition de deux automorphismes est un automorphisme.

**Définition 1.37.** L'ensemble des automorphismes d'un graphe simple  $G = (V, E)$ , muni de l'opération de composition, forme un groupe dit *groupe des automorphismes* de  $G$ , noté  $Aut(G)$ .

**Remarque 1.7.** Soit  $G = (V, E)$  un graphe simple d'ordre  $n$ , alors on a  
 —  $Aut(K_n) \cong S_n$ .  
 —  $Aut(G)$  est isomorphe à un sous groupe de  $S_n$ .

### 1.1.9 Coloration

**Définition 1.38.** Une *coloration* d'un graphe  $G = (V, E)$  est une application  $f$  des sommets de  $G$  vers un ensemble de couleurs  $C$  telle que deux sommets adjacents reçoivent des couleurs différentes. Si  $|C| = k$ , alors  $f$  est une  $k$ -coloration de  $G$ .

**Le nombre chromatique** de  $G$ , noté  $\chi(G)$ , est défini comme étant le plus petit entier  $k$  tel que  $G$  admet une  $k$ -coloration.

Une coloration propre de  $G$  utilisant  $k$  couleurs est une partition de  $V$  en ensembles  $S_1, S_2, \dots, S_k$  tels que pour tout  $1 \leq i \leq k$ ,  $S_i$  est un stable.

**Exemple 1.7.** Considérons les figures suivantes

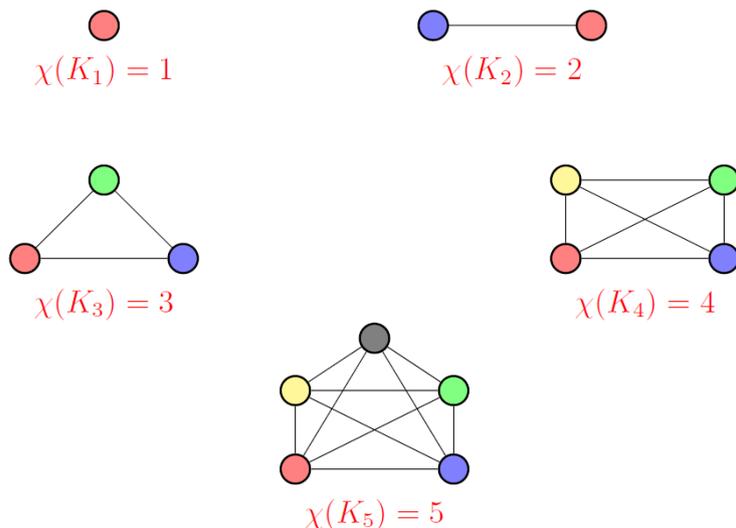


FIGURE 1.21 – Le nombre chromatique des graphes complets d’ordres 1 à 5

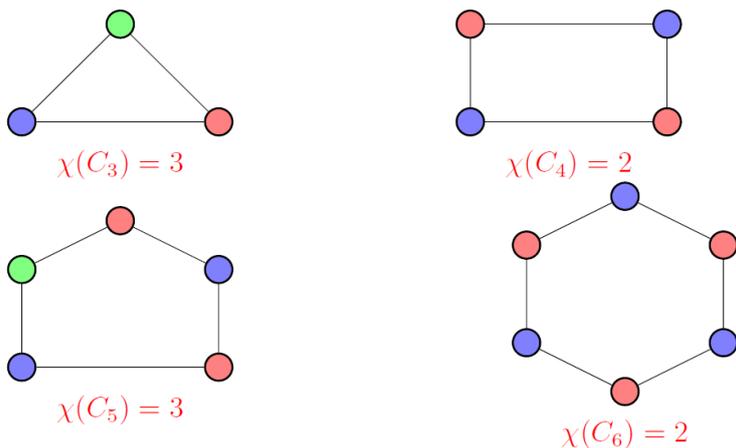


FIGURE 1.22 – Le nombre chromatique des cycles élémentaires d’ordres 3 à 6

On remarque que  $\chi(K_n) = n$  et que  $\chi(C_n) = 2$  si  $n$  est pair et  $\chi(C_n) = 3$  si  $n$  est impair (pour la preuve voir la proposition 1.1.9).

**Exemple 1.8.** La figure 1.23 illustre un exemple de graphe 4-coloriable.

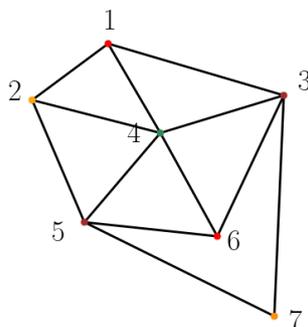


FIGURE 1.23 – Graphe admettant une 4-coloration

Ce graphe est 4-coloriable donc  $\chi(G) \leq 4$ , il contient un  $C_5$  impair donc  $\chi(G) \geq 3$ , de plus le sommet 4 est adjacent à tous les sommets de  $C_5$ , il faut donc colorier ce sommet avec une couleur différente des couleurs déjà affectées aux sommets de  $C_5$ , on en conclut que  $\chi(G) \geq 4$ , donc le nombre chromatique de  $G$  est  $\chi(G) = 4$ .

**Proposition 1.3.** Soit  $G = (V, E)$  un graphe simple d'ordre  $n$ .

1.  $\chi(G) = 1$  ssi  $G$  n'a pas d'arêtes.
2.  $\chi(G) \leq n$ .
3. Si  $G$  a au moins une arête alors,  $G$  est biparti ssi  $\chi(G) = 2$ .
4.  $\chi(K_n) = n$  pur tout  $n \geq 1$ .
5.  $\chi(C_n) = 2$  si  $n$  est pair et  $\chi(C_n) = 3$  si  $n$  est impair.
6. Pour tout sous graphe  $H$  de  $G$  on a  $\chi(H) \leq \chi(G)$ .
7.  $\chi(G) \geq \omega(G)$

*Démonstration.* 1. Facile, car si deux sommets sont adjacents, on aura  $\chi(G) \geq 2$ .

2. Facile aussi, il suffit de colorier chaque sommet d'une couleur différente.

3. Un graphe biparti est un graphe dont on peut partitionner l'ensemble des sommets en deux stables, d'où le résultat.

4. N'importe quel coloriage de  $K_n$  avec moins de  $n$  couleurs implique que deux sommets sont de la même couleur, ce qui est une contradiction car tous les sommets sont adjacents entre eux.

5. Par 1),  $\chi(C_n) \geq 2$ . Supposons que l'ensemble des sommets de  $C_n$  sont  $s_1, s_2, \dots, s_n$  avec  $(s_i, s_{i+1}) \in E$  pour tout  $1 \leq i \leq n-1$  et  $(s_1, s_n) \in E$ .

Si  $n$  est pair, alors on colorie tous les sommets d'indice pairs avec une couleur et tous les autres avec l'autre, donc  $\chi(C_n) \leq 2$ .

Si  $n$  est impair, on montre que  $C_n$  n'est pas 2-coloriable. Supposons qu'il le soit et qu'on colorie ses sommets en bleu ou rouge. On suppose que  $s_n$  est bleu. Alors  $s_1$  et  $s_{n-1}$  doivent être rouges,  $s_2$  et  $s_{n-2}$  doivent être bleus et de façon générale  $s_k$  et  $s_{n-k}$  sont de la même couleur pour tout  $1 \leq k \leq \frac{n}{2}$ . Si  $n = 2m+1$ , alors avec  $k = m$ , on voit que  $s_m$  et  $s_{m+1}$  sont de la même couleur, c'est une contradiction, donc  $\chi(C_n) \geq 3$ .

Il est aussi facile de voir que  $C_n$  est 3-coloriable, dans la preuve ci-dessus, il suffit de colorier le sommet d'indice  $m$  avec la troisième couleur (donc  $\chi(C_n) = 3$ ).

6. Facile, car tous les sommets adjacents dans  $H$  sont adjacents dans  $G$ .

7.  $\omega(G)$  est le cardinal d'une clique maximum  $C$  de  $G$ , donc  $G[C]$  est complet et  $\omega(G) = \chi(G[C]) \leq \chi(G)$ .

□

## 1.2 Les anneaux commutatifs

Les notions de loi de composition interne, de groupe et en particulier de groupe abélien, sont supposées connues, ainsi que leurs propriétés élémentaires.

**Définition 1.39.** On appelle **anneau** tout ensemble non vide  $R$  muni de deux lois de composition internes, généralement notées l'une additivement, l'autre multiplicativement, vérifiant les trois axiomes suivants :

- (a) :  $(R, +)$  est un groupe abélien dont l'élément neutre est noté  $0$ .
- (b) : La multiplication est associative : quels que soient  $x, y, z$  dans  $R$

$$x(yz) = (xz)y$$

- (c) : La multiplication est distributive à droite et à gauche par rapport à l'addition : quels que soient  $x, y, z$  dans  $R$

$$(x + y)z = xz + yz \quad \text{et} \quad x(y + z) = xy + xz$$

Cas particuliers :  $R$  étant un anneau ,

- a)  $R$  est dit **nul**, si  $R$  est réduit à  $\{0\}$ .
- b)  $R$  est dit **unitaire**, s'il possède un élément neutre pour la multiplication, appelé élément unité de  $R$  et noté  $1_R$  ou  $1$ , s'il n'y a pas d'ambiguïté.
- c)  $R$  est dit **commutatif**, si la multiplication de  $R$  est commutative.

**Exemple 1.9.** — Munis de l'addition et de la multiplication ordinaires,  $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$  et  $\mathbb{C}$  sont des anneaux commutatifs.

— Si  $n$  est un entier strictement positif, alors l'ensemble  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  des classes de congruence modulo  $n$  muni de l'addition  $(\bar{x}, \bar{y}) \mapsto \bar{x} + \bar{y}$  et de la multiplication  $(\bar{x}, \bar{y}) \mapsto \bar{x} \times \bar{y}$  est un anneau commutatif à  $n$  éléments. L'anneau ainsi défini s'appelle l'**anneau des entiers modulo  $n$** .

**Notation 1.1.** Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , l'anneau  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{\bar{0}, \bar{1}, \dots, \overline{n-1}\}$ , sera noté tout simplement  $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, \dots, n-1\}$ , s'il n'y a pas d'ambiguïté.

### 1.2.1 Diviseur de zéro-Anneau intègre-Élément inversible

**Définition 1.40.** Étant donné un anneau  $R$  commutatif, un élément  $x$  est un **diviseur de zéro**, s'il existe  $y \neq 0$  dans  $R$  tel que  $xy = 0$ .  
L'ensemble de diviseurs de zéro noté

$$Z(R) = \{x \in R / \exists y \in R^* \text{ tel que } xy = 0\}.$$

**Exemple 1.10.** • Dans l'anneau  $\mathbb{Z}_6$ , on a  $Z(\mathbb{Z}_6) = \{0, 2, 3, 4\}$ .  
• Dans l'anneau  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ , on a  $Z(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2) = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0)\}$ .

**Définition 1.41.** Un anneau  $R$  est dit **intègre** s'il est non nul et sans diviseur de zéro. On appellera **domaine** tout anneau  $R$  unitaire, commutatif intègre.

**Définition 1.42.** Étant donné un anneau  $R$ , un élément  $x \in R$  est dit **inversible** s'il existe un  $y \in R$  tel que  $xy = 1$ . L'élément  $y$  est **uniquement déterminé** et est appelé **inverse de  $x$** . On le note  $x^{-1}$ . On note par  $R^\times$  l'ensemble des éléments inversibles de  $R$ .

**Remarque 1.8.** Soit  $R$  un anneau commutatif unitaire,  
— Si  $R$  est intègre, alors pour tout  $x$  et  $y$  dans  $R$ , on a :

$$xy = 0 \implies x = 0 \quad \text{ou} \quad y = 0.$$

— Si pour tout élément  $x$  de  $R^*$  est inversible, alors  $R$  s'appelle un **corps**.

**Exemple 1.11.** i) Tout corps commutatif  $R$  est un domaine.

ii)  $\mathbb{Z}$  est un domaine.

iii)  $\mathbb{Z}_n$  est un domaine si et seulement si  $n$  est un nombre premier et dans ce cas, on sait que  $\mathbb{Z}_n$  est un corps.

**Définition 1.43.** Étant donné un anneau  $R$ , un élément  $x$  est dit **idempotent**, si  $x^2 = x$ .

**Exemple 1.12.** Dans l'anneau de matrices  $M_2(\mathbb{R})$ , la matrice  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  est idempotente.

**Proposition 1.4.** Étant donné un anneau commutatif et unitaire  $R$ , dont il possède un élément idempotent  $x$ , alors

$$R = xR \oplus (1-x)R$$

*Démonstration.* Pour monter que  $R = xR \oplus (1-x)R$ , il faut de monter les deux propriétés suivantes

$$R = xR + (1-x)R \quad \text{et} \quad xR \cap (1-x)R = \{0\}.$$

i) Pour monter que  $R = xR + (1-x)R$ , on la montre par double inclusion, il est clair que  $xR$  et  $(1-x)R$  incluent dans  $R$ , par suite  $xR + (1-x)R \subseteq R$ . Il reste à monter que  $R \subseteq xR + (1-x)R$ .

Soit  $a \in R$ , alors on a

$$a = xa + (1-x)a$$

donc  $a \in xR + (1-x)R$ , c'est-à-dire que  $R \subseteq xR + (1-x)R$ . d'où l'égalité.

ii) On a que  $xR \cap (1-x)R = \{0\}$ , en effet :

$$\text{Soit } a \in xR \cap (1-x)R \implies \exists y, y' \in R \text{ tels que } \begin{cases} a = (1-x)y \\ a = xy' \end{cases}$$

$$\implies (1-x)y = xy'$$

$$\implies xy - xy = xy' \quad (\text{car } x \text{ est idempotent})$$

$$\implies xy' = 0$$

$$\implies a = 0$$

donc  $xR \cap (1-x)R = \{0\}$ .

D'où le résultat. □

**Proposition 1.5.** Tout domaine fini est un corps.

**Proposition 1.6.** Soit  $R$  un anneau commutatif unitaire fini, alors

$$R = Z(R) \cup U(R)$$

avec  $U(R)$  est l'ensemble des éléments inversible de  $R$ .

C'est-à-dire que pour tout élément  $x$  de  $R$ ,  $x$  soit un diviseur de zéro ou bien un élément inversible.

*Démonstration.* Il suffit de démontrer que  $Z(R)$  est la réunion des idéaux maximaux de  $R$ , et posant  $\{M_1, M_2, \dots, M_n\}$  l'ensemble des idéaux maximaux de  $R$ . Il est facile de montrer que  $Z(R) \subseteq \bigcup_{i \in I} M_i$  avec  $I = \{1, 2, \dots, n\}$ , il reste à démontrer l'autre inclusion.

- Si  $R$  est local d'idéal maximal  $M$ . Soit  $x \in M \setminus \{0\}$ , or  $R$  est fini, alors  $M = \mathcal{N}(R)$ , donc  $x \in \mathcal{N}(R)$ , par suite il existe  $n \in \mathbb{N}^*$ , tel que  $x^n = 0$  et  $x^{n-1} \neq 0$ , il en résulte que  $x \in Z(R)$ .
- Si  $R$  n'est pas local. Soit  $x \in M_i$  et  $y \in M_1 \cap M_2 \cap \dots \cap M_n \setminus M_i$ . Il est clair que  $y \notin \mathcal{N}(R)$ , mais  $xy \in \mathcal{N}(R)$ , alors il existe  $N, m$  de  $\mathbb{N}^*$  tels que  $x^m y^N = 0$  et  $x^{m-1} y^N \neq 0$ , par suite  $x \in Z(R)$ .

D'où le résultat. □

### 1.2.2 Caractéristique d'un anneau unitaire

**Définition 1.44.**  $R$  étant un anneau unitaire et  $\phi$  le morphisme canonique de  $\mathbb{Z}$  dans  $R$ , on appelle **caractéristique** de  $R$ , l'unique entier  $k \in \mathbb{N}$  tel que  $\ker(\phi) = k\mathbb{Z}$ . On écrit alors :  $\text{car } R = k$ .

**Remarque 1.9.** De la notion de caractéristique d'un anneau unitaire, on déduit les relations suivantes, dans lesquelles  $n$  est un entier :

$$\text{car } R = 0 \iff \{(nx = 0, \forall x \in R) \iff n = 0\}$$

$$\text{car } R = k > 0 \iff \{(nx = 0, \forall x \in R) \iff n \in k\mathbb{Z}\}$$

$$\text{car } R = 0 \iff k = \inf\{n \in \mathbb{N}^* / nx = 0, \forall x \in R\}$$

**Exemple 1.13.** — L'anneau  $\mathbb{Z}$ , ainsi que les corps  $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$  sont de caractéristique 0.

— Pour tout  $n > 1$  dans  $\mathbb{N}$ , l'anneau  $\mathbb{Z}_n$  est de caractéristique  $n$ .

### 1.2.3 Notion d'idéal d'un anneau commutatif

**Définition 1.45.** Soient  $R$  un anneau commutatif, et  $I$  une partie non vide de  $R$ ,  $I$  est dit un idéal de  $R$ , si

- i)  $I$  est un sous-groupe de  $(R, +)$ .
- ii) Pour tout  $x \in I$  et tout  $a \in R$ ,  $ax \in I$ .

**Exemple 1.14.** Soit  $S$  une partie non vide d'un anneau commutatif  $R$ . On pose :

$$\text{ann}(S) = \{a \in R / ax = 0, \forall x \in S\}.$$

$\text{ann}(S)$  est idéal de  $R$ , et appelé **l'annulateur** de  $S$  dans  $R$ .

**Proposition 1.7.** Soit  $R$  un anneau commutatif fini, alors

- S'il existe un élément  $x_0$  de  $R$  tel que pour tout  $x$  de  $R$  on a

$$\text{ann}(x_0) \subseteq \text{ann}(x) \implies \text{ann}(x_0) = \text{ann}(x)$$

alors  $\text{ann}(x_0)$  est un idéal premier.

- Soit  $M$  un idéal maximal de  $R$ , alors il existe un élément  $x$  de  $M$  tel que  $M = \text{ann}(x)$ .

*Démonstration.* (i) Soit  $ab \in \text{ann}(x_0)$ , et supposons que  $a \notin \text{ann}(x_0)$ , c'est-à-dire  $ax_0 \neq 0$ . Alors  $\text{ann}(x_0) \subseteq \text{ann}(ax_0)$ , d'où  $\text{ann}(x_0) = \text{ann}(ax_0)$ , par suite  $b \in \text{ann}(x_0)$ .

(ii) On sait que  $M_M = \text{ann}(\frac{x}{1})$  pour un certain  $x$  de  $M$ . Alors il existe  $s \in R \setminus M$  tel que  $sMx = 0$  (car  $R$  est fini), il en résulte que  $M = \text{ann}(x)$ . □

### 1.2.4 Éléments nilpotents-Nilradical

**Définition 1.46.** *Étant donné un anneau commutatif unitaire  $R$ . Un élément  $x \in R$  est dit nilpotent s'il existe un entier  $n \in \mathbb{N}^*$  tel que  $x^n = 0$ . Un anneau dont le seul élément nilpotent est 0 est appelé **réduit**.*

**Exemple 1.15.** *Dans l'anneau de matrices  $M_2(\mathbb{R})$  :*

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**Remarque 1.10.** *Un élément nilpotent non nul est nécessairement un diviseur de zéro dans  $R$ .*

**Proposition 1.8.** *Dans un anneau commutatif unitaire  $R$ , l'ensemble  $\mathcal{N}(R)$  des éléments nilpotents forme un idéal de  $R$ .*

*Démonstration.* Par définition  $\mathcal{N}(R) = \{x \in R / \exists n \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } x^n = 0\}$ .

$\mathcal{N}(R)$  n'est pas vide, car  $0 \in \mathcal{N}(R)$ . Soit  $x, y$  dans  $\mathcal{N}(R)$ ; il existe  $m$  et  $n$  dans  $\mathbb{N}^*$  tels que  $x^m = 0$  et  $y^n = 0$ , alors

$$(-x)^m = (-1)^m x^m = 0 \quad \text{et} \quad (x+y)^{m+n} = \sum_{0 \leq p \leq m+n} C_{m+n}^p x^p y^{m+n-p} = 0$$

et quel que soit  $a \in R$ ,  $(ax)^m = a^m x^m = 0$ . Par suite  $\mathcal{N}(R)$  est un idéal de  $R$ . □

**Définition 1.47.** *Dans un anneau unitaire commutatif  $R$ , l'idéal  $\mathcal{N}(R)$  formé par l'ensemble des éléments nilpotents est appelé le **nilradical** de  $R$ .*

**Théorème 1.2.** *Le nilradical  $\mathcal{N}(R)$  d'un anneau unitaire commutatif  $R$  est l'intersection de tous les idéaux premiers de  $R$ .*

*Démonstration.* Soient  $\mathcal{N}'$  l'intersection de tous les idéaux premiers de  $R$  et  $P$  un idéal premier de  $R$ . Il faut montrer que  $\mathcal{N}' = \mathcal{N}(R)$ .

Montrons d'abord  $\mathcal{N}(R) \subset \mathcal{N}'$ . Pour cela, soit  $x \in R$  nilpotent, c'est-à-dire,  $\exists n > 0$  tel que  $x^n = 0$ . Mais alors  $x^n = 0 \in P$  d'où  $x \in P$ ,  $\forall P$  idéal premier de  $R$ .

Inversement : soit  $x \in A$  non nilpotent, on va montrer que  $\exists P$  idéal premier tel que  $x \notin P$ .

Soit  $\Omega = \{I \text{ idéal} / \forall n > 0, x^n \notin I\}$  muni d'ordre d'inclusion, défini par :  $\forall I, J \in \Omega$ ,  $I \leq J \iff I \subset J$ . Clairement l'idéal  $\{0\} \in \Omega$ , donc  $\Omega \neq \emptyset$ , et  $\Omega$  est inductivement ordonné, par conséquent, d'après le lemme de Zorn,  $\Omega$  admet un élément maximal, soit  $P$ .

On va montrer que  $P$  est premier.

Soit  $u, v \notin P$ . Alors  $P \subset P+(u)$  et  $P \subset P+(v)$  strictement, d'où par la maximalité de  $P$ , ni l'un ni l'autre de ces idéaux n'appartient à  $\Omega$ ; donc  $\exists m > 0, \exists n > 0$  tels que  $x^m \in P+(u)$  et  $x^n \in P+(v)$ , c'est-à-dire,  $x^{m+n} \in (P+(u))(P+(v)) = P+(uv)$ .

Par conséquent  $P+(uv)$  n'appartient pas à  $\Omega$ , autrement dit  $uv \notin P$ .

Donc  $P$  est un idéal premier qui par construction ne contient pas  $x$  □

### 1.2.5 Anneaux Noethériens-Artiniens

Pour définir les anneaux Noethériens, on commence par la caractérisation suivante :

**Théorème 1.3.**

Soit  $R$  un anneau. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- Toute suite croissante d'idéaux de  $R$  est stationnaire.
- Tout idéal de  $R$  est de type fini.

**Définition 1.48.** On dit qu'un anneau  $R$  est Noethérien s'il vérifie les conditions équivalentes du Théorème précédent.

**Exemple 1.16.** L'anneau  $\mathbb{Z}$  est un anneau Noethérien (car les idéaux de  $\mathbb{Z}$  sont sous la forme  $n\mathbb{Z}$ , avec  $n$  un entier naturel).

**Définition 1.49.** On dit qu'un anneau  $R$  est Artinien si toute suite décroissante d'idéaux de  $R$  est stationnaire.

**Remarque 1.11.** Pour un anneau (unitaire) non commutatif, on définit de même les notions d'Noethérien (Artinien) à gauche et Artinien à droite (relatives aux idéaux à gauche et à droite).

**Exemple 1.17.**

- Tout anneau fini est Artinien.
- Tout corps est Artinien.
- L'anneau des entiers n'est pas Artinien :

$$\mathbb{Z} \supseteq 2\mathbb{Z} \supseteq 2^2\mathbb{Z} \supseteq \dots$$

De même et plus généralement, un anneau intègre qui n'est pas un corps ne peut pas être Artinien

**Proposition 1.9** ([23]). Soit  $R$  un anneau Artinien, alors il existe  $n \in \mathbb{N}^*$ , tel que

$$R \cong R_1 \times R_2 \times \dots \times R_n$$

avec  $R_i$  est un anneau local, pour tout  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ .

---

---

## CHAPITRE 2

---

# LE GRAPHE DE DIVISEUR DE ZÉRO DES ANNEAUX COMMUTATIFS

Anderson, D. F., Livingston, P. S. (1999). The zero-divisor graph of a commutative ring. *Journal of Algebra*, 217(2), 434-447.

### 2.1 Introduction

Etant donné un anneau commutatif unitaire  $R$ , alors **le graphe de diviseur de zéro de  $R$**  est le graphe simple où les sommets sont les diviseurs de zéro non nuls de  $R$ , et où il y a une arête entre deux sommets distincts  $x$  et  $y$  si et seulement si  $xy = 0$ .

Le graphe de diviseur zéro de  $R$  est noté  $\Gamma(R)$ . Cette définition de  $\Gamma(R)$  est apparue pour la première fois par **D.F. Anderson** dans [5], où plusieurs des caractéristiques les plus fondamentales de  $\Gamma(R)$  sont examinées.

La définition originale, apparaissant dans [13] par **I.Beck** et étudiée plus avant dans [4], prenait tous les éléments de l'anneau comme des sommets du graphe, et dans ce chapitre on va voir quelques propriétés de ce graphe que va le noter  $\Gamma_0(R)$ . Les graphes de diviseur zéro des anneaux commutatifs et d'autres objets algébriques ont été étudiés dans plusieurs articles, tels que [3],[19] et [34].

**Définition 2.1.** *Soit  $R$  un anneau commutatif unitaire.*

- *Le graphe de diviseur de zéro de  $R$ , est le graphe simple, noté  $\Gamma(R) = (V, E)$ , avec  $V = z(R)^* = z(R) \setminus \{0\}$  et pour tout  $x, y \in V$  avec  $x \neq y$ , on a*

$$\{x, y\} \in E \iff xy = 0.$$

- *Le graphe dont l'ensemble des sommets sont les éléments de  $R$  tout entier est noté  $\Gamma_0(R)$ , et pour tout  $x, y \in R$  avec  $x \neq y$ , on a*

$$\{x, y\} \in E \iff xy = 0.$$

Remarquons que dans le graphe  $\Gamma_0(R)$  d'un anneau commutatif  $R$ , le sommet 0 est adjacent à tous les autres sommets du graphe, c'est-à-dire que les sommets de l'ensemble  $R \setminus z(R)$  sont des sommets pendants.

**Exemple 2.1.** Considérons l'anneau  $\mathbb{Z}_4 = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ , on a l'ensemble de diviseurs de zéro de  $\mathbb{Z}_4$  est donné par

$$z(\mathbb{Z}_4) = \{0, 2\}$$

→ Le graphe  $\Gamma(\mathbb{Z}_4)$  est représenté de la façon suivante

2



FIGURE 2.1 – Le graphe  $\Gamma(\mathbb{Z}_4)$

→ Le graphe  $\Gamma_0(\mathbb{Z}_4)$  est représenté comme suivante

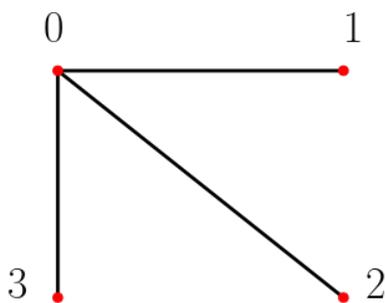


FIGURE 2.2 – Le graphe  $\Gamma_0(\mathbb{Z}_4)$

**Remarque 2.1.** Soient  $R_1$  et  $R_2$  deux anneaux commutatifs, le fait que  $\Gamma(R_1)$  et  $\Gamma(R_2)$  sont isomorphes n'implique pas que  $R_1$  et  $R_2$  seront deux anneaux isomorphes, en effet, prenons  $R_1 = \mathbb{Z}_4$  et  $R_2 = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ . On a  $\Gamma(R_1)$  est isomorphe à  $\Gamma(R_2)$ , mais  $R_1$  n'est pas à isomorphe  $R_2$ .

**Théorème 2.1.** Soit  $R$  un anneau commutatif. Alors  $\Gamma(R)$  est fini si, et seulement si  $R$  est fini.

*Démonstration.* L'implication directe est triviale, il reste à démontrer que si  $\Gamma(R)$  est fini alors si  $R$  est fini. C'est-à-dire on suppose que l'ensemble  $z(R)^*$  non vide, et il est fini, et on montre que l'anneau  $R$  est fini.

Soit  $x$  et  $y$  deux éléments de  $z(R)^*$  tels que  $xy = 0$  (Si  $z(R)^* = \{x\}$ , on prend  $y = x$ ). Posant  $I = \text{ann}(x)$  l'annulateur de l'élément  $x$ , d'où  $y \in I$  (car  $xy = 0$ ), alors pour tout élément  $r$  de  $R$

$$ry \in I.$$

Supposons par absurde que l'anneau  $R$  est infini, et le fait que  $I = \text{ann}(x) \subseteq z(R)$ , implique que  $I$  est fini. Posant  $I = \{i_0, i_1, \dots, i_m\}$ , alors il existe  $i_k \in I$  tel que l'ensemble

$$J_{i_k} = \{r \in R / ry = i_k\} \text{ est infini}$$

par suite, pour tout  $r, s \in J_{i_k} : r - s \in \text{ann}(y)$  (car  $(r - s)y = 0$ ). On conclut que  $\text{ann}(y)$  est infini, ce qui est absurde, car  $\text{ann}(y) \subseteq z(R)$  et par hypothèse  $z(R)$  est fini. D'où l'anneau  $R$  est fini.  $\square$

## 2.2 La connexité de $\Gamma(R)$

Dans cette section, nous démontrons que les graphes de diviseur de zéro des anneaux commutatifs, tels que nous les avons définis, sont des graphes connexes de diamètre et de maille excessivement petits.

