UNIVERSITE SIDI MOHAMED BEN ABDELLAH
FACULTE DES SCIENCES ET TECHNIQUES

Licence Sciences et Techniques (LST)

MATHEMATIQUES ET APPLICATIONS

MEMOIRE DE FIN D'ETUDES

Pour l'obtention du Diplôme de Licence Sciences et Techniques

Titre

Espaces métrisables et propriété de Baire

Présenté par :

- **SAAD TALBI**

Encadré par :

- **Pr SEDDIK GMIRA**

Soutenu Le 07 Juin 2016 devant le jury composé de:

- Pr Mohammed Bekkalli
- Pr Anisse Ouadghiri
- Pr Seddik Gmira

Année Universitaire 2016 / 2017

FACULTE DES SCIENCES ET TECHNIQUES FES – SAISS

B.P. 2202 – Route d'Imouzzer – FES

212 (0)5 35 61 16 86 – Fax : 212 (0)5 35 60 82 14

Remerciements

Je remercie Dieu tout puissant qui m'a aidé à mener ce travail à terme.

Je tiens à exprimer ma grande gratitude à Monsieur SEDDIK GMIRA, mon encadrant qui a accepté favorablement de m'encadrer pendant ce projet et qui m'a guidé avec ses précieux conseils. Je le remercie également pour la grande patience dont il a fait preuve tout au long des discussions dont j'ai bénéficié énormément.

Mes remerciements vont aussi à tous les enseignants qui ont contribué à notre formation au sein de la faculté des sciences et techniques de Fès.

En fin j'adresse également mes remerciements profonds à tous ceux qui ont participé de loin ou proche à l'élaboration de ce modeste travail

Table des matières

Introduction

Ce travail nous mène à prendre en considération une structure indispensable dans la topologie, il s'agit des filtres et leurs intervention dans les espaces métrisables.

La théorie des filtres représente un outil très puissant en topologie. Elle a été inventé en 1937 par H.Cartan et utilisée ensuite par N.Bourbaki. La structure ' filtre' intervienne lorsque la notion de la limite n'est pas suffisante, c'est exactement le cas dans un espace topologique qui n'admet pas un système fondamental dénombrable de voisinages, donc le concept des filtres représente une extension de la limite, et par la suite il va nous permettre de traiter les cas les plus générales.

En se basant sur les filtres on verra certaines propriétés des espaces métrisables notamment la propriété de Baire et ses applications sur des espaces remarquables dont on cite celui de Banach et de Fréchet.

Nous allons décomposer ce travail en trois chapitres :

Le premier chapitre présente d'une manière générale la notion d'un filtre qui a donneé naissance à certains théorèmes en particulier une démonstration élégante du théorème de Tychonov, et celui de Hahn-Banach .

Pour le deuxième chapitre on va s'appuyer sur les connaissances acquises au premier en ordre de mieux concevoir les espaces métrisables et leurs structures.

Dans le troisième chapitre nous abordons la propriété de Baire qui est une propriété métrique fondamentale en Analyse, elle est à la base de la preuve de théorème de Banach-Steinhaus . EIle a aussi des conséquences très surprenantes dans les espaces métriques.

Chapitre I : Filtres et bases de filtres

En ordre de caractériser une topologie on a besoin d'un système fondamental dénombrable de voisinages, lorsque ce n'est pas le cas, on est amené d'utiliser les « filtres »

I. Filtres

Définition 1.1

Soit X un ensemble, une partie $\mathcal{F}$ de P(X) est dite un filtre sur X si elle vérifie les axiomes suivantes :

1) $\mathcal{F} \neq \emptyset$ et $\emptyset \notin \mathcal{F}$

2) $A \in \mathcal{F}$ et $A \subset B \subset X$ entraînent $B \in \mathcal{F}$

3) $A \in \mathcal{F}$ et $B \in \mathcal{F}$ entraînent $A \cap B \in \mathcal{F}$

Exemples :

1) Sur un ensemble X, la famille $\mathcal{F}$ de toutes les parties de X qui contiennent un élément donné $x \in X$ constitue un filtre ;

$\mathcal{F} = \{A \in P(X) / \ x \in A\}$ est dite filtre principal.

2) L'ensemble $\mathcal{V}(x)$ des voisinages d'un point $x \in X$ est un filtre sur X.

3) Pour E=**N**, $\mathcal{F} = \{A \subset \mathbb{N};\ A^c \text{ fini}\}$ est un filtre, appelé le filtre de Fréchet.

