كلية العلوم و التقنيات فاس
ⵜⴰⵖⵉⵡⴰⵏⵜ ⵏ ⵜⵎⴰⵙⵙⴰⵏⵉⵏ ⴷ ⵜⵙⵏⵉⵜⵉⵏ
Faculté des Sciences et Techniques de Fès

جامعة سيدي محمد بن عبد الله
ⵜⴰⵙⴷⴰⵡⵉⵜ ⵙⵉⴷⵉ ⵎⵓⵃⵎⵎⴰⴷ ⴱⵏ ⵄⴱⴷⵍⵍⴰⵀ
Université Sidi Mohamed Ben Abdellah

DEPARTEMENT DES MATHEMATIQUES

Master Mathématique et Application au Calcul Scientifique (MACS)

MEMOIRE DE FIN D'ETUDES

Pour l'obtention du Diplôme de Master Sciences et Techniques (MST)

Convergences des mils

Réalisé par : **SAFOUAN Safaa**

Encadré par : **Pr. EZZAKI Fatima**

Soutenu le 16 juillet 2021

Devant le jury composé de :

-Pr. ETTAOUIL Mohamed	Président
- Pr. EZZAKI Fatima	Encadrante
- Pr. EL HARAMI Mohamed	Membre
- Pr. EL KHAOULANI EL IDRISSI Rachid	Membre
- Pr. TAHRI Khalid	Membre

Année Universitaire 2020 / 2021

FACULTE DES SCIENCES ET TECHNIQUES FES – SAISS

B.P. 2202 – Route d'Imouzzer – FES

212 (0)5 35 61 16 86 – Fax : 212 (0)5 35 60 82 14

Site web : http://www.fst-usmba.ac.ma

Dédicaces :

Je dédie ce modeste travail à :

A ma mère, qui m'a donnée la vie, la tendresse
et le courage pour réussir.

A mon père, qui m'a présentée pour
moi le symbole de l'amour et le respecte.

A mon frère.

A *mes chers amis, avec eux j'ai partagée*
des moments inoubliables
de souffrance et de joie.

A *tous mes professeurs pour leur soutien*
au cours de toutes mes années d'études.

A tous ceux qui sont proches de mon cœur,
et dont je n'ai pas cité le nom.

SAFOUAN Safaa

Remerciements

Á l'issue de ce mémoire de fin d'étude, je tiens à exprimer mes vifs remerciements et ma profonde gratitude à tous ceux qui ont contribué de prêt ou de loin à sa réalisation.

Je voudrais remercier tout particulièrement la Professeur Fatima EZZAKI, de m'avoir encadrée tout au long de ce mémoire avec beaucoup de patience et de gentillesse. elle a su motiver à chaque étape de mon travail par des remarques pertinentes et a su me faire progresser dans mes recherches. Je le remercie très sincèrement pour sa disponibilité et sa œil critique m'a été très précieux pour structurer le travail et pour améliorer la qualité des différentes sections.

Je tiens également à exprimer toute ma gratitude et tout mon sentiment de reconnaissance aux professeurs ETTAOUIL Mohamed, EL HARAMI Mohamed, EL KHAOULANI EL IDRISSI Rachid et TAHRI Khalid. Pour l'honneur qu'ils me font d'accepter d'être membres de jury de ce mémoire.

J'adresse mes sincères remerciements et ma grande reconnaissance à tous mes professeurs de le Mathématique et Applications aux Calculs Scientifiques.

Je n'oublie pas de remercier mes parents mes amis, qui m'ont toujours soutenu durant mes études.

Enfin, je tiens à vous témoigner toute ma reconnaissance pour la confiance que vous m'avez accordée. Sans vous tout ceci n'aurait pas été possible.

Table des matières

Dédicaces **2**

Remerciements **3**

Introduction **5**

Acronymes **7**

1 Convergence des mils dans le cas univoque **9**
1.1 Préliminaires et notation 9
1.2 Les martingales à la limite réelles 10
1.3 Mils dans un espace de Banach 12

2 Convergence des mils multivoque à un paramètre **19**
2.1 Martingale à la limite dans $\mathcal{L}^1_{cwk(E)}(\mathcal{F})$ 19
2.1.1 Notation 19
2.1.2 Les résultats de convergence des mils dans $L^1_E(\mathcal{F})$ 22
2.2 Résultats de convergence et décomposition des mils dans $\mathcal{L}^1_{cwk(E)}(\mathcal{F})$ . . 25

3 Convergence des mils multivoque à 2 paramètres **30**
3.1 Notation et définition 30
3.2 Convergence d'un mil optionnel 31

Conclusion générale **40**

Bibliographie **42**

Introduction

Au cours de ces dernières années, certains probabilistes ont introduit une nouvelle notion plus générale que les martingales à savoir, les martingales à la limite.

Les martingales à la limite ont été introduites pour la première fois par **Mucci** dans [15], [16] (1973-1976) comme une extension non triviale et importante des martingales. **Edgar** et **Sucheston** se sont intéressés à ces extensions en publiant en 1977 dans [9] un travail sur les processus aléatoires amarts et martingales à la limite où il ont démontré que tout amart est une martingale à la limite. En 1985 dans [17] **Talagrand** a étudié les pramarts et les mils. Des notions plus générales que les martingales. Où tout pramart est une martingale à la limite et toute martingale à la limite est un mil. Cela pose naturellement la question de savoir si cette théorie peut être construite autour du concept des martingales à la limite. L'idée principale derrière ces extensions est de prouver la convergence de ces processus stochastiques en observant le comportement des espérances conditionnelles.

La notion des mils donné par **Talagrand** est plus pratique et il vérifie des bonnes propriétés ce qui lui avait donné plus de succès. Cette définition remplace des fois celle des martingales à la limite. Plus tard le concept des martingales à la limite multivoque a été introduit par **Castating** et **Ezzaki** en 1990 dans [6]. Ils ont prouvé la décomposition et la convergence des mils multivoques à valeurs dans l'ensemble des parties convexes faiblement compactes d'un espace de Banach E ayant la propriété Radon-Nikodym (RNP).

Le travail présenté dans ce rapport est composé de trois chapitres ; dans le premier chapitre nous donnons des notations et des définitions qui nous seront utiles pour démontrer la convergence des martingales à la limite à valeurs réelles. A la fin de ce chapitre nous abordons la décomposition et la convergence des mils à valeurs dans un

espace de Banach.

Le deuxième chapitre présente les mils multivoques indexés par les éléments de $\mathbb{N}$ (mils à un paramètre) qui sont intégrablement bornés et à valeurs dans l'ensemble des parties convexes faiblement compactes d'un espace de Banach ayant la propriété RNP. Le résultat obtenu est une généralisation de la convergence des mils vectorielles.

Dans le dernier chapitre nous présentons une nouvelle version des mils multivoque plus générale que celle étudiée dans le second chapitre se sont les mils multivoques indexés par des couples dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ appelé mils à deux paramètres. Dans cette partie nous démontrons la convergence de ce processus au sens de la topologie de Mosco.

Acronymes

- $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace probabilisé.
- $L^1 = L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$: l'espace des fonctions intégrables.
- $(\mathcal{F}_n, n \geqslant 1)$: une filtration sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, $\mathcal{F}_\infty = \sigma\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_n\right)$.
- E un espace de Banach, E' son dual et E'_b le dual forte.
- $L^1_E(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ou, en abrégé, $L^1_E(\mathcal{F})$: l'espace des fonctions $\mathcal{F}$-mesurables et intégrables de Ω à valeurs dans E.
- $cwk(E)$: l'ensemble des parties convexes faiblement compactes non vides de E.
- $cf(E)$: famille des parties convexes fermées non vide de E.
- $\mathcal{L}^1_{cwk(E)}(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ou, en abrégé, $\mathcal{L}^1_{cwk(E)}(\mathcal{F})$: l'espace métrique complet de tous les multifonction $F : \Omega \to cwk(E)$ intégrablement bornées.
- $S^1_{E^{\mathcal{F}_n}(F)}$: l'ensemble des sélections $\mathcal{F}_n-$mesurables et intégrables de $E^{\mathcal{F}_n}(F)$.
- $S^1_F(\mathcal{F})$: l'ensemble des sélections $\mathcal{F}-$mesurables et intégrables de F.
- T : l'ensemble des temps d'arrêt bornés sur l'espace filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_n, P)$.
- T^1 : l'ensemble de tout 1-temps d'arrêt simple.
- $\mathcal{P}(X)$: famille des parties de X.

- τ_{Ma} : topologie de Mackey. C'est la topologie sur E engendrée par tous les ensembles absolument convexes et faiblement compacts dans E'.

- $\mathcal{R}(E)$: l'ensemble des convexes fermés dont l'intersection avec toute boule fermée de E est faiblement compacte.

- $\overline{\mathbb{N}} = \{(n, n),\ n \in \mathbb{N}\}$.

- la fonction distance :

$$d(x, C) = \inf\{\|x - c\|,\ c \in C\}$$

- la fonction d'appui : pour $x' \in E'$

$$\delta^*(x', C) = \sup\{< x', c >, \quad c \in C\}$$

- Distance de Hausdorff : $\forall C, D \in E$

$$h(C, D) = \max\left\{\sup_{x \in C} d(x, D), \sup_{x \in D} d(x, C)\right\}$$

CHAPITRE 1

Convergence des mils dans le cas univoque

1.1 Préliminaires et notation

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace probabilisé et $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite des variables aléatoires intégrables, et $(\mathcal{F}_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de sous $\sigma-$ algèbres de $\mathcal{F}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}$

$$X_n \text{ est } \mathcal{F}_n - \text{ mesurable}$$

$$\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+1}$$

$$\mathcal{F} = \sigma\left(\bigcup_1^\infty \mathcal{F}_n\right)$$

la suite $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n\geqslant 1}$ est dite une suite adaptée.

Théorème et Définitions 1.1 *Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace probabilisé, et $\mathcal{B}$ une sous-tribu de $\mathcal{F}$. Soit également X une variable aléatoire réelle définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, et intégrable. Alors il existe une unique variable aléatoire, appelée espérance conditionnelle de X sachant $\mathcal{B}$, notée $E(X \mid \mathcal{B})$, telle que :*

- *$E(X \mid \mathcal{B})$ est $\mathcal{B}$ -mesurable ;*
- *pour tout $B \in \mathcal{B}$, $\int_B E(X \mid \mathcal{B}) dP(\omega) = \int_B X(\omega) dP(\omega)$.*

Si $\mathcal{B}$ est la tribu engendrée par une variable aléatoire Y, on note aussi $E(X \mid Y)$.

Dans [1] Blake a définis $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n\geqslant 1}$ comme un GFT si

$$E\left(X_n \mid \mathcal{F}_m\right) - X_m \xrightarrow{P} 0$$

$$n \geqq m \longrightarrow \infty$$

c'est à dire, $\forall \varepsilon > 0$:

$$\lim_{n \geqq m \longrightarrow \infty} P\left(|E(X_n \mid \mathcal{F}_m) - X_m| > \varepsilon\right) = 0$$

Proposition 1.2 *Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite uniformément intégrable. Supposons que pour tout $A \in \sigma\left(\bigcup_1^\infty \mathcal{F}_n\right)$: $\lim_{n\longrightarrow\infty} \int_A X_n$ existe*
alors il existe $X \in L^1$ telle que

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \int_A X_n = \int_A X \qquad \forall A \in \mathcal{F}.$$

Preuve. Voir [15]

Théorème 1.3 *Soit $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n\geqslant 1}$ une suite adaptée. Alors les trois assertions suivantes sont équivalentes :*

(1) *Il existe $X \in L^1$ tel que $X_n \xrightarrow{L^1} X$.*
(2) *$(X_n)_{n\geqslant 1}$ est uniformément intégrable et $E\left(X_n \mid \mathcal{F}_m\right) - X_m \xrightarrow{P} 0$.*
(3) *$(X_n)_{n\geqslant 1}$ est uniformément intégrable et $X_n - X_m \xrightarrow{P} 0$.*

Corollaire 1.4 *Soit $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n\geqslant 1}$ une suite adaptée uniformément intégrable.*
Alors

$$E(X_n|\mathcal{F}_m) - X_m \xrightarrow{P} 0 \Longleftrightarrow X_n - X_m \xrightarrow{P} 0.$$

1.2 Les martingales à la limite réelles

Définition 1.5 *Soit $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n\geqslant 1}$ une suite adaptée, $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n\geqslant 1}$ est une martingale si : $\forall n \in \mathbb{N}^*$*

$$E^{\mathcal{F}_n}\left(X_{n+1}\right) = X_n \quad p.s.$$

A.G.Mucci a introduit la notion de "martingale à la limite" [15] [16] qui généralise considérablement celle de martingale.

Définition 1.6 *Soit $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n\geqslant 1}$ une suite adaptée intégrable alors $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n\geqslant 1}$ est une martingale à la limite si pour toute $n \in \mathbb{N}^*$*

$$\lim_{m\to\infty} \sup_{\substack{n\geqslant m \\ n\in\mathbb{N}^*}} \left|E^{\mathcal{F}_m} X_n - X_m\right| = 0, \qquad p.p.$$

Théorème 1.7 *Soit $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n\geqslant 1}$ une martingale à la limite uniformément intégrable. Alors il existe $X \in L^1$ tel que :*

$$X_n \to X \quad p.p$$

au sens de la norme L^1.