Le théorème suivant montre que ces graphes sont connexes de diamètre au plus trois :

**Théorème 2.2.** *Soit  $R$  un anneau commutatif (fini ou non), alors on a*

- *Le graphe  $\Gamma(R)$  est un graphe connexe.*
- *$\text{diam}(\Gamma(R)) \leq 3$ .*

*Démonstration.* Pour montrer que  $\Gamma(R)$  est connexe, et que son diamètre est inférieure ou égale à trois, il suffit de montrer que chaque sommets  $u$  et  $v$  de  $\Gamma(R)$ , il existe un chemin qui les relie, de longueur au plus trois.

Soit  $u$  et  $v$  deux sommets de  $\Gamma(R)$ , si  $uv = 0$ , alors  $u$  et  $v$  sont adjacents et que  $d(u, v) = 1$ . Supposons le contraire, c'est-à-dire  $uv \neq 0$ , alors on peut distinguer quatre cas possibles :

1<sup>er</sup> cas :  $u^2 = v^2 = 0$ . Alors

$$[u, uv, v]$$

est un chemin relie  $u$  et  $v$  et  $d(u, v) = 2$ .

2<sup>ème</sup> cas :  $u^2 = 0$  et  $v^2 \neq 0$ . Alors il existe un sommet  $b$  de  $\Gamma(R)$  tel que  $bv = 0$  et dans le cas où  $bu = 0$ , alors

$$[u, b, v]$$

est un chemin relie  $u$  et  $v$ , et si  $bu \neq 0$  alors

$$[u, bu, v]$$

est un chemin relie  $u$  et  $v$  et dans tous les cas, on a  $d(u, v) = 2$ .

3<sup>ème</sup> cas :  $u^2 \neq 0$  et  $v^2 = 0$ . Similaire au 2<sup>ème</sup> cas.

4<sup>ème</sup> cas :  $u^2 \neq 0$  et  $v^2 \neq 0$ . Alors il existe deux éléments  $a$  et  $b$  (pas nécessairement distincts) tels que  $au = bv = 0$ .

→ Dans le cas où  $a = b$ , alors

$$[u, a, v]$$

est un chemin relie  $u$  et  $v$  et  $d(u, v) = 2$ .

→ Dans le cas où  $a \neq b$ , on distingue deux cas possibles :

- Si  $ab = 0$ . Alors

$$[u, a, b, v]$$

est un chemin relie  $u$  et  $v$ , et que  $d(u, v) = 3$ .

- Si  $ab \neq 0$ . Alors

$$[u, ab, v]$$

est un chemin relie  $u$  et  $v$  et  $d(u, v) = 2$ .

Il en résulte que le graphe  $\Gamma(R)$  est un graphe connexe, et que pour tout sommets  $u$  et  $v$  du graphe, on a  $d(u, v) \leq 3$ , ceci implique que  $\text{diam}(\Gamma(R)) \leq 3$ .  $\square$

**Exemple 2.2** (L'existence des graphes  $\Gamma(R)$  dont  $\text{diam}(\Gamma(R)) \in \{0, 1, 2, 3\}$ ).

1) Considérons l'anneau  $\mathbb{Z}_4$

2



FIGURE 2.3 – Le graphe  $\Gamma(\mathbb{Z}_4)$ , avec  $\text{diam}(\mathbb{Z}_4) = 0$

2) Pour le cas du  $\text{diam}(\Gamma(R)) = 1$ , considérons les anneaux qui sont isomorphes à  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ .

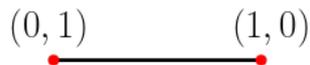


FIGURE 2.4 – Le graphe  $\Gamma(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)$  dont le diamètre est 1

3) Considérons l'anneau  $\mathbb{Z}_6$

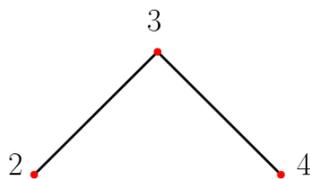


FIGURE 2.5 – Le graphe  $\Gamma(\mathbb{Z}_6)$ , avec  $\text{diam}(\mathbb{Z}_6) = 2$

4) Pour le cas du  $\text{diam}(\Gamma(R)) = 3$ , considérons les anneaux qui sont isomorphes à  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ .

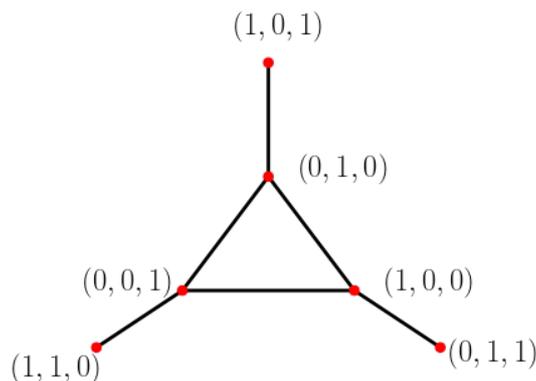


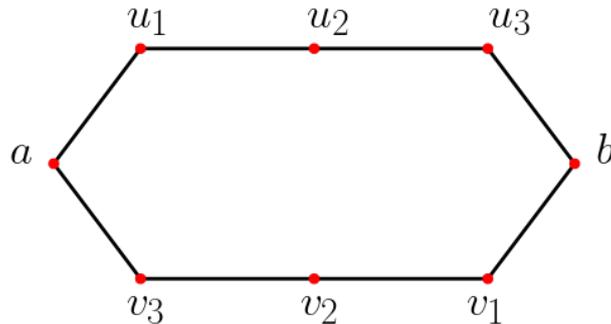
FIGURE 2.6 – Le graphe  $\Gamma(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)$  dont le diamètre est 3

Le corollaire suivant donne un encadrement à la maille du graphe de diviseur de zéro d'un anneau commutatif :

**Corollaire 2.1.** Soit  $R$  un anneau commutatif, alors la maille du graphe  $\Gamma(R)$  de diviseur de zéro de  $R$  est inférieure ou égale à sept.

*Démonstration.* Supposons par absurde que la maille du  $\Gamma(R)$  est 8, et de la même procédure, on peut démontrer le résultat est fausse pour tout  $n \geq 9$ .

Posant  $C = [a, u_1, u_2, u_3, b, v_1, v_2, v_3, a]$  ce cycle de longueur 8 comme le montre la figure suivante



et posant  $U = \{u_1, u_2, u_3\}$  et  $V = \{v_1, v_2, v_3\}$ . D'après le théorème précédent, on a  $\text{diam}(\Gamma(R)) \leq 3$ , alors nécessairement  $d(a, b) \leq 3$  (car  $\Gamma(R)$  est connexe). Pour cela on distingue quatre cas, pour trouver des cycles de longueur inférieure strictement à 8 :

1<sup>er</sup> cas :  $d(a, b) = 0$ , alors  $a = b$ , dans ce cas le cycle

$$C' = [a, v_1, v_2, v_3, a] \text{ est de longueur 4.}$$

2<sup>ème</sup> cas :  $d(a, b) = 1$ , alors  $a$  et  $b$  sont adjacents, par suite

$$C' = [a, b, v_1, v_2, v_3, a] \text{ est un cycle de longueur 5.}$$

3<sup>ème</sup> cas :  $d(a, b) = 2$ , alors il existe un chemin  $[a, x, b]$  relie  $a$  et  $b$ .

→ Si  $x$  n'appartient ni à  $U$  ni à  $V$ , alors

$$C' = [a, x, b, v_1, v_2, v_3, a] \text{ est un cycle de longueur 6.}$$

→ Si  $x \in U$ , alors il existe  $i \in \{1, 2, 3\}$  tel que  $x = u_i$ , alors

$$C' = [a, u_i, b, v_1, v_2, v_3, a] \text{ est un cycle de longueur 6.}$$

→ Si  $x \in V$ , alors il existe  $j \in \{1, 2, 3\}$  tel que  $x = v_j$ , alors

$$C' = [a, v_j, b, u_3, u_2, u_1, a] \text{ est un cycle de longueur 6.}$$

4<sup>ème</sup> cas :  $d(a, b) = 3$ , alors dans ce cas, il existe un chemin de longueur 3, qui relie  $a$  et  $b$ , et soit  $[a, x_1, x_2, b]$  ce chemin.

→ Si  $x_i$  n'appartient ni à  $U$  ni à  $V$  pour tout  $i \in \{1, 2\}$ , alors

$$C' = [a, x_1, x_2, b, v_1, v_2, v_3, a] \text{ est un cycle de longueur 7.}$$

→ Si  $x_1, x_2 \in U$ , alors

$$C' = [a, x_1, x_2, b, v_1, v_2, v_3, a] \text{ est un cycle de longueur 7.}$$

→ Si  $x_1, x_2 \in V$ , alors

$$C' = [a, x_1, x_2, b, u_3, u_2, u_1, a] \text{ est un cycle de longueur 7.}$$

→ Si  $x_1 \in V$  et  $x_2 \in U$  ou bien  $x_1 \in U$  et  $x_2 \in V$ , dans ces cas, il existe un cycle de longueur au moins 5.

Dans tous les cas, on a trouvé un cycle  $C'$  dont la longueur est inférieure strictement à 8, ceci implique que la maille du graphe  $\Gamma(R)$  est inférieure strictement à 8, ce qui est absurde.

Il en résulte que la maille des graphes de diviseur de zéro des anneaux commutatifs est inférieure strictement à 8.  $\square$

**Remarque 2.2.** • *il existe toujours des anneaux commutatifs, dont les mailles des graphes de diviseur de zéro associés à ces anneaux (S'ils contiennent des cycles) appartiennent à  $\{3, 4\}$ .*

- *Pour tout  $N \in \mathbb{N}^*$ , la maille du  $\Gamma(\mathbb{Z}_N)$ , s'il contient des cycles est exactement 4.*
- *Le résultat du corollaire précédent, n'implique pas l'absence des cycles de longueur supérieure strictement à 7, comme le montre l'exemple suivant :*

**Exemple 2.3.** Soient  $T$  un domaine, et  $n$  un entier non nul. Posant

$$R = T[X_1, X_2, \dots, X_n] / (X_1X_2, X_2X_3, \dots, X_nX_1)$$

alors  $C = [x_1, x_2, \dots, x_n, x_1]$  est un cycle de longueur  $n$ . En effet, on a

$$x_i x_j = 0 \text{ pour tout } j \equiv i + 1 [n].$$

Mais l'entier  $n$  n'est pas la maille du graphe  $\Gamma(R)$ , en effet :

**Proposition 2.1.** Soit  $R$  l'anneau défini dans l'exemple précédent, avec  $n = 3$  ou bien  $n \geq 5$ . Alors  $\Gamma(R)$  contient un triangle, c'est-à-dire que la maille du  $\Gamma(R)$  est 3.

*Démonstration.* • Pour  $n=3$ ,  $C = [x_1, x_2, x_3]$  est un triangle.

- Pour  $n \geq 5$ ,  $C = [x_1, x_2 x_{n-1}, x_n]$  est un triangle.

$\square$

## 2.3 Anneau associé à un graphe donné

Dans cette section, on va considérer des graphes simples, puis on va voir s'ils existent des anneaux commutatifs qui sont associés aux ces graphes. Notons que plus le graphe donné est complexe, plus qu'il sera difficile de décider, l'existence des anneaux associés.

**Proposition 2.2.** • Soit  $G = (V, E)$  un graphe simple trivial, alors les graphes  $\Gamma(R)$  où  $R \cong \mathbb{Z}_4$  sont des graphes isomorphes à  $G$ .

- Soit  $G$  un graphe simple, qui ne contient que deux sommets adjacents, alors les graphes  $\Gamma(R)$  où  $R \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$  sont des graphes isomorphes à  $G$ .

*Démonstration.*

- En effet, pour le cas d'un singleton, on a  $z(\mathbb{Z}_4)^* = \{2\}$
- Pour le cas d'une arête, on a

$$z(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)^* = \{(0, 1), (1, 0)\}$$

$\square$

- Proposition 2.3.**
- Soit  $G$  un graphe triangle, alors les graphes  $\Gamma(R)$  où  $R$  isomorphe à l'anneau  $\mathbb{Z}_2[X, Y] / (X^2, XY, Y^2)$  seront des graphes triangles.
  - Soit  $G$  un graphe carré, alors les graphes  $\Gamma(R)$  où  $R$  isomorphe à l'anneau  $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$  seront des graphes carrés.

*Démonstration.*

- Le cas d'un triangle, on a  $z(\mathbb{Z}_2[X, Y] / (X^2, XY, Y^2))^* = \{x, y, x + y\}$ , et

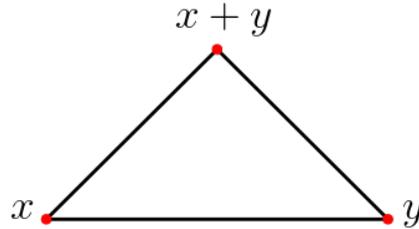


FIGURE 2.7 – Le graphe  $\Gamma(\mathbb{Z}_2[X, Y] / (X^2, XY, Y^2))$

- Pour le cas d'un carré, on a  $z(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3)^* = \{(0, 1), (1, 0), (0, 2), (2, 0)\}$ , et

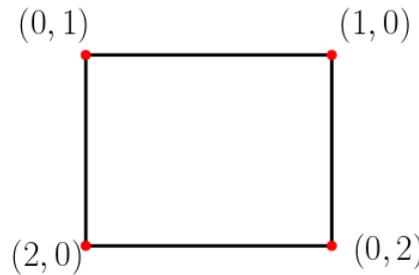


FIGURE 2.8 – Le graphe  $\Gamma(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3)$

□

On remarque toujours l'existence des anneaux commutatifs associés aux graphes de type **n-cycle**, pour  $n = 3$  ou bien  $n = 4$ , mais la proposition suivante montre que pour tout  $n \geq 5$ , la propriété est fautive, c'est-à-dire, on ne peut pas jamais trouver des anneaux commutatifs, dont ces graphes de diviseur de zéro seront isomorphes à les graphes de type **n-cycle**, pour tout  $n \geq 5$ . En effet :

**Proposition 2.4.** Soit  $R$  un anneau commutatif, alors  $\Gamma(R)$  n'est pas un  $n$ -cycle, pour tout  $n \geq 5$ .

C'est-à-dire qu'il n'existe pas d'un anneau commutatif  $R$ , dont  $\Gamma(R)$  soit un  $n$ -cycle, pour tout  $n \geq 5$ .

*Démonstration.* Supposons qu'il existe un anneau  $R$ , tel que  $\Gamma(R)$  est un 5-cycle, et posons  $z(R) = \{0, a, b, c, d, e\}$ , avec

$$ab = bc = cd = de = ea = 0$$

comme le montre la figure suivante

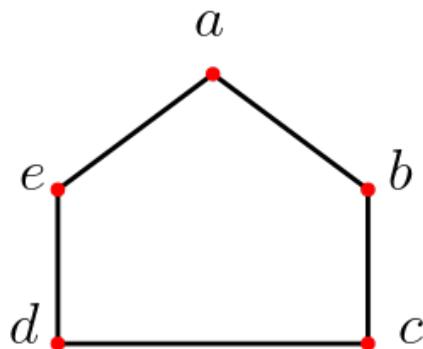


FIGURE 2.9 – Le graphe  $\Gamma(R)$  supposé.

Alors  $(-a)b = 0$  et  $(-a)e = 0$ , ce qui implique que  $-a = a$ , et de même pour tout  $x \in z(R)$ , on montre que  $-x = x$ . De plus on a  $(b+e)a = 0$ , donc  $b+e \in \{0, a, b, e\}$ , or

- $b+e \neq 0$ , car sinon  $b = -e = e$ .
- $b+e \neq b$ , car sinon  $e = 0$ .
- $b+e \neq e$ , car sinon  $b = 0$ .

Par suite  $b+e = a$ , cela implique que  $a$  est un élément nilpotent d'indice 2. De même pour tout  $x \in z(R)$ , on a  $x^2 = 0$ . On conclut que  $z(R) = \mathcal{N}(R)$ , or  $R$  est fini, donc  $\mathcal{N}(R)$  est un idéal maximal, par suite il existe un élément  $x$  de  $z(R)$  tel que

$$\mathcal{N}(R) = \text{ann}(x)$$

ce qui est absurde, avec le fait que  $|\text{ann}(x)| = 4$ , pour tout  $x \in z(R)$  et  $|\mathcal{N}(R)| = 5$ . La démonstration est similaire pour tout  $n > 5$ . □

## 2.4 Caractérisation des anneaux particuliers

La discussion dans la section précédente décrit certains types de graphes. Une question intéressante est la suivante : une caractérisation particulière du graphe de diviseur de zéro d'un anneau peut-elle indiquer quelque chose au sujet de l'anneau lui-même, ou inversement.

**Théorème 2.3.** *Soit  $R$  un anneau commutatif, alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

- (a)  $\Gamma_0(R)$  est sans triangle,
- (b) l'une des assertions suivantes est vérifiée
  - (i)  $R$  est isomorphe à l'anneau  $\mathbb{Z}_2[X]/(X^2)$ ,
  - (ii)  $R$  est isomorphe à l'anneau  $\mathbb{Z}_4$ ,
  - (iii) l'anneau  $R$  est intègre.

*Démonstration.*  $(\implies)$  Supposons que  $R$  n'est pas un domaine, et montrons que  $R$  soit isomorphe à l'anneau  $\mathbb{Z}_2[X]/(X^2)$  ou bien isomorphe à l'anneau  $\mathbb{Z}_4$ .

Soit maintenant deux éléments  $x$  et  $y$  de  $z(R)^*$  tels que  $xy = 0$ . Par suite l'ensemble des sommets  $\{0, x, y\}$  forme une clique, or  $\Gamma_0(R)$  ne contient aucun triangle, donc nécessairement

$$x = y$$

ce qui implique que  $x^2 = xy = 0$ .

Par conséquent l'idéal engendré par  $x$  forme ainsi une clique, en effet, nous avons  $(x) = xR = \{xy/y \in R\}$  et pour tout éléments  $xy$  et  $xy'$  de  $xR$ , on a

$$(xy)(xy') = x^2yy' = 0.$$

On conclut que  $xR = \{0, x\}$ , et alors  $|xR| = 2$ .

D'autre part, on a  $ann(x) = xR = \{0, x\}$ , en effet :

Soit  $a \in ann(x)$ , alors  $ax = 0$  et par suite  $\{0, x, a\}$  forme une clique dans  $\Gamma_0(R)$ , et le fait que  $\Gamma_0(R)$  ne contient pas des triangles, ce qui implique que  $a = 0$  ou  $a = x$ , alors que  $a \in xR = \{0, x\}$ , d'où  $ann(x) \subseteq xR$ .

Pour l'autre inclusion est triviale ( $\{0, x\} \subseteq ann(x)$ , car  $x^2 = 0$ ), on conclut que  $|ann(x)| = |xR| = 2$ .

Ainsi, considérons la surjection suivante :

$$\begin{aligned} g : R &\longrightarrow xR \\ r &\longmapsto xr \end{aligned}$$

D'après le premier théorème d'isomorphisme, on a

$$R/\ker(g) \cong im(g)$$

avec  $\ker(g) = \{r \in R/rx = 0\} = ann(x)$  et  $im(g) = xR$ , par suite

$$\frac{|R|}{|ann(x)|} = |xR|$$

ceci implique que  $|R| = |xR| \cdot |ann(x)| = 4$ . Or le caractéristique d'un anneau fini divise son ordre, donc  $\text{car}(\mathbf{R})$  vaut 2 ou bien 4. Ainsi, On peut distinguer les deux cas :

- Si  $\text{car}(\mathbf{R}) = 4$ , alors  $R \cong \mathbb{Z}_4$ .
- Si  $\text{car}(\mathbf{R}) = 2$ , alors  $R \cong \mathbb{Z}_2[X]/(X^2)$ .

( $\Leftarrow$ ) Les graphes associés aux trois cas (i),(ii) et (iii), représentés comme suite

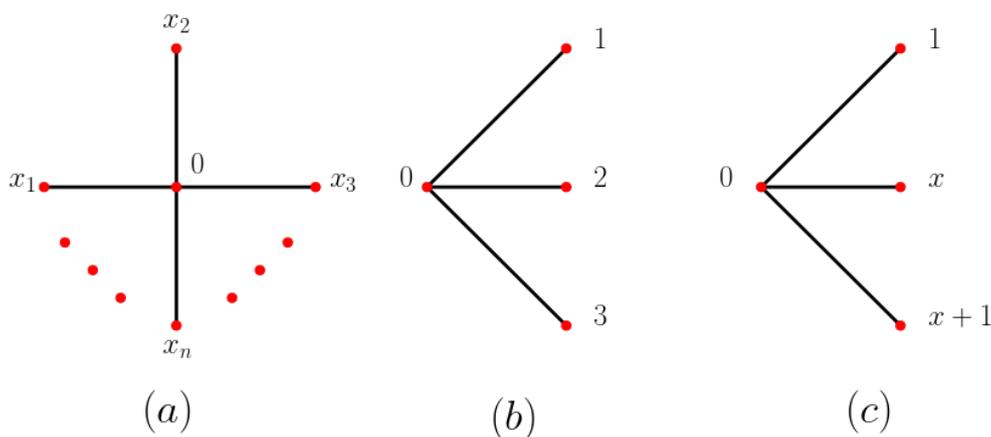


FIGURE 2.10 – Les graphe  $\Gamma_0(R)$ , où (a)  $R$  intègre, (b)  $\Gamma_0(\mathbb{Z}_4)$  et (c)  $\Gamma_0(\mathbb{Z}_2[X]/(X^2))$

il est remarquable que les trois graphes ne contiennent aucun triangle. Cela termine la preuve du théorème.  $\square$

**Remarque 2.3.** Les deux assertions (a) et (b), sont équivalentes à une troisième propriété

(c) l'ensemble des sommets  $z(R)^*$  soit un singleton ou bien il est vide.

En effet; (b)  $\implies$  (c)

- Si  $R \cong \mathbb{Z}_2[X]/(X^2)$ , d'où  $z(R)^*$  est un singleton, puisque  $z(\mathbb{Z}_2[X]/(X^2))^* = \{x\}$ .
- Si  $R \cong \mathbb{Z}_4$ , alors  $z(R)^*$  est un singleton, car  $z(\mathbb{Z}_4)^* = \{2\}$ .
- Si l'anneau  $R$  est intègre, il est clair que  $z(R)^*$  est vide.

Pour l'implication (c)  $\implies$  (a), est triviale.

**Théorème 2.4.** Soit  $R$  un anneau commutatif unitaire fini, alors il existe un sommet  $x$  de  $\Gamma(R)$ , dont  $V(x) = z(R)^* \setminus \{x\}$  si et seulement si l'une des assertions suivantes est vérifiée

- $R$  isomorphe à l'anneau  $\mathbb{Z}_2 \times F$ , où  $F$  un corps fini.
- $R$  est un anneau local.

*Démonstration.* ( $\Leftarrow$ ) • Supposons que  $R \cong \mathbb{Z}_2 \times F$ , où  $F$  un corps fini. Alors le sommets  $(1, 0)$  est adjacent à tout les autres sommets de  $\Gamma(\mathbb{Z}_2 \times F)$ . En effet, on a

$$z(\mathbb{Z}_2 \times F)^* = \{(0, u), u \in F^*\} \cup \{(1, 0)\}$$

et on a pour tout  $u \in F^*$ , on a  $(1, 0)(0, u) = (0, 0)$ , d'où le résultat.

- Supposons que  $R$  est local d'idéal maximal  $M$ , puisque  $R$  est fini, alors  $z(R) = M$ , donc il existe un élément  $x$  non nul de  $z(R)$  tel que

$$z(R) = \text{ann}(x)$$

d'où le sommet  $x$  est adjacent à tous les autres sommets du  $\Gamma(R)$ .

( $\implies$ ) Supposons que  $R$  n'est pas un anneau local, et montrons que  $R \cong \mathbb{Z}_2 \times F$ , où  $F$  un corps fini.

Posant  $a$  le sommet qu'est adjacent à tous les autres sommets du  $\Gamma(R)$ . Remarquons que  $a \notin \text{ann}(a)$ , car sinon  $R$  soit local. De plus  $\text{ann}(a)$  est premier. Par suite  $a^2 = a$ , car sinon si  $a^2 \neq a$ , alors  $a^2 \in \text{ann}(a)$ , or  $\text{ann}(a)$  est premier, d'où  $a \in \text{ann}(a)$  ce qui est absurde. Ainsi  $a$  est un élément idempotent, alors nous avons le résultat suivant

$$R = aR \oplus (1 - a)R$$

et par suite on peut supposer que  $R \cong R_1 \times R_2$ , avec le sommet  $(1, 0)$  est adjacent à tous les autres sommets du  $\Gamma(R_1 \times R_2)$ .

Il reste à monter que  $R_1 \cong \mathbb{Z}_2$  et que  $R_2 \cong F$  où  $F$  un corps fini.

- Soit  $c \in R_1 \setminus \{1\}$ , alors  $(c, 0)$  est un diviseur de zéro, or  $(1, 0)$  est adjacent à tous les autres sommets du  $\Gamma(R_1 \times R_2)$ , donc

$$(1, 0)(c, 0) = (0, 0) \implies c = 0$$

il en résulte que  $R_1 \cong \mathbb{Z}_2$ .

- Supposons par absurde que  $R_2$  n'est pas un corps, donc il existe un élément  $b$  n'est pas inversible, et puisque  $R$  est fini, donc nécessairement  $(1, b)$  est un diviseur de zéro, mais n'est pas le cas, car  $(1, b)$  n'est pas adjacent à  $(1, 0)$ . Donc  $R_2$  est un corps et il est fini puisque  $R$  est supposé fini. □

Le théorème suivant caractérise les anneaux commutatifs qui ont des graphes de diviseur de zéro complets :

**Théorème 2.5.** *Soit  $R$  un anneau commutatif unitaire fini, alors*

$$\Gamma(R) \text{ complet} \iff \begin{cases} (i) R \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, \\ \text{ou} \\ (ii) xy = 0, \text{ pour tout } x, y \in z(R). \end{cases}$$

Notons qu'on va s'intéresser juste à la propriété **(ii)**, qui implique que tout les diviseurs de zéro de  $R$ , sont des éléments nilpotents d'indice exactement deux.

*Démonstration.* Le sens inverse est facile à démontrer, il reste de démontrer le sens direct.

Supposons que  $\Gamma(R)$  est un graphe complet, et supposons que la propriété **(ii)** est fausse, et on va montrer que  $R \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ .

Or **(ii)** est fausse, ainsi il existe un élément  $x$  de  $z(R)$  tel que  $x^2 \neq 0$ . De plus  $x^2 = x$ , en effet, supposons le contraire, c'est-à-dire  $x^2 \neq x$ , alors  $x^3 = x^2x = 0$  (car le graphe  $\Gamma(R)$  est complet), par suite

$$x^2(x + x^2) = 0 \text{ (avec } x^2 \neq 0) \implies x + x^2 \in z(R).$$

D'autre part  $x + x^2 \neq x$ , car sinon  $x^2 = 0$ , ce qui est absurde, alors

$$x^2 = x^2 + x^3 = x(x + x^2) = 0 \text{ (car } \Gamma(R) \text{ est complet)}$$

c'est une contradiction avec le fait que  $x^2 \neq 0$ . On conclut que  $x^2 = x$ , c'est-à-dire que  $x$  est un élément idempotent de  $R$ , ainsi

$$R = xR \oplus (1 - x)R \cong R_1 \times R_2.$$

Il reste à démontrer que  $R_1$  et  $R_2$  sont isomorphes à  $\mathbb{Z}_2$ . Prenons un élément  $a$  de  $R_1 \setminus \{1\}$ , et montrons que  $a = 0$ . Il est clair que  $(a, 0), (1, 0) \in z(R_1 \times R_2)$ , or  $\Gamma(R)$  est complet, ainsi

$$(a, 0) = (a, 0)(1, 0) = (0, 0) \implies a = 0.$$

Il en résulte que  $R_1 \cong \mathbb{Z}_2$ , et de même démarche on montre que  $R_2 \cong \mathbb{Z}_2$ . D'où le résultat. □

Comme on peut démontrer que pour tout nombre entier  $n$ , et pour tout nombre premier  $p$ , il existe un anneau commutatif  $R$ , dont  $\Gamma(R)$  sera complet et que  $|z(R)| = p^n$ , en effet :

**Proposition 2.5.** Soient  $T$  un domaine fini, et  $n$  un nombre entier non nul tel que

$$R = T[X_1, X_2, \dots, X_n] / (M) \text{ avec } M = \{X_i X_j / i, j \in \{1, 2, \dots, n\}\}$$

alors le graphe  $\Gamma(R)$  est complet, dont  $|z(R)| = |T|^n$ . En particulier, si  $T = \mathbb{Z}_p$ , où  $p$  un nombre premier, alors  $|z(R)| = p^n$ .