Démonstration :

2) soit X un ensemble et $x \in X$, Notons alors $\mathcal{V}(x)$ l'ensemble des voisinages de x.

i) $X \in \mathcal{V}(x) \implies \mathcal{V}(x) \neq \emptyset$

ii) $\emptyset \notin \mathcal{V}(x)$

iii) $V, W \in \mathcal{V}(x) \Longrightarrow V \cap W \in \mathcal{V}(x)$ (au moins il y aura une intersection en x)

iv) $V \in \mathcal{V}(x)$ tq $V \subset W \Longrightarrow W \in \mathcal{V}(x)$

Définition1.2

Soit X un espace topologique, E un ensemble muni d'un filtre $\mathcal{F}$. Une famille $(x_\alpha)_{\alpha \in E} \subset X^E$ converge suivant le filtre $\mathcal{F}$ si

$$\forall V \in \mathcal{V}(l)\ \exists F \in \mathcal{F}\ \forall \alpha \in F,\ x_\alpha \in V.$$

Remarque :

Si E=**N** et si $\mathcal{F}$ est le filtre précédent, on retrouve la définition de la convergence d'une suite.

II. Base de filtre

Définition 2.1 :

Une partie $\mathcal{B}$ de P(X) est dite une base de filtre si elle vérifie :

1) $\mathcal{B} \neq \emptyset$ et $\emptyset \notin \mathcal{B}$

2) Soient $B_1 \in \mathcal{B}$ et $B_2 \in \mathcal{B}$, il existe $B_3 \in \mathcal{B}$ qui vérifie $B_3 \subset (B_1 \cap B_2)$.

Remarque :

On peut définir une base d'un filtre de la façon suivante :

Proposition 2.1:

Soit X un ensemble, une partie $\mathcal{B}$ de $\mathcal{P}(X)$ est une base de filtre si l'ensemble définit :

$$\mathcal{F} = \{A \in \mathcal{P}(X) / A \text{ contient un élément de } \mathcal{B}\} \text{ est un filtre.}$$

On dit que $\mathcal{B}$ une base de $\mathcal{F}$ i.e $\mathcal{F}$ est le filtre engendré par la base $\mathcal{B}$.

Démonstration :

Il est immédiat que la famille $\mathscr{F}$ ainsi constituée vérifie les axiomes 1, 2,3. On a d'autre part $\mathscr{B} \subset \mathscr{F}$ et tout $A \in \mathscr{F}$ contient un $B \in \mathscr{B}$.

Réciproquement, étant donné une partie $\mathscr{B} \subset \mathscr{F}$, où $\mathscr{F}$ est un filtre, pour que **B** $\mathscr{B}$ engendre $\mathscr{F}$ par la construction précédente, il est nécessaire que $\mathscr{B}$ soit une base au sens de la définition précédente, c'est-à-dire que $\mathscr{B}$ vérifie i) et ii) ; i) résulte de 1 et 2 et ii) est une conséquence immédiate de 3.

Exemples :

1) $\mathscr{B} = \{ [-r , r] \ / \ r>0 \}$ est la base d'un filtre de voisinages de 0 dans IR.

2) $\{ \{x\} \}$ est une base du filtre principal $\mathcal{F}_x$. avec $x \in X$.

Proposition 2.2:

Pour que deux bases de filtre $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ sur X soient équivalentes, (engendrent le même filtre), il faut et il suffit que tout ensemble $B \in \mathscr{B}$ contienne un $B' \in \mathscr{B}'$ et vice versa.

Démonstration :

On a $\mathscr{B} \subset \mathscr{F}$ et $\mathscr{B}' \subset \mathscr{F}$, d'autre part, tout $A \in \mathscr{F}$ contient un $B \in \mathscr{B}$ (et un $B' \in \mathscr{B}'$) ; en prenant $A = B \in \mathscr{B}$, puis $A = B' \in \mathscr{B}'$, on a établi la condition nécessaire, la condition suffisante est évidente.

III. Image d'un filtre et d'une base de filtre par une application

Soient X et Y deux ensembles et $f : X \to Y$ une application de X dans Y.

A) Soient $\mathscr{B}$ une base de filtre sur X : la famille $\mathscr{B}'$ des $f(A)$ pour $A \in \mathscr{B}$ vérifie i) et ii) car $\mathscr{B}' = \{ f(A) \}_{A \in \mathscr{B}}$ n'est pas vide ; on a en effet $A \neq \emptyset$ et $\mathscr{B} \neq \emptyset$ (axiome i). De plus si l'on a $A_1 \in \mathscr{B}$ et $A_2 \in \mathscr{B}$ il existe $A_3 \in \mathscr{B}$, vérifiant $A_3 \subset (A_1 \cap A_2)$ et l'on a $f(A_3) \subset \mathscr{B}'$, $f(A_3) \subset [f(A_1) \cap f(A_2)]$ ce qui établit ii) pour $\mathscr{B}'$ et achève de montrer que $\mathscr{B}'$ est une base de filtre.