Preuve. El est claire que $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n\geqslant 1}$ est un GFT, d'après théorème 1.3, il existe $X \in L^1$ tel que $X_n \xrightarrow{L^1} X$.
Maintenant, pour une sous suite arbitraire $\{n'\}$;

$$|X_m - X| \leqq |X_m - E\left(X_{n'} \mid \mathcal{F}_m\right)| + |E\left(X_{n'} - X \mid \mathcal{F}_m\right)| + |E\left(X \mid \mathcal{F}_m\right) - X|$$

pour m assez grand d'après théorème de Levy on a $|E\left(X \mid \mathcal{F}_m\right) - X| < \varepsilon/3$.
comme $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n\geqslant 1}$ est une martingale à la limite alors pour tout $n' \geq m$ assez grand tel que $|X_m - E\left(X_{n'} \mid \mathcal{F}_m\right)| < \varepsilon/3$.
Notez d'abord que pour tout $\mathcal{A}$ sous σ algèbre de $\mathcal{F}$, nous avons

$$E\left(X_n \mid \mathcal{A}\right) \xrightarrow{L^1} E(X \mid \mathcal{A}).$$

Soit $\mathcal{F}_1$ une sous σ algèbre de $\mathcal{F}$ on a $E\left(X_n \mid \mathcal{F}_1\right) \xrightarrow{L^1} E\left(X \mid \mathcal{F}_1\right)$ implique l'existence d'une sous suite $\{n_1\} \subset \{n\}$ avec $E\left(X_{n_1} \mid \mathcal{F}_1\right) \longrightarrow E\left(X \mid \mathcal{F}_1\right)$ p.p.
De même soit $\mathcal{F}_2$ une sous σ algèbre de $\mathcal{F}$ on a $E\left(X_{n_1} \mid \mathcal{F}_2\right) \xrightarrow{L^1} E\left(X \mid \mathcal{F}_2\right)$ et on peut extraire $\{n_2\} \subset \{n_1\}$ avec $E\left(X_{n_2} \mid \mathcal{F}_2\right) \to E\left(X \mid \mathcal{F}_2\right)$ p.p.
Ainsi, il existe une sous suite $\{\bar{n}\} \subset \{n\}$ tel que $E\left(X_{\bar{n}} \mid \mathcal{F}_m\right) \to E\left(X \mid \mathcal{F}_m\right)$ p.p.
pour finir soit $\{n'\}$ une sous suite de $\{\bar{n}\}$, alors $|E\left(X_{n'} - X \mid \mathcal{F}_m\right)| < \varepsilon/3$.
D'où pour m assez grand on a $|X_m(\cdot) - X(\cdot)| < \varepsilon$ donc

$$X_n \to X \quad p.p \quad \text{sur la norme } L^1. \qquad \square$$

On rappelle qu'une suite $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n\geqslant}$ est dite bornée dans L^1 si $\sup_n \int_\Omega |X_n| < \infty$.

Remarque 1 *On sait que l'inégalité maximale est vraie pour les martingales, le théorème suivant va nous montrer que cette inégalité n'est pas applicable aux martingales à la limite.*

Théorème 1.8 *L'inégalité maximale ne s'applique pas aux martingales à la limite. Plus précisément, il existe une martingale à la limite $(X_n)_n$ bornée dans L^1 tel que :*

$$\sup_{\lambda>0} \lambda P(\sup_n |X_n| > \lambda) = \infty.$$

Preuve. Soit (A_i) une partition mesurable sur Ω avec $P\left(A_i\right) = \frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}, \quad i = 1, 2, \ldots$
Soit $X_i = i(i+1)1_{A_i}$, et $\mathcal{F}_i = \sigma(X_1, \ldots, X_i)$ (une σ-algèbre engendré par $X_1, \ldots, X_i$).
Alors $EX_i = 1$,

$$\begin{aligned} i(i+1)P\left(\sup_n |X_n| \geqslant i(i+1)\right) &= i(i+1)\sum_{n>i} P\left(A_n\right) \\ &= i(i+1)\sum_{n>i}(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}) \\ &= i+1 \to \infty \end{aligned}$$

$(X_n, \mathcal{F}_n)_{n\geqslant 1}$ est un martingale à la limite, car sur l'ensemble $\cup_{i<n} A_i$ on a,

$$E\left(X_m \mid \mathcal{F}_n\right) - X_n = 0 \quad p.s.$$

et $\lim_n \left(\bigcup_{i<n} A_i\right) = \Omega$.

1.3 Mils dans un espace de Banach

La notion des mils sont plus générale que les martingales à la limite, mais elle bénéficie de meilleure propriétés probabilistes.
Soit E un espace de Banach.

Définition 1.9 *On dit qu'une suite adaptée $(X_n)_{n\geqslant 1}$ de variable aléatoire à valeurs dans un espace de Banach E est un mil*[1] *si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe p tel que pour tout $n \geq p$ on a*

$$P\left(\sup_q\{\|X_q - E^{\mathcal{F}_q}(X_n)\|;\ p \leq q \leq n\} > \varepsilon\right) \leq \varepsilon.$$

La notion introduite dans la Définition 1.9 est plus générale que la notion de martingale à la limite dans la section 1, alors que ses propriétés de convergence sont aussi bonnes. Si $(X_n)_{n\geqslant 1}$ est une martingale à la limite pour tout $\varepsilon > 0$ il existe p, et une fonction mesurable h_p, avec $P(h_p > \varepsilon) < \varepsilon$ tel que $\|X_q - E^{\mathcal{F}_q}(X_n)\| \leq h_p$ pour tout $p \leq q \leq n$. En particulier, une martingale à la limite est un mil.

Théorème 1.10 *Une suite adaptée $(X_n)_{n\geqslant 1}$ à valeurs dans un espace de Banach E qui converge presque sûrement et dans L^1, est un mil.*

Preuve. Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite converge presque sûrement et dans L^1, soient Y ça limite et $Y_n = E^{\mathcal{F}_n}(Y)$. Comme X_n et Y_n converge presque sûrement vers Y, donc $Z_n = X_n - Y_n$ tend vers 0 p.s dans L^1.
Soit $\varepsilon > 0$ il existe p_1 telle que

$$P\left(\sup_{q\geq p_1}\|Z_q\| \geq \varepsilon\right) \leq \varepsilon$$

Comme $(Z_n)_n$ converge vers 0 dans L^1, il existe $p \geq p_1$ tel que $\|Z_n\|_1 \leq \varepsilon^2$ pour $n \geq p$. l'inégalité maximale vérifie que :

$$P\left(\sup_{q\leq n}\|E^{\mathcal{F}_q}(Z_n)\| \geq \varepsilon\right) \leq \varepsilon$$

donc, pour tout $n \geq p$, on a

$$P\left(\sup_{p_1\leq q\leq n}\|E^{\mathcal{F}_q}(Z_n) - Z_q\| \geq 2\varepsilon\right) \leq 2\varepsilon$$

donc $(Z_n)_{n\geqslant 1}$ est un mil, d'où $X_n = Y_n + Z_n$ est un mil.

1. mil est un abréviation de l'expression en anglais "**m**artingale **i**n **l**imit".

Théorème 1.11 *Un mil* $(X_n)_{n\geqslant 1}$ *à valeurs réelles tel que* $\liminf_n E|X_n| < \infty$, *est converge presque sûrement.*

Preuve. Supposons que $(X_n)_{n\geqslant 1}$ est un mil qui ne converge pas p.s.
Montrons que $\lim_n E\,|X_n| = \infty$.
Ils existes $a < b$ et un ensemble $A \in \mathcal{F}$ avec $P(A) > 0$ telle que

$$\limsup X_n(\omega) > b,\ \liminf X_n(\omega) < a \qquad \text{pour tout } \omega \in A.$$

En ajoutant une constante, on peut supposer que $a \geq 0$. Le point principal de la preuve est le suivant.
Claim. Soient $n_1 \in \mathbb{N},\ \varepsilon > 0$. Alors il existe $n_2 \geq n_1$ telle que pour tout $D \in \mathcal{F}_{n_1}$, tel que $P(D) \leq P(A)/2$ et $n \geq n_2$ il existe $E \in \mathcal{F}_{n_2}$ avec $P(E) < \varepsilon$, $E \cap D = \varnothing$ telle que

$$\int_E |X_n|\, dP \geq (b-a)P(A)/12.$$

Preuve. (***Claim***) [17].
Pour démontrer le théorème, nous construisons maintenant par récurrence une suite croissante $(n_p)_{p\geqslant 1}$ avec la propriété suivante : pour tout $D \in \mathcal{F}_{n_p}$ tel que $P(D) \leqslant P(A)/2$ et $n \geqslant n_{p+1}$, il existe $E \in \mathcal{F}_{n_{p+1}}$ avec $P(E) < 2^{-p}P(A),\ E \cap D = \varnothing$ telle que

$$\int_E |X_n|\, dP \geqslant (b-a)P(A)/12.$$

Maintenant soit $n \geqslant n_p$. On construit par récurrence pour $i \leqslant p$ des ensembles disjoints $D_i \in \mathcal{F}_{n_i}$, tel que $D_1 = \varnothing, P\left(D_i\right) \leqslant 2^{-i}P(A)$ et

$$\int_{D_i} |X_n|\, dP \geq (b-a)P(A)/12$$

Alors

$$\int_\Omega |X_n|\, dP \geq \int_{\bigcup_{i=2}^p D_i} |X_n|\, dP$$

En suite on a

$$E\,|X_n| \geq (p-1)(b-a)P(A)/12$$

par conséquence

$$\lim_n E\,|X_n| = \infty$$

D'où $(X_n)_{n\geqslant 1}$ converge presque sûrement.

Définition 1.12 *La suite* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est dite équi-intégrable si et seulement si*

$$\lim_{a\to+\infty} \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{\{|X_n|>a\}} |X_n|\, dP = 0$$

Corollaire 1.13 *Soit* $(X_n)_{n\geq 1}$ *une suite adaptée à valeurs réelles et équi-intégrable, alors* $(X_n)_{n\geq 1}$ *converge p.s. si et seulement si* $(X_n)_{n\geq 1}$ *est un mil.*

Théorème 1.14 *Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ un mil à valeurs dans E tel que pour tout $n \geqslant 1$, $\liminf \int \|X_n\| dP < +\infty$. Si pour tout $x' \in E'$, $< x', X_n > \to 0$. Alors*

$$\|X_n\| \to 0 \quad p.s.$$

Preuve. La démonstration sera très similaire à celle du théorème 1.11.
On suppose par absurde que $(X_n)_{n\geqslant 1}$ est un mil à valeur dans E qui converge scalairement vers 0, mais qui ne converge pas presque sûrement.
On doit montrer que $lim_n E\|X_n\| = \infty$, et cela prouvera le théorème.
Alors ils existes $a > 0$ et un ensemble $A \in \mathcal{F}$ avec $P(A) > 0$ telle que

$$\limsup \|X_n(\omega)\| > a \quad \text{pour tout } \omega \in A.$$

Le point principal de la preuve est le suivant :

Claim. Soient $n_1 \in \mathbb{N}$, $\varepsilon > 0$. Alors il existe $n_2 \geq n_1$ telle que pour tout $D \in \mathcal{F}_{n_1}$ tel que $P(D) \leq P(A)/2$ et pour $n \geq n_2$ il existe $E \in \mathcal{F}_{n_2}$ avec $P(E) < \varepsilon$, $E \cap D = \varnothing$ telle que

$$\int_E \|X_n\| dP \geq P(A)/16.$$

Preuve. (***Claim***) [17].
Le reste de la preuve se termine exactement comme dans le théorème précédente.
Nous construisons par récurrence une suite croissante $(n_p)_{p\geq 1}$ qui vérifie le résultat suivant : pour tout $D \in \mathcal{F}_{n_p}$ tel que $P(D) \leq P(A)/2$ et $n \geq n_{p+1}$, il existe $E \in \mathcal{F}_{n_{p+1}}$ avec $P(E) < 2^{-p}P(A)$, $E \cap D = \varnothing$ tel que

$$\int_E \|X_n\| dP \geq P(A)/16.$$

Maintenant soit $n \geq n_p$. On construit par récurrence pour $i \leq p$ des ensembles disjoints $D_i \in \mathcal{F}_{n_i}$, avec $D_1 = \varnothing, P(D_i) \leq 2^{-i}P(A)$, et

$$\int_{D_i} \|X_n\| dP \geq P(A)/16.$$

Alors

$$\int_\Omega \|X_n\| dP \geq \int_{\bigcup_{i=2}^p D_i} \|X_n\| dP$$

En suite on a

$$E\|X_n\| \geq (p-1)P(A)/16$$

par conséquence

$$\lim_n E\|X_n\| = \infty.$$

ce qui absurde, alors

$$\|X_n\| \to 0 \quad p.s.$$

Théorème 1.15 *Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ un mil à valeurs dans un espace de Banach séparable E tel que $\liminf \int \|X_n\| dP < \infty$. Alors il existe une unique décomposition $X_n = Y_n + Z_n$ où Y_n est une martingale bornée dans L^1, et Z_n est un mil tel que $Z_n \to 0 \quad p.s$*