*Démonstration.* On peut écrire  $R$  sous la forme suivante

$$R = \{a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n / \forall i \in \{0, 1, \dots, n\} \ a_i \in T\}$$

on conclut que l'ensemble de diviseurs de zéro est donné par

$$z(R) = \{a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n / \forall i \in \{0, 1, \dots, n\} \ a_i \in T\}$$

de plus, pour tout  $P$  et  $Q$  de  $z(R)^*$ , on a  $PQ = 0$ , ainsi le graphe  $\Gamma(R)$  est complet et de plus  $|z(R)| = |T|^n$ .  $\square$

**Proposition 2.6.** Soit  $p$  un nombre premier, alors le graphe  $\Gamma(\mathbb{Z}_{p^2})$  est complet.

*Démonstration.* Pour la démonstration, il suffit de démontrer que  $z(\mathbb{Z}_{p^2}) = p\mathbb{Z}_{p^2}$ . Soit  $x \in z(\mathbb{Z}_{p^2})^*$ , alors il existe un élément  $y$  de  $z(\mathbb{Z}_{p^2})^*$  tel que  $xy = 0 = kp^2$ , pour un certain  $k$  de  $\mathbb{N}^*$ . D'où  $x = mp$ , pour un certain  $m$  de  $\mathbb{N}^*$ , car sinon

$$\begin{aligned} x \wedge p = 1 &\implies x \wedge p^2 = 1 \\ &\implies p^2 \text{ divise } y \\ &\implies y = k'p^2 \text{ (absurde)}. \end{aligned}$$

ainsi, pour tout  $x$  et  $y$  de  $z(\mathbb{Z}_{p^2})^*$  on aura  $xy = 0$ , il en résulte que le graphe  $\Gamma(\mathbb{Z}_{p^2})$  est complet.  $\square$

## 2.5 Théorème de Beck et $\Gamma(\mathbb{Z}_N)$

En discutant du problème de la coloration du graphe de diviseur zéro, **I.Beck** [13] choisit comme exemple le graphe de diviseur de zéro de  $\mathbb{Z}_N$ . Il prouve le théorème intéressant suivant que nous allons exploiter pour démontrer des résultats spécifiques concernant les colorations de  $\Gamma(\mathbb{Z}_N)$ . Dans la section suivante, nous décrivons plus en détail la structure de  $\Gamma(\mathbb{Z}_N)$ .

**Théorème 2.6.** Soient  $p_1, p_2, \dots, p_k, q_1, q_2, \dots, q_r$  des nombres premiers distincts, et

$$N = p_1^{2n_1} p_2^{2n_2} \dots p_k^{2n_k} q_1^{2m_1+1} q_2^{2m_2+1} \dots q_r^{2m_r+1},$$

alors

$$\chi(\Gamma_0(\mathbb{Z}_N)) = \omega(\Gamma_0(\mathbb{Z}_N)) = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \dots p_k^{n_k} q_1^{m_1} q_2^{m_2} \dots q_r^{m_r} + r.$$

*Démonstration.* Posons  $y_0 = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \dots p_k^{n_k} q_1^{m_1+1} q_2^{m_2+1} \dots q_r^{m_r+1}$ , on remarque que  $y_0^2 = N q_1 q_2 \dots q_r = 0$ . Considérons l'ensemble

$$y_0 \mathbb{Z}_N = \{0, y_0, \dots, y_0(p_1^{n_1} \dots p_k^{n_k} q_1^{m_1} \dots q_r^{m_r} - 1), \dots, y_0(N - 1)\}$$

et notons que pour tout  $x$  de  $y_0\mathbb{Z}_N$  tel que  $x > y_0(p_1^{n_1} \cdots p_k^{n_k} q_1^{m_1} \cdots q_r^{m_r} - 1)$ , on aura  $x \in \{0, y_0, \dots, y_0(p_1^{n_1} \cdots p_k^{n_k} q_1^{m_1} \cdots q_r^{m_r} - 1)\}$ . On conclut que

$$y_0\mathbb{Z}_N = \{0, y_0, \dots, y_0(p_1^{n_1} \cdots p_k^{n_k} q_1^{m_1} \cdots q_r^{m_r} - 1)\}$$

De plus l'ensemble  $y_0\mathbb{Z}_N$  forme **une clique** dans  $\Gamma_0(\mathbb{Z}_N)$ , puisque  $y^2 = 0$ , avec

$$|y_0\mathbb{Z}_N| = \frac{N}{y_0} = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \cdots p_k^{n_k} q_1^{m_1} q_2^{m_2} \cdots q_r^{m_r}.$$

D'autre part, posons  $y_i = \frac{y_0}{q_i}$  pour tout  $i \in \{1, 2, \dots, r\}$ , et considérons l'ensemble  $C$  défini par

$$C = y_0\mathbb{Z}_N \cup \{y_1, y_2, \dots, y_r\}$$

qui forme une clique d'ordre  $t = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \cdots p_k^{n_k} q_1^{m_1} q_2^{m_2} \cdots q_r^{m_r} + r$ . Ceci implique que  $\omega(\Gamma_0(\mathbb{Z}_N)) \geq t$ , en effet,  $y_i \notin y_0\mathbb{Z}_N$ , puisque  $y_i < y_0$ , pour tout  $i \in \{1, 2, \dots, r\}$ , car

$$y_i = \frac{y_0}{q_i} \text{ et } \forall x \in y_0\mathbb{Z}_N \setminus \{0\}, \text{ on a } x \geq y_0.$$

De plus, si on prend deux éléments  $y_i \in \{y_1, y_2, \dots, y_r\}$  et  $y_0x \in y_0\mathbb{Z}_N$ , on a

$$y_0xy_i = y_0x \frac{y_0}{q_i} = Nq_1 \cdots q_{i-1} q_{i+1} \cdots q_r x = 0$$

et aussi, si on prend deux éléments distincts  $y_i$  et  $y_j$  de  $\{y_1, y_2, \dots, y_r\}$ , on a

$$y_i y_j = \frac{Nq_1 q_2 \cdots q_r}{q_i q_j} = 0.$$

Ainsi l'ensemble  $C$  est une clique, d'ordre  $t$ , par suite  $\chi(\Gamma_0(\mathbb{Z}_N)) \geq t$ . (Car on a toujours  $\chi(\Gamma_0(\mathbb{Z}_N)) \geq \omega(\Gamma_0(\mathbb{Z}_N))$ ).

Il reste à démontrer que  $\omega(\Gamma_0(\mathbb{Z}_N)) \leq t$ . Tout d'abord colorons la clique  $C$ , et posons pour tout  $i \in \{1, 2, \dots, k\}$

$$x_i = \frac{N}{p_i^{n_i}} = y_0(p_1^{n_1} \cdots p_{i-1}^{n_{i-1}} p_{i+1}^{n_{i+1}} \cdots p_k^{n_k} q_1^{m_1} \cdots q_r^{m_r}) \in y_0\mathbb{Z}_N$$

et  $f(y)$  la couleur de l'élément  $y$  dans  $\Gamma_0(\mathbb{Z}_N)$ , et soit  $x \in \mathbb{Z}_N \setminus (y_0\mathbb{Z}_N \cup \{y_1, y_2, \dots, y_r\})$ , alors

- (i) Si  $p_1^{n_1} \cdots p_k^{n_k}$  divise  $x$ , on pose  $f(x) = f(y_j)$  avec  $j = \min\{i/q_i^{m_i+1} \text{ ne divise pas } x\}$ .
- (ii) Si  $p_1^{n_1} \cdots p_k^{n_k}$  ne divise pas  $x$ , on pose  $f(x) = f(x_j)$  avec

$$j = \min\{i/p_i^{n_i} \text{ ne divise pas } x\}.$$

Pour l'existence de l'indice  $j$  dans (i), supposons le contraire, c'est-à-dire pour tout

$i \in \{1, 2, \dots, r\}$ ,  $q_i^{m_i+1}$  divise  $x$ , et donc

$$q_1^{m_1+1} q_2^{m_2+1} \cdots q_r^{m_r+1} \text{ divise } x$$

par suite  $y_0$  divise  $x$ , implique que  $x \in y_0 \mathbb{Z}_N$ , ce qui est absurde. D'où l'existence de l'indice  $j$  tel que  $q_j^{m_j+1}$  ne divise pas  $x$ .

Ce qui concerne l'indice  $j$  dans (ii), de même supposons le contraire, c'est-à-dire pour tout  $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ ,  $p_i^{n_i}$  divise  $x$ , et puisque les  $p_i$  sont des nombres premiers, donc

$$p_1^{n_1} p_2^{n_2} \cdots p_k^{n_k} \text{ divise } x$$

ce qui est absurde. D'où l'existence de l'indice  $j$  tel que  $p_j^{n_j}$  ne divise pas  $x$ .

Il reste à démontrer que le graphe  $\Gamma_0(\mathbb{Z}_N)$  est bien coloré, c'est-à-dire que deux sommets de même couleur, ne sont pas adjacents.

Soit un sommet  $x$  de  $C \setminus \{0\}$ .

- Si  $p_1^{n_1} \cdots p_k^{n_k}$  divise  $x$ , donc il existe  $y_j$  tel que  $f(x) = f(y_j)$ , et montrons alors que  $xy_j \neq 0$ , c'est-à-dire ne sont pas adjacents.

On a  $q_j^{m_j+1}$  ne divise pas  $x$ , par suite l'exposant de  $q_j$  dans la décomposition de  $x$  en produit des nombres premiers sera inférieure strictement à  $m_j + 1$ , donc l'exposant de  $q_j$  dans le produit  $xy_j$  est inférieure strictement à  $(m_j + 1)m_j = 2m_j + 1$ , puisque

$$y_j = \frac{y_0}{q_j} = p_1^{n_1} \cdots p_k^{n_k} q_1^{m_1+1} \cdots q_{j-1}^{m_{j-1}+1} q_j^{m_j} q_{j+1}^{m_{j+1}+1} \cdots q_r^{m_r+1}$$

donc nécessairement  $xy_j \neq 0$  dans  $\mathbb{Z}_N$ , c'est-à-dire  $x$  et  $y_j$  ne sont pas adjacents.

- Si  $p_1^{n_1} \cdots p_k^{n_k}$  ne divise pas  $x$ , donc il existe  $x_j$  tel que  $f(x) = f(x_j)$ , et montrons alors que  $xx_j \neq 0$ , c'est-à-dire ne sont pas adjacents.

On a  $p_j^{n_j}$  ne divise pas  $x$ , par suite l'exposant de  $p_j$  dans la décomposition de  $x$  en produit des nombres premiers sera inférieure strictement à  $n_j$ , et de plus, on sait que

$$x_j = \frac{N}{p_j^{n_j}} = p_1^{2n_1} \cdots p_{j-1}^{2n_{j-1}} p_j^{n_j} p_{j+1}^{2n_{j+1}} \cdots p_k^{2n_k} q_1^{2m_1+1} q_2^{2m_2+1} \cdots q_r^{2m_r+1}$$

par suite l'exposant de  $p_j$  dans le produit  $xx_j$  est inférieure strictement à  $n_j + n_j = 2n_j$ , par suite  $xx_j \neq 0$  dans  $\mathbb{Z}_N$ , c'est-à-dire  $x$  et  $x_j$  ne sont pas adjacents.

D'autre part, soit deux élément  $x$  et  $y$  n'appartiennent pas à  $C$ , de même couleur (c'est-à-dire  $f(x) = f(y)$ ), et montrons que  $x$  et  $y$  ne sont pas adjacents dans  $\Gamma_0(\mathbb{Z}_N)$ , c'est-à-dire  $xy \neq 0$

- Si  $p_1^{n_1} \cdots p_k^{n_k}$  divise  $x$  et  $y$ , donc il existe  $y_j$  tel que  $f(x) = f(y) = f(y_j)$ , et montrons alors que  $xy \neq 0$ , c'est-à-dire ne sont pas adjacents.

On a  $q_j^{m_j+1}$  ne divise ni  $x$  ni  $y$ , par suite l'exposant de  $q_j$  dans la décomposition de  $x$  et  $y$  en produit des nombres premiers sera inférieure strictement à  $m_j + 1$ , donc l'exposant de  $q_j$  dans le produit  $xy$  est inférieure strictement à  $2m_j + 1$ , donc nécessairement  $xy \neq 0$  dans  $\mathbb{Z}_N$ , c'est-à-dire  $x$  et  $y$  ne sont pas adjacents.

- Si  $p_1^{n_1} \cdots p_k^{n_k}$  ne divise ni  $x$  ni  $y$ , donc il existe  $x_j$  tel que  $f(x) = f(y) = f(x_j)$ , et montrons alors que  $xy \neq 0$ , c'est-à-dire ne sont pas adjacents.

On a  $p_j^{n_j}$  ne divise ni  $x$  ni  $y$ , par suite l'exposant de  $p_j$  dans la décomposition

de  $x$  et  $y$  en produit des nombres premiers sera inférieure strictement à  $n_j$ , par suite l'exposant de  $p_j$  dans le produit  $xy$  est inférieure strictement à  $2n_j - 1$ , par suite  $xy \neq 0$  dans  $\mathbb{Z}_N$ , c'est-à-dire  $x$  et  $y$  ne sont pas adjacents. On conclut que  $\chi(\Gamma_0(\mathbb{Z}_N)) \leq t$ , et puisque  $\chi(\Gamma_0(\mathbb{Z}_N)) \geq \omega(\Gamma_0(\mathbb{Z}_N))$ , il en résulte  $\omega(\Gamma_0(\mathbb{Z}_N)) \leq t$ . D'où

$$\chi(\Gamma_0(\mathbb{Z}_N)) = \omega(\Gamma_0(\mathbb{Z}_N)) = t = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \cdots p_k^{n_k} q_1^{m_1} q_2^{m_2} \cdots q_r^{m_r} + r$$

□

**Proposition 2.7.** Soit  $M$  un nombre entier non nul, alors il existe un nombre  $N$  de  $\mathbb{N}^*$  tel que

$$\chi(\Gamma_0(\mathbb{Z}_N)) = \omega(\Gamma_0(\mathbb{Z}_N)) = M.$$

*Démonstration.* Posant  $N = p_1 p_2 \cdots p_{M-1}$ , avec les  $p_i$  sont les nombres premier ordonnés dans le sens croissant (par exemple ;  $M = 4 \implies N = 2 \times 3 \times 5 = 30$ ), puis on applique le théorème de Beck. □

**Remarque 2.4.** Le nombre proposé dans la preuve, n'est pas le petit entier qui vérifie la propriété, en effet ; Prenons  $M = 7$ , alors le nombre proposé dans la preuve est

$$N = 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13 = 30030$$

d'une autre part le nombre  $N = 3^2 \times 2^{2 \times 1 + 1} = 72$ , d'après Beck, le graphe  $\Gamma_0(\mathbb{Z}_{72})$  peut être colorier par 7 couleurs.

**Proposition 2.8.** Soit  $N$  un nombre entier non nul, alors le graphe  $\Gamma(\mathbb{Z}_N)$  sans triangle, si et seulement si l'une des assertions suivantes est vérifiée :

- (i)  $N = pq$ , avec  $p$  et  $q$  deux nombres premiers distincts.
- (ii)  $N = 2^2 p$ , avec  $p$  un nombre premier.
- (iii)  $N \in \{2^2, 3^2\}$ .
- (iv)  $N$  un nombre premier.

*Démonstration.* ( $\Leftarrow$ ) Pour les deux cas **iii)** et **iv)**, il est remarquable que  $\Gamma(\mathbb{Z}_N)$  ne contient pas des triangles.

Supposons maintenant que **i)** est vérifiée, c'est-à-dire que  $N = pq$ , avec  $p$  et  $q$  deux nombres premiers distincts, et montrons que  $\Gamma(\mathbb{Z}_N)$  ne contient pas des triangles, pour cela il suffit de démontrer que le graphe  $\Gamma(\mathbb{Z}_N)$  est un graphe biparti. Posant

$$\begin{aligned} V &= z(\mathbb{Z}_N)^* \\ V_1 &= \{mp / m \in \mathbb{N}^* : m \wedge q = 1\} \\ V_2 &= \{mq / m \in \mathbb{N}^* : m \wedge p = 1\} \end{aligned}$$

On a :  $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ , en effet, supposons qu'ils existent  $mp \in V_1$  et  $m'q \in V_2$  tel que  $mp = m'q$ , cela implique que  $m \wedge q \neq 1$  et  $m' \wedge p \neq 1$ , ce qui est absurde. De plus  $V = V_1 \cup V_2$ , en effet :

$V_1 \subseteq V$ , puisque pour tout  $x = mp \in V_1$ , on pose  $y = q$ , et de même  $V_2 \subseteq V$ , car pour tout  $x = mq \in V_2$ , on va poser  $y = p$ . Donc  $V_1 \cup V_2 \subseteq V$ , et il reste à

montrer l'autre inclusion. Soit  $x \in V$ . Supposons que  $x \notin V_1$  et monterons ensuite que  $x \in V_2$ . Notons que

$$x \notin V_1 \iff x \neq mp \text{ avec } m < q$$

et montrons que  $x = m'q$ , pour un certain  $m' < p$ . Supposons le contraire que

$x \neq m'q$  pour tout  $m' < p$ , ceci implique que  $y = k'pq$  pour un certain  $k'$  de  $\mathbb{N}^*$ , ce qui est absurde, alors nécessairement  $x \in V_2$ , d'où  $V = V_1 \cup V_2$ .

De plus les deux ensembles de sommets  $V_1$  et  $V_2$  sont des stables, en effet ; soit  $mp$  et  $m'p$  deux sommets de  $V_1$ , et supposons que  $mm'p^2 = 0 = kpq$

$$\begin{aligned} mm'p^2 = 0 = kpq &\implies mm'p = kq \\ &\implies q \text{ divise } mm'p \\ &\implies q \text{ divise } mm' \text{ (car } p \wedge q = 1) \\ &\implies q \text{ divise } m' \text{ (car } q \wedge m = 1) \\ &\implies q \wedge m' = 1 \end{aligned}$$

ce qui est absurde , donc  $V_1$  est stable. De même démarche on montre que  $V_2$  est stable. D'autre part, pour tout  $x$  de  $V_1$  et  $y$  de  $V_2$ ,  $x$  et  $y$  sont adjacents (en effet ;  $x = mp$  et  $y = m'q \implies xy = mm'N = 0$ ).

Donc le graphe  $\Gamma(\mathbb{Z}_N)$  est un graphe biparti complet, ainsi  $\Gamma(\mathbb{Z}_N)$  ne contient pas des triangles.

Supposons maintenant que ii) est vérifiée, c'est-à-dire que  $N = 2^2p$ , avec un nombre premier, et montrons que  $\Gamma(\mathbb{Z}_N)$  ne contient pas des triangles, pour cela il suffit de démontrer que le graphe  $\Gamma(\mathbb{Z}_N)$  est un graphe biparti. Posant

$$\begin{aligned} V &= z(\mathbb{Z}_N)^* \\ V_1 &= \{2m / m \in \mathbb{N}^* : m \neq p\} \\ V_2 &= \{p, 2p, 3p\} \end{aligned}$$

Il est facile de démontrer que  $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ . De plus  $V = V_1 \cup V_2$ , en effet :  $V_1 \subseteq V$ , et de même  $V_2 \subseteq V$ . Donc  $V_1 \cup V_2 \subseteq V$ , et il reste à montrer l'autre inclusion. Sachant que

$$V = \{x \in \mathbb{Z}_N \setminus \{0\} / \exists y \in \mathbb{Z}_N \setminus \{0\} \text{ et } k \in \mathbb{N}^* : xy = kN\}$$

Soit  $x \in V$ , alors ils existent  $y$  et  $k$  tel que  $xy = kN = 4kp$ . Supposons que  $x \notin V_2$  et monterons ensuite que  $x \in V_1$ , ainsi

$$\begin{aligned} x \notin \{p, 2p, 3p\} &\implies p \text{ divise } y \text{ (car } xy = 4kp) \\ &\implies y = np \text{ avec } n \in \{1, 2, 3\} \\ &\implies x = 2m \text{ avec } m \in \mathbb{N}^* \setminus \{p\} \end{aligned}$$

On conclut que  $V = V_1 \cup V_2$ , et  $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ .

D'autre part, pour tout  $x, y$  de  $V_1$  ou bien de  $V_2$ , on a  $xy \neq 0$ , c'est-à-dire que  $x$  et  $y$  ne sont pas adjacents.

— Si  $x, y \in V_1$

$$\begin{aligned} x, y \in V_1 &\implies x \wedge p = 1 \text{ et } y \wedge p = 1 \\ &\implies xy \wedge p = 1 \\ &\implies xy \neq kp \text{ pour tout } k \text{ de } \mathbb{N}^* \\ &\implies xy \neq kN \text{ pour tout } k \text{ de } \mathbb{N}^* \text{ (car } N = 2^2p) \\ &\implies xy \neq 0. \end{aligned}$$

— Si  $x, y \in V_2$  avec  $x \neq y$ , cela implique que  $xy \in \{2p^2, 3p^2, 6p^2\}$ . Supposons par absurde que  $xy = kN = 0$  pour un certain  $k$  de  $\mathbb{N}^*$ , or  $kN = 4kp$  et  $xy = 0$ , alors

$$k \in \left\{ \frac{3}{4}p, \frac{1}{2}p, \frac{3}{2}p \right\} \not\subseteq \mathbb{N}^*$$

il en résulte que  $xy \neq 0$  pour tout  $x, y$  de  $V_2$ . Donc le graphe  $\Gamma(\mathbb{Z}_N)$  est un graphe biparti.

( $\implies$ ) On le montre par la contraposée. On peut distinguer les suivants du nombre  $N$

- $N = drpq$ , où  $r, p$  et  $q$  des nombre premiers et  $d \in \mathbb{N}^*$ , alors

$$C = \left[ \frac{pr}{q}N, \frac{qp}{r}N, \frac{qr}{p}N, \frac{pr}{q}N \right]$$

est un triangle.

- $N = dp^2q^2$ , où  $p$  et  $q$  des nombre premiers et  $d \in \mathbb{N}^*$ , alors

$$C = [pq^2d, p^2qd, pqd, pq^2d]$$

est un triangle.

- $N = dp^2$ , où  $p \geq 5$  un nombre premier, alors  $C = [pd, 2pd, 3pd, pd]$  est un triangle.
- $N = 2^n$ , où  $n \geq 4$ , alors  $C = [2^{n-2}, 3 \times 2^2, 2^{n-1}, 2^{n-2}]$  est un triangle, puisque pour tout  $n \geq 4$  on a  $3 \times 2^2 < 2^n$ .
- $N = 3^n$ , où  $n \geq 3$ , alors  $C = [3^{n-2}, 2 \times 3^2, 3^{n-1}, 3^{n-2}]$  est un triangle, puisque pour tout  $n \geq 3$  on a  $2 \times 3^2 < 3^{n-1}$ .
- $N = 3^np$ , où  $p$  un nombre premier, alors  $C = [3, 3p, 3(2p), 3]$  est un triangle, puisque on a  $3(2p) < 3^2p$ .
- $N = 2^np$ , où  $p$  un nombre premier et  $n \geq 3$ , alors  $C = [2^{n-1}, 2p, 2^{n-1}p, 2^{n-1}]$  est un triangle.

D'où le résultat. □

**Remarque 2.5.** Pour tout  $m \in \{0, 1, 2, 3\}$  il existe un nombre  $N$  de  $\mathbb{N}^*$  tel que

$$\text{diam}(\Gamma(\mathbb{Z}_N)) = m.$$

En effet :

- $N = 4 \implies \text{diam}(\Gamma(\mathbb{Z}_N)) = 0.$
- $N = 9 \implies \text{diam}(\Gamma(\mathbb{Z}_N)) = 1.$
- $N = 8 \implies \text{diam}(\Gamma(\mathbb{Z}_N)) = 2.$

- $N = 2^2p$ , avec  $p$  un nombre premier, implique que  $\text{diam}(\Gamma(\mathbb{Z}_N)) = 3$ , puisque  $\Gamma(\mathbb{Z}_N)$  est un graphe biparti d'après le théorème précédent, et même posant

$$\begin{aligned} V &= z(\mathbb{Z}_N)^* \\ V_1 &= \{2m / m \in \mathbb{N}^* : m \wedge p = 1\} \\ V_2 &= \{p, 2p, 3p\} \end{aligned}$$

nécessairement  $2 \in V_1$  et alors  $V(2) \in V_2$ , cela implique  $V(2) = \{2p\}$ , ainsi 2 est adjacent à un seul sommet  $2p$ , et de plus  $2p$  n'est pas adjacent à  $p$ , ceci implique que

$$d(2, p) \geq 3$$

or  $\text{diam}(\Gamma(\mathbb{Z}_N)) \leq 3$ , il en résulte que  $d(2, p) = 3$ , d'où le résultat.

On termine cette section, par le théorème suivant qui indique les mailles des graphes  $\Gamma(\mathbb{Z}_N)$ , pour tout  $N \in \mathbb{N}^*$ .

**Théorème 2.7.** La maille du graphe  $\Gamma(\mathbb{Z}_N)$ , pour tout  $N$  de  $\mathbb{N}^*$  appartient à  $\{3, 4, \infty\}$ .

- Démonstration.*
- Si  $\Gamma(\mathbb{Z}_N)$  contient des triangles, alors la maille est 3.
  - Si  $\Gamma(\mathbb{Z}_N)$  ne contient pas des triangles, alors l'une des propriétés suivantes est vérifiée
    - (i)  $N = pq$ , avec  $p$  et  $q$  deux nombres premiers distincts.
    - (ii)  $N = 2^2p$ , avec  $p$  un nombre premier.
    - (iii)  $N \in \{2^2, 3^2\}$ .
    - (iv)  $N$  un nombre premier.
- Si (iii) ou bien (iv) est vérifiée, alors la maille du graphe  $\Gamma(\mathbb{Z}_N)$  est l'infini.
- Si (i) est vérifiée, alors le graphe  $\Gamma(\mathbb{Z}_N)$  d'après le théorème précédent, est biparti complet, dont

$$\begin{aligned} V &= z(\mathbb{Z}_N)^* \\ V_1 &= \{mp / m \in \mathbb{N}^* : m \wedge q = 1\} \\ V_2 &= \{mq / m \in \mathbb{N}^* : m \wedge p = 1\} \end{aligned}$$

Supposons que le graphe  $\Gamma(\mathbb{Z}_N)$  contient des cycles, et soit

$$C = [x_1, x_2, \dots, x_n, x_1]$$

un cycle de  $\Gamma(\mathbb{Z}_N)$ , alors le cycle  $C' = [x_1, x_2, x_3, x_4, x_1]$  est un carré, en effet; nécessairement  $[x_1, x_3 \in V_1$  et  $x_2, x_4 \in V_2]$ , ou bien  $[x_1, x_3 \in V_2$  et  $x_2, x_4 \in V_1]$ , alors

$$x_1 = m_1p, x_3 = m_2p, x_2 = n_1q \text{ et } x_4 = n_2q$$

ou bien

$$x_1 = m_1q, x_3 = m_2q, x_2 = n_1p \text{ et } x_4 = n_2p$$

dans tout les cas, on conclut que  $x_1x_2 = x_2x_3 = x_3x_4 = x_4x_1 = 0$ , c'est-à-dire  $C' = [x_1, x_2, x_3, x_4, x_1]$  est un carré, il en résulte que la maille du  $\Gamma(\mathbb{Z}_N)$  est 4.

→ Si **(ii)** est vérifiée, alors le graphe  $\Gamma(\mathbb{Z}_N)$  d'après le théorème précédent, est biparti, dont

$$\begin{aligned} V &= z(\mathbb{Z}_N)^* \\ V_1 &= \{2m / m \in \mathbb{N}^* : m \wedge p = 1\} \\ V_2 &= \{p, 2p, 3p\} \end{aligned}$$

Supposons que le graphe  $\Gamma(\mathbb{Z}_N)$  contient des cycles, et soit

$$C = [x_1, x_2, \dots, x_n, x_1]$$

un cycle de  $\Gamma(\mathbb{Z}_N)$ . Puisque  $\Gamma(\mathbb{Z}_N)$  est biparti et contient des cycles et puisque  $|V_2| = 3$ , alors  $n \in \{4, 6\}$ .

— Si  $n = 4$ , c'est fini.

— Si  $n = 6$ , alors le cycle est sous la forme

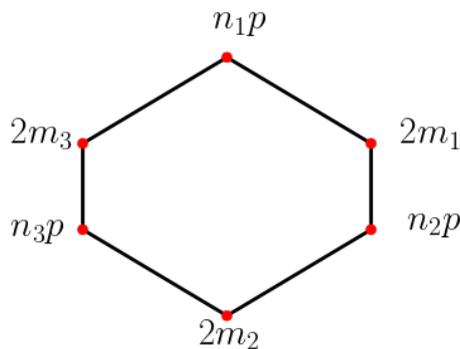


FIGURE 2.11 – Le cycle C

avec  $m_i \in \mathbb{N}^*$ ,  $m_i \wedge p = 1$  et  $n_i \in \{1, 2, 3\}$ . Soit  $i_0$  l'indice où  $n_{i_0} = 2$ .

Alors

- Si  $i_0 = 1$ , posant  $C' = [2p, 2m_2, n_2p, 2m_1, 2p]$ .
- Si  $i_0 = 2$ , posant  $C' = [2p, 2m_2, n_3p, 2m_3, 2p]$ .
- Si  $i_0 = 3$ , posant  $C' = [2p, 2m_3, n_1p, 2m_1, 2p]$ .

On conclut que  $C'$  est un cycle de longueur 4.

D'où le résultat. □

---

---

## CHAPITRE 3

---

# LE GRAPHE DE COMMUTATION DES ANNEAUX NON-COMMUTATIFS

Ramezani, F., Vatandoost, E. (2016). On the commuting graph of some non-commutative rings with unity. *Journal of Linear and Topological Algebra (JLTA)*, 5(04), 289-294.

Vatandoost, E., Ramezani, F., Bahraini, A. (2014). On the commuting graph of non-commutative rings of order  $p^nq$ . *Journal of Linear and Topological Algebra (JLTA)*, 3(01), 1-6.