B) Si $\mathcal{F}$ est un filtre sur X, $f(\mathcal{F})$ n'est pas un filtre en général (par exemple si f n'est pas surjective), or $f(\mathcal{F})$ est une base de filtre sur Y d'après A), car $\mathcal{F}$ est une base de filtre sur X.

C) Soit $\mathcal{B}'$ une base de filtre sur Y, et $f : X \to Y$ une application surjective. Alors $\{f(A')\}$ pour $A' \in \mathcal{B}' \subset \mathcal{P}(Y)$ engendre une famille $\mathcal{B}$ de parties de X qui est une base de filtre .En effet $f^{-1}(A')$ n'est jamais vide car f est surjective. soient $A'_1 \in \mathcal{B}'$, $A'_2 \in \mathcal{B}'$ **:** il existe $A'_3 \in \mathcal{B}'$ tel qu'on ait $A'_3 \subset (A'_1 \cap A'_2)$;on a alors $\mathbf{f^{-1}(A'_3) \subset [f^{-1}(A'_1) \cap f^{-1}(A'_2)]}$ ce qui établit ii) pour $\mathcal{B}$**.**

D'après ce qui précède on a pu démontrer l'énoncé suivant :

Proposition 3.1:

a) Soit $f : X \to Y$ une application de l'ensemble X dans Y. L'image par f d'un filtre $\mathcal{F}$ ou d'une base de filtre $\mathcal{B}$ sur X est une base de filtre sur Y.

b) Si f est surjective, $\mathbf{f^{-1}}$ transforme une base de filtre $\mathcal{B}'$ sur Y en une base de filtre sur X.

c) Si f n'est pas supposé surjective, pour que $f^{-1}(\mathcal{B}')$ soit une base de filtre, sur X, il faut et il suffit que tout ensemble de $\mathcal{B}'$ rencontre Imf = f(x).

La partie c) sera établie plus loin.

Corollaire :

Soit $X \subset Y$ et $i : X \to Y$ l'injection canonique : l'image $i(\mathcal{B})$ d'une base de filtre sur X est une base de filtre sur Y.

IV. Image par restriction :

Soit $\mathcal{F}$ un filtre sur X . On dira que la famille $\mathcal{F}_X = \{A_X\}$ pour A parcourant $\mathcal{F}$ est la trace de $\mathcal{F}$ sur X.

Proposition4.1 :

Pour que $\mathcal{F}_X$ soit un filtre sur X, il faut et il suffit que tout ensemble $A \in \mathcal{F}$ rencontre X.

Démonstration :

C'est évidement nécessaire d'après l'axiome 1. C'est suffisant car l'axiome 1 est alors vérifié, de plus, soit $A_X = A \cap X$,$A \in \mathcal{F}$, et soit B vérifiant $A_X \subset B \subset X$; $B = [B \cup A] \cap X$ appartient à $\mathcal{F}$ et 2 vérifié ; enfin, si $A'_X \in \mathcal{F}_X$ et $A''_X \in \mathcal{F}$, on a $A' \in \mathcal{F}$,$A'' \in \mathcal{F}$ et $A'_X \cap A''_X = (A' \cap A'') \cap X$ appartient à $\mathcal{F}_X$. Ce qui établit la proposition 4.1 . On a également établit la c) de la proposition 3.1 qui découle de la proposition 4.1 et de la proposition 3.1,b) où l'on considère l'application surjective $X \to f(X) \subset Y$.

Chapitre II : Espaces métrisables

Un espace métrisable est un espace topologique sur lequel on peut définir une distance telle que la topologie associée à cette distance coïncide avec celle de l'espace considéré. L'intérêt de la distance provient du fait que l'on peut la définir sur un espace même si il ne possède aucune structure algébrique.

I Espace métrisable :

Définition1.1:

Un espace topologique E est dit métrique s'il est muni d'une application $(x,y)\in E\times E\to\delta(x,y)\in IR^+$ qui vérifie les axiomes suivantes :

1. $\delta(x,y)\geq 0$, $\delta(x,y)=0 \Rightarrow x=y$
2. $\delta(x,z)\leq \delta(x,y)+\delta(y,z)$
3. $\delta(x,y)=\delta(y,x)$
4. En tout point $x\in E$ les boules $S_{x,n}=[\ y\in E\ ;\ \delta(x,y)<\frac{1}{n}\ ,\ n\in IN^*\ ]$ forment une base de filtre $\mathcal{F}_X$ des voisinages de x.