Preuve. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ un mil à valeurs dans E tel que $\liminf E\|X_n\| < \infty$ alors d'après la théorème 1.11, on a pour tout $x' \in E'$, $\lim_p < x', X_p >$ existe .
En appliquant le lemme de Fatou à la suite $(< x', X_p >)_p$ on conclue que la limite est intégrable.
Soit $(x_n)_n$ une suite dense dans E. Pour tout n, soit

$$V_n = \{x' \in E';\ \|x'\| \leq 1,\ \forall i \leq n,\ |< x',\ x_i >| \leq 1/n\}$$

pour chaque x dans E, on écrit

$$\|x\|_n = \sup\{< x', x >; x' \in V_n\}$$

C'est un norme sur E, et pour $x \in E$ on a $\lim \|x\|_n = 0$.
Maintenant on fixe $q \in \mathbb{N}$. Soit $h = \liminf \|X_n\|$, d'après lemme de Fatou on a $\int h \leq \liminf \int \|X_n\| < \infty$ donc h est intégrable.
Soit $g = E^{\mathcal{F}_q} h$, on remarque que si $x' \in E'$ telle que $\|x'\| \leq 1$, on a $\lim_s < x', X_s > \leq h$.
On définie g_n par

$$g_n = \operatorname{ess\,sup}\left\{E^{\mathcal{F}_q} \lim_s < x', X_s >;\ x' \in V_n\right\}$$

on a $g_n \leq g$. g_n est une suite décroissante.
Résultat principale

$$\lim_n g_n = 0 \quad p.s$$

la preuve de la *Résultat principale* est exactement comme les théorèmes 1.11 et 1.14.
On suppose par absurde que cette résultat n'est pas vrai, alors il existe $a > 0$ et $A \in \mathcal{F}$ avec $P(A) > 0$ tel que $\forall n$ on a $g_n > a$ sur A.
Soit $0 < \eta < \frac{P(A)}{2}$ tel que pour $D \in \mathcal{F}$, on a $P(D) < 3\eta$ et

$$\int_D g dP < a\frac{P(A)}{8}$$

On doit utilise ça pour démontrer :
Claim.
Soit $n_1 \in \mathbb{N}$, $\varepsilon > 0$. Alors il existe $n_2 \geq n_1$ telle que pour chaque $D \in \mathcal{F}_{n_1}$ tel que $P(D) \leq P(A)/2$ et $n \geq n_2$ il existe $E \in \mathcal{F}_{n_2}$ avec $P(E) < \varepsilon$, $E \cap D = \varnothing$ telle que

$$\int_E \|X_n\| dP \geq aP(A)/8.$$

Preuve. [17].
D'abord, on procède comme les démonstrations présidentes, on déduit alors que

$\liminf E\|X_n\| = \infty$; contradiction. D'où le résultat principale est prouvé.
D'après le théorème d'Egoroff on a $\forall\varepsilon > 0$ il existe $A \in \mathcal{F}$ tel que $P(A) < \varepsilon$ et g_n tend vers 0 uniformément dans A^c.
Par suite soit $k > 0$ fixé, il existe $B_k \in \mathcal{F}_q$ avec $P(B_k) > 1 - \frac{1}{k}$ tel que

$$g_n \overset{CU}{\longmapsto} 0 \text{ dans } B_k$$

Considère un opérateur :

$$\begin{aligned} T : E' &\longrightarrow L^\infty = L^\infty(B_k, \mathcal{F}_q|B_k, P|B_k) \\ x' &\longmapsto T(x') = E^q\left(\lim_s < x', X_s >\right) \end{aligned}$$

La restriction de T à la boule unité sur E' est faiblement continue pour la norme *, de suite il existe un opérateur compact V de $L^1(B_k, \mathcal{F}_q|B_k, P|B_k)$ à F telle que $T = V'$.
Puisque V est un compact, d'après [8] il y a un mesurable bornée Bochner $W^k : B_k \to F$ tel que $V(\phi) = \int \phi W^k dP$ pour $\phi \in L^1$, il suit que $< x', W^k >= T(x')$ pour $x' \in E'$.
Donc on obtient Y_q est $\mathcal{F}_q$ -mesurable tel que

$$\|Y_q\| \leq g \text{ et } < x', Y_q >= E^{\mathcal{F}_q} \lim_s < x', X_s > \text{ pour } x' \in E'$$

il est claire que (Y_k) est une martingale, bornée dans L^1.
Si on pose $Z_n = X_n - Y_n$ alors Z_n est un mil qui vérifie ; $\liminf E\|Z_n\| < \infty$, de plus Z_n tend scalairement vers 0, donc d'après théorème 1.14 on a $(Z_n) \to 0$ *p.s.*
On conclue que $X_n = Y_n + Z_n$ tel que Y_n est une martingale bornée dans L^1, et Z_n est un mil tel que $Z_n \to 0$ *p.s.*

Corollaire 1.16 *Tout les mils à valeurs dans E qui bornés dans L^1 sont converges si et seulement si F vérifie la propriété de Radon Nikodym.*

Définition 1.17 *On notera T l'ensemble des temps d'arrêt adaptés à la filtration $(\mathcal{F}_n)$ à valeurs dans $\mathbb{N}$ et ne prenant qu'un nombre fini de valeurs (autrement dit des temps d'arrêt bornés).*

Définition 1.18 *Soit T une application de Ω dans $\mathbb{N}$*

(i) On dit que T est un temps d'arrêt (de la filtration $\mathcal{F}_n$) si pour tout entier $n \geq 0, \{T \leq n\} \in \mathcal{F}_n$.

(ii) On appelle tribu des événements antérieurs à T et on note $\mathcal{F}_T$ la tribu

$$\mathcal{F}_T = \{A \in \mathcal{F}_\infty, \text{ pour tout } n \geq 0, \ A \cap \{T \leq n\} \in \mathcal{F}_n\}$$

Pour définir une notion de convergence de $(EX_\tau)_{\tau \in T}$, on commence par préciser une relation d'ordre sur T :

Remarque 2 *On munit T d'une relation d'ordre partiel de la façon suivante : on dit que $\tau \leqslant \tau'$ si $P(\{\omega : \tau(\omega) \leqslant \tau'(\omega)\}) = 1$*

La convergence de $(EX_\tau)_{\tau \in T}$ est alors une convergence de "filets". la terminologie introduite par Komornik (section 2.5 p 39 de [12]).

Définition 1.19 *Soit $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$ une suite adaptée intégrable, on dit que $(X_n)_{n\geq 1}$ est un **amart** (Asymptotic martingale) si la suite $(EX_\tau)_{\tau \in T}$ est converge.*

Théorème 1.20 *Tout amart à valeurs réels est une martingale à la limite.*

Preuve. On suppose que $(X_n, \mathcal{F}_n)$ n'est pas une martingale à la limite, alors il existe $\alpha, \delta > 0$ tel que

$$P\left\{\limsup_{n\to\infty}\left(\sup_{m>n}\|E\left[X_m \mid \mathcal{F}_n\right] - X_n\|\right) > \delta\right\} > 2\alpha.$$

donc, soit ;

$$P\left\{\limsup_{n\to\infty}\left(\sup_{m>n}\left(E\left[X_m|\,\mathcal{F}_n\right] - X_n\right)\right) > \delta\right\} > \alpha$$

ou bien ;

$$P\left\{\limsup_{n\to\infty}\left(\sup_{m>n}\left(X_n - E\left[X_m \mid \mathcal{F}_n\right]\right)\right) > \delta\right\} > \alpha$$

Comme (X_n) peut remplace par $(-X_n)$, on prendre un entier N, alors on a

$$P\left\{(\exists n \geqslant N)(\exists m \geqslant n)E\left[X_m|\,\mathcal{F}n\right] - X_n > \delta\right\} > \alpha$$

Donc il existe $N',\ N < N'$ tel que

$$P\left\{\exists n, m; N \leqslant n \leqslant m \leqslant N'; E\left[X_m \mid \mathcal{F}_n\right] - X_n > \delta\right\} > \alpha$$

Pour $N \leqslant n \leqslant N'$, on définit :

$$A_n = \left\{\exists m, n \leqslant m \leqslant N', E\left[X_m \mid \mathcal{F}_n\right] - X_n > \delta\right\}, \quad \text{et } A = \bigcup_{n=N}^{N'} A_n.$$

Ainsi $A_n \in \mathcal{F}_n$ pour tout n, et $P(A) > \alpha$. On définit τ_1, τ_2 par

$$\tau_1(\omega) = \begin{cases} \min\left\{n : N \leqslant n \leqslant N', \omega \in A_n\right\} & \text{pour } \omega \in A \\ N' & \text{pour } \omega \notin A \end{cases}$$

$$\tau_2(\omega) = \begin{cases} \min\left\{m : n \leqslant m \leqslant N', E\left[X_m \mid \mathcal{F}_n\right] - X_n > \delta\right\} & \text{pour } \omega \in A_n \backslash \left(A_N \cup A_{N+1} \cup \cdots \cup A_{n-1}\right) \\ N' & \text{pour } \omega \notin A. \end{cases}$$

Maintenant soit n, m, on a $\{\tau_1 = n, \tau_2 = m\} \in \mathcal{F}_n$. Donc :

$$\begin{aligned} E[X_{\tau_2}] - E[X_{\tau_1}] &= \sum_{n=N}^{N'} \sum_{m=n}^{N'} E\left[(X_m - X_n)\, 1_{\{\tau_1=n,\tau_2=m\}}\right] \\ &= \sum_{n=N}^{N'} \sum_{m=n}^{N'} E\left[(E[X_m \mid \mathcal{F}_n] - X_n)\, 1_{\{\tau_1=n,\tau_2=m\}}\right] \\ &= E\left[(E[X_m | \mathcal{F}_n] - X_n)\, 1_A\right] \geqslant \delta\alpha \end{aligned}$$

Alors pour tout entier N, il existe $\tau_1, \tau_2 \in T, N \leqslant \tau_1 \leqslant \tau_2$, tel que

$$E[X_{\tau_2}] - E[X_{\tau_1}] \geqslant \delta\alpha$$

d'où $(X_n)_{n\geq 1}$ n'est pas un amart.

CHAPITRE 2

Convergence des mils multivoque à un paramètre

2.1 Martingale à la limite dans $\mathcal{L}^1_{cwk(E)}(\mathcal{F})$

2.1.1 Notation

Soit E un espace de Banach séparable, E'_b son dual forte.
On désigne par $\mathcal{L}^1_{cwk(E)}(\mathcal{F})$ l'espace des multifonctions $\mathcal{F}-$mesurables F de Ω dans $cwk(E)$ telle que

$$|F| : \ \omega \mapsto \sup \{\|u\|(\omega) \ : \ u(\omega) \in F(\omega)\} \ \ soit\ intégrable\ sur\ \Omega$$

et pour $F \in cwk(E)$, $x' \in E'$ la fonction d'appui

$$\delta^*(x', F) = \sup\{< x', y >, \ y \in F\} \ \ est\ \mathcal{F} - mesurable$$

où $< ., . >$ est le crochet de dualité.
Une suite $(A_n)_{n\geq 1}$ dans $cwk(E)$ est converge vers un ensemble convexe faiblement compacte A_∞ au sens de Mosco (voir [14]), si

$$A_\infty = s - \liminf \ A_n = w - \limsup \ A_n$$

où

$$s - \liminf \ A_n = \{y \in E, \ y_n \longrightarrow y, \ y_n \in A_n, \quad \forall n \geq 1\}$$
$$w - \limsup \ A_n = \{y \in E, \ y_k \xrightarrow{w} y, \ y_k \in A_{n_k}, \ \forall k \geq 1\}$$

où $(A_{n_k})_{k\geq 1}$ est une sous suite de $(A_n)_{n\geq 1}$. Si $(A_n)_{n\geq 1}$ est converge au sens de Mosco vers A_∞ dans $cwk(E)$, on écrit :

$$M - \lim \ A_n = A_\infty$$

Définition 2.1 *Soit $\Gamma : \Omega \longrightarrow \mathcal{P}(X)$, une fonction $\sigma : \Omega \longrightarrow X$ est dite sélection de Γ si $\sigma(\omega) \in \Gamma(\omega)$ pour tout $\omega \in \Omega$.*

Soit $F \in \mathcal{L}^1_{cwk(E)}(\mathcal{F})$, lorsque E'_b est séparable, alors l'espérance conditionnelle de F est un élément de $\mathcal{L}^1_{cwk(E)}(\mathcal{F})$ telle que

$$S^1_{E^{\mathcal{F}_n}(F)} = \{E^{\mathcal{F}_n} f \ : \ f \in S^1_F(\mathcal{F})\}$$

et pour tout $x' \in E'$, on a

$$\delta^*(x', E^{\mathcal{F}_n}(F)) = E^{\mathcal{F}_n}(\delta^*(x', F)).$$

Définition 2.2 *On suppose que E'_b est séparable, une suite adaptée $(F_n)_{n\geq 1}$ dans $\mathcal{L}^1_{cwk(E)}(\mathcal{F})$ est un mil si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe p tel que pour tout $n \geq p$ on a*

$$P\left(\sup_{p\leq q\leq n} h(F_q, E^{\mathcal{F}_q}(F_n)) > \varepsilon\right) < \varepsilon$$

Il est claire que si $(F_n)_{n\geq 1}$ est un mil dans $\mathcal{L}^1_{cwk(E)}(\mathcal{F})$, alors pour tout x' dans la boule unité B' de E'_b, la suite $(\delta^*(x', F_n))_{n\geq 1}$ est un mil dans $L^1_{\mathbb{R}}(\mathcal{F})$ puisque on a

$$h(F_q, E^{\mathcal{F}_q}(F_n)) = \sup_{x'\in B'} |\delta^*(x', F_q) - E^{\mathcal{F}_q}(\delta^*(x', F_n))|$$