### 3.1 Introduction

Dans ce chapitre. On va définir un nouveau graphe simple dit **graphe de commutation d'un anneau non-commutatif**  $R$ , noté  $\Omega(R)$  dont l'ensemble des sommets est  $R \setminus Z(R)$  où  $Z(R)$  est le centre de  $R$  défini par

$$Z(R) = \{x \in R / \forall y \in R : xy = yx\}.$$

Mais dans cette partie, on s'intéresse à quelques types des anneaux non-commutatifs finis. **Ramezani** [38] et **Omidi** [33] ont prouvé que les graphes de commutation des anneaux finis d'ordres  $p^n$  où  $p$  est un nombre premier et  $n \in \{2, 3, 4, 5\}$ , sont des réunions disjointes des graphes complets. Finalement **Ramezani** [38] a démontré que le graphe de commutation d'un anneau non-commutatif  $R$  dont  $|R \setminus Z(R)| \leq 20$  est l'un des graphes suivants :  $3K_2$ ,  $3K_4$ ,  $7K_2$ ,  $K_2 \cup 2K_6$  ou bien  $4K_2 \cup K_6$ .

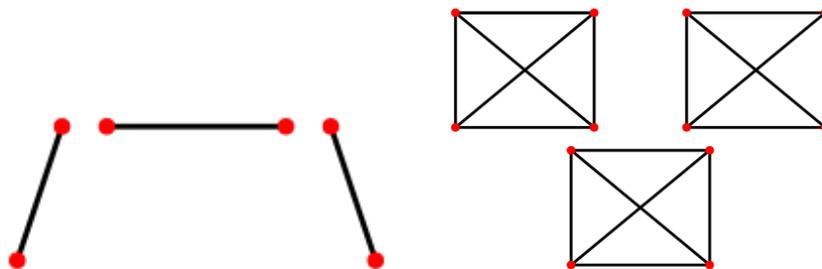


FIGURE 3.1 – Les graphes  $3K_2$  et  $3K_4$

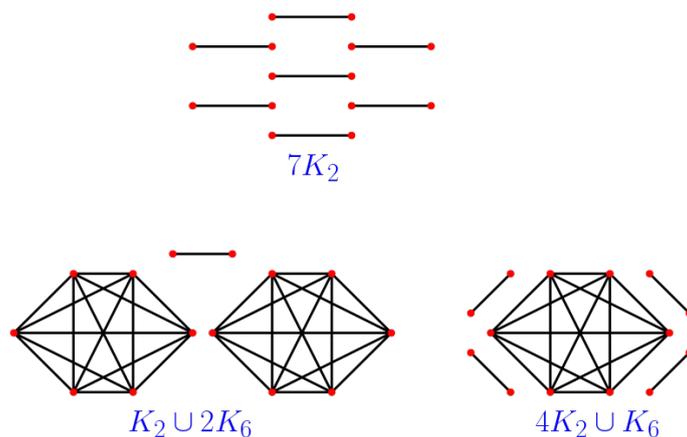


FIGURE 3.2 – Les graphes  $7K_2$ ,  $K_2 \cup 2K_6$  et  $4K_2 \cup K_6$

D'autre part, **Vatandoost** [39] a traité les graphes de commutation des anneaux non-commutatifs finis d'ordres  $pq$  et  $p^2q$  où  $p$  et  $q$  deux nombres premiers distincts et de centre réduit à zéro, et les graphes de commutation des anneaux non-commutatifs unitaires finis d'ordres  $p^3q$ . A savoir la non-connexité de ces graphes, et qu'ils sont des réunions disjointes des graphes complets. Finalement, on termine ce chapitre par un résultat concernant les graphes planaires et les graphes complémentaires des graphes de commutation.

## 3.2 La connexité du graphe de commutation

Dans cette section, on définit le graphe de commutation d'un anneau non-commutatif, ensuite on donne quelques résultats qui vont nous servir par la suite. Dont on exploite la notion du centralisateur d'un élément  $x$  d'un anneau  $R$ , noté  $C(x)$ , et c'est l'ensemble des éléments qui commutent avec  $x$ . Plus formellement le centralisateur de l'élément  $x$  est défini par

$$C(x) = \{y \in R / xy = yx\}.$$

**Définition 3.1.** Soit  $R$  un anneau non commutatif, le graphe de commutation de  $R$ , est un graphe simple, noté  $\Omega(R) = (V, E)$ , avec  $V = R \setminus Z(R)$  et pour tout  $x, y \in V$  avec  $x \neq y$ , on a

$$\{x, y\} \in E \iff xy = yx.$$

**Lemme 3.1.** Soit  $R$  un anneau non-commutatif et  $(x, y)$  une arête dans  $\overline{\Omega(R)}$ , alors

$$[x, x + y, y, x] \text{ est un triangle dans } \overline{\Omega(R)}.$$

*Démonstration.* Soit  $R$  un anneau non-commutatif et  $(x, y)$  une arête dans  $\overline{\Omega(R)}$ , alors  $xy \neq yx$ , ce qui implique que  $x + y \notin C(x) \cup C(y)$ . Ainsi  $x + y \in R \setminus Z(R)$ , et par suite  $[x, x + y, y, x]$  est un triangle dans  $\overline{\Omega(R)}$ .

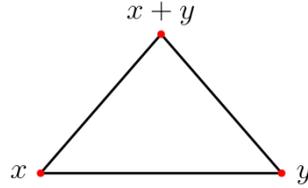


FIGURE 3.3 – Le triangle  $[x, x + y, y, x]$ .

□

**Lemme 3.2.** Soient  $R$  un anneau non-commutatif, et  $x$  et  $y$  deux sommets de  $\overline{\Omega(R)}$ , alors  $d(x, y) \in \{1, 2\}$  dans le graphe complémentaire  $\overline{\Omega(R)}$ .

*Démonstration.* En effet,

- Si  $xy \neq yx$ , dans ce cas  $d(x, y) = 1$  dans le graphe  $\overline{\Omega(R)}$ .
- Supposons que  $xy = yx$ , or  $x, y \in R \setminus Z(R)$ , ainsi ils existent deux éléments  $a$  et  $b$  tels que  $xa \neq ax$  et  $yb \neq by$ , dans ce cas, on peut distinguer deux cas
  - Si  $ay \neq ya$ , alors  $[x, a, y]$  est un chemin relie  $x$  et  $y$  dans  $\overline{\Omega(R)}$ . De même si  $xb \neq bx$ , alors  $[x, b, y]$  est un chemin relie  $x$  et  $y$  dans  $\overline{\Omega(R)}$ . Ainsi  $d(x, y) = 2$ .
  - Si  $ay = ya$  et  $xb = bx$ , ceci implique que  $a + b \notin C(x) \cup C(y)$ , il en résulte que  $[x, a + b, y]$  est un chemin relie  $x$  et  $y$  dans  $\overline{\Omega(R)}$ . D'où  $d(x, y) = 2$ .

□

**Remarque 3.1.** Parmi les résultats immédiats du lemme [3.2], nous avons

- le graphe complémentaire  $\overline{\Omega(R)}$  est connexe.
- le diamètre du  $\overline{\Omega(R)}$  est inférieure ou égale à deux.

**Notation 3.1.** Soit  $G$  un groupe commutatif fini, et  $H$  un sous groupe de  $G$ , on note

$$|G/H| = [G : H]$$

appelé l'indice de  $H$  dans  $G$ .

**Lemme 3.3.** Soit  $R$  un anneau non-commutatif unitaire, alors  $[R : Z(R)] \geq 4$ .

*Démonstration.* Or  $R$  est non-commutatif, alors nécessairement  $[R : Z(R)] \geq 2$ .

- Si  $[R : Z(R)] = 2$ , alors il existe un élément  $a$  de  $R \setminus Z(R)$  tel que  $R = Z(R) \cup (a + Z(R))$ , cela implique que  $a \in Z(R)$ , ce qui est absurde.
- Si  $[R : Z(R)] = 3$ , alors ils existent deux éléments  $a$  et  $b$  tels que  $ab \neq ba$  et  $R = Z(R) \cup (a + Z(R)) \cup (b + Z(R))$ . Alors  $R = C(a) \cup C(b)$ , d'autre part  $(a + b) \notin C(a) \cup C(b) = R$ , ceci est une contradiction.

Ainsi  $[R : Z(R)] \geq 4$ , pour tout anneau  $R$  non-commutatif unitaire.  $\square$

**Lemme 3.4.** Soit  $R$  un anneau non-commutatif, et tel que  $Z(R) \neq \{0\}$ , alors  $[R : Z(R)]$  n'est pas premier.

*Démonstration.* Supposons par absurde que  $[R : Z(R)] = t$  est premier. Alors le groupe  $(R, +)/(Z(R), +)$  est cyclique d'ordre  $t$ . Posant  $R/Z(R) = (a + Z(R))$ , avec  $a \in R \setminus Z(R)$ . Ainsi, pour tout  $x$  et  $y$  de  $R$ , ils existent deux entiers  $n$  et  $m$  tels que  $x + Z(R) = na + Z(R)$  et  $y + Z(R) = ma + Z(R)$ . Par suite

$$\text{il existes deux éléments } z_1 \text{ et } z_2 \text{ de } Z(R) \text{ tels que } \begin{cases} x = na + z_1 \\ y = ma + z_2 \end{cases},$$

il en résulte que  $xy = yx$ , ce qui absurde avec le fait que  $R$  est un anneau non-commutatif. Alors  $[R : Z(R)]$  n'est pas premier.  $\square$

Nous sommes toujours intéressés par le cas où  $\Omega(R)$  est fini et non vide. Nous pouvons voir que cela se produit précisément lorsque  $R$  est fini.

**Théorème 3.1.** Soit  $R$  un anneau non-commutatif unitaire. alors  $\Omega(R)$  est fini si et seulement si  $R$  est fini.

*Démonstration.* Posant  $m$  l'ordre de  $\Omega(R)$ , c'est-à-dire  $|R \setminus Z(R)| = m$ . Or

$$\begin{aligned} [R : Z(R)] &= |\{a + Z(R)/a \in R \setminus Z(R)\}| + 1 \\ &= t \leq m + 1. \end{aligned}$$

et posons  $R = Z(R) \cup (a_2 + Z(R)) \cup \dots \cup (a_{t-1} + Z(R))$  avec  $a_i \in R \setminus Z(R)$  pour tout  $i \in \{1, 2, \dots, t-1\}$ , alors  $|(a_2 + Z(R)) \cup \dots \cup (a_{t-1} + Z(R))| = m$ , ainsi  $|R| = |Z(R)| + m$ , avec  $|Z(R)| < m$ , il en résulte que  $R$  est un anneau fini. Pour l'autre sens c'est clair, cela termine la preuve.  $\square$

Ce qui concerne la connexité du graphe de commutation. **Ramezani** [38] a posé une conjecture, est la suivante :

**Conjecture 3.1.** Soit  $R$  un anneau non-commutatif unitaire. Alors  $\Omega(R)$  n'est pas connexe.

Mais dans ce chapitre on aura besoin de la connexité dans le cas où

$$[R : Z(R)] \leq 7.$$

**Ramezani** [38] a démontré le lemme suivant :

**Lemme 3.5.** Soit  $R$  un anneau non-commutatif unitaire et tel que  $[R : Z(R)] \leq 7$ . Alors  $\Omega(R)$  n'est pas connexe.

*Démonstration.* D'après les lemmes [3.3] et [3.4], on conclut que

$$[R : Z(R)] \in \{4, 6\}$$

- Si  $[R : Z(R)] = 4$ , alors il existe un ensemble  $\{a, b, c\} \subseteq R \setminus Z(R)$  tels que

$$R = Z(R) \cup (a + Z(R)) \cup (b + Z(R)) \cup (c + Z(R))$$

de plus pour tout  $x$  et  $y$  de  $\{a, b, c\}$ , on a  $xy \neq yx$ , en effet supposons par absurde que  $ab = ba$ , alors  $R = C(a) \cup C(c)$ , ceci implique que  $C(a) \subseteq C(c)$  ou  $C(c) \subseteq C(a)$ , puisque s'ils existent  $x \in C(a) \setminus C(c)$  et  $y \in C(c) \setminus C(a)$ , alors

$$x + y \notin C(a) \cup C(c) = R.$$

Supposons  $C(a) \subseteq C(c)$ , alors  $R = C(c)$ , par suite  $c \in Z(R)$  ce qui absurde. Alors pour tout  $x$  et  $y$  de  $\{a, b, c\}$ , on a  $xy \neq yx$ .

Posant alors  $|Z(R)| = t$ , ceci implique que  $\overline{\Omega(R)} = K_{t,t,t}$ . D'où  $\Omega(R)$  n'est pas connexe.

- Si  $[R : Z(R)] = 6$ , alors il existe un ensemble  $\{a_i / 1 \leq i \leq 5\} \subseteq R \setminus Z(R)$  tels que

$$R = Z(R) \cup (a_1 + Z(R)) \cup \dots \cup (a_5 + Z(R)).$$

Alors d'après les deux lemmes [3.1] et [3.2], il existe  $k \in \{1, 2, \dots, 5\}$  tel que tout les sommets de  $a_k + Z(R)$  sont adjacents à tous les éléments de  $a_i + Z(R)$  pour tout  $i \in \{1, 2, \dots, 5\} \setminus \{k\}$  dans  $\overline{\Omega(R)}$ , c'est-à-dire pour tout  $x \in a_k + Z(R)$  et  $y \in a_i + Z(R)$  pour tout  $i \in \{1, 2, \dots, 5\} \setminus \{k\}$  on a  $xy \neq yx$ . Posant par suite  $|Z(R)| = t$ , ceci implique que  $\Omega[a_k + Z(R)]$  est une composante connexe complet de  $\Omega(R)$ . D'où  $\Omega(R)$  n'est pas connexe. □

**Remarque 3.2.** Soit  $R$  un anneau non-commutatif unitaire fini. Alors  $|Z(R)|$  divise  $|R \setminus Z(R)|$ . En effet, on sait que

$$|R| = |Z(R)| + |R \setminus Z(R)| \quad \text{et} \quad |R| = |Z(R)||[R : Z(R)],$$

ainsi  $|Z(R)||([R : Z(R)] - 1) = |R \setminus Z(R)|$ , il en résulte que  $|Z(R)|$  divise  $|R \setminus Z(R)|$ .

### 3.3 Graphe de commutation des anneaux d'ordres $p^n$

Dans cette section, nous étudions les anneaux non-commutatifs unitaires d'ordres  $p^n$  où  $p$  est premier et  $n \in \{2, 3, 4, 5\}$ . On montre que  $\Omega(R)$  est la réunion disjointe de graphes complets.

#### 3.3.1 Les anneaux d'ordres $p^2$ et $p^3$

Commençons par les deux lemmes suivants :

**Lemme 3.6** ([26]). Soit  $G$  un groupe fini non-triviale, et  $n > 1$  un nombre entier tel que  $\{H_i / i = 1, 2, \dots, n\}$  est un ensemble des sous-groupes de  $G$  vérifie

$$G = \bigcup_{i=1}^n H_i \quad |H_i| = |H_j| \quad \text{et} \quad H_i \cap H_j = \{0\}, \forall i \neq j$$

Alors ils existent un nombre premier  $p$  et un nombre entier  $m$  tels que  $|G| = p^m$ .

**Lemme 3.7.** Soit  $R$  un anneau fini tel que  $\Omega(R) = rK_l$ , avec  $r - 1$  est un nombre premier. Alors  $(r - 2)$  divise  $l$  et

$$|R| = \frac{l(r-1)^2}{r-2}.$$

*Démonstration.* Puisque tout les composants connexes de  $\Omega(R)$  sont complets, alors pour tout  $x, y \in R \setminus Z(R)$ , on a

- Si  $xy = yx$ , alors  $C(x) = C(y)$ .
- Si  $xy \neq yx$ , alors  $C(x) \cap C(y) = Z(R)$ .

Ainsi  $|C(x)| - |Z(R)| = l$ . Il en résulte que pour tout  $x, y \in R \setminus Z(R)$ . On a

$$|C(x)/Z(R)| = |C(y)/Z(R)|.$$

De plus si  $C(x) \neq C(y)$ , alors

$$|C(x)/Z(R) \cap C(y)/Z(R)| = 1$$

alors d'après le lemme précédent, ils existent un nombre premier  $p$  et un nombre entier  $m$  tels que  $|R/Z(R)| = q^m$ . Et on a pour tout  $x \in R \setminus Z(R)$ , il existe un nombre entier  $m$  tels que  $|C(x)/Z(R)| = q^m$ . Or  $|R| - |Z(R)| = rl$ , alors

$$\frac{|R| - |Z(R)|}{|C(x)| - |Z(R)|} = \frac{q^m - 1}{q^m - 1} = r.$$

Or  $r \in \mathbb{N}$ , alors  $m$  divise  $n$ , c'est-à-dire qu'il existe un entier  $k$  tel que  $n = km$ . Posons  $t = q^m$ , alors

$$\frac{t^k - 1}{t - 1} = r \text{ ceci implique que } r - 1 = t(t^{k-1} + \dots + 1).$$

Ainsi  $t$  divise  $r - 1$ . Or  $t > 1$  et  $r - 1$  est premier, alors  $t = r - 1 = q^m$ , c'est-à-dire  $k = 2$ . Il en résulte que

$$m = 1, \quad q = r - 1 \text{ et } n = 2.$$

Ainsi

$$|Z(R)| = \frac{l}{r-2} \quad \text{et} \quad |R| = \frac{l(r-1)^2}{r-2}.$$

□

**Théorème 3.2.** Soit  $R$  un anneau fini d'ordre  $p^2$  avec  $p$  un nombre premier. Alors

- (i)  $\Omega(R)$  est la réunion disjointe de  $p + 1$  graphes complets d'ordres  $p - 1$ .
- (ii) Soit  $T$  un anneau fini, alors

$$\Omega(R) \cong \Omega(T) \implies |R| = |T|.$$

*Démonstration.* (i) Soit  $x \in R \setminus Z(R)$ . Alors  $C(x)$  divise  $p^2$ , ainsi  $|C(x)| \in \{1, p, p^2\}$ . Or  $x \notin Z(R)$  et  $x \in C(x)$  alors  $|C(x)| \notin \{1, p^2\}$ . Alors  $|C(x)| = p$  et puisque  $Z(R)$  est un sous-groupe propre de  $(C(x), +)$ , alors  $Z(R) = \{0\}$ . De plus, on a pour tout  $x, y \in R \setminus Z(R)$ , on a

- Si  $xy = yx$ , alors  $C(x) = C(y)$ .
- Si  $xy \neq yx$ , alors  $C(x) \cap C(y) = Z(R)$ .

Ainsi tout les composantes connexes de  $\Omega(R)$  sont d'ordre  $p - 1$ , alors

$$\Omega = (p + 1)K_{p-1}$$

(ii) D'après le lemme précédent, il facile à démontrer que

$$|T| = p^2 = |R|$$

□

**Théorème 3.3.** Soit  $R$  un anneau fini d'ordre  $p^3$  avec  $p$  un nombre premier. Alors

- (i)  $\Omega(R)$  est la réunion disjointe de  $p + 1$  graphes complets d'ordres  $p^2 - p$ .
- (ii) Soit  $T$  un anneau fini, alors

$$\Omega(R) \cong \Omega(T) \implies |R| = |T|.$$

*Démonstration.* (i) Soit  $x \in R \setminus Z(R)$ . Alors  $C(x)$  divise  $p^3$ , ainsi  $|C(x)| \in \{1, p, p^2, p^3\}$ .

Or  $x \notin Z(R)$  et  $x \in C(x)$  alors  $|C(x)| \notin \{1, p^3\}$ . De plus  $Z(R)$  est un sous-groupe propre de  $C(x)$  et  $|Z(R)| \geq 2$ , alors  $|C(x)| \neq p$ . Alors  $|C(x)| = p^2$  et  $|Z(R)| = p$ . Et puisque  $C(x)$  est d'ordre  $p^2$  et  $Z(R) \subseteq Z(C(x))$ , alors  $|Z(C(x))| > 1$ , ainsi  $C(x)$  est commutatif. Alors pour tout  $x, y \in R \setminus Z(R)$ , on a

- Si  $xy = yx$ , alors  $C(x) = C(y)$ .
- Si  $xy \neq yx$ , alors  $C(x) \cap C(y) = Z(R)$ .

Ainsi tout les composantes connexes de  $\Omega(R)$  sont d'ordre  $p^2 - p$ , alors

$$\Omega = (p + 1)K_{p^2-p}$$

(ii) D'après le lemme précédent, il facile à démontrer que

$$|T| = p^3 = |R|$$

□

### 3.3.2 Les anneaux d'ordres $p^4$ et $p^5$

Dans cette partie on s'intéresse à des anneaux non-commutatifs unitaires d'ordres  $p^n$  où  $p$  est un nombre premier et  $n \in \{4, 5\}$ , dont on donne quelques résultats algébriques de ces types des anneaux, à savoir le cas d'égalité des centralisateurs des éléments de  $R \setminus Z(R)$  où  $R$  un anneau non-commutatif, et quelques propositions déterminent les graphes de commutation des ces anneaux.

**Lemme 3.8** ([24]). Soit  $R$  un anneau unitaire fini d'ordre  $p^n$  avec  $p$  un nombre premier et tel que  $n < 3$ , alors  $R$  est un anneau commutatif.

*Démonstration.*  $R$  est fini d'ordre  $p^n$  avec  $p$  un nombre premier et tel que  $n \in \{1, 2\}$ , alors

- Si  $n = 1$ , or  $R$  est unitaire, alors  $R = Z(R)$ , d'où  $R$  est commutatif.
- Si  $n = 2$ , alors  $|Z(R)| \in \{p, p^2\}$ 
  - Si  $|Z(R)| = p^2$ , alors  $R = Z(R)$ , ainsi  $R$  est un anneau commutatif.

- Si  $|Z(R)| = p$ , alors  $(R, +)/(Z(R), +)$  est un groupe cyclique d'ordre  $p$ . Posant  $R/Z(R) = (a + Z(R))$ , avec  $a \in R \setminus Z(R)$ . Ainsi, pour tout  $x$  et  $y$  de  $R$ , ils existent deux entiers  $n$  et  $m$  tels que  $x + Z(R) = na + Z(R)$  et  $y + Z(R) = ma + Z(R)$ . Par suite

$$\text{il existes deux éléments } z_1 \text{ et } z_2 \text{ de } Z(R) \text{ tels que } \begin{cases} x = na + z_1 \\ y = ma + z_2 \end{cases},$$

il en résulte que  $xy = yx$ , par suite  $R$  est un anneau commutatif.  $\square$

Le lemme suivant est un lemme intéressant basé sur le résultat précédent, d'autre part il l'est généralise pour tout anneau unitaire fini :

**Lemme 3.9** ([24]). *Soit  $R$  un anneau unitaire fini d'ordre  $m$  où  $m = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \cdots p_k^{n_k}$  (décomposition en nombres premiers) et tel que  $n_i < 3$  pour tout  $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ , alors  $R$  est un anneau commutatif.*

*Démonstration.* On sait que si  $p_1^{n_1} p_2^{n_2} \cdots p_k^{n_k}$  est la décomposition en nombres premiers du nombre  $m$ , alors

$$R = R_1 \oplus R_2 \oplus \cdots \oplus R_k \text{ (somme direct des idéaux)}$$

avec  $R_i$  est un idéal de  $R$  d'ordre  $p_i^{n_i}$  unitaire pour tout  $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ . Or  $n_i < 3$  pour tout  $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ , alors d'après le lemme [3.8]  $R_i$  est commutatif. Il en résulte que  $R$  est un anneau commutatif.  $\square$

**Lemme 3.10.** *Soit  $R$  un anneau non-commutatif fini d'ordre  $p^3$ , et  $Z(R) \neq \{0\}$ . Alors  $|Z(R)| = p$ .*

*Démonstration.* Puisque  $(Z(R), +)$  est un sous groupe de  $(R, +)$ , alors  $|Z(R)| \in \{1, p, p^2, p^3\}$ . De plus, or  $R$  est non-commutatif unitaire, alors  $|Z(R)| \notin \{1, p^3\}$ , ainsi

$$|Z(R)| \in \{p, p^2\}.$$

D'après le lemme [3.4], on a  $[R : Z(R)] \neq p$ , il en résulte que  $|Z(R)| = p$  (car  $|R| = |Z(R)||[R : Z(R)]$ ).  $\square$

Le théorème suivant affirme la commutativité des centralisateurs des éléments de  $R \setminus Z(R)$  :

**Théorème 3.4.** *Soient  $R$  un anneau non-commutatif unitaire d'ordre  $p^4$  et  $a$  un élément de  $R \setminus Z(R)$ . Alors  $C(a)$  est un anneau commutatif.*

*Démonstration.* Or  $(Z(R), +)$  est un sous groupe de  $(R, +)$ , alors  $|Z(R)| \in \{1, p, p^2, p^3\}$ , or  $R$  est un anneau non-commutatif unitaire, alors  $|Z(R)| \in \{p, p^2\}$ .

- Si  $|Z(R)| = p$ , et puisque  $(C(a), +)$  est un sous groupe de  $(R, +)$  et  $a \in R \setminus Z(R)$ , alors  $|C(a)| \in \{p^2, p^3\}$ 
  - Si  $|C(a)| = p^2$ , alors d'après le lemme [3.8], on conclut que  $C(a)$  est un anneau commutatif.

- Si  $|C(a)| = p^3$ , et supposons par absurde que  $C(a)$  est non-commutatif, d'après le lemme [3.10], on aura  $|Z(C(a))| = p$ , or  $Z(R) \cup (a + Z(R)) \subseteq Z(C(a))$ . Ainsi  $2p \leq p$ , ceci est absurde. Par suite  $C(a)$  est un anneau commutatif.
- Si  $|Z(R)| = p^2$ , alors  $|C(a)| = p^3$  (car  $(C(a), +)$  est un sous groupe de  $(R, +)$  et  $Z(R) \subseteq C(a)$ ). Supposons par absurde que  $C(a)$  est un anneau non-commutatif, alors d'après le lemme [3.10], on aura  $|Z(C(a))| = p$ . Puisque  $Z(R) \subseteq Z(C(a))$ , alors  $p^2 \leq p$ , ce qui est absurde. Ainsi  $C(a)$  est un anneau commutatif.  $\square$

**Remarque 3.3.** Soient  $R$  un anneau non-commutatif et  $a, b \in R \setminus Z(R)$  tel  $C(a)$  et  $C(b)$  des anneaux commutatif. Alors  $ab = ba$  implique que  $C(a) = C(b)$ .

En effet, soit  $x \in C(a)$ , alors

$$xb = bx \quad (\text{car } b \in C(a) \text{ et } C(a) \text{ est un anneau commutatif})$$

ceci implique que  $x \in C(b)$ , c'est-à-dire  $C(a) \subseteq C(b)$ , et de même on montre que  $C(b) \subseteq C(a)$ , il en résulte que  $C(a) = C(b)$ .

**Remarque 3.4.** Soient  $R$  un anneau non-commutatif unitaire fini d'ordre  $p^4$ , où  $p$  est un nombre premier et  $a, b \in R \setminus Z(R)$  tels que  $ab \neq ba$ . Alors  $C(a) \cap C(b) = Z(R)$ .

En effet, On sait que  $Z(R) \subseteq C(a) \cap C(b)$ , il reste à démontrer l'autre inclusion, c'est-à-dire  $C(a) \cap C(b) \subseteq Z(R)$ . Supposons par absurde que

$$C(a) \cap C(b) \not\subseteq Z(R)$$

alors il existe un élément  $x$  de  $C(a) \cap C(b) \setminus Z(R)$ , ainsi d'après la remarque [3.3], on conclut que

$$C(x) = C(a) \quad \text{et} \quad C(x) = C(b)$$

par suite  $C(a) = C(b)$ , ceci implique que  $ab = ba$ , ce qui est absurde avec l'hypothèse. D'où  $C(a) \cap C(b) = Z(R)$ .

**Lemme 3.11.** Soient  $R$  un anneau non-commutatif unitaire fini d'ordre  $p^4$ , où  $p$  est un nombre premier et  $|Z(R)| = p$ . Alors il existe un élément  $a$  de  $R \setminus Z(R)$  tel que  $|C(a)| = p^2$ .

*Démonstration.* On sait que  $(C(a), +)$  est un sous groupe  $(R, +)$ , et or  $R$  est non-commutatif, alors  $|C(a)| \in \{p^2, p^3\}$  pour tout  $a \in R \setminus Z(R)$ . Supposons que pour tout  $a \in R \setminus Z(R)$  on a  $|C(a)| = p^3$ .