La fonction δ s'appelle métrique ou distance sur E .Un espace topologique E est dit métrisable s'il existe une métrique δ sur E qui vérifie **l'axiome 4** ; il est évidement nécessaire que la topologie de E soit séparée avec une base dénombrable donnée par :

$$U_n=[x\in E\ ,y\in E\ ;\quad \delta(x,y)<\frac{1}{n}].$$

Définition 1.2 :

Un groupe topologique est un groupe $(G,\ *)$ muni d'une topologie pour laquelle les applications :

$$G\times G\to G \qquad\qquad G\to G$$
$$(x,y)\to x*y \qquad\qquad x\to x^{-1}$$

sont continues .

Théorème :

Un groupe $(G, *)$ muni d'une topologie est un groupe topologique si et seulement si l'application :

$$G \times G \to G$$

$$(x,y) \to x * y^{-1}$$

est continue.

Exemple :

Le groupe additif (IR,+) des réels est un groupe topologique.

Théorème 1.1 :

Soit G un groupe abélien topologique (GAT) .Pour qu'il existe sur G une métrique δ invariante par les translations : $\delta(x,y)= \delta(x-y,0)$, c'est-à-dire il existe une application $d : G \to IR^{+}$ verifiant les propriétés :

1) $d(x) \geq 0$, $d(x)=0 \implies x = 0$ (élément neutre)
2) $d(x+y) \leq d(x) + d(y)$
3) la topologie sur G est engendrée par la métrique $\delta(x,y)=d(x-y)$, au sens 4) de la **définition 1.1.**

Il faut et il suffit que la topologie sur G soit séparée et que le filtre $\mathcal{F}_0$ des voisinages de l'élément neutre ait une base dénombrable $\{ V_n \}_{n \in IN}$

Definition 1.3 (corps valué)

On dit qu'un corps K est valué s'il est muni d'une valeur absolue $x \longrightarrow |x|$ Celle-ci détermine sur K une structure d'espace métrique définie par la distance invariante par translation $d(x,y)=|x-y|$.

Théorème 1.2 :

Pour qu'un espace vectoriel topologique sur un corps valué non discret K soit un espace métrisable, il faut et il suffit qu'il soit séparé et que le filtre $\mathcal{F}_0$ des voisinages de l'origine ait une base dénombrable $\{V_n\}$ **.** S'il en est ainsi, il existe une pseudo-norme, $x \in E \longrightarrow d(x) \geq 0$,

c.-à-d. une application de E dans IR^{+} avec les propriétés :

1. $d(x) \geq 0$, $d(x)=0 \implies x = 0$
2. $d(x+y) \leq d(x) + d(y)$
3. $d(\lambda x) \leq d(x)$ pour tout $x \in E$ et tout $\lambda \in K$, $|\lambda| \leq 1$; en particulier $d(-x)=d(x)$.
4. la métrique $\delta(x,y) = d(x-y) = \delta(x-y,0)$ définit sur E est invariante par translation.

Démonstration :

On démontre simultanément les théorèmes **1** et **2** . Si E a une structure d'espace vectoriel topologique , on choisit une base $\{V_n\}$ de $\mathcal{F}_0$ composée de voisinages ; $\bigcap_n V_n=\{ \mathbf{0} \}$;on choisit les V_n vérifiant dans les deux cas :

(1) $V_{n+1} + V_{n+1} \subset V_n \qquad n \in IN$

On va définir d(x) d'après l'appartenance de x aux V_n ; pour faciliter la démonstration de (2),on définira deux applications $n \longrightarrow 2^{-n}$ et $n \longrightarrow V_n$ $n \in IN$,et pour une famille finie d'entiers, soit $H=\{ n_1,n_2 \ldots\ldots\ldots, n_q\}$, on posera :

$$P_H = \sum_{n_k \in H} 2^{-n_k} \qquad ; \qquad V_K = \sum_{n_k \in H} V_{n_k}$$

c.-à-d. : $V_H = \{ x_{n_1} + x_{n_2} \ldots\ldots\ldots x_{n_q} \}$ où x_{n_k} parcourt V_{n_k} , $n_k \in H$

On pose $|H|=\inf [n_k , n_k \in H]$. Alors : $P_H < 2^{-n}$ entraine $n<|H|$ et $V_H \subset V_n$.

On pose $d(x)=1$ si $x \not\in V_H$ et $d(x)= \{ \inf P_H , x \in V_H \}$

si x appartient a un V_H : $0 \leq d(x) \leq 1$ .Puisque les V_n et les V_H disqués , on a $d(\lambda x)<d(x)$ pour $\lambda \in K$, $|\lambda| \leq 1$, ce qui établit (III) si $E \subset$ (EVT).la propriété (II) n'a besoin d'être établie que si l'on a $d(x)+d(y) \leq 1$.

Choisissons $\varepsilon >0$ tel que l'on ait $d(x)+d(y)+2\varepsilon < 1$, alors il existe par définition de d(x)des ensembles finis ,H et K tels que l'on ait $x \in V_H$,$y \in V_K$,et $P_H<d(x) +\varepsilon$, $P_K<d(y)+ \varepsilon$.