Définition 2.3 *On suppose que E'_b est séparable, une suite adaptée $(F_n)_{n\geq 1}$ dans $\mathcal{L}^1_{cwk(E)}(\mathcal{F})$ est un GFT[1] si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe p tel que pour tout $n \geq m \geq p$ on a*

$$P\left(h(F_m, E^{\mathcal{F}_m}(F_n)) > \varepsilon\right) < \varepsilon$$

Remarque 3 *Tout mil est un GFT.*

Théorème 2.4 *Soit E un espace de Banach, supposons que E'_b est séparable. Soit $F \in \mathcal{L}^1_{cwk(E)}(\mathcal{F})$. Alors on a*

$$M - \lim_n E^{\mathcal{F}_n}(F)(\omega) = F(\omega) \quad p.s$$

Preuve. Il faut montre que $w{-}\limsup\ E^{\mathcal{F}_n}(F)(\omega) \subset F(\omega) \subset s{-}\liminf\ E^{\mathcal{F}_n}(F)(\omega)$ $p.s.$

1) $F(\omega) \subset s - \liminf\ E^{\mathcal{F}_n}(F)(\omega) = F(\omega)$ $p.s.$
Soit $f \in S^1_F(\mathcal{F})$ d'après théorème de Levy on a $\lim_n E^{\mathcal{F}_n}(f)(\omega) = f(\omega)$ $p.s.$

1. GFT : abréviation de l'expression en anglais "game which become fairer with time".

Comme $E^{\mathcal{F}_n} f(\omega) \in E^{\mathcal{F}_n}(F)(\omega)$ donc $f(\omega) \in s - \liminf\ E^{\mathcal{F}_n}(F)(\omega)\ p.s.$
On utilise la représentation de Castaing de F ([7]), on déduit que

$$F(\omega) \subset s - \liminf\ E^{\mathcal{F}_n}(F)(\omega)\ p.s.$$

2) $w - \limsup\ E^{\mathcal{F}_n}(F)(\omega) \subset F(\omega)\ p.s.$
Soit $(e_k)_{k\geq 1}$ une suite dense dans E' au sens de la topologie $\tau_{Ma}(E', E)$. On a

$$\lim_n \delta^*(e_k, E^{\mathcal{F}_n}(F)(\omega)) = \lim_n E^{\mathcal{F}_n}\delta^*(e_k, F(\omega)) = \delta^*(e_k, F(\omega))\ \ p.s.$$

Maintenant soit $x \in w - ls\ E^{\mathcal{F}_n}(F)(\omega)$ alors il existe une sous suite $(x_k)_{k\geq 1}$ tel que : pour tout $k \geq 1$: $x_k \in E^{\mathcal{F}_{n_k}}(F)(\omega)$ et $x_k \xrightarrow{w} x$. Pour tout $j \geq 1$, on a

$$\begin{aligned} < e_j, x > &= \lim_k < e_j, x_k > \\ &\leq \limsup_n \delta^*(e_j, E^{\mathcal{F}_n}(F)(\omega)) = \delta^*(e_j, F(\omega)) \end{aligned}$$

d'après lemme $III.34$ dans [7] on a $F(\omega) = \{x \in E/ < e_j, x > \leq \delta^*(e_j, F(\omega))\}$ alors $x \in F(\omega)$.
donc

$$w - \limsup\ E^{\mathcal{F}_n}(F)(\omega) \subset F(\omega) \subset s - \liminf\ E^{\mathcal{F}_n}(F)(\omega)\ p.s$$

d'où

$$M - \lim_n\ E^{\mathcal{F}_n}(F)(\omega) = F(\omega) \quad p.s$$

Lemme 2.5 *Soient E un espace de Banach, $(A_n)_{n\geq 1}$ et $(B_n)_{n\geq 1}$ deux suites dans $cf(E)$ telles que :*
i- $\lim_n h(A_n, B_n) = 0$
ii- $M - \lim_n\ A_n = A$
Alors

$$M - \lim_n\ B_n = M - \lim_n\ A_n = A$$

Preuve. Soit $x \in M - \lim_{n\to\infty} A_n$. Alors il existe $x_n \in A_n$ tel que $x = \lim_{n\to\infty} x_n$. On a l'estimation suivant :

$$\begin{aligned} d\,(x, B_n) &\leq \|x - x_n\| + d\,(x_n, B_n) \\ &\leq \|x - x_n\| + h\,(A_n, B_n) \end{aligned}$$

D'après (ii) on obtient $\lim_{n\to\infty} d\,(x, B_n) = 0$, donc $M - \lim_{n\to\infty} A_n \subset s - \liminf\ B_n$. Maintenant soit $x \in w - \limsup\ B_n$, alors il existe une suite $(x_k)_{k\geq 1}$ converge faiblement vers x et pour tout $k \in \geq 1$ $x_k \in B_{n_k}$. Choisissons $y_k \in A_{n_k}$ tel que

$$\|x_k - y_k\| \leq h\,(B_{n_k}, A_{n_k}) + \frac{1}{k}$$

Comme $y_k = x_k - (x_k - y_k)$ alors y_k converge faiblement vers x. Par conséquence

$$x \in w - \limsup\ A_n \subset M - \lim_n A_n$$

Donc $w - \limsup\ B_n \subset M - \lim_n A_n$
d'où

$$M - \lim_n B_n = M - \lim_n A_n$$

2.1.2 Les résultats de convergence des mils dans $L^1_E(\mathcal{F})$

Avant de commencer ce paragraphe nous rappelons le théorème ci dessus, qui va nous éclaircir davantage des techniques de troncature et de compacité. Ces technique serrent utilisées comme outils pour la démonstration de la convergence des mils.
On note par B (resp. B') la boule unité de E (resp. E') et $\mathcal{B}(E)$ le tribu borélienne de E.

Théorème 2.6 *Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré où μ est σ finie et $\mathcal{F}$ est μ-complète, E un espace de Banach séparable, $\varphi : \Omega \times E \to [0, +\infty[$ un intégrande, $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}(E)$ -mesurable tel que pour tout $\omega \in \Omega$, et $r \in \mathbb{R}^+$, on a $\varphi(\omega, 0) = 0$ et l'ensemble*

$$\{x \in E : \varphi(\omega, x) \leqslant r\} \in \mathcal{R}(E)$$

Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite bornée dans $L^1_E(\mathcal{F}, \mu)$ telle que

$$\sup_{n\geq 1} \int_\Omega \varphi\left(\omega, u_n(\omega)\right) \mu(d\omega) < +\infty$$

Alors il existe une suite $(B_k)_{k\geq 1}$ dans $\mathcal{F}$ et une sous suite $(u_{n_k})_{n\geqslant 1}$ telle que $(1_{B_k} u_{n_k})_{k\geqslant 1}$ soit relativement $\sigma(L^1_E(\mathcal{F}), L^\infty_{E'_s}(\mathcal{F}))$ compacte et telle que $(1_{B^c_\varepsilon} u_{n_k})_{k\geqslant 1}$ converge vers 0 μ -presque partout.

Preuve. ([2]. p 59)

Théorème 2.7 *Soient E un espace de Banach séparable et $\varphi : \Omega \times E \longrightarrow [0, +\infty[$ une fonction $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}(E)$-mesurable tel que, pour tout $\omega \in \Omega$, on a $\varphi(\omega, 0) = 0$, et tel que pour p, r dans $\mathbb{R}^+$, l'ensemble $\{x \in pB\ :\ \varphi(\omega, x) \leq r\}$ est convexe faiblement compact.*
Soit $(F_n)_{n\geq 1}$ un mil borné dans $L^1_E(\mathcal{F})$ telle que

$$\sup_{n\geq 1} \int_\Omega \varphi(\omega, F_n(\omega)) P(d\omega) < +\infty$$

Alors il existe $F_\infty \in L^1_E(\mathcal{F})$ tel que

$$(F_n - E^{\mathcal{F}_n} F_\infty) \longrightarrow 0 \quad p.s.$$

Preuve. En vertu du théorème 2.6, il existe une sous suite $(F_{n_k})_{k\geq 1}$ de $(F_n)_{n\geq 1}$ et une suite $(B_k)_{k\geq 1}$ dans $\mathcal{F}$ telles que $(1_{B_k}\ F_{n_k})_{k\geq 1}$ soit relativement faiblement compact dans $L^1_E(\mathcal{F})$.
D'abord par extraire une sous suite, on peut suppose que $(1_{B_k}\ F_{n_k})_{k\geq 1}$ converge faiblement dans $L^1_E(\mathcal{F})$ vers une fonction intégrable F_∞ i.e pour tout $k \geq 1$ $(1_{B_k}\ F_{n_k}) \xrightarrow{w} F_\infty$, et que $(1_{B_k^c}\ F_{n_k})_{k\geq 1}$ converge vers 0 *p.s.*
Puisque $(F_n)_{n\geq 1}$ est un mil borné alors pour tout $x' \in E'$, $(< x', F_n >)_{n\geq 1}$ est un mil réel borné dans $L^1_{\mathbb{R}}(\mathcal{F})$, donc d'après théorème 1.11 on déduit que $(< x', F_n >)_{n\geq 1}$ converge p.s vers une fonction intégrable $f_{x'}$.
Or comme $F_{n_k} = 1_{B_k}F_{n_k} + 1_{B_k^c}F_{n_k}$ alors $(< x', 1_{B_k}F_{n_k} >) \longrightarrow f_{x'}$ *p.s.*
Par conséquence, pour tout $A \in \mathcal{F}$, on a

$$\lim_{k\to+\infty} \int_A < x', 1_{B_k}F_{n_k} >= \int_A < x', F_\infty >= \int_A \lim_{n\to+\infty} < x', F_n >$$

donc $(F_n)_{n\geq 1}$ converge presque sûrement scalairement vers F_∞ .
Soit $E^{\mathcal{F}_n}(F_\infty)$ l'espérance conditionnelle de F_∞, alors par définition de la distance de Hausdorff h on a $(F_n - E^{\mathcal{F}_n}(F_\infty))_{n\geq 1}$ est un mil borné dans $L^1_E(\mathcal{F})$ qui converge scalairement vers 0, on utilise le théorème 1.14 pour déduire que pour tout $n \geq 1$

$$(F_n - E^{\mathcal{F}_n}F_\infty) \longrightarrow 0 \quad p.s.$$

conséquence 2.8 *$(F_n)_{n\geq 1}$ converge vers F_∞ p.s. pour la norme de E.*

Définition 2.9 *L'espace de Banach X, possède la propriété de Radon-Nikodym, en abrégé RNP si pour tout espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et toute probabilité Q sur $(\Omega, \mathcal{F})$ absolument continue par rapport à P $(Q \ll P)$, il existe $f \in L^1_X$ telle que :*

$$Q(A) = \int_A f dP \quad \forall A \in \mathcal{F}$$

Pour la commodité du lecteur on reproduit ici la version multivoque du lemme de Slaby car cette version intervient dans les démonstrations.

Lemme 2.10 *Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite bornée dans $\mathcal{L}^1_{cwk(E)}(\mathcal{F})$. Alors il existe une suite extraite $(X_{n_k})_{k\geq 1}$ de $(X_n)_{n\geq 1}$, une suite $(B_k)_{k\geq 1}$ dans $\mathcal{F}$ tel que*

1. $\lim_{k\to\infty} P(B_k) = 1$.
2. *$(Y_{n_k} \equiv 1_{B_k}X_{n_k})_{k\geq 1}$ est uniformément intégrable dans $\mathcal{L}^1_{cwk(E)}(\mathcal{F})$.*
3. *$\left(Z_{n_k} \equiv 1_{B_k^c}X_{n_k}\right)_{k\geq 1}$ converge vers 0 en mesure, c'est à dire, pour tout $\varepsilon > 0$.*

$$\lim_{k\to\infty} P\left[|z_{n_k}| > \varepsilon\right] = 0$$

Le théorème suivante est une variante du théorème 2.7

Théorème 2.11 *Supposons que E et E'_b possèdent la propriété de Radon Nikodym. Soit $(F_n)_{n\geq 1}$ un mil borné dans $L^1_E(\mathcal{F})$, alors il existe $F_\infty \in L^1_E(\mathcal{F})$, tel que pour tout $n \geq 1$*

$$(F_n - E^{\mathcal{F}_n} F_\infty) \longrightarrow 0 \quad p.s.$$

Preuve. Premièrement on observe que pour tout $x' \in E'$, la mil réel $(< x', F_n >)_{n\geq 1}$ converge $p.s$ vers une fonction intégrable.
On utilise le lemme 2.10, alors il existe une sous suite $(F_{n_k})_{k\geq 1}$ de $(F_n)_{n\geq 1}$ et une suite $(A_p)_{p\geq 1} \in \mathcal{F}$ avec $\lim_p P(A_p) = 1$ tel que pour tout $p \geqslant 1$ la suite $(F_{n_k} 1_{A_p})_{k\geq 1}$ est uniformément intégrable. Par conséquence, pour tout $x' \in E'$, $p \geq 1$ et $\forall A \in A_p \cap \mathcal{F}$ on a :

$$\lim_{k\to+\infty} \int_A < x', F_{n_k} >= \lim_{n\to+\infty} \int_A < x', F_n >$$