Soit  $a, b \in R \setminus Z(R)$  tels que  $ab \neq ba$ , alors pour tout  $x \in C(a)$  et  $y \in C(b)$ , on a  $xy \neq yx$ , en effet, supposons qu'ils existent deux éléments  $x \in C(a)$  et  $y \in C(b)$ , on a  $xy = yx$ , ainsi d'après la remarque [3.3], on aura

$$C(a) = C(x) \quad \text{et} \quad C(b) = C(y)$$

c'est-à-dire  $C(a) = C(b)$ , ceci est absurde puisque  $ab \neq ba$ . Or pour tout  $x \in C(a)$  et  $y \in C(b)$ , on a  $xy \neq yx$ , et d'après la remarque [3.4], on a  $C(a) \cap C(b) = Z(R)$ ,

on conclut que  $\Omega(R) = (V, E)$  est une réunion disjointe de  $k$  graphes complets de type  $K_{p^3-p}$ . Ainsi  $|V| = k(p^3 - p)$  et d'une autre part nous avons

$$|V| = |R \setminus Z(R)| = |R| - |Z(R)| = p^4 - p = (p^2 - p)(p^2 + p + 1)$$

alors que  $p^4 - p = k(p^3 - p)$  ce qui implique que  $p^2 + p + 1 = k(p + 1)$ , ceci est absurde car  $(p^2 + p + 1) \wedge (p + 1) = 1$ . Finalement, on conclut qu'il existe au moins un élément  $a$  de  $R \setminus Z(R)$  tel que  $|C(a)| = p^2$ .  $\square$

Parmi les résultat principaux ce cette section est le suivant :

**Théorème 3.5.** Soit  $R$  un anneau non-commutatif unitaire fini d'ordre  $p^4$ , où  $p$  est un nombre premier. Alors l'une des assertions suivantes est vérifiée :

- (i)  $\Omega(R) = (p^2 + p + 1)K_{p^2-p}$ ,
- (ii)  $\Omega(R) = k_1 K_{p^2-p} \cup k_2 K_{p^3-p}$ , avec  $k_1 + k_2(p + 1) = p^2 + p + 1$ ,
- (iii)  $\Omega(R) = (p + 1)K_{p^3-p^2}$ .

*Démonstration.* On sait que  $(Z(R), +)$  est un sous groupe de  $(R, +)$  et  $|Z(R)|$  divise  $|R \setminus Z(R)|$ , alors  $|Z(R)| \in \{p, p^2\}$ . Ainsi on peut distinguer deux cas possibles

1<sup>er</sup> cas : Si  $|Z(R)| = p$ , alors d'après le lemme [3.11] il existe un élément  $a$  de  $R \setminus Z(R)$  tel que  $|C(a)| = p^2$ .

Supposons que pour tout  $a \in R \setminus Z(R)$  on a  $|C(a)| = p^2$ . Soit  $a, b \in R \setminus Z(R)$  tels que  $ab \neq ba$ , alors d'après la remarque [3.4], on a

$$C(a) \cap C(b) = Z(R).$$

D'autre part soient  $x \in C(a)$  et  $y \in C(b)$  tels que  $xy = yx$ , et d'après la remarque [3.3], ceci implique que

$$C(a) = C(x) , \quad C(b) = C(y) \quad \text{et} \quad C(x) = C(y)$$

par suite  $C(a) = C(b)$ , ce qui est absurde car  $ab \neq ba$ , ceci implique que  $xy \neq yx$  pour tout  $x \in C(a)$  et  $y \in C(b)$ . Ainsi le graphe  $\Omega(R) = (V, E)$  est une réunion disjointe de  $k$  graphes complets d'ordre  $p^2 - p$ , et par suite  $|V| = k(p^2 - p) = p^4 - p$ , ceci implique que  $k = p^2 + p + 1$ , c'est-à-dire  $\Omega(R) = (p^2 + p + 1)K_{p^2-p}$ . D'où (i) est vérifiée.

Supposons qu'ils existent  $a, b \in R \setminus Z(R)$  tels que  $|C(a)| = p^2$  et  $|C(b)| = p^3$ . Il est facile de voir que pour tout  $x \in C(a)$  et  $y \in C(b)$ , on a  $xy \neq yx$ . Ainsi le graphe  $\Omega(R) = (V, E)$  est une réunion disjointe de  $k_1$  graphes complets d'ordre  $p^2 - p$  et de  $k_2$  graphes complets d'ordre  $p^3 - p$ . et par suite  $|V| = k_1(p^2 - p) + k_2(p^3 - p) = p^4 - p$ , ceci implique que  $k_1 + k_2(p + 1) = p^2 + p + 1$ ,  $\Omega(R) = k_1 K_{p^2-p} \cup k_2 K_{p^3-p}$ . D'où (ii) est vérifiée.

2<sup>ème</sup> cas : Si  $|Z(R)| = p^2$ , alors  $|C(a)| = p^3$  pour tout élément  $a$  de  $R \setminus Z(R)$  (car  $(C(a), +)$  est un sous groupe de  $(R, +)$ ). Soit  $a$  et  $b$  deux éléments de  $R \setminus Z(R)$  tels que  $ab \neq ba$ , alors d'après la remarque [3.4], on a

$$C(a) \cap C(b) = Z(R).$$

De plus pour tout éléments  $x$  de  $C(a)$  et  $y$  de  $C(b)$ , on a  $xy \neq yx$ . Ainsi le graphe  $\Omega(R) = (V, E)$  est une réunion disjointe de  $k$  graphes complets d'ordre  $p^3 - p^2$ . et par suite  $|V| = k(p^3 - p^2) = p^4 - p^2$ , ceci implique que  $k = p + 1$ , c'est-à-dire  $\Omega(R) = (p + 1)K_{p^3-p^2}$ . D'où (iii) est vérifiée.

Cela termine la preuve du théorème.  $\square$

A ce moment, on traite les graphes de commutation des anneaux d'ordres  $p^4$  où  $p$  un nombre premier. Dans ce qui reste dans cette partie, on va caractériser les graphes de commutation des anneaux mais cette fois des anneaux d'ordres  $p^5$  où  $p$  un nombre premier. On commence tout d'abord par le lemme suivant :

**Lemme 3.12.** *Soit  $R$  un anneau non-commutatif unitaire fini d'ordre  $p^5$ , où  $p$  est un nombre premier et tel que  $Z(R)$  n'est pas un corps. Alors les propriétés suivantes sont vérifiées*

- (i) *Pour tout  $a \in R \setminus Z(R)$ ,  $C(a)$  est un anneau commutatif.*
- (ii) *Pour tout  $a, b \in R \setminus Z(R)$  tel que  $ab = ba$ , alors  $C(a) = C(b)$ .*
- (iii) *Pour tout  $a, b \in R \setminus Z(R)$  tel que  $ab \neq ba$ , alors  $C(a) \cap C(b) = Z(R)$ .*

*Démonstration.* Puisque  $R$  est un anneau non-commutatif unitaire, et tel que  $Z(R)$  n'est pas un corps, alors  $|Z(R)| \in \{p^2, p^3\}$ . De plus  $(Z(R), +)$  est un sous groupe de  $(C(a), +)$  pour tout  $a \in R \setminus Z(R)$ , ainsi  $|C(a)| \in \{p^3, p^4\}$ .

- Si  $|C(a)| = p^3$ . Supposons par absurde que  $C(a)$  est un anneau non-commutatif, alors  $|Z(C(a))| = p$ , ce qui est absurde, puisque  $Z(R) \subseteq Z(C(a))$  et  $|Z(R)| \in \{p^2, p^3\}$ .
- Si  $|C(a)| = p^4$ . De même supposons par absurde que  $C(a)$  est un anneau non-commutatif, ainsi  $|Z(C(a))| \in \{p, p^2\}$ , car  $(Z(C(a)), +)$  est un sous groupe de  $(C(a), +)$ , et  $[C(a) : Z(C(a))]$  ne peut pas être un nombre premier. Ceci est absurde car  $a \in R \setminus Z(R)$ ,  $Z(R) \subseteq Z(C(a))$  et  $|Z(R)| \in \{p^2, p^3\}$ .

Il en résulte que  $C(a)$  est un anneau commutatif.

Pour les deux propriétés (ii) et (iii), la preuve est celle de la remarque [3.3], et de la remarque [3.4] respectivement.  $\square$

Finalement d'après ce qui précède, on a :

**Théorème 3.6.** *Soit  $R$  un anneau non-commutatif unitaire fini d'ordre  $p^5$ , où  $p$  est un nombre premier et tel que  $Z(R)$  n'est pas un corps. Alors l'une des assertions suivantes est vérifiée :*

- (i)  $\Omega(R) = (p^2 + p + 1)K_{p^3-p^2}$ ,
- (ii)  $\Omega(R) = k_1K_{p^3-p^2} \cup k_2K_{p^4-p^2}$ , avec  $k_1 + k_2(p + 1) = p^2 + p + 1$ ,
- (iii)  $\Omega(R) = (p + 1)K_{p^4-p^3}$ .

*Démonstration.* Puisque  $R$  est un anneau non-commutatif unitaire, et tel que  $Z(R)$  n'est pas un corps, alors  $|Z(R)| \in \{p^2, p^3\}$ . Ainsi on peut distinguer deux cas possibles

1<sup>er</sup> cas : Si  $|Z(R)| = p^2$ , alors pour tout élément  $a$  de  $R \setminus Z(R)$  on a  $|C(a)| \in \{p^3, p^4\}$ .

Supposons que pour tout  $a \in R \setminus Z(R)$  on a  $|C(a)| = p^4$ . Soit  $a, b \in R \setminus Z(R)$  tels que  $ab \neq ba$ , alors d'après la remarque [3.4], on a

$$C(a) \cap C(b) = Z(R).$$

D'autre part soient  $x \in C(a)$  et  $y \in C(b)$  tels que  $xy = yx$ , et d'après la remarque [3.3], ceci implique que

$$C(a) = C(x) \text{ , } C(b) = C(y) \text{ et } C(x) = C(y)$$

par suite  $C(a) = C(b)$ , ce qui est absurde car  $ab \neq ba$ , ceci implique que  $xy \neq yx$  pour tout  $x \in C(a)$  et  $y \in C(b)$ . Ainsi le graphe  $\Omega(R) = (V, E)$  est une réunion disjointe de  $k$  graphes complets d'ordre  $p^4 - p^2$ , et par suite  $|V| = k(p^4 - p^2) = p^5 - p$ , ceci implique que  $p^2 + p + 1 = k(p + 1)$ , ceci est absurde. Ainsi il existe  $b \in R \setminus Z(R)$  tel que  $|C(b)| = p^3$ .

— Si pour tout  $a \in R \setminus Z(R)$ , on a  $|C(a)| = p^3$ , alors  $\Omega(R) = kK_{p^3-p^2}$  avec  $k = p^2 + p + 1$ .

— Supposons qu'il existe  $b \in R \setminus Z(R)$  tel que  $|C(b)| = p^4$ . Posant  $k_1 = |\{a \in R \setminus Z(R) / |C(a)| = p^3\}|$  et  $k_2 = |\{b \in R \setminus Z(R) / |C(a)| = p^4\}|$ . Ainsi  $\Omega(R) = k_1K_{p^3-p^2} \cup k_2K_{p^4-p^2}$ , avec  $k_1 + k_2(p + 1) = p^2 + p + 1$ .

2<sup>ème</sup> cas : Si  $|Z(R)| = p^3$ , alors  $|C(a)| = p^4$  pour tout élément  $a$  de  $R \setminus Z(R)$  (car  $(C(a), +)$  est un sous groupe de  $(R, +)$ ). Soit  $a$  et  $b$  deux éléments de  $R \setminus Z(R)$  tels que  $ab \neq ba$ , alors d'après la remarque [3.4], on a

$$C(a) \cap C(b) = Z(R).$$

De plus pour tout éléments  $x$  de  $C(a)$  et  $y$  de  $C(b)$ , on a  $xy \neq yx$ . Ainsi le graphe  $\Omega(R) = (V, E)$  est une réunion disjointe de  $k$  graphes complets d'ordre  $p^4 - p^3$ . et par suite  $|V| = k(p^4 - p^3) = p^5 - p^3$ , ceci implique que  $k = p + 1$ , c'est-à-dire  $\Omega(R) = (p + 1)K_{p^4-p^3}$ . D'où (iii) est vérifiée.

Cela termine la preuve du théorème. □

### 3.4 Graphe de commutation d'ordre au plus vingt

Dans cette section, on va présenter l'objectif principal de **Ramezani** [38], et c'est démontrer que le graphe de commutation d'un anneau non-commutatif  $R$  dont  $|R \setminus Z(R)| \leq 20$  est l'un des graphes suivants :  $3K_2, 3K_4, 7K_2, K_2 \cup 2K_6$  ou bien  $4K_2 \cup K_6$ .

Commençons par quelques résultats intéressants :

**Lemme 3.13.** *Soit  $G$  un graphe simple d'ordre  $2p$ , où  $p$  un nombre premier supérieur strictement à trois. Alors le graphe  $G$  ne peut pas être un graphe de commutation d'un anneau non-commutatif unitaire.*

*Démonstration.* Supposons par absurde qu'il existe un anneau  $R$  non-commutatif unitaire tel que  $G = \Omega(R)$ , alors nécessairement  $|Z(R)| \in \{2, p, 2p\}$ , car  $|R \setminus Z(R)| = 2p$  et  $|Z(R)|$  divise  $|R \setminus Z(R)|$ . Ainsi on peut distinguer deux cas possibles

- Si  $|Z(R)| \in \{2, p\}$ , ainsi  $|R| \in \{2 + 2p, 3p\}$ , or  $p > 3$  et d'après le lemme [3.9], alors  $R$  est un anneau commutatif.
- Si  $|Z(R)| = 2p$ , alors  $[R : Z(R)] = 2$ , ceci est absurde car d'après le lemme [3.3], on a  $[R : Z(R)] \geq 4$ .

Il en résulte qu'il n'existe pas un anneau  $R$  non-commutatif unitaire tel que  $G = \Omega(R)$ . □

Ce résultat est reste valable pour les graphes d'ordres  $pq$ , où  $p$  et  $q$  deux nombres premiers distincts, tel que  $p < q$  et  $p$  ne divise par  $q + 1$ . Comme le montre le théorème suivant :

**Théorème 3.7.** *Soit  $G$  un graphe simple d'ordre  $pq$ , où  $p$  et  $q$  deux nombres premiers distincts, de plus on suppose que  $p < q$  et  $p$  ne divise par  $q + 1$ . Alors le graphe  $G$  ne peut pas être un graphe de commutation d'un anneau non-commutatif unitaire.*

*Démonstration.* Supposons par absurde qu'il existe un anneau  $R$  non-commutatif unitaire tel que  $G = \Omega(R)$ , alors nécessairement  $|Z(R)| \in \{p, q, pq\}$ , car  $|R \setminus Z(R)| = pq$  et  $|Z(R)|$  divise  $|R \setminus Z(R)|$ . Ainsi on peut distinguer trois cas possibles

- Si  $|Z(R)| = p$ , ainsi  $|R| = p(q+1)$ , or  $p$  ne divise pas  $q+1$  par suite d'après le lemme [3.9] on aura  $R$  est un anneau commutatif.
- Si  $|Z(R)| = q$ , ainsi  $|R| = q(p+1)$ , or  $p < q$ , par suite d'après le lemme [3.9] on aura  $R$  est un anneau commutatif.
- Si  $|Z(R)| = pq$ , alors  $[R : Z(R)] = 2$ , ceci est absurde car d'après le lemme [3.3], on a  $[R : Z(R)] \geq 4$ .

Il en résulte qu'il n'existe pas un anneau  $R$  non-commutatif unitaire tel que  $G = \Omega(R)$ . □

**Lemme 3.14.** *Soit  $G$  un graphe simple d'ordre  $p^n$ , où  $p$  un nombre premier et  $n \in \{1, 2, 3\}$ . Alors le graphe  $G$  ne peut pas être un graphe de commutation d'un anneau non-commutatif unitaire.*

*Démonstration.* Supposons par absurde qu'il existe un anneau  $R$  non-commutatif unitaire tel que  $G = \Omega(R)$ , avec  $|R \setminus Z(R)| = p^n$  où  $p$  un nombre premier et  $n \in \{1, 2, 3\}$ . Ainsi on peut distinguer trois cas possibles

- Si  $|R \setminus Z(R)| = p$ , ainsi  $|Z(R)| = p$ , car  $|Z(R)| > 2$ , alors  $[R : Z(R)] = 2$ , ceci est absurde car d'après le lemme [3.3], on a  $[R : Z(R)] \geq 4$ .
- Si  $|R \setminus Z(R)| = p^2$ , ainsi  $|Z(R)| \in \{p, p^2\}$ 
  - Si  $|Z(R)| = p^2$ , alors  $[R : Z(R)] = 2$ , ceci est absurde car d'après le lemme [3.3].
  - Si  $|Z(R)| = p$ , alors  $|R| = p(p+1)$ , par suite d'après le lemme [3.9] on aura  $R$  est un anneau commutatif.
- Si  $|R \setminus Z(R)| = p^3$ , alors  $|Z(R)| \in \{p, p^2, p^3\}$ 
  - Si  $|Z(R)| = p^3$ , alors  $[R : Z(R)] = 2$ , ceci est absurde car d'après le lemme [3.3], on a  $[R : Z(R)] \geq 4$ .
  - Si  $|Z(R)| \in \{p, p^2\}$ , alors  $|R| \in \{p(p^2+1), p^2(p+1)\}$ , or  $p^2$  ne divise pas  $p^2+1$  et  $p$  ne divise pas  $p+1$ , alors d'après le lemme [3.9],  $R$  est un anneau commutatif.

On déduit qu'il n'existe pas un anneau  $R$  non-commutatif unitaire tel que  $G = \Omega(R)$ . □

Finalement, voici le résultat final qu'il a démontré **Ramezani** [38] :

**Théorème 3.8.** *Soit  $R$  un anneau non-commutatif unitaire, avec  $|R \setminus Z(R)| \leq 20$ , alors*

$$\Omega(R) \in \{3K_2, 3K_4, 7K_2, K_2 \cup 2K_6, 4K_4 \cup K_6\}$$

*Démonstration.* Soit  $\Omega(R)$  le graphe de commutation d'un anneau  $R$  non-commutatif unitaire dont  $|R \setminus Z(R)| \leq 20$ , alors d'après ce qui précèdent on a

$$|R \setminus Z(R)| \in \{6, 12, 14, 16, 18, 20\}$$

- Si  $|R \setminus Z(R)| = n$ , avec  $n$  un nombre pair. Alors nécessairement  $|Z(R)| \neq \frac{n}{2}$ , en effet, supposons le contraire, alors  $|R| = \frac{3n}{2}$ , ainsi  $[R : Z(R)] = 3$ , ceci est absurde car  $[R : Z(R)] \geq 4$ .

- Si  $|R \setminus Z(R)| = 16$ , ainsi  $|Z(R)| \in \{2, 4\}$ , par suite  $|R| \in \{18, 20\}$ , il en résulte d'après le lemme [3.9] que  $R$  est un anneau commutatif, ce qui est absurde.
- Si  $|R \setminus Z(R)| = 18$ , ainsi  $|Z(R)| \in \{2, 3, 6\}$ , par suite  $|R| \in \{20, 21, 24\}$ , il en résulte d'après le lemme [3.9] que  $R$  est un anneau commutatif, ce qui est absurde.
- Si  $|R \setminus Z(R)| = 20$ , ainsi  $|Z(R)| \in \{2, 4, 5\}$ , par suite  $|R| \in \{22, 24, 25\}$ , il en résulte d'après le lemme [3.9] que  $R$  est un anneau commutatif, ce qui est absurde.

Ainsi, On conclut que  $|R \setminus Z(R)| \in \{6, 12, 14\}$ , alors

- Si  $|R \setminus Z(R)| = 6$ , ainsi d'après [3.3] et  $|Z(R)| = 2$ , par suite  $|R| = 8$ , il en résulte d'après la preuve du lemme [3.5] que  $\Omega(R) = 3K_2$ .



FIGURE 3.4 – Le graphe  $3K_2$ .

- Si  $|R \setminus Z(R)| = 12$ , ainsi  $|Z(R)| = 4$ , par suite  $|R| = 16$ , il en résulte d'après le théorème [3.5] que  $\Omega(R) = 3K_4$ .

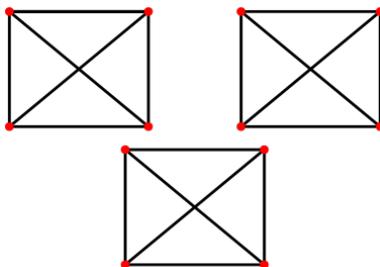


FIGURE 3.5 – Le graphe  $3K_4$ .

- Si  $|R \setminus Z(R)| = 14$ , ainsi  $|Z(R)| = 2$ , par suite  $|R| = 16$ , il en résulte d'après le théorème [3.5] que  $\Omega(R) \in \{7K_2, K_2 \cup 2K_2, 4K_2 \cup K_6\}$ .

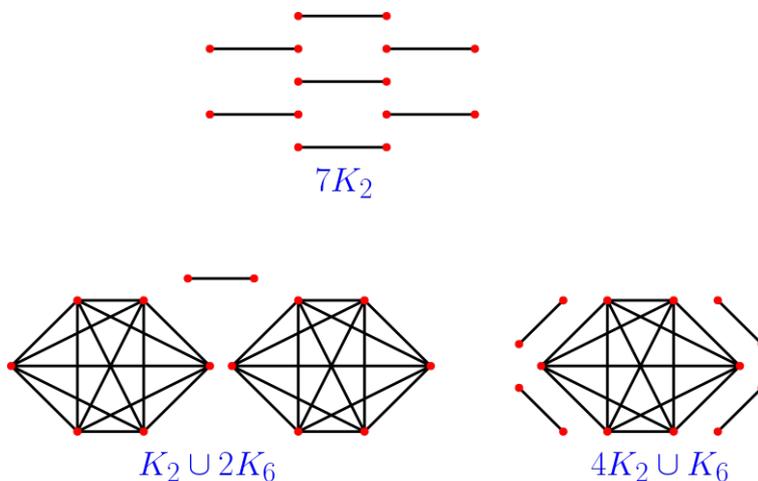


FIGURE 3.6 – Les graphes  $\{7K_2, K_2 \cup 2K_6, 4K_2 \cup K_6\}$ .

Ainsi, on conclut que

$$\Omega(R) \in \{3K_2, 3K_4, 7K_2, K_2 \cup 2K_6, 4K_4 \cup K_6\}.$$

□

## 3.5 Graphe de commutation des anneaux d'ordres $p^n q$

Dans cette section, on traite les graphes de commutation des anneaux non-commutatifs finis d'ordres  $pq$  et  $p^2q$  où  $p$  et  $q$  deux nombres premiers distincts et de centre réduit à zéro, et les graphes de commutation des anneaux non-commutatifs unitaires finis d'ordres  $p^3q$ .

### 3.5.1 Les anneaux d'ordres $pq$ et $p^2q$

Commençons par les deux lemmes suivants :

**Lemme 3.15.** *Soit  $R$  un anneau fini d'ordre  $p^2$  ou  $pq$  et  $Z(R) \neq \{0\}$ . Alors  $R$  est un anneau commutatif.*

*Démonstration.* Supposons par absurde que  $R$  est un anneau non-commutatif et  $Z(R) \neq \{0\}$ . Alors

- Si  $|R| = p^2$ , ainsi  $|Z(R)| = p$ , par suite

$$\forall a \in R \setminus Z(R) \text{ on a } |C(a)| = p^2$$

ceci implique que  $a \in Z(R)$  ce qui absurde (car  $a \notin Z(R)$ ).

- Si  $|R| = pq$ , ainsi  $|Z(R)| \in \{p, q\}$ , c'est-à-dire  $[R : Z(R)] \in \{q, p\}$ , ceci est absurde (car  $[R : Z(R)]$  n'est pas premier).

Il en résulte que  $R$  est un anneau commutatif. □

**Lemme 3.16.** *Soit  $R$  un anneau non-commutatif d'ordre  $p^n q$  avec  $n \in \{1, 2\}$  et  $Z(R) = \{0\}$ . Alors pour tout  $a \in R \setminus Z(R)$ , on a  $C(a)$  est un anneau commutatif.*

*Démonstration.* Soit  $a \in R \setminus Z(R)$ . Alors

- Si  $|R| = pq$ . Alors  $|C(a)| \in \{p, q, pq\}$ 
  - Si  $|C(a)| = pq$ , ceci implique que  $R$  est un anneau commutatif, ainsi  $|C(a)| \neq pq$ .
  - Si  $|C(a)| \in \{p, q\}$ , alors d'après le lemme [3.9],  $C(a)$  est un anneau commutatif.
- Si  $|R| = p^2q$ . Alors  $|C(a)| \in \{p, q, p^2, pq\}$ 
  - Si  $|C(a)| \in \{p, q\}$ , alors d'après le lemme [3.9],  $C(a)$  est un anneau commutatif.
  - Si  $|C(a)| \in \{p^2, pq\}$ , or  $a \in Z(C(a))$  alors  $Z(C(a)) \neq \{0\}$ , ainsi d'après le lemme [3.15],  $C(a)$  est un anneau commutatif.

On conclut que pour tout  $a \in R \setminus Z(R)$ , on a  $C(a)$  est un anneau commutatif. □

**Théorème 3.9.** *Soit  $R$  un anneau non-commutatif, d'ordre  $p^n q$  avec  $n \in \{1, 2\}$  et  $Z(R) = \{0\}$ . Alors pour tout  $a, b \in R^*$ , on a*

$$ab \neq ba \implies C(a) \cap C(b) = \{0\}.$$

*Démonstration.* Soit  $a, b \in R^*$  tel que  $ab \neq ba$ . Supposons le contraire, c'est-à-dire  $C(a) \cap C(b) \neq \{0\}$ . Soit  $x \in C(a) \cap C(b)$ , alors  $xa = ax$  et  $xb = bx$ . Ainsi d'après la remarque [3.3] et le lemme [3.5.1], on aura

$$C(x) = C(a) \quad \text{et} \quad C(x) = C(b)$$

ceci implique que  $ab = ba$ , ce qui est absurde. Ainsi  $C(a) \cap C(b) = \{0\}$ .  $\square$

**Théorème 3.10.** Soit  $R$  un anneau non-commutatif d'ordre  $pq$  et  $Z(R) = \{0\}$ . Alors l'une des assertions suivantes est vérifiée :

- (i)  $\Omega(R) = \frac{pq-1}{p-1}K_{p-1}$ , si  $p-1$  divise  $pq-1$ .
- (ii)  $\Omega(R) = \frac{pq-1}{q-1}K_{q-1}$ , si  $q-1$  divise  $pq-1$ .
- (iii)  $\Omega(R) = l_1K_{p-1} \cup l_2K_{q-1}$ , avec  $l_1(p-1) + l_2(q-1) = pq-1$ .

*Démonstration.* Soit  $a, b \in R^*$  tel que  $ab \neq ba$ , ainsi d'après le théorème [3.9], on a  $C(a) \cap C(b) = \{0\}$ . De plus pour tout  $x \in C(a)$  et  $y \in C(b)$ , on a  $xy \neq yx$ , car sinon s'il existe  $x \in C(a)$  et  $y \in C(b)$ , ceci implique que

$$C(x) = C(y) = C(a) = C(b)$$

ce qui est absurde.

Alors  $\Omega(R) = (V, E)$  est la réunion disjointe des graphes complets. Puisque  $R$  non-commutatif, alors pour tout  $a \in R^*$ , on a  $|C(a)| \in \{p, q\}$ . On peut distinguer les cas suivants :

- Si pour tout  $a \in R^*$ , on a  $|C(a)| = p$ , alors

$$|V| = l(p-1) = pq-1$$

ceci implique que  $\Omega(R) = \frac{pq-1}{p-1}K_{p-1}$ , si  $p-1$  divise  $pq-1$ .

- Si pour tout  $a \in R^*$ , on a  $|C(a)| = q$ , alors

$$|V| = l(q-1) = pq-1$$

ceci implique que  $\Omega(R) = \frac{pq-1}{q-1}K_{q-1}$ , si  $q-1$  divise  $pq-1$ .

- S'il existe  $a, b \in R^*$  tel que  $|C(a)| = p$  et  $|C(b)| = q$ , on pose

$$l_1 = |\{a \in R^* : |C(a)| = p\}| \quad \text{et} \quad l_2 = |\{b \in R^* : |C(b)| = q\}|.$$

Ainsi  $\Omega(R)$  est la réunion disjointe de  $l_1$  graphes complets d'ordres  $(p-1)$  et  $l_2$  graphes complets d'ordres  $(q-1)$ . D'autre part

$$|V| = l_1(p-1) + l_2(q-1) = pq-1.$$

Cela termine la preuve du théorème.  $\square$

**Théorème 3.11.** Soit  $R$  un anneau non-commutatif d'ordre  $p^2q$  et  $Z(R) = \{0\}$ . Alors l'une des assertions suivantes est vérifiée :

- (i)  $\Omega(R) = \frac{p^2q-1}{t-1}K_{p-1}$ , tel que  $t \in \{p, q, p^2, pq\}$  et  $t$  divise  $p^2q-1$ .
- (ii)  $\Omega(R) = l_1K_{p-1} \cup l_2K_{q-1} \cup l_3K_{p^2-1} \cup l_4K_{pq-1}$ , où  $l_1(p-1) + l_2(q-1) + l_3(p^2-1) + l_4(pq-1) = p^2q-1$ .

*Démonstration.* De même que du théorème [3.10], on montre facilement que  $\Omega(R) = (V, E)$  est la réunion disjointe des graphes complets. Puisque  $R$  non-commutatif, alors pour tout  $a \in R^*$ , on a  $|C(a)| \in \{p, q, p^2, pq\}$ . On peut distinguer les cas suivants :

- Si pour tout  $a \in R^*$ , on a  $|C(a)| = t$  tel que  $t \in \{p, q, p^2, pq\}$ , alors

$$|V| = l(t - 1) = p^2q - 1$$

ceci implique que  $\Omega(R) = \frac{p^2q-1}{t-1}K_{p-1}$ , si  $t - 1$  divise  $p^2q - 1$ .

- Si pour tout  $a \in R^*$ , on a  $|C(a)| = q$ , alors

$$|V| = l(q - 1) = pq - 1$$

ceci implique que  $\Omega(R) = \frac{pq-1}{q-1}K_{p-1}$ , si  $q - 1$  divise  $pq - 1$ .