On a alors $\sigma = P_H+P_K <1$; l'écriture de σ dans le système binaire, $\sigma=\sum_{j \in IN} a_j \; 2^{-j}$

$a_j=0$ ou 1, est unique, σ étant une fraction de dénominateur 2^s, avec $s=\sup [n , n \in H_k]$.

Soit $M =\{ j \in IN , a_j \neq 0 \}$.On a $\sigma=P_M =P_H+ P_K$ et $P_M =P_H+ P_K < d(x)+d(y) +2\varepsilon$.

D'autres part, la somme vectorielle $V_H+V_K=\sum V_n$ $n \in H \cap K$, se calcule a partir de (1).

Pour $n\in H \cap K$, on écrit $V_n+V_n \subset V_{n-1}$ .On opère simultanément dans la somme $P_H + P_K$ la réduction $2^{-n} +2^{-n} =2^{-n+1}$ .Alors on a : $V_H+V_K \subset V_M$ en même temps que $P_M =P_H + P_K$;

$x \in V_H$, $y\in V_K$ entraine donc $x+y \in V_M$ et les majorations :

$d(x+y)\leq P_M =P_H + P_K \leq d(x)+d(y)+2\varepsilon$, ce qui établit l'inégalité (II).

Il reste a établir (IV) : montrons que les boules $S_\varepsilon=[x\in E \ ; \ d(x) < \varepsilon]$ forment une base du filtr $\mathcal{F}_0$,de base $\{V_n\}$;il suffit d'établir :

$$(3) \quad S_{2^{-n-1}} \subset V_n \subset S_{2^{-n}} \qquad \forall n \in IN$$

On a $V_n \subset S_{2^{-n}}$ car $x\in V_n$ entraine $d(x)<2^{-n}$;

D'autres part, $d(x)<2^{-n-1}$ entraine l'éxistence d'une famille d'entiers H telle que l'on ait $x \in V_H$ et $P_H \leq 2^{-n}$.

On a vu plus haut qu'il en résulte $V_H \subset V_n$ ce qui établit la première inclusion (3).Ainsi la topologie définie par la structure uniforme $x-y \in S_\varepsilon$ est séparée , invariante par translation , coïncide avec la topologie d'espace vectoriel définie par les $\{V_n\}$ sur E , et c'est aussi celle définie par la métrique $\delta(x,y)=d(x-y)$. La démonstration du théorème **2** est achevée ; celle du théorème **1** s'obtient en choisissant les V_n vérifiant seulement (1) et symétriques.

Remarque :

a) Si E n'est pas supposé séparé , la démonstration précedente établit encore l'éxistence de d(x) avec les propriétés (2) ,(3),(4) et $d(x) \geq 0$.
b) En générale , il ne sera pas possible de remplacer la pseudo-norme par une norme de la topologie T_d engendrée par la pseudo-norme d(x) rendra continues les opérateurs d'addition et de symétrie du groupe abélien, le produit $(\lambda,x)\rightarrow \lambda x$, $\lambda \in K$, $x \in E$ .Toutefois ,ce produit sera continue pour T_d si d(x) a les propriétés supplémentaires **a)** $\lambda_n\rightarrow 0$ entraine $d(\lambda_n x)\rightarrow 0$ $\forall x \in E$, **b)** $d(x_n)\rightarrow 0$ $\forall \lambda \in K$ (on vérifie alors qu'on a $\lambda x\rightarrow \lambda_0 x_0$ quand $\lambda\rightarrow\lambda_0$ et $x\rightarrow x_0$) .

II Propriétés des espaces métrisables :

Proposition 2.1 :

Soit f une application d'un ouvert G d'un espace métrisable E dans IR . Alors , les propriétés suivantes sont équivalentes :

1) f(x) est localement bornée supérieurement.
2) f(x) est bornée supérieurement sur les compacts.
3) f(x) est bornée supérieurement sur les suites convergentes

Démonstration :

La propriété (I) énonce que tout x ∈ G a un voisinage ouvert U_x auquel on peut associer : $\exists$ $M_x \in IR$, $M_x < \infty$, tel qu'on ait f(y)≤ M_x pour y∈ U_x .Alors (I)⟹(II) car si K⊂G est compact , on peut recouvrir K par un nombre finie de points tels U_x , x∈K ;(II)⟹(III) car si $x_n \longrightarrow x \in$ G , x ∪ $\{x_n\}$ est compact dans G .Enfin , (III)⟹(Î) car si (I) est en défaut , il existe x ∈ G et pour chaque boule $S_n = [x \in$ G ; $d(x,y) < \frac{1}{n}$ $, n \in IN]$,$S_n \subset$ G il existe un $y_n \subset S_n$

Avec f(y_n) >n ,alors y_n converge vers y et f n'est pas bornée sur $\{y_n\}$.