En répétant les arguments donnés dans Castaing-Clauzure ([4], théorème 3.1) via le théorème de Dunford-Pettis, alors on affirme qu'il existe une sous suite $(\Sigma_i)_{i\geq 1}$ de $(F_{n_k})_{k\geq 1}$ et $F_\infty \in L^1_E(\mathcal{F})$ tel que pour tout $u \in L^\infty_{E'_b}(A_p \cap \mathcal{F})$ on a :

$$\lim_{i\to+\infty} \int < u, \Sigma_i >= \int < u, F_\infty >$$

En particulier pour tout $x' \in E'$, $p \geq 1$ et $A \in A_p \cap \mathcal{F}$ on a

$$\lim_{k\to+\infty} \int_A < x', F_{n_k} >= \int_A < x', F_\infty >= \lim_{n\to+\infty} \int_A < x', F_n >$$

Ensuite pour tout $p \geq 1$ et $x' \in E'$ il existe un ensemble négligeable $N_p \in A_p$ telle que pour tout $\omega \in A_p \setminus N_p$

$$\lim_{n\to+\infty} < x', F_n(\omega) >=< x', F_\infty(\omega) >$$

Comme $\lim_p P(A_p) = 1$, on fixé $x' \in E'$ alors on obtient :

$$\lim_{n\to+\infty} < x', F_n >=< x', F_\infty > \quad p.s.$$

donc $(F_n)_{n\geq 1}$ converge presque sûrement scalairement vers F_∞ .
Par définition de la distance de Hausdorff h on a $(F_n - E^{\mathcal{F}_n}(F_\infty))_{n\geq 1}$ est un mil borné dans $L^1_E(\mathcal{F})$ qui converge scalairement vers 0, on utilise le théorème 1.14 pour déduire que pour tout $n \geq 1$ on a :

$$(F_n - E^{\mathcal{F}_n} F_\infty) \longrightarrow 0 \quad p.s.$$

Remarque 4 *les résultats de décomposition donnés dans les théorèmes 2.7, 2.11 sont analogues à le résultat de décomposition dans le théorème 1.15, ces techniques peuvent être étendues aux mils bornés en $\mathcal{L}^1_{cwk(E)}(\mathcal{F})$ dans la section suivante.*

2.2 Résultats de convergence et décomposition des mils dans $\mathcal{L}^1_{cwk(E)}(\mathcal{F})$

Les résultats suivants sont extraits de Castaing-Clauzure ([4]), Castaing([3], [2]) et Hess ([11]).
Voici deux résultats techniques qui interviennent dans les démonstrations des théorèmes principaux.

Théorème 2.12 *Supposons E'_b séparable et E possède la propriété de Radon-Nikodym. Soit $(F_n)_{n\geqslant 1}$ un mil borné dans $\mathcal{L}^1_{cwk(E)}(\mathcal{F})$ tel que*

1) *Pour tout sous suite $(F_m)_{m\geqslant 1}$ de $(F_n)_{n\geqslant 1}$ et tout $A \in \mathcal{F}$ tel que $(F_m 1_A)_{m\geqslant 1}$ est uniformément intégrable, l'ensemble $\{\int_A F_n dP : n \geqslant 1\}$ soit relativement faiblement compact.*
2) *Pour tout $x' \in E'$ la suite $(\delta^*(x', F_n))_n$ converge vers une function intégrable $\varphi_{x'}$ au sens de probabilité.*

Alors il existe F_∞ dans $\mathcal{L}^1_{cwk(E)}(\mathcal{F})$ tel que :
Pour tout $x' \in E'$ il existe un ensemble négligeable $N_{x'} \in \mathcal{F}$ tel que pour $\omega \notin N_{x'}$

$$\varphi_{x'} \equiv P - \lim_n \delta^*(x', F_n(\omega)) = \delta^*(x', F_\infty(\omega))$$

Preuve. Comme $(F_n)_{n\geqslant 1}$ une suite bornée dans $\mathcal{L}^1_{cwk(E)}(\mathcal{F})$ alors d'après le lemme 2.10, il existe une sous suite $(F_{n_k})_{k\geq 1}$ de $(F_n)_{n\geq 1}$ et une suite $(A_p)_{p\geq 1} \in \mathcal{F}$ avec $\lim_p P(A_p) = 1$ tel que pour tout $p \geqslant 1$ la suite $(F_{n_k} 1_{A_p})_{k\geq 1}$ est uniformément intégrable dans $\mathcal{L}^1_{cwk(E)}(A_p, A_p \cap \mathcal{F}, P_{|A_p})$.
Puisque $\{\int_A F_m \ : m \geqslant 1\}$ est relativement faiblement compact dans E, alors par la même procède du démonstration de la théorème 2.11 : il existe une sous suite $(\Sigma_i)_{i\geqslant 1}$ de $(F_n)_{n\geqslant 1}$ tel que pour tout $p \geqslant 1$ $(\Sigma_i 1_{A_p})_{i\geqslant 1}$ est uniformément intégrable et $F_\infty \in L^1_{cwk(E)}(\mathcal{F})$ tel que pour tout $x' \in E'$, $p \geq 1$ et pour tout $A \in A_p \cap \mathcal{F}$ on a :

$$\lim_{i\to+\infty} \int_A \delta^*(x', \Sigma_i) = \int_A \delta^*(x', F_\infty)$$

d'après l'hypothèse 2), pour tout $x' \in E'$:

$$\varphi_{x'} \equiv P - \lim_n \delta^*(x', F_n) \in L^1_{\mathbb{R}}$$

alors, pour tout $p \geq 1, \lim_n \delta^*(x', \Sigma_i) = \varphi_{x'}$ dans $L^1_{\mathbb{R}}\left(A_p, A_p \cap \mathcal{F}, P_{|A_p}\right)\cdot$ Donc pour tout $x' \in E'$ fixé ;

$$\lim_i \int_A \delta^*(x', \Sigma_i)\, dP = \int_A \varphi_{x'} dP = \int_A \delta^*(x', F_\infty)\, dP \quad \forall A \in A_p \cap \mathcal{F}$$

par conséquence sur A_p on obtient

$$\varphi_{x'} = \delta^*(x', F_\infty) \quad p.s$$

et comme $\lim_p P(A_p) = 1$, alors dans Ω on a :

$$\varphi_{x'} = \delta^*(x', F_\infty) \quad p.s$$

Lemme 2.13 *Soit $(F_n)_{n\geqslant 1}$ une suite dans $\mathcal{L}^1_{cwk(E)}(\mathcal{F})$ telles que*

1. $\sup_n \int |F_n| < \infty$
2. *Il existe une multifonction $K : \Omega \to cwk(E)$ telle que pour tout $n \geqslant 1$ et $\omega \in \Omega$ on a $F_n(\omega) \subset K(\omega)$*
3. *pour tout $x' \in D^*$ où D^* est une suite dense dénombrable dans E' au sens de la topologie de Mackey, la suite $(\delta^*(x', F_n))_{n\geqslant 1}$ est converge p.s.*
   Alors ils existe $F_\infty \in \mathcal{L}^1_{cwk(E)}(\mathcal{F})$ et un ensemble négligeable $N \in \mathcal{F}$ tel que

$$\lim_n \delta^*(x', F_n(\omega)) = \delta^*(x', F_\infty(\omega)) \quad \forall(\omega, x') \in (\Omega \setminus N) \times E'.$$

Preuve. Comme D^* est dénombrable tel que la suite $(\delta^*(x', F_n))_{n\geqslant 1}$ converge p.s, alors il existe une ensemble négligeable $N \in \mathcal{F}$ tel que pour tout $x' \in D^*$ et $\omega \in \Omega \setminus N$ on a $\lim_n \delta^*(x', F_n(\omega))$ existe.
par convexité et la compacité faible de K, cela entraîne l'existence d'une multifonction F_∞ à valeurs dans $cwk(E)$ qui satisfait pour tout $(\omega, x') \in (\Omega \setminus N) \times D^*$:

$$\lim_n \delta^*(x', F_n(\omega)) = \delta^*(x', F_\infty(\omega))$$

Il reste de vérifie que $F_\infty \in \mathcal{L}^1_{cwk(E)}(\mathcal{F})$, comme

$$|F_\infty(\omega)| = \sup\{\|x\|,\ x \in F_\infty(\omega)\} = \sup\{\delta^*(x', F_\infty(\omega)),\ x' \in D^*\}$$

alors on a

$$\liminf_n |F_n(\omega)| \geq |F_\infty(\omega)|$$

D'après lemme de Fatou on a :

$$\begin{aligned}\int |F_\infty| &\leq \int \liminf_n |F_n| \\ &\leq \liminf_n \int |F_n| \\ &\leq \sup_n \int |F_n| < \infty\end{aligned}$$

donc $F_\infty \in \mathcal{L}^1_{cwk(E)}(\mathcal{F})$ et pour tout $(\omega, x') \in (\Omega \setminus N) \times E'$.

$$\lim_n \delta^*(x', F_n(\omega)) = \delta^*(x', F_\infty(\omega)).$$

$\square$

le résultat suivant est une version multivoque de la théorème 1.14 (Talagrand), les techniques de la preuve sont essentiellement la même.

Théorème 2.14 *Supposons que E'_b est séparable et E possède la propriété de Radon-Nikodym. Soit $(F_n)_{n\geqslant 1}$ un mil borné dans $\mathcal{L}^1_{cwk(E)}(\mathcal{F})$ qui converge presque sûrement scalairement vers $F_\infty \in \mathcal{L}^1_{cwk(E)}(\mathcal{F})$. i.e. pour tout $x' \in E'$;*

$$\lim_n \delta^*(x', F_n) = \delta^*(x', F_\infty) \quad p.s$$

Donc

$$\lim_{n\to\infty} h(F_n, E^{\mathcal{F}_n} F_\infty) = 0 \quad p.s$$

Preuve. Soit $(F_n)_{n\geqslant 1}$ un mil borné qui converge scalairement vers $F_\infty \in \mathcal{L}^1_{cwk(E)}(\mathcal{F})$ on doit montrer que

$$lim_{n\to\infty} h(F_n, E^{\mathcal{F}_n} F_\infty) = 0 \quad p.s$$

si $(F_n)_{n\geqslant 1}$ est un mil univoque dans $L^1_E(\mathcal{F})$ qui converge scalairement vers $F_\infty \in L^1_E(\mathcal{F})$ alors $(F_n - E^{\mathcal{F}_n}(F_\infty))_{n\geqslant 1}$ est un mil borné qui converge presque sûrement scalairement vers 0, on applique le résultat de Talagrand (théorème 1.14) on trouve

$$\lim_n \|F_n - E^{\mathcal{F}_n}(F_\infty)\| = 0 \quad p.s.$$

Mais dans le cas où $F_n \in \mathcal{L}^1_{cwk(E)}(\mathcal{F})$ il faut montrer que pour tout $n \geqslant 1$

$$h(F_n, E^{\mathcal{F}_n}(F_\infty)) = \sup_{x'\in B'} |\delta^*(x', F_n) - (\delta^*(x', E^{\mathcal{F}_n} F_\infty))|$$

est converge vers 0 p.s.
Si pour tout $n \geqslant 1$, $h(F_n, E^{\mathcal{F}_n}(F_\infty))$ converge vers 0 alors le résultat est vérifié.
sinon $h(F_n, E^{\mathcal{F}_n}(F_\infty))$ n'est pas converge, alors pour tout $n \geqslant 1$ ils existes $a > 0$ et $A \in \mathcal{F}$ avec $P(A) > 0$ tel que pour tout $\omega \in A$ on a :

$$\limsup_n h(F_n(\omega), E^{\mathcal{F}_n}(F_\infty)(\omega)) > a$$

Claim.
Soit $0 < \varepsilon < \frac{P(A)}{4}$ et $n_1 \in \mathbb{N}$. Alors il existe $n_2 \geq n_1$ telle que pour tout $D \in \mathcal{F}_{n_1}$ tel que $P(D) \leq \frac{P(A)}{4}$ et pour tout $n \geq n_2$ il existe $E \in \mathcal{F}_{n_2}$ avec $P(E) < \varepsilon$, $E \cap D = \varnothing$ telle que

$$\int_E h(F_n, E^{\mathcal{F}_n}(F_\infty))dP \geq \frac{aP(A)}{32}$$

Preuve. Voir [6].
Pour démontrer le théorème, nous construisons maintenant par récurrence une suite croissante $(n_p)_{p\geqslant 1}$ avec la propriété suivant : pour tout $D \in \mathcal{F}_{n_p}$ tel que $P(D) \leq \frac{P(A)}{4}$ et $n \geq n_{p+1}$, ils existe $E \in \mathcal{F}_{n_{p+1}}$ avec $P(E) < 2^{-p+1}P(A)$, $E \cap D = \varnothing$ et

$$\int_E h(F_n, E^{\mathcal{F}_n}(F_\infty))dP \geq \frac{aP(A)}{32}$$

Soit $n \geq n_p$. on construit par récurrence pour $i \leq p$ des ensembles disjoints $E_i \in \mathcal{F}_{n_i}$, avec $E_1 = \varnothing, P(E_i) \leq 2^{-i}P(A)$, et

$$\int_{E_i} h(F_n, E^{\mathcal{F}_n}(F_\infty))dP \geq \frac{aP(A)}{32} \quad \text{pour } 2 \leq i \leq p.$$

En suite on a pour tout $p \geq 2$,

$$\begin{aligned}\int_\Omega h(F_n, E^{\mathcal{F}_n}(F_\infty))dP &\geq \int_{\bigcup_{i=2}^p E_i} h(F_n, E^{\mathcal{F}_n}(F_\infty))dP \\ &\geq (p-1)\frac{aP(A)}{32} \longrightarrow +\infty \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad p \longrightarrow \infty\end{aligned}$$

Par conséquence $\int_\Omega h(F_n, E^{\mathcal{F}_n}(F_\infty))dP \longrightarrow +\infty$ lorsque $n \longrightarrow +\infty$ c'est impossible car :

$$\int_\Omega h(F_n, E^{\mathcal{F}_n}(F_\infty))dP \leq \sup_n \int_n |F_n|dP + \int_\Omega |F_\infty| < +\infty.$$

D'où :

$$\lim_{n\to\infty} h(F_n, E^{\mathcal{F}_n}F_\infty) = 0 \quad p.s$$

□

Maintenant on énonce le premier résultat de la convergence au sens de Mosco pour les mils dans $\mathcal{L}^1_{cwk(E)}(\mathcal{F})$.