- Supposons le contraire, et on pose

$$l_1 = |\{r \in R^* : |C(r)| = p\}| \quad \text{et} \quad l_2 = |\{r \in R^* : |C(r)| = q\}|.$$

$$l_3 = |\{r \in R^* : |C(r)| = p^2\}| \quad \text{et} \quad l_4 = |\{r \in R^* : |C(r)| = pq\}|.$$

Ainsi  $\Omega(R) = l_1K_{p-1} \cup l_2K_{q-1} \cup l_3K_{p^2-1} \cup l_4K_{pq-1}$ . D'autre part

$$|V| = l_1(p - 1) + l_2(q - 1) + l_3(p^2 - 1) + l_4(pq - 1) = p^2q - 1.$$

Cela termine la preuve du théorème. □

### 3.5.2 Les anneaux d'ordres $p^3q$

Commençons cette partie par le résultat suivant, qui va nous servir par la suite :

**Théorème 3.12.** *Soit  $R$  un anneau non-commutatif unitaire d'ordre  $p^3q$  et soit  $a \in R \setminus Z(R)$ . Alors  $C(a)$  est un anneau commutatif.*

*Démonstration.* Puisque  $R$  est un anneau non-commutatif unitaire et  $[R : Z(R)]$  n'est pas premier. Alors nécessairement  $|Z(R)| \in \{p, p^2, q, pq\}$

- Si  $|Z(R)| = p$ , or  $(Z(R), +)$  est un sous groupe de  $(C(a), +)$  et  $a \notin Z(R)$ , ainsi  $|C(a)| \in \{p^2, p^3, pq, p^2q\}$ . Alors
  - Si  $|C(a)| \in \{p^2, pq, p^2q\}$ , alors d'après le lemme [3.9], on a  $C(a)$  est commutatif.
  - Si  $|C(a)| = p^3$ , et supposons que  $C(a)$  est non-commutatif. Alors d'après le lemme [3.10], on a  $|Z(C(a))| = p$ . D'autre part on a

$$Z(R) \cup (a + Z(R)) \subseteq Z(C(a))$$

c'est-à-dire  $2p \leq p$ , ceci est absurde. Il en résulte que  $C(a)$  est un anneau commutatif.

- Si  $|Z(R)| = p^2$ , or  $|Z(R)|$  divise  $|C(a)|$ , ainsi  $|C(a)| \in \{p^3, p^2q\}$ . Alors
  - Si  $|C(a)| = p^2$ , alors d'après le lemme [3.9], on a  $C(a)$  est commutatif.

- Si  $|C(a)| = p^3$ , et supposons que  $C(a)$  est non-commutatif. Alors d'après le lemme [3.10], on a  $|Z(C(a))| = p$ . D'autre part on a

$$Z(R) \cup (a + Z(R)) \subseteq Z(C(a))$$

c'est-à-dire  $2p^2 \leq p$ , ceci est absurde. Il en résulte que  $C(a)$  est un anneau commutatif.

- Si  $|Z(R)| = q$ . Alors  $|C(a)| \in \{pq, p^2q\}$ , d'où  $C(a)$  est un anneau commutatif.
- Si  $|Z(R)| = pq$ . Alors  $|C(a)| = p^2q$ , ainsi  $C(a)$  est un anneau commutatif.

Cela termine la preuve du théorème.  $\square$

**Théorème 3.13.** Soit  $R$  un anneau non-commutatif unitaire d'ordre  $p^3q$  et  $|Z(R)|$  n'est pas premier. Alors pour tout  $a, b \in R \setminus Z(R)$ , on a

$$ab \neq ba \implies C(a) \cap C(b) = Z(R).$$

*Démonstration.* Puisque  $|Z(R)|$  et  $[R : Z(R)]$  ne sont pas premiers, alors  $|Z(R)| \in \{p^2, pq\}$

- Si  $|Z(R)| = p^2$ , alors pour tout  $x \in R \setminus Z(R)$ , on a  $|C(x)| \in \{p^3, p^2q\}$  (car  $|Z(R)|$  divise  $|C(x)|$ ).
  - Si  $|C(a)| = |C(b)| = p^3$ , alors  $|C(a) \cap C(b)| \in \{p^2, p^3\}$  (car  $|C(a) \cap C(b)|$  divise  $|C(a)|$  et  $Z(R) \subseteq C(a) \cap C(b)$ ). Or  $ab \neq ba$ , ainsi

$$|C(a) \cap C(b)| \neq p^3$$

alors  $C(a) \cap C(b) = Z(R)$ .

- Si  $|C(a)| = |C(b)| = p^2q$ , alors  $|C(a) \cap C(b)| \in \{p^2, p^2q\}$  (car si  $C(a) \cap C(b) = C(b)$  alors  $C(b) \subseteq C(a)$ ). Or  $ab \neq ba$ , ainsi  $|C(a) \cap C(b)| \neq p^2q$ , alors  $C(a) \cap C(b) = Z(R)$ .
- Si  $|C(a)| = p^3$  et  $|C(b)| = p^2q$ , alors  $|C(a) \cap C(b)| = p^2$ , alors

$$C(a) \cap C(b) = Z(R).$$

- Si  $|Z(R)| = pq$ , alors pour tout  $x \in R \setminus Z(R)$ , on a  $|C(x)| = p^2q$ . Or on a

$$\begin{cases} |Z(R)| \text{ divise } |C(a) \cap C(b)| \\ |C(a) \cap C(b)| \text{ divise } p^2q \end{cases}$$

alors  $|C(a) \cap C(b)| \in \{pq, p^2q\}$ , et puisque  $ab \neq ba$ , ceci implique que  $|C(a) \cap C(b)| \neq p^2q$ , ainsi  $C(a) \cap C(b) = Z(R)$ .  $\square$

**Théorème 3.14.** Soit  $R$  un anneau non-commutatif unitaire d'ordre  $p^3q$  et  $|Z(R)|$  n'est pas premier. Alors l'une des assertions suivantes est vérifiée :

- $\Omega(R) = \frac{pq-1}{p-1} K_{p^3-p^2}$ , si  $p-1$  divise  $pq-1$ .
- $\Omega(R) = \frac{pq-1}{q-1} K_{p^3-p^2}$ , si  $q-1$  divise  $pq-1$ .
- $\Omega(R) = l_1 K_{p^3-p^2} \cup l_2 K_{p^2q-p^2}$ , où  $l_1(p-1) + l_2(q-1) = pq-1$ .
- $\Omega(R) = (p+1) K_{p^2q-pq}$ .

*Démonstration.* Puisque  $Z(R)$  n'est pas premier, alors  $|Z(R)| \in \{p^2, pq\}$ .

- Si  $|Z(R)| = p^2$ , alors pour tout  $a \in R \setminus Z(R)$ , on a  $|C(a)| \in \{p^3, p^2q\}$ .
  - Si  $|C(a)| = p^3$  pour tout  $a \in R \setminus Z(R)$ .  
Soit  $a, b \in R \setminus Z(R)$  tel que  $ab \neq ba$ , alors d'après le théorème [3.13], on a

$$C(a) \cap C(b) = Z(R)$$

et pour tout  $x \in C(a)$  et  $y \in C(b)$  on a  $xy \neq yx$ , car sinon on aura  $C(a) = C(b)$  ce qui est absurde.

Alors  $\Omega(R) = (V, E)$  est la réunion disjointe de  $l$  graphes complets d'ordres  $(p^3 - p^2)$ , ainsi

$$|V| = l(p^3 - p^2) = |R| - |Z(R)| = p_3q - p^2$$

Ainsi  $\Omega(R) = \frac{pq-1}{p-1} K_{p^3-p^2}$ , si  $(p-1)$  divise  $(pq-1)$ .

- Si  $|C(a)| = p^2q$  pour tout  $a \in R \setminus Z(R)$ .  
De même on montre facilement que  $\Omega(R) = (V, E)$  est la réunion disjointe de  $l$  graphes complets d'ordres  $(p^2q - p^2)$ , avec  $l = \frac{pq-1}{q-1}$ . Ainsi  $\Omega(R) = \frac{pq-1}{q-1} K_{p^2q-p^2}$ , si  $(q-1)$  divise  $(pq-1)$ .
- Soit  $a, b \in R \setminus Z(R)$  tel que  $|C(a)| = p^3$  et  $|C(b)| = p^2q$ . Alors, il est facile de démontrer que  $\Omega(R) = (V, E)$  est la réunion disjointe de  $l_1$  graphes complets d'ordres  $(p^3 - p^2)$ , et  $l_2$  graphes complets d'ordres  $(p^2q - p^2)$ . D'autre part on a

$$|V| = l_1(p^3 - p^2) + l_2(p^2q - p^2) = p^3q - p^2.$$

Il en résulte que

$$\Omega(R) = l_1 K_{p^3-p^2} \cup l_2 K_{p^2q-p^2}$$

avec  $l_1(p-1) + l_2(q-1) = pq-1$ .

- Si  $|Z(R)| = pq$ , alors pour tout  $a \in R \setminus Z(R)$ , on a  $|C(a)| = p^2q$ . On montre facilement que  $\Omega(R) = (V, E)$  est la réunion disjointe de  $l$  graphes complets d'ordres  $(p^2q - pq)$ , et d'autre part on a

$$|V| = l(p^2q - pq) = |R| - |Z(R)| = p^3q - pq$$

c'est-à-dire que  $l = p+1$ . Ainsi

$$\Omega(R) = (p+1) K_{p^2q-pq}.$$

Cela termine la preuve du théorème. □

### 3.6 Le graphe complémentaire $\overline{\Omega(R)}$ et les graphes planaires

Rappelons que dans la théorie des graphes, un graphe planaire est un graphe qui a la particularité de pouvoir se représenter sur un plan sans qu'aucune arête, n'en croise une autre. **Kuratowski** a caractérisé les graphes planaires finis, il a démontré qu'un graphe est planaire si et seulement s'il ne contient pas de sous-graphe partiel qui est une expansion de  $K_5$  ou  $K_{3,3}$  (le graphe complet biparti à

3+3 sommets). Dans cette section, on présente un résultat de **Omidi** [33], dont il a prouvé que le graphe complémentaire du graphe de commutation d'un anneau fini  $R$ , sachant que  $|R| > 16$  ne peut pas être planaire, pour la preuve de ce résultat, on commence par le lemme suivant :

**Lemme 3.17.** Soit  $R$  un anneau, tel que  $|R| > 16$  et  $\overline{\Omega(R)}$  non planaire. Alors pour tout  $a, b \in R \setminus Z(R)$  tel que  $ab \neq ba$ , on a

$$C(a) \cap C(b) = \{0\}.$$

*Démonstration.* Soit  $a, b \in R \setminus Z(R)$ , alors

$$C(a) \cap C(b) = C(a) \cap C(b) \cap C(a+b)$$

en effet, on sait que  $C(a) \cap C(b) \cap C(a+b) \subseteq C(a) \cap C(b)$ , et on pour tout  $x \in C(a) \cap C(b)$

$$xa = ax \text{ et } xb = bx \implies x(a+b) = (a+b)x$$

ceci implique que  $C(a) \cap C(b) \subseteq C(a) \cap C(b) \cap C(a+b)$ . D'où le résultat. De plus on a

$$C(a) \cap C(b) \cap C(a+b) = C(b) \cap C(a+b)$$

en effet, on sait que  $C(a) \cap C(b) \cap C(a+b) \subseteq C(a) \cap C(a+b)$ , et on pour tout  $x \in C(a) \cap C(a+b)$

$$xb = bx \text{ et } x(a+b) = (a+b)x \implies xa = ax$$

ceci implique que  $C(a) \cap C(a+b) \subseteq C(a) \cap C(b) \cap C(a+b)$ . D'où

$$C(a) \cap C(b) = C(a) \cap C(b) \cap C(a+b) = C(b) \cap C(a+b).$$

Supposons par absurde qu'il existe  $a, b \in R \setminus Z(R)$  tel que  $ab \neq ba$  et  $C(a) \cap C(b) \neq \{0\}$ . Posant ainsi  $H_1 = C(a) \cap C(b)$  et soit  $x \in H_1^*$ . Alors on peut distinguer les deux cas suivants.

1<sup>er</sup> Cas : Supposons que  $R = C(a) \cup C(b) \cup C(a+b)$ . Sans perdre de la généralité, on peut supposer que

$$|C(a)| \geq \text{Max}\{|C(b)|, |C(a+b)|\}.$$

Et posons

$$H_2 = C(a) \cap C(a+b)$$

il facile à démontrer que  $x \in H_2$ , ainsi  $|H_1 \cap H_2| \geq 2$ . Or  $H_1$  et  $H_2$  sont deux sous-groupes propres de  $(C(a), +)$ , alors  $|H_i| \leq \frac{|C(a)|}{2}$  pour tout  $i \in \{1, 2\}$  ceci implique que  $|H_1| + |H_2| \leq |C(a)|$ .

— Si  $|H_1 \cup H_2| \geq |C(a)| - 2$ . Alors

$$|C(a)| \geq |H_1| + |H_2| \geq |C(a)| + |H_1 \cap H_2| - 2$$

Il en résulte que  $|H_1 \cap H_2| = 2$  et alors  $|H_1| = |H_2| = \frac{|C(a)|}{2}$ . De plus  $H_1 H_2$  est un sous-groupe de  $(C(a), +)$ , alors

$$|H_1 H_2| = \frac{|H_1| |H_2|}{|H_1 \cap H_2|} = \frac{|C(a)|^2}{8} \leq |C(a)|.$$

Ainsi  $|C(a)| \leq 8$ . Il en résulte que  $|R| \leq 16$  ceci est absurde car  $|R| > 16$ .

— Si  $|H_1 \cup H_2| \leq |C(a)| - 3$ . Or

$$H_1 \cup H_1 \cup \{a, a+x\} \subseteq C(a), \quad a \notin H_1 \cup H_1 \quad \text{et} \quad (a+x) \notin H_1 \cup H_1.$$

Alors il existe  $y \in C(a)$  tel que  $y \notin H_1 \cup H_1 \cup \{a, a+x\}$ . Ainsi le graphe engendré par l'ensemble de sommets  $\{a, a+x, y, b, b+x, a+b\}$  isomorphe à  $K_{3,3}$

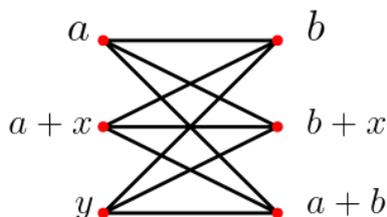


FIGURE 3.7 – Le graphe engendré par  $\{a, a+x, y, b, b+x, a+b\}$ .

Il en résulte d'après la caractérisation de Kuratowski des graphes planaires que  $\overline{\Omega(R)}$  est un graphe non planaire, ceci est absurde avec l'hypothèse du lemme.

2<sup>ème</sup> Cas : Supposons que  $R \neq C(a) \cup C(b) \cup C(a+b)$ . Soit  $c \in R \setminus Z(R)$  tel  $c \notin C(a) \cup C(b) \cup C(a+b)$ . Or le graphe  $\overline{\Omega(R)}$  est planaire, alors d'après la caractérisation de Kuratowski le graphe  $\overline{\Omega(R)}$  ne contient aucun sous-graphe isomorphe à  $K_5$

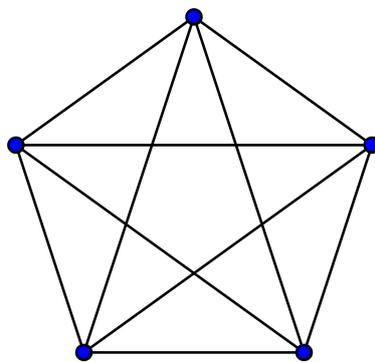


FIGURE 3.8 – Le graphe  $K_5$ .

Alors nécessairement  $\omega(\overline{\Omega(R)}) \leq 4$ . Ainsi  $R = C(a) \cup C(b) \cup C(a+b) \cup C(c)$ . Et posons  $H_3 = C(a) \cap C(c)$ . D'autre part on a  $|H_1 \cap H_3| = 1$ , car :

**Si**  $|H_1 \cap H_3| \geq 2$ , alors il existe un élément  $z \in (H_1 \cap H_3)^*$ , alors le graphe engendré par  $\{a, a+z, c, b, b+z, a+b\}$  contient le sous-graphe suivant

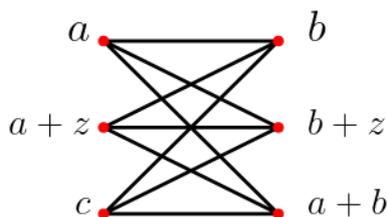


FIGURE 3.9 – Sous-graphe du graphe engendré par  $\{a, a+z, c, b, b+z, a+b\}$ .

Ainsi d'après la caractérisation de Kuratowski le graphe  $\overline{\Omega(R)}$  n'est pas planaire, ceci est absurde. Ainsi  $|H_1 \cap H_3| = 1$ . D'autre part on peut distinguer deux cas

- Si  $|H_1 \cup H_2| \geq |C(a)| - 2$ . Alors

$$|C(a)| \geq |H_1| + |H_2| \geq |C(a)| + |H_1 \cap H_2| - 2 = |C(a)| - 1.$$

Alors  $|H_1| + |H_2| \in \{|C(a)| - 1, |C(a)|\}$ .

— Si  $|H_1| + |H_2| = |C(a)| - 1$ . Alors

$$(|H_1|, |H_3|) \in \left\{ \left( \frac{|C(a)|}{2}, \frac{|C(a)|}{2} - 1 \right), \left( \frac{|C(a)|}{2} - 1, \frac{|C(a)|}{2} \right), \left( \frac{|C(a)| - 1}{2}, \frac{|C(a)| - 1}{2} \right) \right\}.$$

\* Si  $(|H_1|, |H_3|) = \left( \frac{|C(a)| - 1}{2}, \frac{|C(a)| - 1}{2} \right)$ . Or  $H_i$  divise  $|C(a)|$  pour tout  $i \in \{1, 2\}$ , alors  $|C(a)| = 3$  et par suite  $|H_1| = 1$ , ceci est absurde car  $|H_1| \geq 2$ .

\*\* Si  $(|H_1|, |H_3|) \in \left( \frac{|C(a)|}{2}, \frac{|C(a)|}{2} - 1 \right), \left( \frac{|C(a)|}{2} - 1, \frac{|C(a)|}{2} \right)$ . Or  $|H_1 H_2| \leq |C(a)|$ , alors  $|C(a)| \leq 6$  car  $|H_1 H_2| |H_1 \cap H_2| = |H_1| |H_2|$  et  $|H_1 \cap H_2| = 1$ .

— Si  $|H_1| + |H_2| = |C(a)|$ . Alors

$$|H_1| = |H_2| = \frac{|C(a)|}{2}.$$

Or  $|H_1 H_2| \leq |C(a)|$ , alors  $|C(a)| \leq 4$ . D'autre part, puisque  $|R| > 16$ , alors ils existent deux éléments  $t, w \in C(c) \setminus Z(R)$  tel que  $t, w \notin C(a) \cup C(b) \cup C(a+b)$ , alors le graphe engendré par  $\{t, w, c, a, b, a+b\}$  contient le sous-graphe suivant

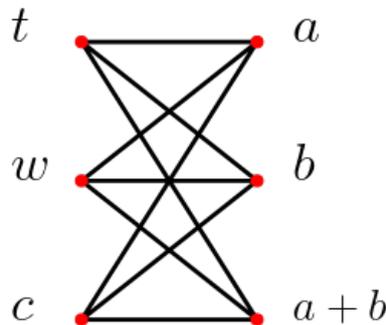


FIGURE 3.10 – Sous-graphe du graphe engendré par  $\{t, w, c, a, b, a+b\}$ .

Ainsi d'après la caractérisation de Kuratowski le graphe  $\overline{\Omega(R)}$  n'est pas planaire, ceci est absurde.

- Si  $|H_1 \cup H_2| \leq |C(a)| - 3$ . Alors ils existent deux éléments  $y_1, y_2 \in C(a)$ , tels que  $y_1, y_2 \notin H_1 \cup H_2 \cup \{a\}$ , alors le graphe engendré par  $\{a, y_1, y_2, b, a+b, c\}$  contient le sous-graphe suivant

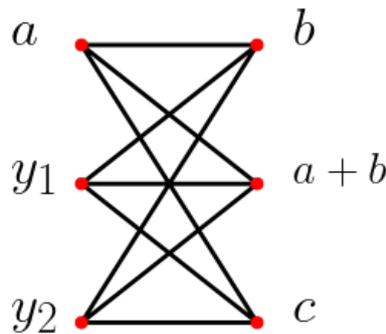


FIGURE 3.11 – Sous-graphe du graphe engendré par  $\{a, y_1, y_2, b, a + b, c\}$ .

Ainsi d’après la caractérisation de Kuratowski le graphe  $\overline{\Omega(R)}$  n’est pas planaire, ceci est absurde.

Cela termine la preuve du lemme.  $\square$

**Théorème 3.15.** Soit  $R$  un anneau tel que  $|R| > 16$ . Alors le graphe  $\overline{\Gamma(R)}$  est non planaire.

*Démonstration.* Supposons par absurde que  $\overline{\Gamma(R)}$  est planaire. Alors d’après le lemme précédent et la caractérisation de Kuratowski, alors pour tout  $x, y \in R \setminus Z(R)$  tel que  $xy \neq yx$ , on a

$$C(a) \cap C(b) = \{0\} \quad \text{et} \quad \omega(\overline{\Gamma(R)}) \leq 4.$$

Soit  $a$  et  $b$  deux éléments adjacents dans  $\overline{\Gamma(R)}$ . Ainsi, on peut distinguer les cas suivants :

1<sup>er</sup> Cas : Si  $R = C(a) \cup C(b) \cup C(a + b)$ . Sans perdre de la généralité, on peut supposer que

$$|C(a)| \geq \text{Max}\{|C(b)|, |C(a + b)|\}.$$

Or  $|R| > 16$ , alors il existe  $x_1, x_2 \in C(a) \setminus Z(R)$  tel que  $x_1, x_2 \notin C(b) \cup C(a + b)$ . De plus, or  $|C(a)| \neq |R| - 2$ , alors il existe un élément  $y \in C(b) \setminus (\{b\} \cup C(a))$ . Alors le graphe engendré par  $\{a, x_1, x_2, y, b, a + b\}$  contient le sous-graphe suivant

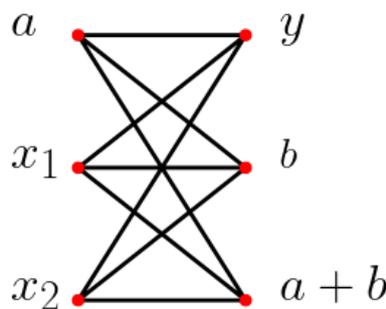


FIGURE 3.12 – Sous-graphe du graphe engendré par  $\{a, x_1, x_2, y, b, a + b\}$ .

Ainsi d’après la caractérisation de Kuratowski le graphe  $\overline{\Omega(R)}$  n’est pas planaire, ceci est absurde.

1<sup>er</sup> Cas : Si  $R \neq C(a) \cup C(b) \cup C(a+b)$ . Or  $\omega(\overline{\Gamma(R)}) \leq 4$ . Alors il existe un élément  $c \in R$ , tel que

$$R = C(a) \cup C(b) \cup C(c) \cup C(a+b).$$

Or  $|R| > 16$ , alors l'un des centralisateurs  $|C(a)|$ ,  $|C(b)|$ ,  $|C(c)|$  ou  $|C(a+b)|$  est supérieure à 4. Sans perdre de la généralité, on peut supposer que

$$|C(c)| \leq 4.$$

Alors il existe  $x, y \in C(c) \setminus \{0, c\}$ . Alors le graphe engendré par  $\{x, y, c, a, b, a+b\}$  contient le sous-graphe suivant

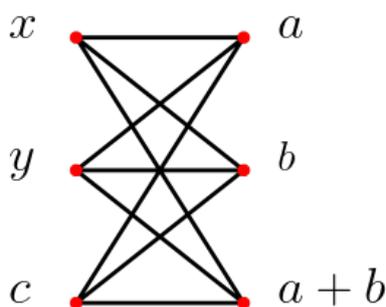


FIGURE 3.13 – Sous-graphe du graphe engendré par  $\{x, y, c, a, b, a+b\}$ .

Ainsi d'après la caractérisation de Kuratowski le graphe  $\overline{\Omega(R)}$  n'est pas planaire, ceci est absurde.

Cela termine la preuve du théorème. □

---

---

# CHAPITRE 4

---

## LE GRAPHE DE CO-DIVISEUR DE ZÉRO DES ANNEAUX

Afkhami, M., Khashyarmanesh, K. (2012). On the cozero-divisor graphs of commutative rings and their complements. *Bull. Malays. Math. Sci. Soc*, 35(4), 935-944.

Afkhami, M. (2014). The cozero-divisor graph of a noncommutative ring. *Journal of Algebra and Its Applications*, 13(08), 1450062.

### 4.1 Introduction

**Beck** [13] a introduit le concept du graphe diviseur de zéro d'un anneau commutatif, mais ce travail portait principalement sur la coloration des graphes. La définition ci-dessus est apparue pour la première fois dans **Anderson** et **Livingston** [5], qui contenait plusieurs résultats fondamentaux concernant le graphe de diviseur de zéro  $\Gamma(R)$ . Le graphe de diviseur de zéro d'un anneau commutatif a été étudié de manière approfondie par **Anderson, Frazier, Lauve** et **Livingston** (cf. [3] et [5]).

Soit  $W(R)$  l'ensemble des éléments non inversibles de  $R$ . Pour un anneau commutatif  $R$ , le graphe de co-diviseur de zéro  $\Gamma'(R)$  de  $R$  a été introduit dans [2]. L'ensemble de sommets de  $\Gamma'(R)$  est  $W(R)^*$  et pour deux sommets distincts  $a$  et  $b$  dans  $W(R)^*$ ,  $a$  est adjacent à  $b$  si et seulement si  $a \notin bR$  et  $b \notin aR$ , où  $rR$  est l'idéal engendré par l'élément  $r$  de l'anneau  $R$ . Quelques résultats de base sur la structure de ce graphe et les relations entre les graphes  $\Gamma(R)$  et  $\Gamma'(R)$  ont été étudiés dans [2].

## 4.2 Graphe de co-diviseur de zéro des anneaux commutatifs

Dans cette section, nous étudions quelques propriétés supplémentaires du graphe de co-diviseur de zéro  $\Gamma'(R)$ , où  $R$  est un anneau commutatif. Dans la suite, nous caractérisons tous les anneaux commutatifs dont ces graphes de co-diviseur de zéro sont double étoiles, uni-cycliques, étoiles ou forêts.

### 4.2.1 Graphe de co-diviseur de zéro $\Gamma'(R)$

**Définition 4.1.** Soit  $R$  un anneau commutatif unitaire, le graphe de co-diviseur de zéro de  $R$ , est un graphe simple, noté  $\Gamma'(R) = (V, E)$ , avec  $V = W(R)^*$  et pour tout  $x, y \in V$  avec  $x \neq y$ , on a

$$\{x, y\} \in E \iff x \notin yR \text{ et } y \notin xR,$$

où  $rR$  est l'idéal engendré par l'élément  $r$  de l'anneau  $R$ .

Dans la suite de cette section, on suppose que les anneaux étudiés sont commutatifs unitaires.

**Théorème 4.1.** Soit  $R$  un anneau non-local fini. Alors

- (i) Si  $\Gamma'(R)$  est une forêt, alors  $R \cong \mathbb{Z}_2 \times F$ , où  $F$  est un corps fini.
- (ii) Si  $R \cong \mathbb{Z}_2 \times F$ , où  $F$  est un corps fini, alors  $\Gamma'(R)$  est un graphe étoile.

*Démonstration.* (i) Supposons que  $\Gamma'(R)$  est une forêt. Or  $R$  est un anneau fini, alors il existe un entier  $n$  tel que

$$R \cong R_1 \times R_2 \times \cdots \times R_n$$

avec  $R_i$  est un anneau local, supposons que  $R_i$  est d'idéal maximal  $m_i$ , pour tout  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ .

D'autre part on a  $n \leq 2$ , car sinon on aura  $|Max(R)| \geq 3$ , il en résulte que  $\Gamma'(R)$  contient le cycle

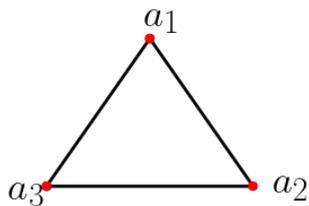


FIGURE 4.1 – Cycle  $[a_1, a_2, a_3, a_1]$

avec  $a_i \in m_i \setminus \cup_{j \neq i} m_j$  pour tout  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ . C'est-à-dire le graphe  $\Gamma'(R)$  n'est pas une forêt, ceci est absurde avec l'hypothèse. De plus  $n \geq 2$ , car  $R$  n'est pas local, alors nécessairement  $n = 2$ . Ainsi

$$R \cong R_1 \times R_2.$$

Supposons que  $R_2$  n'est pas un corps. Alors on le cycle suivant

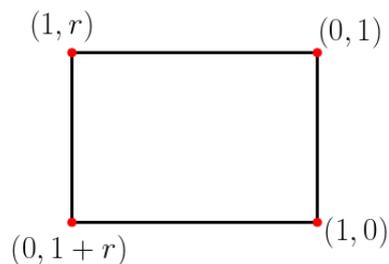


FIGURE 4.2 – Un cycle dans  $\Gamma'(R_1 \times R_2)$

avec  $r \in W(R_2)^*$ . C'est-à-dire que le graphe  $\Gamma'(R)$  n'est pas une forêt, ceci est absurde avec l'hypothèse. Il en résulte que  $R_2$  est un corps. Il est similaire de démontrer que  $R_1$  est un corps.