Proposition 2.2 :

Pour qu'un espace métrique E soit complet , il faut et il suffit que toute suite de Caushy sur E soit convergente .

Dans un tel espace , pour que x soit adhérent a une partie A non vide de E ,il faut et il suffit qu'il existe une suite $x_n \in A$, $x_n \to$ x ; la condition est nécessaire dans toute espace topologique et seule la condition suffisante utilise l'hypothèse que $\mathcal{F}_0$ a une base dénombrable : x∈ $\bar{A}$ a un système fondamental de voisinages V_n, qu'on peut choisir d'une manière a vérifier $V_{n+1} \subset V_n$;pour tout n∈ IN ; $V_n \cap A \neq \varnothing$; il existe alors $x_n \in V_n \cap A$ et l'on a $x_n \to$ x , $x_n \in A$.

Définition 2.1 :

Soient *E* un **K**-espace vectoriel et *F* un sous-**K**-espace vectoriel. L'**espace vectoriel quotient** de *E* par *F*, noté *E*/*F*, est l'ensemble des sous-espaces affines [v]= v+*F*, où v parcourt *E*, muni des lois suivantes :

i) [*v*]+[*w*]=[*v*+*w*]

ii) λ [v]=[λ v]

L'application v → [v] est une application linéaire surjective dont le noyau est F.

Théorème 2.1 :

L'espace quotient E_1=E/M , d'un EVT métrisable E sur un corps valué K par un sous-espace fermé M est un espace vectoriel métrisable. Si E est complet , E_1 est complet .Si x→d(x) est une pseudo-norme engendrant la topologie de E , alors :

d'(ξ)=[inf d(x) ; x ∈ ξ] ; ξ ={ x+M }=classe de x est une pseudo-norme sur E_1 et engendre sa topologie.

Démonstration :

Il est imédiat que d'(ξ) vérifie (IV) ;de plus, on a d'(ξ) >0 , d'(0)=[inf d(y) , y∈ M] , donc d'(0)=d(0)=0 , **,** et réciproquement d(ξ)=0 entraine l'existence d'une suite y_n avec $d(y_n)$ →0 avec $y_n \in \xi$,donc $\xi = 0$, M étant fermé .Enfin pour ε> 0 donné,ilexiste x∈ ξ , y ∈ η tels que d($\xi + \eta$) < d(x+y) <d(x) +d(y) <d(ξ) +d(η) +2ε ce qui établit la (II).

Reste à établir que d' engendre sur E_1 la topologie quotient . Soit $\xi = q(x)$ la projection canonique de E sur E_1 , et V_n une base de $\mathcal{F}_0$ dans E formé par les boules V_n =[x∈ E , $d(x) < n^{-1}$] : les images $V'_n=q(V_n)$ sont les boules V'_n = [ξ ∈ E_1 ; d'(ξ)<n^{-1}] .Or les V'_n forment une base des voisinages de l'origine dans E_1 , la projection q (pour la topologie quotient) étant ouverte et continue .Donc la métrique δ(ξ , η)=d'($\xi - \eta$) engendre la topologie quotinet sur E_1.

Supposons E complet ; pour établir que l'espace métrique E_1 l'est aussi , il suffit d'établir que toute suite (σ)={ξ_n} de Caushy converge dans E_1 .On extrait de {ξ_n} une sous suite (σ') (notée encore {ξ_n}) telle que d'(ξ_{n+1}- ξ_n) <2^{-n-1} .On peut alors trouver pour chaque n∈ IN, un $y_{n+1} \in \xi_{n+1}- \xi_n$ de manière que d(y_{n+1})<2^{-n} .Alors x_1∈ ξ_1 ayant été choisi , l'élément x_n=$y_1 + y_2.....y_n$ est dans ξ_n pour n≥2 et l'on a d($x_{n+1}-x_n$)=d(y_{n+1}) <2^{-n} ; donc x_n est une suite de Caushy dans E ;elle converge vers un point x∈ E ,E étant complet .Soit ξ =q(x)∈ E_1 la classe de x. On a ξ_n= q(x_n) →q(x)= ξ , donc la suite de Caushy (σ') converge vers ξ et il en est de meme de (σ), ce qui prouve que toute suite de Caushy sur E_1 converge ,donc d'après la **proposition 2.2 ,** E_1 est complet.

Remarque :

Si E est un EVT n'est pas métrisable tout en étant complet , et si M est un sous-espace fermé de E , $E_1=E/M$ n'est pas en général complet .