Théorème 2.15 *Soit $(F_n)_{n\geq 1}$ un mil borné dans $\mathcal{L}^1_{cwk(E)}(\mathcal{F})$. Supposons que E'_b séparable, et il existe une multifonction $K : \Omega \to cwk(E)$ tel que pour tout $n \geqslant 1$ et $\omega \in \Omega$, $F_n(\omega) \subset K(\omega)$. Alors il existe $F_\infty \in \mathcal{L}^1_{cwk(E)}(\mathcal{F})$ telle que $\lim_n h(F_n, E^{\mathcal{F}_n}F_\infty) = 0$ p.s. Par conséquence, pour tout $n \geq 1$:*

$$M - \lim F_n = F_\infty \quad p.s.$$

Preuve. Pour tout $x' \in B'$, la suite $(\delta^*(x', F_n))_{n\geqslant 1}$ est un mil bornée dans $L^1_{\mathbb{R}}(\mathcal{F})$, d'après théorème 1.11, le mil $(\delta^*(x', F_n))_{n\geqslant 1}$ converge presque surement vers une fonction intégrable.
Comme pour touts $n \geqslant 1$ et $\omega \in \Omega$ on a $F_n(\omega) \subset K(\omega)$. Alors les hypothèses de lemme 2.13 sont satisfaits alors il existe $F_\infty \in \mathcal{L}^1_{cwk(E)}(\mathcal{F})$ tel que pour tout $x' \in B'$

$$\lim_n \delta^*(x', F_n) = \delta^*(x', F_\infty) \quad p.s. \tag{2.1}$$

D'après le théorème 2.14 l'équation (2.1) implique que pour tout $n \geqslant 1$:

$$\lim_{n\to\infty} h(F_n, E^{\mathcal{F}_n}F_\infty) = 0 \quad p.s. \tag{2.2}$$

où $E^{\mathcal{F}_n}F_\infty$ est l'espérance conditionnelle de F_∞. D'autre parte puisque $F_\infty \in \mathcal{L}^1_{cwk(E)}(\mathcal{F})$, en vertu théorème 2.4 on a

$$M - \lim_n E^{\mathcal{F}_n}F_\infty = F_\infty \quad p.s$$

Par conséquence on utilise le lemme 2.5 on conclue que pour tout $n \geqslant 1$

$$M - \lim_n F_n = F_\infty \quad p.s.$$

Théorème 2.16 *Supposons E'_b séparable et E possède la propriété de Radon-Nikodym. Soit $(F_n)_{n\geqslant 1}$ un mil borné dans $\mathcal{L}^1_{cwk(E)}(\mathcal{F})$ tel que pour tout sous suite $(F_m)_{m\geqslant 1}$ de $(F_n)_{n\geqslant 1}$ et tout $A \in \mathcal{F}$ tel que $(F_m 1_A)_{m\geqslant 1}$ est uniformément intégrable, l'ensemble $\{\int_A F_n dP : n \geqslant 1\}$ soit relativement faiblement compact.*
Alors il existe $F_\infty \in \mathcal{L}^1_{cwk(E)}(\mathcal{F})$ tel que pour tout $n \geqslant 1$:

$$\lim_n h\left(F_n, E^{\mathcal{F}_n} F_\infty\right) = 0 \quad p.s$$

Par conséquence :

$$M - \lim_n F_n = F_\infty \quad p.s$$

Preuve. En vertu du théorème 1.11 on a pour tout $x' \in B'$ le mil $(\delta^*(x', F_n))_{n\geqslant 1}$ est converge vers une fonction intégrable, d'autre part on peut utilisé le théorème 2.12. Par conséquence il existe $F_\infty \in \mathcal{L}^1_{cwk(E)}(\mathcal{F})$ tel que pour tout $x' \in B'$:

$$\varphi_{x'} = \lim_n \delta^*(x', F_n) = \delta^*(x', F_\infty) \quad p.s$$

D'après le théorème 2.14 on a pour tout $n \geqslant 1$:

$$\lim_{n\to\infty} h(F_n, E^{\mathcal{F}_n} F_\infty) = 0 \quad p.s$$

où $E^{\mathcal{F}_n} F_\infty$ l'espérance conditionnelle de F_∞. Or comme $F_\infty \in \mathcal{L}^1_{cwk(E)}(\mathcal{F})$, alors

$$M - \lim_n E^{\mathcal{F}_n} F_\infty = F_\infty \quad p.s$$

Par conséquence on utilise le lemme 2.5 on conclue que pour tout $n \geqslant 1$:

$$M - \lim_n F_n = F_\infty \quad p.s.$$

□

CHAPITRE 3

Convergence des mils multivoque à 2 paramètres

3.1 Notation et définition

- $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace probabilisé.
- E un espace de Banach séparable.
- $J = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ muni une relation d'ordre " $\leq$ " telle que :

$$s = (s_1, s_2) \leq t = (t_1, t_2) \text{ ssi } s_1 \leq t_1 \text{ et } s_2 \leq t_2$$

  J est un ensemble filtrant (Directed Set).
- $(\mathcal{F}_t, t \in J)$: une filtration sur $(\Omega, \mathcal{F})$, $\mathcal{F} = \sigma\left(\bigvee_{t \in J} \mathcal{F}_t\right)$.

Définition 3.1 *Une filtration sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ est une famille $(\mathcal{F}_t)_{t \in J}$ de sous-tribus telle que pour tout $s \leq t$ on a $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$.*

$(\mathcal{F}_t)_{t \in J}$ est une base stochastique complete satisfis le condition de Vitali (V), c'est à dire pour tout $A \in \mathcal{F}$, $A_t \in \mathcal{F}_t^1$ tel que $A \subset ess \limsup_{t \in J} A_t$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble fini d'indice $\{t_i, i \leqslant m\}$ de J, et des ensembles disjoints (B_i) tel que pour tout $i \leqslant m$ on a $B_i \in \mathcal{F}_{t_i}^1$, $B_i \subset A_{t_i}$, et $P(A \backslash \cup_{i \geqslant m} B_i) < \varepsilon$.

Définition 3.2 *Soit τ une application de Ω vers J. On dit que τ est un temps d'arrêt (de la filtration $\mathcal{F}_t$) si pour tout $t \in J, \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$.*

Définition 3.3 *Soit τ un $(\mathcal{F}_t)$-temps d'arrêt. On dit que τ est un $(\mathcal{F}_t)$-temps d'arrêt simple si l'ensemble des valeurs prises par τ est au plus dénombrable, ie. il existe une suite $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de temps positifs dans J telle que $\sum_{n \geq 0} P(\tau = t_n) = 1$.*

Pour tout $t = (t_1, t_2) \in J$, on pose $\mathcal{F}_t^1 = \bigvee_{u \in \mathbb{N}} \mathcal{F}_{(t_1, u)}$.
L'application $\tau : \Omega \to J$ est un 1-temps d'arrêt si pour tout $t \in J$: $[\tau = t] \in \mathcal{F}_t^1$.

• T^1 est l'ensemble de tout 1-temps d'arrêt simple, on sait également que T^1 est muni de l'ordre " $\leq$ " p.s. qui donné par :

$$\sigma \leq \tau \text{ ssi } \sigma(\omega) \leq \tau(\omega) \quad p.s.$$

— T^1 est un ensemble filtrant (Directed Set).

— J et $\overline{\mathbb{N}}$ peuvent être considérés comme deux sous-ensembles cofinal de T^1.

Définition 3.4 *Soit A un ensemble muni d'une relation binaire $\leq$. Un sous ensemble B de A est dit cofinal si :*

$$\forall a \in A, \ \exists b \in B \text{ tel que } a \leq b$$

• Convergence au sens de topologie faible : une suite $(C_t)_{t\in J}$ converge faiblement vers C, et l'on note $C_t \xrightarrow{w} C, \quad t \in J$, si pour tout $x' \in E'$:

$$\delta^* (x', C) = \lim_t \delta^* (x', C_t)$$

• Convergence pour la topologie de Mosco : une suite $(C_t)_{t\in J}$ converge vers C au sens de Mosco et l'on note $M - \lim_{t\in J} C_t = C$;
si : $s - \liminf_{t\in J} C_t = C = w - \limsup_{t\in J} C_t$ où :

$$s - \liminf_{t\in J} C_t := \{x \in E : \lim d(x, C_t) = 0\}$$
$$w - \limsup_{t\in J} C_t := \left\{x \in E : \exists (t_k)_{k\in\mathbb{N}}, x_k \to x, x_k \in C_{t_k}\right\}$$

où $(t_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une sous suite cofinal de J.

3.2 Convergence d'un mil optionnel

Soit l'espace $\mathcal{L}^1_{cwk(E)}(\mathcal{F})$, on considère un processus $(F_t)_{t\in J}$ dans $\mathcal{L}^1_{cwk(E)}(\mathcal{F})$ tel que pour tout $t \in J$ on a F_t est $\mathcal{F}_t-$mesurable (adaptée).

Définition 3.5 *Soit $(F_t)_{t\in J}$ une suite adaptée dans $\mathcal{L}^1_{cwk(E)}(\mathcal{F})$, on dit que $(F_t)_{t\in J}$ est un mil optionnel si $(F_t, \mathcal{F}^1_t)_{t\in J}$ est un mil, c'est à dire pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $p \in \mathbb{N}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\tau \in T^1$, tel que $\overline{p} \leq \tau \leq \overline{n}$ on a :*

$$P\left(h(F_\tau, E(F_{\overline{n}}|\mathcal{F}^1_\tau)) > \varepsilon\right) < \varepsilon$$

où $\overline{n} = (n, n) \in \overline{\mathbb{N}}$.

Remarque 5
Dans d'autres références, un mil optionnel peut être nommé "1-mil".
Dans le cas discret à un paramètre, la notion de mil optionnel coïncide avec la notion originale des mils introduite dans le chapitre 2.

Lemme 3.6 *Soit $(F_t)_{t\in J}$ un mil optionnel réel et uniformément intégrable, alors $(F_t)_{t\in J}$ converge presque sûrement.*

Preuve. Soit $(F_t)_{t\in J}$ un mil optionnel réel, alors par définition $(F_{\overline{n}}, \mathcal{F}^1_{\overline{n}})_{n\geq 1}$ est un mil. Puisque $(F_t)_{t\in J}$ est uniformément intégrable et à valeurs réelles, en vertu du théorème 1.11 il existe F tel que $F_{\overline{n}} \longrightarrow F$ p.s. et dans L^1.
Par conséquence ; il existe une unique décomposition $F_{\overline{n}} = Y_{\overline{n}} + Z_{\overline{n}}$ où $Y_{\overline{n}}$ est une martingale bornée dans L^1, et $Z_{\overline{n}}$ est un mil tel que $Z_{\overline{n}} \to 0 \;\; p.s.$
D'abord posons $Y_t = E(F|\mathcal{F}^1_t)$ et $Z_t = F_t - Y_t$ pour tout $t \in J$, comme $(Y_t, \mathcal{F}^1_t)$ est une martingale régulière(car uniformément intégrable dans L^1). Alors d'après ([13], Théorème 4.3), (Y_t) converges vers F p.s. et dans L^1.
Maintenant il faut prouver que $(Z_t, \mathcal{F}^1_t)_{t\in J}$ est converge vers 0 p.s. il suffit de vérifier que $(Z_\tau)_{\tau\in T^1}$ converges vers 0 en probabilité.
Puisque $(Z_t, \mathcal{F}^1_t)_{t\in J}$ est un mil, alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $\tau \in T^1, n_1 \in \mathbb{N}$ où $\overline{p} \leqslant \tau \leqslant \overline{n}_1$, on a

$$P\left(h(Z_\tau, E(Z_{\overline{n}_1}|\mathcal{F}^1_\tau)) > \varepsilon\right) < \varepsilon \tag{3.1}$$

D'autre part, on a $Z_{\overline{n}} \to 0$ dans L^1, alors il existe $n_2 \in \mathbb{N}$ où $n_2 \geqslant n_1$, tel que pour tout $n \geqslant n_2$ on a :

$$E\,|Z_{\overline{n}}| < \varepsilon^2 \tag{3.2}$$

Donc en utilisant d'inégalités (3.1), (3.2) et l'inégalité de Markov, alors pour tout $\tau \in T^1$ et $n \in \mathbb{N}$ tel que $\tau \geqslant \overline{p},\; n \geqslant n_2$, on a donc

$$\begin{aligned} P\left(|Z_\tau| > 2\varepsilon\right) &\leqslant P\left(|Z_\tau - E(Z_{\overline{n}} \mid \mathcal{F}^1_\tau)| > \varepsilon\right) + P\left(|E(Z_{\overline{n}} \mid \mathcal{F}^1_\tau)| > \varepsilon\right) \\ &\leqslant P\left(h(Z_\tau, E(Z_{\overline{n}}|\mathcal{F}^1_\tau)) > \varepsilon\right) + P\left(|E(Z_{\overline{n}} \mid \mathcal{F}^1_\tau)| > \varepsilon\right) \\ &\leqslant \varepsilon + \frac{E\,|Z_{\overline{n}}|}{\varepsilon} \\ &\leqslant \varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon} = 2\varepsilon \end{aligned}$$

alors $(Z_\tau)_{\tau\in T^1}$ converges vers 0 en probabilité.
Ceci achève la preuve du lemme 3.6.