Supposons maintenant que ni  $R_1$  ni  $R_2$  soit  $\mathbb{Z}_2$ , alors pour tout  $r \in R_1 \setminus \{0, 1\}$  et  $s \in R_2 \setminus \{0, 1\}$ , on a le cycle

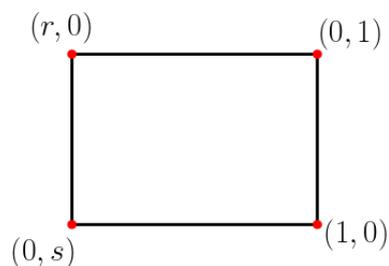


FIGURE 4.3 – Un cycle dans  $\Gamma'(R_1 \times R_2)$

c'est-à-dire que le graphe  $\Gamma'(R)$  n'est pas une forêt, ceci est absurde avec l'hypothèse. Il en résulte que  $R \cong \mathbb{Z}_2 \times F$ , où  $F$  est un corps fini.

- (ii) Si  $R \cong \mathbb{Z}_2 \times F$ , où  $F$  est un corps fini, alors  $\Gamma'(R)$  est un graphe étoile. En effet, on a

$$W(\mathbb{Z}_2 \times F)^* = \{(0, y) / y \in F^*\} \cup \{(1, 0)\}.$$

Ainsi le graphe de co-diviseur de zéro  $\Gamma'(\mathbb{Z}_2 \times F)$  est le suivant

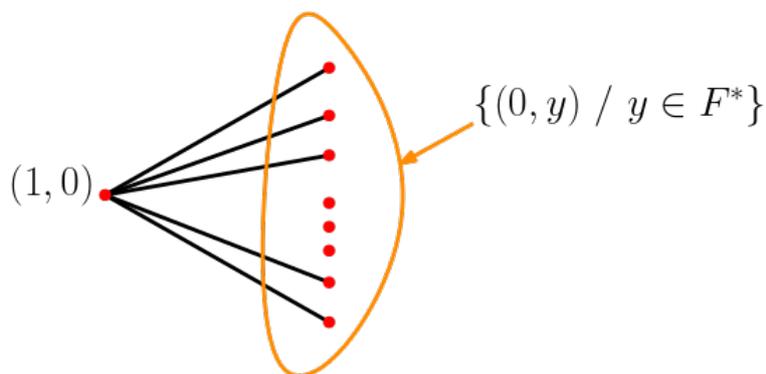


FIGURE 4.4 – Le graphe  $\Gamma'(\mathbb{Z}_2 \times F)$

Cela termine la preuve du théorème. □

**Théorème 4.2.** Soit  $R$  un anneau non-local fini. Alors  $\Gamma'(R)$  est un graphe double étoile si, et seulement si  $R \cong \mathbb{Z}_2 \times F$ , où  $F$  est un corps.

*Démonstration.* ( $\implies$ ) On sait que tout graphe double étoiles est un arbre, ainsi  $\Gamma'(R)$  est une forêt, alors  $R \cong \mathbb{Z}_2 \times F$ , où  $F$  est un corps fini.

( $\impliedby$ ) On sait de plus que tout graphe étoile est un graphe double étoiles. Or  $R \cong \mathbb{Z}_2 \times F$ , où  $F$  est un corps fini, alors  $\Gamma'(R)$  est un étoile. D'où le résultat.  $\square$

**Théorème 4.3.** *Soit  $R$  un anneau local fini, d'idéal maximal  $m$ . Alors*

(i) *Si  $m$  est principal, alors  $\Gamma'(R)$  est un graphe double étoiles si, et seulement si  $R$  soit un corps, ou isomorphe à l'anneau  $\mathbb{Z}_4$  ou bien  $\mathbb{Z}_2[X]/(X^2)$ .*

(ii) *Si  $m$  n'est pas principal et  $\Gamma'(R)$  est un graphe double étoiles, alors le plus petit ensemble qui engendre  $m$  ne contient que deux éléments.*

*Démonstration.* (i) ( $\implies$ ) D'après [[2], théorème 2.7]. Or  $m$  est un idéal principal, alors  $\Gamma'(R)$  est stable, ainsi dans ce cas  $\Gamma'(R)$  est un graphe double étoiles si, et seulement si  $|m| \leq 2$ .

— Si  $|m| = 1$ , alors  $R$  est un corps.

— Si  $|m| = 2$ , or  $|R| \leq |z(R)|^2$ , alors  $R$  soit isomorphe à l'anneau  $\mathbb{Z}_4$  ou bien  $\mathbb{Z}_2[X]/(X^2)$ .

( $\impliedby$ ) Si  $R$  est un corps alors  $\Gamma'(R)$  est vide car  $W(R) = \{0\}$ , et dans le cas où  $R$  isomorphe à l'anneau  $\mathbb{Z}_4$  ou bien  $\mathbb{Z}_2[X]/(X^2)$  et



FIGURE 4.5 – Les graphes  $\Gamma'(\mathbb{Z}_4)$  et  $\Gamma'(\mathbb{Z}_2[X]/(X^2))$

D'où le graphe de co-diviseur de zéro de  $R$  est un graphe double étoiles.

(ii) Supposons que  $m$  n'est pas principal et que  $\Gamma'(R)$  est un graphe double étoiles. Et supposons par absurde que le plus petit ensemble engendre  $m$  est  $\{r_1, r_2, \dots, r_k\}$  avec  $k \geq 3$  et  $r_i \in R$ . Alors le sous graphe

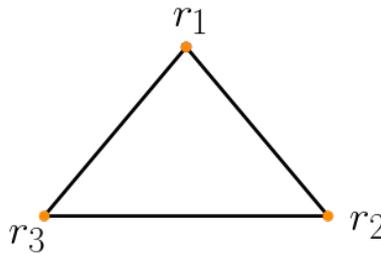


FIGURE 4.6 – Un cycle dans  $\Gamma'(R)$ .

contenu dans  $\Gamma'(R)$  ceci est absurde, car  $\Gamma'(R)$  est un graphe double étoiles, alors ne contient pas des cycles.

Cela termine la preuve du théorème.  $\square$

Un résultat immédiat des théorèmes précédents est le suivant

**Corollaire 4.1.** *Soit  $R$  un anneau fini et tel que  $\Gamma'(R)$  est un graphe double étoiles. Alors  $R$  soit local ou bien  $R \cong \mathbb{Z}_2 \times F$ , où  $F$  est un corps.*

**Remarque 4.1.** *D'autre part, d'après tout ce qui précède, on peut conclure que pour tout anneau  $R$  fini :*

- (a) Si  $R$  non-local, alors les assertions suivantes sont équivalentes :
- (i)  $\Gamma'(R)$  est une forêt.
  - (ii)  $\Gamma'(R)$  est un graphe étoile.
  - (iii)  $\Gamma'(R)$  est un graphe double étoiles.
  - (iv)  $\Gamma'(R)$  est un arbre.
  - (v)  $R \cong \mathbb{Z}_2 \times F$ , où  $F$  est un corps.
- En effet, il est facile de voir que  $(i) \implies (v) \implies (ii) \implies (iii) \implies (iv) \implies (i)$ .
- (b) Si  $R$  local d'idéal maximal principal, alors  $\Gamma'(R)$  est un arbre et les assertions suivantes sont équivalentes
- (i)  $\Gamma'(R)$  est un graphe étoile.
  - (ii)  $\Gamma'(R)$  est un graphe double étoiles.
  - (iii)  $R$  soit un corps, ou isomorphe à l'anneau  $\mathbb{Z}_4$  ou bien  $\mathbb{Z}_2[X]/(X^2)$ .
  - (iv)  $\Gamma'(R)$  est un arbre.
- En effet, il est facile de voir que  $(i) \implies (ii) \implies (iii) \implies (iv) \implies (i)$ .

**Lemme 4.1.** Soit  $R$  un anneau, et tel que  $\Gamma'(R)$  est uni-cyclique. Alors  $|Max(R)| \leq 3$ . En particulier, si  $Max(R) = \{m_1, m_2, m_3\}$ , alors  $|m_i \setminus \cup_{j \neq i} m_j| = 1$ , pour tout  $i \in \{1, 2, 3\}$ .

*Démonstration.* Supposons par absurde que  $|Max(R)| \geq 4$ . Et soient  $\{m_1, m_2, m_3, m_4\} \subseteq Max(R)$  et  $a_i \in m_i \setminus \cup_{j \neq i} m_j$  avec  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ . Alors le graphe suivant

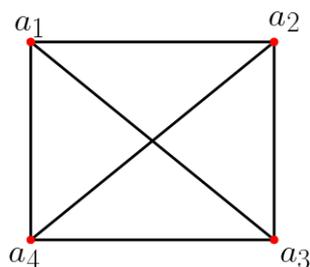


FIGURE 4.7 – Un cycle dans  $\Gamma'(R)$ .

est un sous graphe de  $\Gamma'(R)$ , ceci est absurde car  $\Gamma'(R)$  est uni-cyclique. Il en résulte que  $|Max(R)| \leq 3$ .

Supposons maintenant que  $Max(R) = \{m_1, m_2, m_3\}$ , et soient  $a_i \in m_i \setminus \cup_{j \neq i} m_j$  avec  $i \in \{1, 2, 3\}$ . Et supposons par absurde qu'il existe  $i_0 \in \{1, 2, 3\}$  tel  $m_{i_0} \setminus \cup_{j \neq i_0} m_j$  contient un élément  $b_{i_0} \neq a_{i_0}$ . Sans perdre de la généralité, on peut supposer que  $i_0 = 1$ . Alors  $\Gamma'(R)$  contient les deux cycles suivants

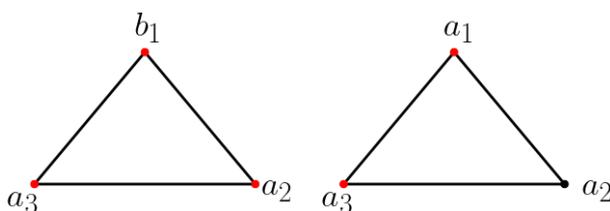


FIGURE 4.8 – Deux cycles dans  $\Gamma'(R)$ .

ceci est absurde, car  $\Gamma'(R)$  est uni-cyclique. Il en résulte que  $|m_i \setminus \cup_{j \neq i} m_j| = 1$  pour tout  $i \in \{1, 2, 3\}$ .  $\square$

Le théorème suivant nous donne une caractérisation des anneaux qui ont des graphes de co-diviseur de zéro uni-cycliques.

**Théorème 4.4.** *Soit  $R$  un anneau non-local fini. Alors  $\Gamma'(R)$  est uni-cyclique si, et seulement si  $R$  est isomorphe à l'un des anneaux suivants*

- (i)  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$ .
- (ii)  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2[X]/(X^2)$ .
- (iii)  $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$ .

*Démonstration.*  $(\implies)$  Supposons que  $\Gamma'(R)$  est uni-cyclique. Or  $R$  est un anneau fini non-local, alors il existe un entier  $n \in \mathbb{N}$  tel que

$$R \cong R_1 \times R_2 \times \cdots \times R_n$$

avec  $R_i$  est un anneau local, supposons d'idéal maximal  $m_i$  pour tout  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ .

D'après le lemme précédent, on conclut que  $n \leq 3$ . Ainsi

- Si  $n = 3$ . Alors

$$R \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2.$$

En effet, supposons le contraire, c'est-à-dire qu'il existe  $i_0 \in \{1, 2, 3\}$ , tel que

$$R_{i_0} \neq \mathbb{Z}_2.$$

Sans perdre de la généralité, on peut supposer que  $i_0 = 2$ , ainsi  $R_2 \neq \mathbb{Z}_2$ . Et posons

$$\begin{aligned} M_1 &= m_1 \times R_2 \times R_3 \\ M_2 &= R_1 \times m_2 \times R_3 \\ M_3 &= R_1 \times R_2 \times m_3. \end{aligned}$$

Or  $R_2 \neq \mathbb{Z}_2$ , alors il existe un élément  $a \in R_2$  tel que  $a$  ou bien  $a + 1$  est inversible dans  $R_2$ . Sans perdre de la généralité, on peut supposer que  $a$  est inversible, ainsi

$$(0, 1, 1), (0, a, 1) \in M_1 \setminus (M_2 \cup M_3)$$

ceci est absurde d'après le lemme précédent. Ainsi  $R \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ . Mais d'autre part le graphe  $\Gamma'(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)$  contient les deux cycles suivants :

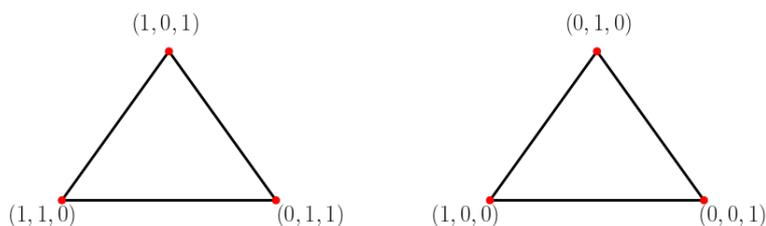


FIGURE 4.9 – Deux cycles dans  $\Gamma'(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)$ .

Ainsi le graphe  $\Gamma'(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)$  n'est pas uni-cyclique.

- Si  $n = 2$ . Alors

$$R \cong R_1 \times R_2.$$

Supposons que  $|R_1| \geq 4$  ou  $|R_2| \geq 4$ . Sans perdre de la généralité, on suppose que  $|R_1| \geq 4$ . Dans cette situation, on a  $R_2 = \mathbb{Z}_2$ , car si  $R_2 \neq \mathbb{Z}_2$ , alors le graphe  $\Gamma'(R_1 \times R_2)$  contient le cycle suivant :

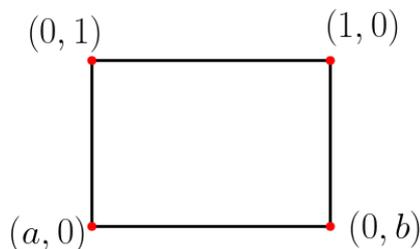


FIGURE 4.10 – Un carré dans  $\Gamma'(R_2 \times R_2)$ .

avec  $a \in R_1 \setminus \{0, 1\}$  et  $b \in R_2 \setminus \{0, 1\}$ . D'autre part, il existe un élément  $c \in R_1 \setminus \{0, 1, a\}$ , tel que  $(c, 0)$  adjacent à  $(0, 1)$  et  $(0, b)$

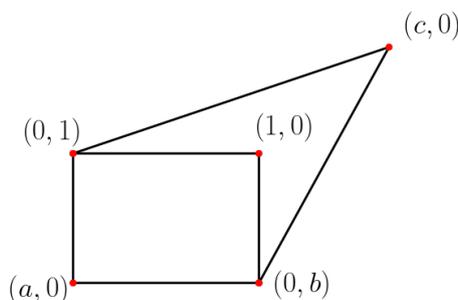


FIGURE 4.11 – Un sous-graphe de  $\Gamma'(R_1 \times R_2)$ .

Ainsi le graphe  $\Gamma'(R_1 \times R_2)$  n'est pas uni-cyclique. Il en résulte que  $R_2 = \mathbb{Z}_2$ .

De plus si  $R_1$  est un corps, alors  $\Gamma'(R)$  est un graphe étoile, ainsi il n'est pas uni-cyclique. Alors, on a

- Si  $|R_1| = 4$ , alors

$$R_1 \cong \mathbb{Z}_4 \text{ ou } R_1 \cong \mathbb{Z}_2[X]/(X^2)$$

et dans ce cas  $\Gamma'(R)$  est uni-cyclique.

- Si  $|R_1| > 4$  et n'est pas un corps. Alors  $\Gamma'(R)$  contient le cycle suivant :

$$[(0, 1), (1, 0), (b, 0), (a, 1), (0, 1)]$$

où  $a \in W(R_1)^*$  et  $b = a+1 \in U(R_1)$ . D'autre part, soit  $c \in R_1 \setminus \{0, 1, a, b\}$ , alors  $c+1 \in R_1 \setminus \{0, 1, a, b\}$ , et on a  $c \in U(R_1)$  ou  $c+1 \in U(R_1)$ . Sans perdre de la généralité, on peut supposer que  $c$  est inversible dans  $R_1$ , alors  $(c, 0)$  adjacent à  $(0, 1)$  et  $(a, 1)$ . Ainsi le graphe  $\Gamma'(R)$  n'est pas uni-cyclique. Il en résulte que  $|R_1| \leq 4$ .

- Si  $|R_1| < 4$  et  $|R_2| < 4$ , alors les seules cas possibles sont

$$R_1 \times R_2 \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \text{ ou } R_1 \times R_2 \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \text{ ou } R_1 \times R_2 \cong \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3.$$

Mais les deux graphes  $\Gamma'(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)$  et  $\Gamma'(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3)$  sont des graphes étoiles. On conclut que

$$R \cong \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3.$$

( $\Leftarrow$ ) A partir des graphes des anneaux  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$ ,  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2[X]/(X^2)$  et  $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$ .

On conclut que  $\Gamma'(R)$  est uni-cyclique.

Ceci termine la preuve du théorème.  $\square$

**Proposition 4.1.** Soit  $R$  un anneau. Alors  $\Gamma'(R)$  contient un sous-graphe partiel étoile si, et seulement si il existe un élément  $a$  de  $W(R)^*$  tel que  $|aR| = 2$  et pour tout élément  $b$  de  $W(R)^* \setminus \{a\}$ , on a

$$a \notin bR.$$

En particulier, s'il existe un idéal maximal  $m$  de  $R$  tel que  $|m| = 2$ , alors  $\Gamma'(R)$  contient un sous-graphe partiel étoile.

*Démonstration.* Supposons que  $\Gamma'(R)$  contient un sous-graphe partiel étoile. Alors il existe un sommet  $a$  de  $\Gamma'(R)$  adjacent à tous les autres sommets

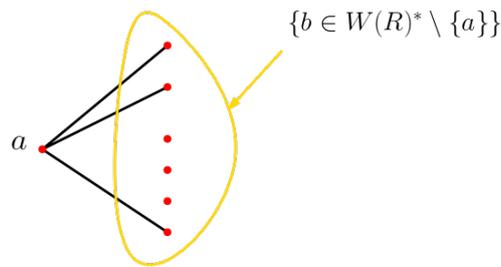


FIGURE 4.12 – Le sous-graphe partiel de  $\Gamma'(R)$ .

De plus, on a  $|aR| = 2$  et  $a \notin bR$  pour tout  $b$  de  $W(R)^* \setminus \{a\}$ .

Inversement, supposons qu'il existe un élément  $a$  de  $W(R)^*$  tel que  $|aR| = 2$  et pour tout élément  $b$  de  $W(R)^* \setminus \{a\}$ , on a

$$a \notin bR.$$

Ceci implique que le sommet  $a$  de  $\Gamma'(R)$  est adjacent à tous les autres sommets du graphe  $\Gamma'(R)$ . Ainsi  $\Gamma'(R)$  contient un sous-graphe partiel étoile (Voir l'illustration dans la figure [4.12]).  $\square$

**Lemme 4.2.** Soit  $R$  un anneau tel que  $\Gamma'(R)$  est une réunion disjointe des graphes  $n$ -cycles. Alors

$$|Max(R)| \leq 3.$$

En particulier, si  $Max(R) = \{m_1, m_2, m_3\}$ , alors  $|m_i \setminus \cup_{j \neq i} m_j| = 1$ , pour tout  $i \in \{1, 2, 3\}$ .

*Démonstration.* Supposons par absurde que  $|Max(R)| \geq 4$ , et soient  $\{m_1, m_2, m_3, m_4\} \subseteq Max(R)$  et  $a_i \in m_i \setminus \cup_{j \neq i} m_j$ , pour tout  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ . Alors le graphe suivant

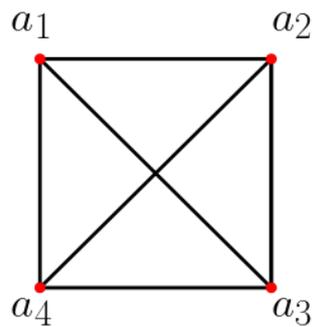


FIGURE 4.13 – Un sous-graphe de  $\Gamma'(R)$ .

est un sous-graphe de  $\Gamma'(R)$ , c'est-à-dire que  $\Gamma'(R)$  ne peut pas être une réunion disjointe des graphes  $n$ -cycles. Ainsi  $|Max(R)| \leq 3$ .

Supposons que  $|Max(R)| = 3$ , et posons  $Max(R) = \{m_1, m_2, m_3\}$ , et soit  $a_i \in m_i \setminus \cup_{j \neq i} m_j$  pour tout  $i \in \{1, 2, 3\}$ . Supposons qu'il existent  $i_0 \in \{1, 2, 3\}$ , et  $b_{i_0} \in m_{i_0} \setminus \cup_{j \neq i_0} m_j$  avec  $b_{i_0} \neq a_{i_0}$ . Sans perdre de la généralité, on peut supposer que  $i_0 = 1$ . Ainsi le graphe  $\Gamma'(R)$  contient le sous-graphe suivant

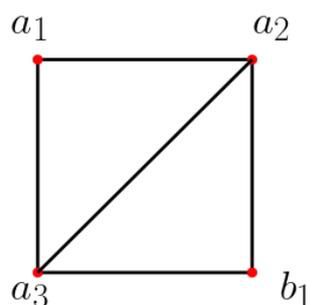


FIGURE 4.14 – Un sous-graphe de  $\Gamma'(R)$ .

c'est-à-dire que  $\Gamma'(R)$  ne peut pas être une réunion disjointes des graphes  $n$ -cycles. Ainsi  $|m_i \setminus \cup_{j \neq i} m_j| = 1$  pour tout  $i \in \{1, 2, 3\}$ . □

**Théorème 4.5.** Soit  $R$  un anneau fini non-local. Alors  $\Gamma'(R)$  est une réunion disjointes des graphes  $n$ -cycles si, et seulement si  $R$  isomorphe à  $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$ .

*Démonstration.* ( $\Leftarrow$ ) Supposons que  $R \cong \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$ , ainsi  $\Gamma'(R) = C_4$ , car on a

$$W(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3) = \{(0, 0), (0, 1), (0, 2), (1, 0), (2, 0)\},$$

et le graphe de  $\Gamma'(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3)$  est le suivant

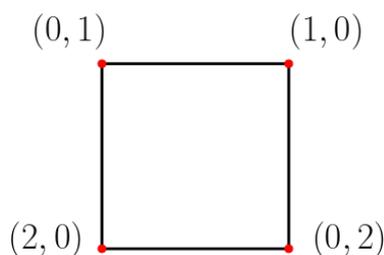


FIGURE 4.15 – Le graphe de  $\Gamma'(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3)$ .

( $\implies$ ) Supposons que  $\Gamma'(R)$  est une réunion disjointe des graphes  $n$ -cycles. Or  $R$  est un anneau fini, alors il existe un entier  $n$  tel que

$$R \cong R_1 \times R_2 \times \cdots \times R_n$$

avec  $R_i$  est un anneau local, supposons d'idéal maximal  $m_i$ , pour tout  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ . De plus  $R$  est non-local, et d'après le lemme précédent, on a  $n = 2$ , ainsi

$$R \cong R_1 \times R_2.$$

Supposons que  $R_1$  et  $R_2$  contiennent chacun des deux au moins trois éléments. Sans perdre de la généralité on peut supposer  $|R_1| \geq 4$ . Alors pour tout  $r, s$  de  $R_1 \setminus \{0, 1\}$ . Ainsi le graphe suivant est un sous-graphe de  $\Gamma'(R)$

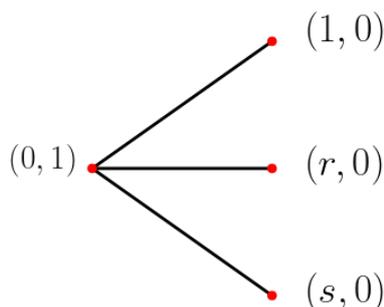


FIGURE 4.16 – Graphe partiel de  $\Gamma'(R_1 \times R_2)$ .

Cela implique que  $\Gamma'(R)$  n'est pas une réunion disjointe des graphes  $n$ -cycles. Ainsi  $|R_1| \leq 3$  et de même  $|R_2| \leq 3$ . Il en résulte que  $R$  est isomorphe à l'un des anneaux suivants

$$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, \quad \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \quad \text{ou} \quad \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3.$$

D'autre part d'après le résultat (a) de la remarque 4.1, les graphes  $\Gamma'(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)$  et  $\Gamma'(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3)$  sont des étoiles. Finalement

$$R \cong \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3.$$

Cela termine la preuve du théorème. □

**Théorème 4.6.** Soit  $R$  un anneau Noethérien. Alors  $\Gamma'(R)$  est stable si, et seulement si  $R$  est local d'idéal maximal principal.

*Démonstration.* ( $\implies$ ) Supposons que  $\Gamma'(R)$  est stable. Ainsi  $R$  est local, car sinon s'il existe  $\{m, m'\} \subseteq \text{Max}(R)$ , alors ils existent  $x \in m \setminus m'$ , et  $y \in m' \setminus m$  tels que  $x$  et  $y$  sont adjacents dans  $\Gamma'(R)$ , ceci est absurde car  $\Gamma'(R)$  est stable. Ainsi  $R$  est local.

En suite, posons  $m$  l'idéal maximal de  $R$  et  $aR$  l'idéal principal maximal (au sens de l'inclusion) dans  $m$ . Et supposons par absurde que  $m$  n'est pas principal. Alors il existe un élément  $b$  de  $m$  tel que

$$b \notin aR,$$

de plus  $a \notin bR$ , car sinon on aura  $aR \subseteq bR$ , ce qui absurde avec la maximalité de  $aR$  dans  $m$ . Il en résulte que  $a$  et  $b$  sont adjacents dans  $\Gamma'(R)$ , ceci est absurde car  $\Gamma'(R)$  est stable. Ainsi  $m$  est un idéal maximal principal.

( $\Leftarrow$ ) Supposons que  $R$  est local d'idéal maximal principal. Alors d'après [[2], Théorème [2.7]], on a  $\Gamma'(R)$  est stable. □

#### 4.2.2 Sous-graphe $\Gamma'(R) \setminus J(R)$ du graphe de co-diviseur de zéro

Dans cette sous-section, on s'intéresse à un sous-graphe particulier du graphe de co-diviseur de zéro  $\Gamma'(R)$ , un sous-graphe de  $\Gamma'(R)$  dont en supprimant les éléments de  $J(R)$  où  $J(R)$  est l'intersection des idéaux maximaux de  $R$ , ce graphe sera noté par  $\Gamma'(R) \setminus J(R)$ . Parmi les propriétés de ce graphe qu'on va étudier dans la suite, le cas où il ne peut pas être un graphe Eulérien, ainsi les cas où il sera un graphe Hamiltonien. Finalement on présente un résultat concernant la relation entre le nombre de clique  $\omega(\Gamma'(R) \setminus J(R))$  du  $\Gamma'(R) \setminus J(R)$  et son nombre chromatique  $\chi(\Gamma'(R) \setminus J(R))$ .

Le théorème suivant montre un cas où  $\Gamma'(R) \setminus J(R)$  ne peut pas être un graphe Eulérien. Pour la démonstration, rappelons le résultats suivant :

Soit  $G = (V, E)$  un graphe simple, alors

$$G \text{ est Eulérien} \iff d(x) \text{ est pair, pour tout } x \in V.$$

**Théorème 4.7.** Soit  $R$  un anneau contient un idéal maximal principal  $m$  tel que  $|W(R) \setminus m|$  est un nombre impair. Alors  $\Gamma'(R) \setminus J(R)$  n'est pas Eulérien.

*Démonstration.* Posant  $m = aR$  un idéal maximal principal de  $R$ . Ainsi, pour tout élément  $b \in m \setminus \{a\} \subseteq aR$ , il en résulte que  $a$  et  $b$  ne sont pas adjacents.

De plus, pour tout  $c \in W(R) \setminus m$ , on a  $c$  et  $a$  sont adjacents (car  $a \notin cR$ ). Ainsi, on conclut que

$$d(a) = |W(R) \setminus m|.$$

Or  $|W(R) \setminus m|$  est un nombre impair, il en résulte que  $\Gamma'(R) \setminus J(R)$  n'est pas Eulérien. □

Rappelons qu'un graphe simple  $G = (V, E)$  est biparti s'il existe une partition  $V_1 \cup V_2 = V$  de l'ensemble des sommets tel pour arête  $a = (x, y) \in E$ , on a  $x \in V_i$  et  $y \in V_j$  avec  $i \neq j$ , et qu'il est biparti complet, si pour tout sommets  $x$  et  $y$  de  $G$  différents, on a  $(x, y) \in E$  si, et seulement si  $x \in V_i$  et  $y \in V_j$  avec  $i \neq j$ . Voici un théorème concernant la bipartie du  $\Gamma'(R) \setminus J(R)$ .

**Théorème 4.8.** Soit  $R$  un anneau non-local. Alors les assertions suivantes sont équivalentes

- (i)  $\Gamma'(R) \setminus J(R)$  est biparti complet.
- (ii)  $\Gamma'(R) \setminus J(R)$  est biparti.
- (iii)  $\Gamma'(R) \setminus J(R)$  est sans triangle.

*Démonstration.* Les deux implications (i)  $\implies$  (ii) et (ii)  $\implies$  (iii) sont claires. De plus on a

- (iii)  $\implies$  (ii) Supposons que  $\Gamma'(R) \setminus J(R)$  est sans triangle, et montrons que  $\Gamma'(R) \setminus J(R)$  est biparti. Or  $R$  est non-local et ne contient pas des triangles. Ainsi  $R$  contient exactement deux idéaux maximaux, posons  $Max(R) = \{m, m'\}$ , et supposons par absurde que  $\Gamma'(R) \setminus J(R)$  n'est pas biparti. Ainsi  $\Gamma'(R) \setminus J(R)$  contient un cycle  $C$  de longueur impair. Il en résulte qu'ils

existent deux sommets  $a$ , et  $b$  de  $C$  adjacents, et contiennent au même idéal maximal. Sans perdre de la généralité, supposons que  $a, b \in m$ , alors pour tout  $c \in m' \setminus J(R)$ , on a  $[a, b, c, a]$  forme un triangle dans  $\Gamma'(R) \setminus J(R)$ .