Chapitre III : propriété de Baire

I. Espace de Baire

Définition 1.1 :

On dit qu'un espace X est un espace de Baire (ou possède la propriété de Baire) s'il possède l'une des deux propriétés équivalentes :

1) Si $O_n \subset X$ est une famille dénombrable d'ouverts denses dans X, alors $\Omega = \cap\, O_n$

est dense dans X : $\overline{\Omega}$=X.

2) Si F_n , $\dot{F}_n = \varnothing$ est une famille dénombrable de fermés d'intérieure vide ,alors $\Phi = \cup\, F_n$ vérifie $\dot{\Phi} = \varnothing$ est d'intérieure vide $\widehat{\cup\, \dot{F_n}} = \varnothing$.

Remarque :

Il est clair qu'on passe de 1) à 2) en posant : $F_n = X - O_n$.

Proposition 1.1:

La propriété de Baire est une propriété locale de l'espace X. Plus précisément,pour que X soit un espace de Baire ,il faut et il suffit que tout ouvert $O \subset X$ soit un espace de Baire –ou encore tout point $x \in X$ possède un voisinage ouvert O_x qui soit un espace de Baire-

a) Montrons que $O \subset X$ est un espace de Baire : soient O_n des ouverts, $O_n \subset O$, $\overline{O_n} \supset O$ et $\Omega = \bigcap_n O_n$ .Formons $O'_n = O_n \cup (X - \overline{O_n})$: O'_n est ouvert et $\overline{O'_n}$ =X. Donc ,X étant espace de Baire , $\cap O'_n$ est dense dans X ; l'intersection des O'_n avec l'ouvert O est dense dans O , c.-à-d. $\cap\, O_n$ est dense dans O.

b) <u>Réciproquement</u>, si tout $x \in X$ a un voisinage U_x ouvert qui a la propriété de Baire ,X est un espace de Baire. Sinon il existerait des ouverts $O_n \subset X$, $\overline{O}_n = X$,$\Omega = \cap O_n$, $\overline{\Omega} \neq X$. Soit $x \in X - \overline{\Omega}$ et $U_x \subset X - \Omega$ et soit $O_n \cap U_x = O'_n$; $\cap O'_n$ est dense sur U_x ,donc $\cap O_n$ l'est aussi d'après $O'_n \subset O_n$; on en déduit $x \in \overline{\Omega}$ ce qui conduit a une contradiction.

Théorème :

Tout espace topologique X qui est soit localement compact, soit métrisable complet est un espace de Baire .

Démonstration :

Soient O_n des ouverts , $O_n \subset X$, $\overline{O_n} = X$ et soit $\Omega = \cap O_n$. Si l'on a $\overline{\Omega} \neq X$, il existe $x \in X - \overline{\Omega}$.

Montrons qu'on aboutit à une contradiction avec les deux hypothèses énoncées . Remarquons que dans les deux cas, X est un espace régulier :les filtres $\mathcal{F}_X$ possèdent une base constituée de voisinages fermés. Soit $G_1 = X - \overline{\Omega}$; G_1 est un ouvert non vide, il en est de même de $G_1 \cap O_1$.

Comme X est régulier , il existe un ouvert non vide G_2 , $G_2 \subset (G_1 \cap O_1)$. On continue en considérant l'ouvert non vide $G_2 \cap O_2$. De proche en proche , on détermine une suite décroissante G_n d'ouverts non vides

$$(1) \qquad G_{n+1} \subset (G_n \cap O_n)$$

En choisissant dans l'ouvert non vide $G_n \cap O_n$ un point et un voisinage fermé de ce point (noté $\overline{G_n}$, l'intérieure étant noté G_n) qui vérifie (1). Soit $g = \cap G_n = \cap \overline{G}_n$: il reste à montrer que'on a : $g \neq \varnothing$, car $x \in g$ implique $x \in O_n$ pour tout n , donc $x \in \Omega$, et l'on aura obtenu la contradiction désirée.

a) Si X est métrisable complet, on choisit $\overline{G_n}$ de manière que $\overline{G_n}$ soit petit d'ordre n^{-1}, c.-à-d que $\overline{G_n} \times \overline{G_n}$ soit contenu dans un entourage $\delta(x,y) < n^{-1}$ (ou encore que le diamètre de $\overline{G_n}$ soit inférieure a n^{-1}) ; Alors les $\overline{G_n}$ forment une base d'un filtre de caushy $\mathcal{F}$, et l'espace étant séparé et complet , $\mathcal{F}$ converge vers un point $x \in g$.

b) Si X est localement compact, tout x ∈ X a un voisinage compact et l'on prendra pour n≥2 des $\overline{G_n}$ compacts. Alors la suite des ensembles fermés $\overline{G_n}$ décroissants non vides portés par le compact $\overline{G_2}$ a une intersection g non vide, et on obtient encore $g \neq \varnothing$, ce qui achève la démonstration .