$*$ <u>Maintenant on doit vérifié que le théorème 1.11 est applicable pour des mils à 2 paramètres sous la forme $(X_{\overline{n}})_{n\geqslant 1}$</u>
c'est à dire si $(X_{\overline{n}})_{n\geqslant 1}$ un mil tel que $\liminf_n E|X_{\overline{n}}| < \infty$, montrer que $(X_{\overline{n}})_{n\geqslant 1}$ est converge presque surement.
Supposons que $(X_{\overline{n}})_{n\geqslant 1}$ est un mil qui ne converge pas p.s.
Alors ils existes $0 < a < b$ et un ensemble $A \in \mathcal{F}$ avec $P(A) > 0$ telle que

$$\limsup X_{\overline{n}}(\omega) > b, \;\; \liminf X_{\overline{n}}(\omega) < a \qquad \text{pour tout } \omega \in A.$$

On a pour tout $n_1 \in \mathbb{N}$, $\varepsilon > 0$, il existe $n_2 \geq n_1$ telle que pour tout $D \in \mathcal{F}_{n_1} \in \mathcal{F}^1_{\overline{n}_1}$, tel que $P(D) \leq P(A)/2$ et $n \geq n_2$ il existe $E \in \mathcal{F}_{n_2} \in \mathcal{F}^1_{\overline{n}_2}$ avec $P(E) < \varepsilon$, $E \cap D = \varnothing$ telle que

$$\int_E |X_{\overline{n}}|\, dP \geq (b-a)P(A)/12.$$

Soit $n \geqslant n_p$, on construisons maintenant par récurrence une suite croissante $(n_p)_{p\geqslant 1}$ et pour tout $i \leqslant p$ des ensembles disjoints $D_i \in \mathcal{F}_{n_i} \in \mathcal{F}^1_{\overline{n}}$, tel que $D_1 = \varnothing$ et $P(D_i) \leq 2^{-i}P(A)$ on a

$$\int_{D_i} |X_{\overline{n}}| dP \geq (b-a)P(A)/12$$

Alors

$$E\,|X_{\overline{n}}| \geq (p-1)(b-a)P(A)/12$$

par conséquence

$$\lim_n E\,|X_{\overline{n}}| = \infty$$

D'où $(X_{\overline{n}})_{n\geqslant 1}$ converge presque sûrement.

Notations 1 *On note D (resp. D^*) un sous-ensemble dense dénombrable de la boule unité B (resp. B') pour la topologie de norme de E (resp. la topologie de Mackey de E').*
Soit D_1^* dénote l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires rationnelles de D^*.

Pour des mils optionnels multivoques, nous obtenons le résultat de convergence faible suivants.

Théorème 3.7 *Soit $(F_t)_{t\in J}$ un mil optionnel uniformément intégrable à valeurs dans $cwk(E)$, supposons que :*

$$\overline{co} \bigcup_{t\in J} F_t(\omega) \in cwk(E), \quad \omega \in \Omega$$

Alors il existe une multifonction $F \in \mathcal{L}^1_{cwk(E)}(\mathcal{F})$ tel que

$$w - \lim F_t = F, \qquad p.s.$$

Preuve. Soit $(F_t)_{t\in J}$ un mil optionnel uniformément intégrable dans $cwk(E)$. Pour tout $x' \in E'$ on a

$$|\delta^*(x', F_t(\omega))| \leqslant \|x'\||F_t(\omega)|$$

où $|F_t|(\omega) = \sup\{\|x\|,\ x \in F_t(\omega)\}$;
alors l'ensemble $\{\delta^*(x', F_t)\}_{t\in J}$ est uniformément intégrable.
Si $x' \in D_1'$ alors $\|x'\| \leqslant 1$, et on a pour tout $\sigma \in T^1$, $\sigma \leqslant \overline{n}$:

$$\begin{aligned}\left|\delta^*(x', F_\sigma) - E\left(\delta^*(x', F_{\overline{n}}) \mid \mathcal{F}^1_\sigma\right)\right| &= \left|\delta^*(x', F_\sigma) - \delta^*\left(x', E(F_{\overline{n}}|\mathcal{F}^1_\sigma)\right)\right| \\ &\leqslant h\left(F_\sigma, E\left(F_{\overline{n}}|\mathcal{F}^1_\sigma\right)\right)\end{aligned}$$

Alors pour tout $x' \in D_1^*$, on a la suite $(\delta^*(x', F_t), \mathcal{F}_t^1)_{t\in J}$ est un mil réel uniformément intégrable a deux paramètres, on conclue que $(\delta^*(x', F_t))_{t\in J}$ est un mil optionnel réel uniformément intégrable, alors en vertu du lemme 3.6 on a $(\delta^*(x', F_t))_{t\in J}$ converge p.s.
D'autre part comme

$$\overline{co}\left(\bigcup_{t\in J} F_t(\omega)\right) \in cwk(E)$$

alors il existe une multifonction $K : \Omega \to cwk(E)$ tel que pour tout $t \in J$ et $\omega \in \Omega$, on a $F_t(\omega) \subset K(\omega)$ donc toutes les hypothèse de lemme 2.13 sont satisfaites.
Alors il existe une multifonction $F \in \mathcal{L}^1_{cwk(E)}(\mathcal{F})$ et un ensemble négligeable $N_{x'} \in \mathcal{F}$ tel que

$$\lim_{t\in J} \delta^* \left(x', F_t(\omega)\right) = \delta^* \left(x', F(\omega)\right)$$

pour tout $\omega \in (\Omega \setminus N_{x'})$ et $x' \in E'$.
d'où

$$w - \lim_t F_t = F \quad \text{p.s.}$$

□

On obtient le résultat de convergence suivant (convergence au sens de Mosco), qui est meilleur que le théorème précédent :

Théorème 3.8 *Soit $(F_t)_{t\in J}$ un mil optionnel uniformément intégrable à valeur dans $cwk(E)$, supposons que :*

$$\overline{co} \bigcup_{t\in J} F_t(\omega) \in cwk(E) \quad \omega \in \Omega$$

Alors
a) il existe $F \in \mathcal{L}^1_{cwk(E)}(\mathcal{F})$ tel que

$$w - \lim F_t = F \quad p.s.$$

b)

$$\lim_{t\in J} h\left(F_t, E(F \mid \mathcal{F}_t^1)\right) = 0 \quad p.s.$$

et

$$M - \lim_{t\in J} F_t = F \quad p.s.$$

Preuve.
a) Voir le théorème 3.7.
b) **.** Montrer que $\lim_{t\in J} h\left(F_t, E\left(F \mid \mathcal{F}_t^1\right)\right) = 0$ p.s. :
Premièrement posons que

$$X_t(x') = \delta^*(x', F_t) - \delta^*(x', E(F \mid \mathcal{F}_t^1)), \quad x' \in E'$$

D'après (a), il existe un ensemble négligeable $N_1 \in \mathcal{F}$ tel que pour tout $\omega \in (\Omega \setminus N_1)$ et $x' \in E'$, on a :

$$\lim_{t\in J} \delta^* \left(x', F_t(\omega)\right) = \delta^* \left(x', F(\omega)\right)$$

Puisque $\left(\delta^* \left(x', E\left(F \mid \mathcal{F}_t^1\right)\right)\right)_{t\in J}$ est une martingale à valeur réelle, et $(\mathcal{F}_t^1)$ est un base stochastique satisfis le condition de Vitali (V), on applique théorème 4.4.6 dans [10] on trouve pour tout $x' \in E'$:

$$\lim_{t\in J} \delta^* \left(x', E\left(F \mid \mathcal{F}_t^1\right)\right) = \delta^* \left(x', F\right), \text{ p.s.}$$

Alors il existe un ensemble négligeable $N_2 \subset \mathcal{F}$ tel que pour tout $\omega \in N_2^c$:

$$\lim_{t\in J} \delta^* \left(x', E\left(F \mid \mathcal{F}_t^1\right)(\omega)\right) = \delta^* \left(x', F(\omega)\right)$$

Posons $N = N_1 \cup N_2$, par conséquence pour tout $\omega \notin N$ et $x' \in E'$ on a

$$\lim_{t\in J} X_t\left(x'\right)(\omega) = 0$$

Or $\left(X_t\left(x'\right)\right)_{t\in J}$ est un processus dans l'espace de Banach $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}\left(B'\right)$ de toutes les fonctions réelles bornées définie dans B'.
Posons également

$$\|X_t\|_\infty = \sup_{x'\in B'} \|X_t\left(x'\right)\|$$

Donc $\|X_t\|_\infty$ est mesurable et intégrable. Il est claire que $\|X_t\|_\infty = h\left(F_t, E\left(F \mid \mathcal{F}_t^1\right)\right)$.
par absurde on suppose que $\left(X_t\left(x'\right)\right)_{t\in J}$ ne converge pas vers 0 p.s. alors ils existe $a > 0$ et $A \in \mathcal{F}$ avec $P(A) > 0$ tel que $\limsup_{t\in J} \|X_t\|_\infty(\omega) > a$ pour tout $\omega \in A$.
En appliquant des techniques similaires à celles utilisées dans la preuve de Théorème 1.14, nous pouvons :
Pour tout $n_1 \in \mathbb{N}$ et $0 < \varepsilon < P(A)/4$. Alors il existe $n_2 \geq n_1$ telle que pour tout $D \in \mathcal{F}_{\overline{n}_1}^1$ tel que $P(D) \leq P(A)/4$, et pour tout $n \geq n_2$ il existe $E \in \mathcal{F}_{\overline{n}_2}^1$ vérifié $P(E) < \varepsilon$ et $E \cap D = \varnothing$ telle que

$$\int_D \|X_{\overline{n}}\|_\infty \, dP \geqslant (p-1)aP(A)/16$$

On construis par récurrence une suite croissante $(n_p)_{p\geqslant 1}$ et une suite $(D_i)_i$ des ensembles disjoints $D_i \in \mathcal{F}_{\overline{n}}^1$, avec $D_1 = \varnothing, P\left(D_i\right) \leq 2^{-i}P(A)$, et pour tout $i \leq p$ et $n \geq n_p$ on a

$$\int_{D_i} \|X_{\overline{n}}\| dP \geq aP(A)/16.$$

Alors

$$\begin{aligned}\int_\Omega \|X_{\overline{n}}\| dP &\geq \int_{\bigcup_{i\leq p} D_i} \|X_{\overline{n}}\| dP \\ &\geq (p-1)aP(A)/16\end{aligned}$$

par conséquence $\lim_n E\|X_{\overline{n}}\|_\infty = \infty$,ce qui absurde alors $\|X_t\|_\infty \to 0 \quad p.s.$
finalement :

$$\lim_{t\in J} h\left(F_t, E\left(F \mid \mathcal{F}_t^1\right)\right) = 0 \quad \text{p.s.}$$

. Montrer que $M - \lim_{t\in J} F_t = F \quad$ p.s. :
Puisque F est un multifonction intégrable bornée, alors d'après théorème *III*.7 dans [7] il existe une suite de sélection mesurable $(f^i)_{i\geqslant 1} \subset S_F^1(\mathcal{F})$ tel que pour tout $\omega \in \Omega$ on a $F(\omega) = cl\{f^i(\omega),\ i \geqslant 1\}$, et de même il existe $(E(f^i|\mathcal{F}_t^1))_{i\geqslant 1} \subset S^1_{E(F|\mathcal{F}_t^1)}$ tel que $E(F|\mathcal{F}_t^1) = cl\{E(f^i|\mathcal{F}_t^1),\ i \geqslant 1\}$ p.s.
Rappelons que pour tout $t \in J$, $S^1_{E(F|\mathcal{F}_t^1)} = \{E(f^i|\mathcal{F}_t^1) :\ f^i \in S_F^1(\mathcal{F})\}$.
En vertu la convergence des martingales vectorielles dans Théorème 12.4 ([13]) on a

$$\lim_{t\in J} \left\|E\left(f^i|\mathcal{F}_t^1\right) - f^i\right\| = 0, \text{ p.s.}$$

Alors il existe un ensemble négligeable $N_3 \in \mathcal{F}$, tel que pour tout $\omega \in N_3^c$ on obtient pour tout $i \geqslant 1$:

$$\lim_{t\in J} E(f^i|\mathcal{F}_t^1)(\omega) = f^i(\omega)$$

comme $E(f^i|\mathcal{F}_t^1)(\omega) \subset E(F|\mathcal{F}_t^1)(\omega)$ donc $f^i(\omega) \subset s - \liminf_{t\in J} E(F|\mathcal{F}_t^1)(\omega)$ on utilise la représentation de Castaing de F alors on déduit que pour tout $\omega \notin N_3$

$$F(\omega) \subset s - \liminf_{t\in J} E(F|\mathcal{F}_t^1)(\omega) \tag{3.3}$$