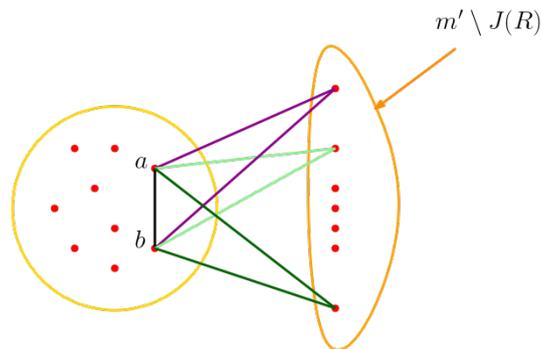


FIGURE 4.17 – Les triangles  $[a, b, c, a]$ .

Ceci est absurde car  $\Gamma'(R) \setminus J(R)$  est sans triangle. Ainsi  $\Gamma'(R) \setminus J(R)$  est biparti.

(ii)  $\implies$  (i) Supposons que  $\Gamma'(R) \setminus J(R)$  est biparti. Alors d'après [[2], Proposition [2.7]], on a

$$\text{Max}(R) = \{m_1, m_2\}.$$

Donc il suffit de prendre  $V_1 = m_1 \setminus m_2$  et  $V_2 = m_2 \setminus m_1$  comme une partition d'ensemble des sommets du  $\Gamma'(R) \setminus J(R)$ , de plus tout sommet de  $V_1$  est adjacents à tous les sommets de  $V_2$ , et de même tout sommet de  $V_2$  est adjacents à tous les sommets de  $V_1$ .

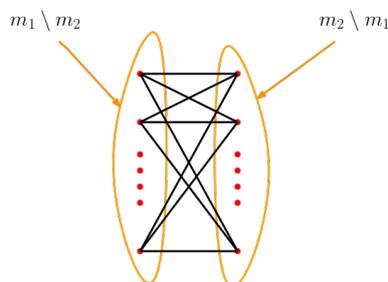


FIGURE 4.18 – Le graphe  $\Gamma'(R) \setminus J(R)$ .

Il en résulte que le graphe  $\Gamma'(R) \setminus J(R)$  est biparti complet. Cela termine la preuve du théorème. □

**Théorème 4.9.** Soit  $R$  un anneau fini, tel que  $\text{Max}(R) = \{m_1, m_2\}$  et  $|m_1| = |m_2|$ . Alors  $\Gamma'(R) \setminus J(R)$  est Hamiltonien.

*Démonstration.* Pour tout  $i \in \{1, 2\}$ , posons

$$m_i \setminus J(R) = \{x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{it}\} \quad \text{avec } t = |m_i \setminus J(R)|.$$

Ainsi le cycle suivant

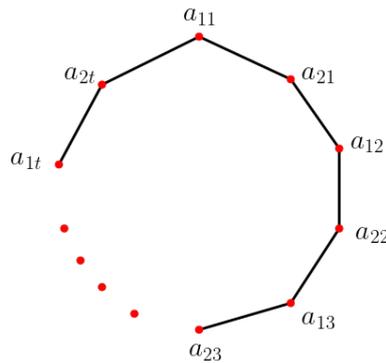


FIGURE 4.19 – Le graphe  $\Gamma'(R) \setminus J(R)$ .

est un cycle Hamiltonien. Il en résulte que  $\Gamma'(R) \setminus J(R)$  est Hamiltonien.  $\square$

Finalement, voici un théorème qui compare le nombre de clique  $\omega(\Gamma'(R) \setminus J(R))$  du  $\Gamma'(R) \setminus J(R)$  et son nombre chromatique  $\chi(\Gamma'(R) \setminus J(R))$ .

**Théorème 4.10.** *Soit  $R$  un anneau non-local. Alors*

$$\chi(\Gamma'(R) \setminus J(R)) = 2 \iff \omega(\Gamma'(R) \setminus J(R)) = 2$$

*Démonstration.*  $(\implies)$  On sait que  $\chi(\Gamma'(R) \setminus J(R)) \geq \omega(\Gamma'(R) \setminus J(R))$ . Ainsi, si  $\chi(\Gamma'(R) \setminus J(R)) = 2$ , alors nécessairement  $\omega(\Gamma'(R) \setminus J(R)) = 2$  (car  $R$  est non-local).

$(\impliedby)$  Supposons  $\omega(\Gamma'(R) \setminus J(R)) = 2$ . Alors  $|Max(R)| = 2$ . Supposons par absurde que  $\chi(\Gamma'(R) \setminus J(R)) > 2$ , ainsi le graphe  $\Gamma'(R) \setminus J(R)$  n'est pas biparti, et d'après le théorème [4.8], on a  $\Gamma'(R) \setminus J(R)$  contient au moins un triangle, c'est-à-dire que

$$\omega(\Gamma'(R) \setminus J(R)) \geq 3$$

ceci est absurde, il en résulte que  $\chi(\Gamma'(R) \setminus J(R)) = 2$ .  $\square$

### 4.3 Graphe de co-diviseur de zéro des anneaux non-commutatifs

Dans cette section, nous étendons le concept du graphe de co-diviseur de zéro pour les anneaux unitaires non-commutatifs, comme suit :

Nous assignons un graphe sur un anneau non-commutatif  $R$  avec des sommets en tant qu'éléments non inversibles non nuls de  $R$ , où deux sommets distincts  $a$  et  $b$  sont adjacents si et seulement si  $a \notin Rb$  et  $b \notin Ra$ , où  $Rr$  est l'idéal à gauche engendré par l'élément  $r$  de l'anneau  $R$ . En suite, nous étudions les propriétés fondamentales du graphe de co-diviseur de zéro sur un anneau non-commutatif. De plus, nous obtenons quelques résultats sur les graphes de co-diviseur de zéro des anneaux des matrices.

Soit  $R$  un anneau et  $Z_l(R)$  et  $Z_r(R)$  les ensembles de tous les diviseurs de zéro à gauche et à droite de  $R$  (resp.). Ainsi, on note par  $Z(R)$  la réunion de  $Z_l(R)$  et  $Z_r(R)$ ,  $W(R)$  l'ensemble des éléments non inversibles de  $R$  et  $Max_l(R)$  l'ensemble des idéaux maximaux à gauche de  $R$ .

### 4.3.1 Graphe de co-diviseur de zéro $\Gamma'(R)$

Commençons par la remarque suivants :

**Remarque 4.2.** Soit  $R$  un anneau. Si  $Z(R)$  est fini, alors  $R$  soit fini, ou bien domaine. De plus si  $R$  n'est pas un domaine, alors

$$|R| \leq |Z(R)|^2$$

en effet, supposons que  $Z(R)$  est fini et  $Z(R) \neq \{0\}$ . Soit  $x \in Z(R)^*$ . Or  $\text{ann}_l(x)$  et  $Rx$  incluent dans  $Z(R)$ , alors ces ensembles sont fini. De plus, on a  $[R : \text{ann}_l(x)] = |Rx|$ . Ainsi

$$|R| = |\text{ann}_l(x)||Rx| \leq |Z(R)|^2.$$

**Lemme 4.3** ([6]). Soit  $R$  un anneau Artinien à gauche et  $R \neq Z(R)$ . Alors  $R$  est unitaire et

$$W(R) = Z(R).$$

**Proposition 4.2.** Soit  $R$  un anneau n'est pas un domaine. Alors  $R$  est fini si et seulement si  $\Gamma'(R)$  est fini.

*Démonstration.*  $(\implies)$  Or  $R$  est fini, ainsi  $W(R)^*$  sera fini, d'où le résultat.

$(\impliedby)$  Or  $\Gamma'(R)$  est fini, ainsi  $W(R)$  est fini, ceci implique que  $Z(R)$  fini, car  $Z(R) \subseteq W(R)$ . Or  $R$  n'est pas un domaine, alors d'après la remarque précédent, on a

$$|R| \leq |Z(R)|^2.$$

Ceci termine la preuve. □

**Proposition 4.3.** Soit  $R$  un anneau, dont  $\Gamma'(R)$  est stable. Alors pour tout idéal à gauche  $I$  engendré par un nombre fini est principal.

*Démonstration.* Soit  $I$  un idéal engendre par un ensemble  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ . Or  $\Gamma'(R)$  est stable, alors nécessairement

$$Rx_i \subseteq Rx_j \text{ ou } Rx_j \subseteq Rx_i \text{ pour tout } i, j \in \{1, 2, \dots, n\} \text{ et } i \neq j$$

car sinon, s'il existe deux indice  $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ , tels que  $Rx_i \not\subseteq Rx_j$  et  $Rx_j \not\subseteq Rx_i$ , alors il existes au moins deux élément  $a \in Rx_i \setminus Rx_j$  et  $b \in Rx_j \setminus Rx_i$  adjacents (il est facile de démontrer que  $a, b \in W(R)^*$ ), ceci est absurde, car  $\Gamma'(R)$  est stable. Il en résulte qu'il existe un indice  $i_0 \in \{1, 2, \dots, n\}$  tel que

$$I = R_{i_0}.$$

□

**Remarque 4.3.** D'après le proposition précédente, on conclut que tout les anneaux Artiniens à gauche sont des anneaux principaux.

Dans la proposition suivant, on étudie la nature des anneaux qui ont un graphe de co-diviseur de zéro est singleton.

**Proposition 4.4.** Soit  $R$  un anneau et  $|W(R)^*| = 1$ . Alors l'une des assertions suivantes est vérifiée :

- (i)  $R$  est isomorphe à  $\mathbb{Z}_4$ .
- (ii)  $R$  est isomorphe à  $\mathbb{Z}_2[X]/(X^2)$ .
- (iii)  $R$  est isomorphe à un anneau  $T$ , tel que pour tout  $x \in T$ , on a  $x^2 = 0$ .

*Démonstration.* Puisque le graphe de co-diviseur de zéro de  $R$  est singleton, alors  $|W(R)| = 2$ , ainsi  $R$  n'est pas un domaine. Et d'après la proposition [4.2], on conclut que  $R$  est fini. Il en résulte que  $W(R) = Z(R)$  et pour tout  $x \in W(R)^*$ , on a  $x^2 = 0$ . Ainsi d'après le théorème 3 du [6], on l'une des assertions suivantes est vérifiée :

- (i)  $R$  est isomorphe à  $\mathbb{Z}_4$ .
- (ii)  $R$  est isomorphe à  $\mathbb{Z}_2[X]/(X^2)$ .
- (iii)  $R$  est isomorphe à un anneau  $T$ , tel que pour tout  $x \in T$ , on a  $x^2 = 0$ .

□

Le théorème suivant caractérise la maille d'un sous-graphe particulier des graphes de co-diviseur de zéro des anneaux non-commutatifs.

**Théorème 4.11.** Soit  $R$  un anneau et  $Max_l(R) > 1$ . Alors la maille du  $\Gamma'(R) \setminus J(R)$  appartient à  $\{3, 4, \infty\}$ .

*Démonstration.* Supposons que  $Max_l(R) \geq 3$ , et soient  $m_1, m_2$  et  $m_3$  trois idéaux maximaux distincts de  $R$ . Soit  $a_i \in m_i \setminus \cup_{j \neq i}^3 m_j$ , pour tout  $i \in \{1, 2, 3\}$ , ainsi  $\Gamma'(R) \setminus J(R)$  contient le sous-graphe suivant

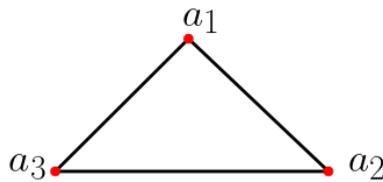


FIGURE 4.20 – Le triangle  $[a_1, a_2, a_3, a_1]$ .

Ainsi la maille du  $\Gamma'(R) \setminus J(R)$  est trois.

Supposons maintenant que  $Max_l(R) = \{m_1, m_2\}$ , ainsi la maille du  $\Gamma'(R) \setminus J(R)$  est finie. Si  $|m_1 \setminus m_2| > 1$  et de même  $|m_2 \setminus m_1| > 1$ , alors  $\Gamma'(R) \setminus J(R)$  contient le sous-graphe suivant

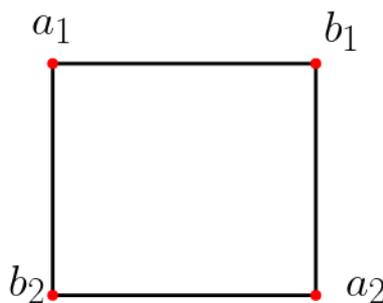


FIGURE 4.21 – Le carré  $[a_1, b_1, a_2, b_2, a_1]$ .

avec  $a_1, a_2 \in m_1$  et  $b_1, b_2 \in m_2$ . Ainsi dans ce cas la maille du  $\Gamma'(R) \setminus J(R)$  est inférieure ou égale à 4.

Finalement si  $|m_1 \setminus m_2| = 1$  ou  $|m_2 \setminus m_1| = 1$ . Sans perdre de la généralité, on peut supposer que  $|m_1 \setminus m_2| = 1$ . Posons

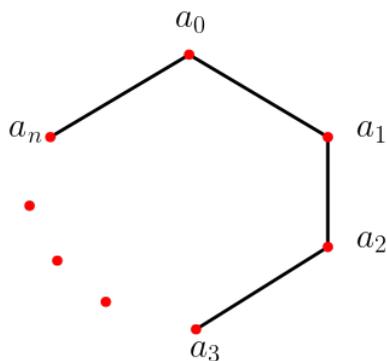


FIGURE 4.22 – Le plus petit cycle élémentaire dans  $\Gamma'(R) \setminus J(R)$ .

avec  $n \leq 4$ , ainsi on peut distinguer deux cas :

— Si  $a_i \notin m_1 \setminus m_2$ , pour tout  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , alors pour tout  $b \in m_1 \setminus m_2$ ,  $\Gamma'(R) \setminus J(R)$  contient le cycle suivant

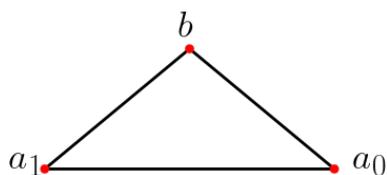


FIGURE 4.23 – Un triangle dans  $\Gamma'(R) \setminus J(R)$ .

Ainsi la maille du  $\Gamma'(R) \setminus J(R)$  est trois.

— Si il existe  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  tel que  $a_i \in m_1 \setminus m_2$ , ainsi

- Si  $i < n - 1$ , alors  $\Gamma'(R) \setminus J(R)$  contient le cycle suivant

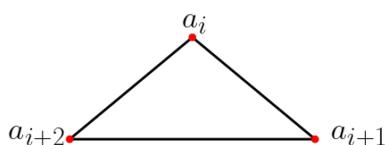


FIGURE 4.24 – Un triangle dans  $\Gamma'(R) \setminus J(R)$ .

Ainsi la maille du  $\Gamma'(R) \setminus J(R)$  est trois.

- Si  $i \geq n - 1$ , alors  $\Gamma'(R) \setminus J(R)$  contient le cycle suivant

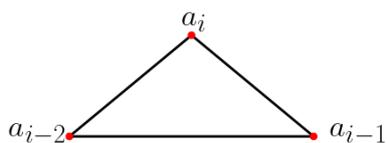


FIGURE 4.25 – Un triangle dans  $\Gamma'(R) \setminus J(R)$ .

Ainsi la maille du  $\Gamma'(R) \setminus J(R)$  est trois.

□

Rappelons qu'un ensemble dominant d'un graphe  $G = (S, A)$  est un sous-ensemble  $D$  de l'ensemble  $S$  des sommets tel que tout sommet qui n'appartient pas à  $D$  possède au moins une arête commune avec un sommet de  $D$ . Et l'ordre de plus petit ensemble dominant d'un graphe est noté  $\beta(G)$ .

La proposition suivant caractérise cette notion pour les graphes de co-diviseur de zéro :

**Proposition 4.5.** *Soit  $R$  un anneau fini non-local. Alors*

$$\beta(\Gamma'(R) \setminus J(R)) \leq 2.$$

*Démonstration.* Soit  $m_1, m_2 \in \text{Max}_l(R)$  deux idéaux distincts. Et soient

$$a \in m_1 \setminus \bigcup_{m \in \text{Max}_l(R), m \neq m_1} m \quad \text{et} \quad a \in m_2 \setminus \bigcup_{m \in \text{Max}_l(R), m \neq m_2} m.$$

Il est facile de démontrer que l'ensemble  $\{a, b\}$  est dominant dans  $\Gamma'(R) \setminus J(R)$ , ainsi

$$\beta(\Gamma'(R) \setminus J(R)) \leq 2.$$

□

**Théorème 4.12.** *Soit  $R$  un anneau fini et  $|\text{Max}_l(R)| > 1$ . Alors*

$$\omega(\Gamma'(R) \setminus J(R)) \geq |\text{Max}_l(R)|.$$

*En particulier, si pour tout idéal maximal  $m \in \text{Max}_l(R)$ , l'ensemble des idéaux principaux incluent dans  $m$  est totalement ordonné. Alors*

$$\omega(\Gamma'(R) \setminus J(R)) = |\text{Max}_l(R)|.$$

*Démonstration.* Posons  $\text{Max}_l(R) = \{m_1, m_2, \dots, m_n\}$ , et  $a_i \in m_i \setminus \bigcup_{m \in \text{Max}_l(R), m \neq m_i} m$ , pour tout  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ . Il en résulte que l'ensemble  $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  forme une clique dans  $\Gamma'(R) \setminus J(R)$ . Ainsi

$$\omega(\Gamma'(R) \setminus J(R)) \geq |\text{Max}_l(R)|.$$

Supposons maintenant que pour tout idéal maximal  $m \in \text{Max}_l(R)$ , l'ensemble des idéaux principaux incluent dans  $m$  est totalement ordonné. Il en résulte que l'ensemble  $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  forme une clique maximale d'ordre  $|\text{Max}_l(R)|$  dans  $\Gamma'(R) \setminus J(R)$ , et de plus, tout les cliques maximales sont d'ordres  $|\text{Max}_l(R)|$ . Ainsi

$$\omega(\Gamma'(R) \setminus J(R)) = |\text{Max}_l(R)|.$$

□

On termine cette sous-section par la remarque suivante, concernant la connexité du  $\Gamma'(R) \setminus J(R)$  :

**Remarque 4.4.** *Soit  $R$  un anneau tel que  $|\text{Max}_l(R)| > 1$ . Ensuite, en utilisant une méthode similaire à celle que nous avons utilisée dans la preuve de [[2], théorème 2.3], on peut facilement voir que  $\Gamma'(R) \setminus J(R)$  est connexe et que son diamètre  $\text{diam}(\Gamma'(R) \setminus J(R))$  est au plus deux.*

### 4.3.2 Graphe de co-diviseur de zéro des matrices

Dans cette sous-section on va étudier le graphe cozero-diviseur des matrices, définies sur les corps finis, ainsi notons par  $\mathbb{F}_q$  un corps fini d'ordre  $q$ . Commençons tout d'abord, par le lemme suivant démonté par **Hsin-Ju Wang**.

**Lemme 4.4** ([40]). Soit  $R = M_n(\mathbb{F}_q)$ . Alors les assertions suivantes sont vérifiées

- (i)  $|Max_l(R)| = \frac{q^n - 1}{q - 1}$ .
- (ii) Tout les idéaux maximaux à gauche de  $R$  sont principaux.
- (iii) Il existe  $(q^n - 1)(q^n - q) \cdots (q^n - q^{n-2})$  éléments distincts peuvent être engendrer n'importe quelle idéal maximal à gauche de  $R$ .
- (iv) Pour tout  $m \in Max_l(R)$ , on a  $|m| = q^{n(n-1)}$ .

**Proposition 4.6.** Soit  $R = M_2(\mathbb{F}_q)$ . Alors  $\Gamma'(M_2(\mathbb{F}_q))$  est  $(q + 1)$ -biparti complet.

*Démonstration.* Soit  $m_i, m_j \in Max_l(R)$  distincts, ainsi d'après le lemme précédent on a :

$$|m_i| = |m_j| = q^2.$$

Alors pour tout  $a \in m_i \setminus \{0\}$  et  $b \in m_j \setminus \{0\}$ , on a

$$m_i = Ra \quad \text{et} \quad m_j = Rb$$

ainsi  $m_i \cap m_j = \{0\}$ . Soit maintenant deux éléments  $a, b \in W(R)^*$ , ainsi

- Si  $a$  et  $b$  contiennent au même idéal maximal, alors  $a$  et  $b$  ne sont pas adjacents dans  $\Gamma'(R)$ .
- Sinon, ils sont adjacents dans  $\Gamma'(R)$ .

Par suite d'après l'assertion (i) du lemme précédent, on a

$$|Max_l(R)| = q + 1.$$

Il en résulte que  $\Gamma'(M_2(\mathbb{F}_q))$  est  $(q + 1)$ -biparti complet. □

Rappelons que l'ordre d'un stable maximum d'un graphe  $G$  est notée  $\alpha(G)$ , et celle d'une clique maximum est notée  $\omega(G)$ .

**Théorème 4.13.** Soit  $R = M_2(\mathbb{F}_q)$ . Alors les assertions suivantes sont vérifiées

- (i)  $\Gamma'(R) \setminus J(R)$  est connexe et

$$diam(\Gamma'(R) \setminus J(R)) = 2$$

- (ii)  $\omega(\Gamma'(R) \setminus J(R)) \geq \frac{q^n - 1}{q - 1}$ .

- (iii)  $\alpha(\Gamma'(R) \setminus J(R)) \geq (q^n - 1)(q^n - q) \cdots (q^n - q^{n-2})$ .

*Démonstration.* (i) Puisque  $|max_l(R)| > 1$ , alors d'après la remarque [4.4],  $\Gamma'(R) \setminus J(R)$  est connexe. Il reste à démontrer que  $diam(\Gamma'(R) \setminus J(R)) = 2$ .

D'après le lemme [4.4], tout les idéaux maximaux à gauche de  $R$  sont principaux, et chaque idéal a au moins deux éléments distincts peuvent l'engendrer, ainsi  $\Gamma'(R) \setminus J(R)$  n'est pas complet. Il en résulte que

$$diam(\Gamma'(R) \setminus J(R)) = 2.$$

- (ii) En utilisant une méthode similaire à celle que nous avons utilisée dans la preuve de [[2], théorème 2.14(i)], on peut facilement voir que  $\omega(\Gamma'(R) \setminus J(R)) \geq |Max_l(R)|$ , ainsi d'après la remarque [4.4]

$$\omega(\Gamma'(R) \setminus J(R)) \geq \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

- (iii) D'après le lemme [4.4], Il existe un sous-graphe du  $\Gamma'(R) \setminus J(R)$  stable d'ordre  $(q^n - 1)(q^n - q) \cdots (q^n - q^{n-2})$ . Ainsi

$$\alpha(\Gamma'(R) \setminus J(R)) \geq (q^n - 1)(q^n - q) \cdots (q^n - q^{n-2}).$$

Cela termine la preuve du théorème. □

---

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] A. Abdollahi, *Commuting graphs of full matrix rings over finite fields*. Linear Algebra and its Applications. 428 (11) (2008), 2947-2954.
- [2] M. Afkhami and K. Khashyarmansh, *The cozero-divisor graph of a commutative ring*, Southeast Asian Bull. Math. 35 (2011) 753–762.
- [3] D.F. Anderson, A. Frazier, A. Lauve, P.S. Livingston, *The zero-divisor graph of a commutative ring*, II, Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, vol. 202, Marcel Dekker, NewYork, 2001, pp. 61–72.
- [4] D.D. Anderson, M. Naseer, *Beck's coloring of a commutative ring*, J. Algebra 159 (1993) 500–514.
- [5] D.F. Anderson, P.S. Livingston, *The zero-divisor graph of a commutative ring*, J. Algebra 217 (1999) 434–447.
- [6] S. Akbari and A. Mohammadian, *Zero-divisor graphs of noncommutative rings*, J. Algebra 296 (2006) 462–479.
- [7] S. Akbari, M. Ghandehari, M. Hadian, A. Mohammadian, *On commuting graphs of semisimple rings*. Linear algebra and its applications. 390 (2004), 345-355.
- [8] S. Akbari, A. Mohammadian, H. Radjavi, P. Raja, *On the diameters of commuting graphs*. Linear algebra and its applications. 418(1) (2006), 161-176
- [9] S. Akbari, P. Raja, *Commuting graphs of some subsets in simple rings*. Linear algebra and its applications. 416 (2) (2006), 1038-1047.
- [10] S. Akbari, M. Habibi, A. Majidinya and R. Manaviyat, (2013). *A note on co-maximal graph of non-commutative rings*. Algebras and Representation Theory, 16(2), 303-307.
- [11] M. Aschbacher, *"Finite Group Theory"*, Cambridge University Press, Cambridge, 1972.
- [12] R. Ash, *Basic Abstract Algebra*, Dover 2006
- [13] I. Beck, *Coloring of commutative rings*, J. Algebra 116 (1988) 208–226.
- [14] C. Berge, *Graphs*, North-Holland Mathematical Library, Vol. 6, North-Holland, Amsterdam. Second revised edition of part 1 of the 1973 English version, (1985).

- [15] N. Biggs, *Algebraic Graph Theory*. Cambridge University Press, Cambridge, 1993.
- [16] J. A. Bondy and U. S. R. Murty, *Graph theory with applications*, American Elsevier Publishing Co. Inc., New York, 1976.
- [17] N. Bourbaki, *Algèbre commutative*, Hermann, Paris (1961–1965).
- [18] M. Brickel, *Complements of zero-divisor graphs*, Plan B Project, Miami university, 2004.
- [19] G.A. Cannon, K.M. Neuerburg, S.P. Redmond, *Zero-divisor graphs of near-rings and semigroups*, in : H. Kiechle, A. Kreuzer, M.J. Thomsen (Eds.), *Nearrings and Nearfields*, Springer, Dordrecht, The Netherlands, 2005, pp. 189–200.
- [20] D. M. Cvetkovic, M. Doob, and H. Sachs, *Spectra of graphs - Theory and applications*, 3rd edition, Johann Ambrosius Barth Verlag, Heidelberg-Leipzig, 1995.
- [21] J.B. Derr, G.F. Orr, Paull S.Peck, *Noncommutative rings of order  $p^4$* , *Journal of Pure and Applied Algebra* 79(1994) 109-116.
- [22] R. Diestel, *Graph Theory*, 2nd edition, Springer, New York, (2000).
- [23] D. Eisenbud, *Commutative Algebra with a View Toward Algebraic Geometry*, Springer, coll. « GTM » (no 150), 2004 (1re éd. 1995) (lire en ligne [archive]), p. 76 (dans cet ouvrage — cf. p. 11 — tous les anneaux sont supposés commutatifs).
- [24] K. E. Eldridge, *Orders for finite noncommutative rings with unity*. *American Mathematical Monthly*. (1968), 512-514.
- [25] C. Francisco, L. Klingler, S. Sather-Wagstaff and Janet C. Vassilev (Eds.), *Progress in Commutative Algebra 2, Closures, Finiteness and Factorization*.
- [26] I. M. Isaacs, *Equally partitioned groups*, *Pacific J. Math.* 49 (1973) 109–116.
- [27] R. Gilmer, *Zero divisors in commutative rings*, *Amer. Math. Monthly* 93 (5) (1986) 382–387.
- [28] N. Ganesan, *Properties of rings with a finite number of zero divisors*, *Math. Ann.* 157 (1964) 215–218.
- [29] S. Kavitha, R. Kala, *On the genus of graphs from commutative rings*, *AKCE International Journal of Graphs and Combinatorics* 14 (2017) 27–34.
- [30] I. Kaplansky, *"Commutative Ring Theory"*, Revised Edition, University of Chicago Press, 1974.
- [31] A. V. Kelarev and C. E. Praeger, *On transitive Cayley graphs of groups and semigroups*, *European J. Combin.* 24 (2003), no. 1, 59–72.
- [32] T. Y. Lam, *A First Course in Noncommutative Rings* (Springer, New York, 2001).
- [33] G. R. Omid, E. Vatandoost, *On the commuting graph of rings*. *Journal of Algebra and Its Applications*. 10 (03) (2011), 521-527.
- [34] S.P. Redmond, *Structure in the zero-divisor graph of a non-commutative ring*, *Houston J. Math.* 30 (2) (2004) 345–355.

- [35] S.P. Redmond, *The zero-divisor graph of a non-commutative ring*, Internat. J. Commutative Rings 1 (4) (2002) 203–211.
- [36] J.L. Rotman, *An Introduction to the Theory of Groups*, Springer-Verlag 1999
- [37] P. K. Sharma and S. M. Bhatwadekar, *A note on graphical representation of rings*, J. Algebra 176 (1995) 124–127.
- [38] E. Vatandoost, F. Ramezani. *On the commuting graph of some non-commutative rings with unity*. Journal of Linear and Topological Algebra. Vol. 05, No. 04, 2016, 289- 294
- [39] E. Vatandoost, F. Ramezani , A. Bahraini, *On the commuting graph of non-commutative rings of order  $p^nq$* . J. Linear. Topol. Algebra, 03 (01) (2014), 1-6.
- [40] H. J. Wang, *Co-maximal graph of noncommutative rings*, Linear Algebra Appl. 430 (2009) 633–641.