II. Les ensembles maigres

La propriété de Baire conduit à la définition suivante :

Définition 2.1 :

Une partie A d'un espace topologique E est dite maigre si A est contenue dans une réunion dénombrable d'ensemble $F_n \subset E$, fermés, vérifiant $\dot{F_n} = \varnothing$.

D'une manière évidente , on a :

Proposition 2.1 :

Une réunion dénombrable d'ensembles maigres est maigre .

Proposition 2.2 :

Si E un espace de Baire, et $A \subset E$ un ensemble maigre, $\dot{A} = \varnothing$.

Proposition 2.3 :

Si A est maigre et $B \subset A$, alors B est maigre

Proposition 2.4 :

Soit E un EVT sur un corps K non discret .Alors, ou bien E est un espace de Baire , ou bien E est maigre pour sa topologie .

Démonstration :

En effet, si E n'est pas un espace de Baire, il existe des fermés F_n ,$\dot{F}_n=\varnothing$ avec

$\Phi = \bigcup_n F_n$, $\dot{\Phi} \neq \varnothing$

Donc $\dot{\Phi} \subset \bigcup_n F_n \subset E$ est un ouvert maigre dans E. Alors la topologie étant invariante par translation, il existe un voisinage disqué de l'origine, soit V, qui est maigre, c.-à-d contenu dans une réunion dénombrable d'ensembles fermés F'_n, avec $\dot{F}'_n = \varnothing$. Mais V étant absorbant et K non discret, il existe une suite $\lambda_n \in K$, $|\lambda_n| \to +\infty$ de manière qu'on ait $E \subset \sum \lambda_n V$; Alors E est maigre.

III. Applications :

a) Les espaces de Banach (espaces normés complets) :

Ce sont des espaces métriques : une distance δ(x,y) est obtenue en posant :

$$\delta(x,y)=p(x-y)$$

p étant la norme .

b) Les espaces de Fréchet :

Sont des espaces séparés complets où $\mathcal{F}_0$ a une base $\{ V_n \}$ dénombrable formée de V_n convexes ; il est équivalent de dire que $\mathcal{F}_0$ a une base $V_n=\{ x \in E ; p_m < n^{-1} \}$, où $\{p_m\} = \Gamma$ est une famille dénombrable de semi-normes. Un espace de Fréchet est donc métrisable complet

Les espaces de Banach et les espaces de Fréchet sont donc des espaces métrisables complets; ils sont donc des espaces de Baire.

Exemple : Théorème de Banach-steinhaus.

Soit $x \in E \to T(x) \in F$ où T est une application linéaire continue d'un espace de Banach E sur IR dans un espace de Banach F ; soit $T \in \Phi$, Φ famille des applications linéaire continues qui s'identifie a une partie Φ de dual E' . Alors pour que Φ soit une famille également continue, il faut et il suffit qu'il existe une majoration :

$\|T(x)\| \leq A(x) < \infty$, pour tout $T \in \Phi$ et pour tout x de A, où A est un ensemble non maigre dans E ; il existe alors une constante $C\varphi$ telle qu'on ait $\|T(x)\| \leq C\varphi \|x\|$ $\forall x \in E$.

Démonstration :

$\boldsymbol{E_{m,T}}$ =[$x \in E$; $\|T(x)\| \leq m$] est un ensemble fermé et il en-est de même de :

$E_m = \bigcap_{T\in\Phi} E_{m,T}$ =[$x \in E$; $\sup\|T(x)\| \leq m$].

On a donc A$\subset$ [$\bigcup_m E_m$], et puisque A est non maigre, ceci n'est possible que si l'un des E_m a un intérieure non vide ; alors $\dot{E_m} \neq \varnothing$ entraine l'existence d'une boule B, soit $\|x-x_0\| \leq \rho$ contenue dans E_m et l'on a pour h$\in E$, $\|h\| \leq \rho$,

$$T(h)=T(x') - T(x_0) , \quad x' \in B$$

$$\|T(h)\| \leq 2_m \quad \text{pour } \|h\| \leq \rho$$

$$\|T(x)\| \leq 2_m \ \rho^{-1} \ \|x\| \qquad \text{pour tout } T \in \Phi$$

Bibliographie

- Pièrre Lelong Ferraud, Introduction à l'analyse fonctionnelle I Espace vectoriels topologiques. Centre de documentation universitaire. Paris-V.
- http://www.bibmath.net/dico/index.php?action=affiche&quoi=./f/filtre.html
- http://dictionnaire.sensagent.leparisien.fr/Filtre%20(math%C3%A9matiques)/fr-fr/