D'autre parte on a $\lim_{t\in J} h\left(F_t, E\left(F|\mathcal{F}_t^1\right)\right) = 0$ p.s, alors il existe un ensemble négligeable $N_4 \in \mathcal{F}$, tel que pour tout $\omega \in N_4^c$ on a $\lim_{t\in J} h\left(F_t, E\left(F|\mathcal{F}_t^1\right)\right)(\omega) = 0$, par définition de la distance de Hausdorff on a

$$\lim_{t\in J} \Big(d(x, F_t(\omega)) - d(x, E(F|\mathcal{F}_t^1)(\omega))\Big) = 0$$

alors d'après l'inclusion (3.3) on conclue que

$$F(\omega) \subset s - \liminf_{t\in J} F_t(\omega) \quad \text{pour } \omega \notin N_3 \cup N_4$$

donc pour tout $\omega \notin N_3 \cup N_4$,

$$w - \limsup_{t\in J} F_t(\omega) \subset F(\omega) \subset s - \liminf_{t\in J} F_t(\omega)$$

Finalement :

$$M - \lim_{t\in J} F_t = F \quad \text{p.s.}$$

□

Remarque 6 *Dans le théorème 3.8, la condition $\overline{co} \bigcup_{t\in J} F_t(\omega) \in cwk(E)$ jouè un rôle crucial. Cependant, dans le théorème ci-dessous, il peut être remplacé par la condition d'Uhl qui est plus faible.*

Définition 3.9 *On dit qu'une suite $(F_t)_{t\in J} \in \mathcal{L}^1_{cwk(E)}(\mathcal{F})$ satisfait la condition d'Uhl pour la topologie faible si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un convexe faiblement compact K_ε tel que : pour tout $\delta > 0$, il existe un ensemble $A_\delta \in \mathcal{F}$ tel que $P(A_\delta) \geq 1-\varepsilon$ et pour tout $A \in A_\delta \cap \mathcal{F}$ on a*

$$\bigcup_{t\in J} \int_A F_t \subset P(A)K_\varepsilon + \delta B.$$

conséquence 3.10 *Si une suite $(F_t)_{t\in J}$ satisfait la condition d'Uhl alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble faiblement compact convexe K_ε et un ensemble mesurable $B_\varepsilon \subset \Omega$ vérifiant $P(B_\varepsilon^c) < \varepsilon$ tels que :*

$$\forall A \in B_\varepsilon \cap \mathcal{F} : \quad \bigcup_{t\in J} \int_A F_t \subset P(A)K_\varepsilon$$

Preuve. Soit $\varepsilon > 0$, la suite $(F_t)_{t\in J}$ satisfait la condition d'Uhl alors il existe un ensemble faiblement compact convexe K_ε, tel que pour tout $n \geq 1$, il existe une suite $(A_n)_{n\geq 1} \subset \mathcal{F}$ tel que $P(A_n) \geq 1-\varepsilon$, et pour tout $A \in \mathcal{F} \cap A_n,\ n \geq 1$:

$$\bigcup_{t\in J} \int_A F_t \subset P(A)K_\varepsilon + \frac{1}{n^2}B$$

Posons

$$A_\varepsilon = \limsup_n A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m$$

il est claire que $P(A_\varepsilon) \geq 1-\varepsilon$.
Soit $A \in \mathcal{F} \cap A_\varepsilon$, alors pour tout $n \geq 1$ on a : $A \subset \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m$.
Pour $n \geq 1$ fixé, on définit :

$$S_n = A_n,\ S_{n+1} = A_{n+1} \backslash A_n,\ \ldots, S_{n+k+1} = A_{n+k+1} \backslash \left(\bigcup_{m=n}^{n+k} A_m \right)$$

Les ensembles $(S_m), m \geq n$, sont deux-à-deux disjoints et $A \subset \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m = \bigcup_{m=n}^{\infty} S_m$.
Alors :

$$\begin{aligned}
\bigcup_{t\in J} \int_A F_t &= \bigcup_{t\in J} \int_{\bigcup_{m=n}^{\infty}(A\cap S_m)} F_t \\
&= \bigcup_{t\in J} \left(\sum_{m=n}^{\infty} \int_{A\cap S_m} F_t \right) \\
&= \sum_{m=n}^{\infty} \left(\bigcup_{t\in J} \int_{A\cap S_m} F_t \right) \\
&\subset \sum_{m=n}^{\infty} \left(P(A\cap S_m)K_\varepsilon + \frac{1}{m^2}B \right) \\
&= P(A)K_\varepsilon + \left(\sum_{m=n}^{\infty} \frac{1}{m^2} \right) B
\end{aligned}$$

on conclue que pour tout $A \in B_\varepsilon \cap \mathcal{F}$, $\bigcup_{t\in J} \int_A F_t \subset P(A)K_\varepsilon$.

Théorème 3.11 *Soit $(F_t)_{t\in J}$ un mil optionnel uniformément intégrable à valeurs dans $cwk(E)$, supposons que $(F_t)_{t\in J}$ satisfait la condition d'Uhl pour la topologie faible. Alors il existe $F \in \mathcal{L}^1_{cwk(E)}(\mathcal{F})$ tel que*

$$M - \lim_{t\in J} F_t = F \ p.s.$$

Preuve. Soit $(F_t)_{t\in J}$ un mil optionnel uniformément intégrable, on a déjà prouvé que pour tout $x' \in D_1^*$, la suite $(\delta^*(x', F_t), \mathcal{F}_t^1)_{t\in J}$ est un mil réel uniformément intégrable converge presque sûrement (dans la preuve du théorème 3.7). Alors il existe une fonction intégrable $\varphi_{x'}$, et un ensemble négligeable $N \subset \Omega$ tel que :

$$\lim_{t\in J} \delta^*(x', F_t(\omega)) = \varphi_{x'}(\omega) \tag{3.4}$$

pour tout $x' \in D_1^*$ et $\omega \notin N$.
Puisque $(F_t)_{t\in J}$ satisfaite la condition d'Uhl en vertu de la conséquence 3.10, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble faiblement compact convexe H_ε et un ensemble mesurable B_ε avec $P(B_\varepsilon) \geqslant 1 - \varepsilon$ tel que

$$\bigcup_{t\in J} \int_A F_t \subset P(A)H_\varepsilon, \quad \forall A \in \mathcal{F} \cap B_\varepsilon \tag{3.5}$$

Posons $\Omega_n = B_{1/n}$ et $K_n = H_{1/n}$. on peut supposer que pour tout $n \geqslant 1$; $\Omega_n \subset \Omega_{n+1}$ (sinon on peut remplace Ω_n par $\Omega_1 \cup \Omega_2 \ldots \cup \Omega_n$).
D'après l'inclusion 3.5 on arrive que pour tout $A \in \mathcal{F} \cap \Omega_n$ et $t \in J$; $\int_A F_t \subset \int_A K_n$. Alors, il existe un ensemble négligeable $N_n \in \mathcal{F} \cap \Omega_n$ tel que pour tout $\omega \in \Omega_n \cap N_n^c$ et $t \in J$, on a $F_t(\omega) \subset K_n$.
Posons également $M = N \cup (\bigcup_{n\geqslant 1} N_n)$. Pour tout $\omega \in \Omega_n \cap M^c$ et $x' \in D_1^*$, on a $\lim_{t\in J} \delta^*(x', F_t(\omega)) = \varphi_{x'}(\omega)$ et $F_t(\omega) \subset K_n$. Donc on peut applique lemme 2.13. Ensuite, il existe une multifonction mesurable $G_n : \Omega_n \cap M^c \to cwk(E)$ tel que

$$\lim_{t\in J} \delta^*(x', F_t(\omega)) = \delta^*(x', G_n(\omega))$$

pour $x' \in E'$ et $\omega \in \Omega_n \cap M^c$.
Selon l'équation 3.4, pour tout $m, n \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant m < n$ et tout $x' \in D_1^*$, $\omega \in \Omega_m \cap M^c$ $(\subset \Omega_n \cap M^c)$ on trouve $\delta^*(x', G_m(\omega)) = \delta^*(x', G_n(\omega)) = \varphi_{x'}(\omega)$. Depuis que pour tout $\omega \in \Omega_m \cap M^c$ les fonctions $\delta^*(., G_m(\omega))$ et $\delta^*(., G_n(\omega))$ sont équicontinues au sens de la topologie de Mackey, alors pour tout $x', \in E'$ $\delta^*(x', G_m(\omega)) = \delta^*(x', G_n(\omega))$.
Par conséquence, pour $\omega \in \Omega_m \cap M^c, G_m(\omega) = G_n(\omega)$.
On définie une multifonction F tel que

$$F(\omega) = \begin{cases} G_n(\omega) & \text{pour } \omega \in \Omega_n \cap M^c \\ \\ \{0\} & \text{pour } \omega \in N' = M \cup (\bigcap_{n=1}^{\infty} \Omega_n^c) \end{cases}$$

il est claire que F est mesurable intégrable, bornée et pour tout $\omega \in N'^c$

$$\lim_{t\in J} \delta^* \left(x', F_t(\omega)\right) = \delta^* \left(x', F(\omega)\right)$$

or $P(N') = 0$, alors $\lim_{t\in J} \delta^* \left(x', F_t\right) = \delta^* \left(x', F\right)$ p.s. Donc

$$w - \lim F_t = F \quad \text{p.s.}$$

Enfin, en appliquant les mêmes arguments utilisés dans la partie (b) de la preuve du théorème précédent, on conclue que

$$M - \lim_{t\in J} F_t = F \quad \text{p.s.}$$

□

Conclusion générale

Dans ce travail, nous avons étudié la convergence des mils, plus précisément on met le point sur la convergence presque surement des mils univoques dans un espace de Banach, la convergence des mils multivoques intégrablements bornés dans espace de Banach ayant la propriété RNP. A la fin de ce mémoire nous avons présenté la convergence des mils optionnels à deux paramètres dans un espace de Banach .

En premier temps nous avons démontré la convergence des martingales à la limite réelles et généraliser ce résultat dans un espace de Banach quelconque, nous avons donné trois extension de ce convergence pour les mils univoque, les deux premières extensions sont valable lorsque l'espérance mathématique de ces mils est finie. Dans la dernier extension nous avons prouvé l'existence d'une unique décomposition pour des mils intégrables mais dans un espace de Banach séparable.

Puis nous avons étudié la convergence au sens de Mosco des mils multivoques à valeurs dans l'ensemble des parties convexes faiblement compactes d'un espace de Banach ayant la propriété de Radon-Nikodym, on utilisions des technique de troncature et de compacité. Dans ce concept nous avons remarqué que le théorème 2.14 est une version multivoque de la théorème 1.14. Finalement, nous avons abordé la convergence au sens de la topologie de Mosco des mils multivoques à deux paramètres.

Bibliographie

[1] L.H. BLAKE, A generalization of martingales and two consequent convergence theorems, Pacific J. Math, 35, No. 2, (1970).

[2] C. CASTAING, Méthode de compacité et de décomposition applications : minimisation, convergence des martingales, lemma de Fatou multivoque. Annli di Matematica pura ed applicata(IV), Vol. CLXIV, (1993), p. 51-75.

[3] C. CASTAING, Quelques Problèmes de convergence en Probabilités Économie mathématique, Théorie du Contrôle, Minimisation (à paraitre).

[4] C. CASTAING, P. CLAUZURE, Version multivoque et vectorielle d'un résultat de Brooks-Chacon, Séminaire d'analyse convexe, Montpellier, 1998, Exposé n°4.

[5] C. CASTAING, F. EZZAKI, Mosco convergence for multivalued martingale in the limit, à paraitre.

[6] C. CASTAING, F. EZZAKI, Some convergence results for multivalued martingale in the limit, Séminaire d'analyse convexe, Montpellier 1990, Exposé n°1.

[7] C. CASTAING et M. VALADIER, Convex Analysis and Measurable Multifunction, Lectures Notes, n°580, Springer-Verlag, Berlin 1977.

[8] J. DIESTEL et J.J. UHL. Vector measures. American mathematical society, (1977).

[9] G.A. EDGAR et L. SUCHESTON, Martingales in the limit and amarts, Proc. Amer. Math. Soc. **67**, p. 315-320, (1977).

[10] G.A. EDGAR et L. SUCHESTON, Stopping Times and Directed Processes, Cambridge Univ.Press, 1992.

[11] C. HESS, On multivalued martingales whose values may be unbounded : martingale selectors and Mosco convergence, Séminaire d'analyse convexe, Montpellier, (1989), Exposé n°8.

[12] V. KOMORNIK. Précis d'analyse réelle. Topologie. Calcul différentiel. Méthodes d'approximation. Mathématiques pour le 2è cycle. Ellipses, 2001.

[13] A. MILLET et L. SUCHESTON, Convergence of classes of amart indexed by directed sets, Canad. J. Math. 32, (1980), p. 86- 125.

[14] U. MOSCO, Convergence of convex sets and of solutions of variational inequalities, Advances in Mathematics, Academic Press, vol. 3, no. 4, (1969), p. 510–585.

[15] A.G. MUCCI, A.G, Limits for martingale-like sequence, Pacific J. Math, (1973), Vol.48, p. 197-202.

[16] A.G. MUCCI, Another martingale convergence theorem, Pacific J. Math, (1976), Vol.64, p. 539-541.

[17] M. TALAGRAND, Some structure results for martingales in the limit and pramarts. The Annals of Probability, Vol. 13, n° 4, (1985), p. 1192-1203.

[18] V.V. YEN, On convergence of two-parameter mulitvalued martingales in the limit, Acta Mathematica Vietnamica, Volume 31, Number 2, (2006), p. 109-114.

[19] V.V. YEN, On convergence of two-parameter mulitvalued pramarts and mils, (Vietnam J. Math. 34 :1), (2006), p. 31-39.