كلية العلوم و التقنيات فاس
ⵜⴰⵙⴻⵍⴷⴰⵏⵜ ⵏ ⵜⵎⴰⵙⵙⴰⵏⵉⵏ ⴷ ⵜⴻⵏⵉⴽⵉⵜⵉⵏ
Faculté des Sciences et Techniques de Fès

جامعة سيدي محمد بن عبد الله
Université Sidi Mohamed Ben Abdellah

DÉPARTEMENT DES MATHÉMATIQUES

Master Mathématique et Applications aux Calcul Scientifiques (MACS)

MEMOIRE DE FIN D'ETUDES

Pour l'obtention du Diplôme de Master Sciences et Techniques (MST)

Sur les algèbres d'intervalles superatomiques

Réalisé par :

AIT KHAYI Youssef

Encadré par :

ALAMI Mustapha (algèbre de Boole)

BEKKALI Mohamed (logique)

Soutenu le 14 juillet 2021

Devant le jury :

ALAMI Mustapha	Professeur à la CRMEF de Fès-Meknès
BEKKALI Mohamed	Professeur à la FST de Fès
GMIRA Seddik	Professeur à la FST de Fès

Année Universitaire : 2020/2021

FACULTÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES FES-SAISS
B.P. 2202 – Route d'Imouzzer – FES
Fax : 212 (0)5 35 60 82 14 / 212 (0)5 35 61 16 86
Site web : http ://www.fst-usmba.ac.ma

Dédicaces

À MES PARENTS

À MES FRÈRES ET MA SŒUR

À MES PROFESSEURS

À TOUS CEUX QUI SONT PROCHE DE MON CŒUR

AIT KHAYI Youssef

Remerciements

Je remercie mon Dieu qui m'a donné la volonté, la patience, et surtout la santé durant toutes mes années d'étude.

Mes profonds remerciements à mes premiers fans, mes parents pour leur soutien quotidien infaillible, merci à leur enthousiasme débordant qui a été pour moi pilier fondateur de mon action, sans eux je n'aurais jamais pu réaliser ce travail.

J'exprime ma profonde gratitude à mes encadants ***BEKKALI Mohamed*** et ***ALAMI Mustapha*** pour leurs soutiens inoubliable et je les remercie encore pour le sujet qu'ils m'a proposé et pour leurs suivi permanent enrichi de beaucoup d'encouragement, leurs remarques et suggestions sans lesquelles ce mémoire n'aurait pas lieu.

Par ailleurs, puisque l'occasion se présente ici, je remercie également les autres membres de ma famille, tout spécialement mes frères, ma sœur, mes cousines, mes oncles ainsi que tous mes amis, qui m'ont toujours soutenu, même à distance.

Je tiens enfin à remercier tous ceux qui ont contribué d'une façon ou d'une autre à la réalisation de ce travail.

Table des matières

Introduction

La théorie des algèbres de Boole a été créée en 1847 par le mathématicien anglais George Boole. Il l'a conçu comme un calcul (ou une arithmétique) adapté à une analyse mathématique de la logique. Les notions d'algèbre de Boole sont développées par plusieurs personnes au début du siècle dernier, Schröder, Löwenheim, etc. Ils travaillent usuellement avec les opérations concrètes union, intersection, et complémentaire. Malgré ces premiers développements, la théorie moderne des algèbres de Boole peut être seulement considérée qu'il a commencée à partir des années 1930 avec M.H. Stone et A. Tarski.

Dans ce mémoire, on va revoir quelques notions de base sur les algèbres de Boole. Plus précisément sur les algèbre d'intervalle et les algèbres d'intervalles superatomiques.
Ce travaille contient trois chapitres.
Le premier chapitre survole des définitions et des exemples d'algèbres de Boole.
Le deuxième chapitre sera consacré à la dualité, et on va voir en particulier le fameux théorème de représentation de Stone.
Le troisième chapitre revoit quelques propriétés fondamentales des algèbres d'intervalles ainsi que leur caractérisation topologique et une brève introduction aux algèbres d'intervalles superatomique.

Tous les résultats cités dans ce mémoire sont des classiques sur les algèbres de Boole qu'on pourra trouver dans la plus part des références sur ce sujet ; en particulier dans le premier volume du **Handbook of Boolean Algebras** de son auteur Sabine Koppelberg.

Chapitre 1

Introduction à l'algèbre de Boole

Dans ce chapitre nous allons voir quelques notions de base sur les algèbres de Boole.

1.1 Des définitions

Définition 1.1.1 *Une algèbre de Boole est une structure algébrique* $(A, +, ., -, 0, 1)$ *avec deux opérations binaires + et ., une opération unaire -, et deux éléments distingués 0 et 1 tel que pour tout x, y et z dans A,*

(B1) $x + (y + z) = (x + y) + z,$ ***(B1')*** $x.(y.z) = (x.y).z,$

(B2) $x + y = y + x,$ ***(B2')*** $x.y = y.x,$

(B3) $x + (x.y) = x,$ ***(B3')*** $x.(x + y) = x,$

(B4) $x.(y + z) = (x.y) + (x.z),$ ***(B4')*** $x + (y.z) = (x + y).(x + z),$

(B5) $x + (-x) = 1,$ ***(B5')*** $x.(-x) = 0.$

Définition 1.1.2 *Une algèbre de Boole* $(A, +, ., -, 0, 1)$ *est finie (dénombrable, de cardinalité k,...) si A est fini (dénombrable, de cardinalité k,...).*

Il existe une notion parfaitement naturelle d'homomorphisme entre algèbres de Boole qui fait la classe de toutes les algèbre de Boole, ainsi que de tous les homomorphismes entre elles, dans une catégorie. Lorsque on travaille avec des différent algèbres de Boole $(A, +_A, ._A, -_A, 0_A, 1_A)$ et $(B, +_B, ._B, -_B, 0_B, 1_B)$, on lisse les indice en +, ., etc. S'il n'ya pas de confusion.

Définition 1.1.3 *Un homomorphisme d'une algèbre de Boole A vers une algèbre de Boole B est une application* $f : A \longrightarrow B$ *tel que* $f(0) = 0, f(1) = 1,$ *et pour tout x, y dans A on a :*

$$f(x + y) = f(x) + f(y), \quad f(x.y) = f(x).f(y), \text{ et } \quad f(-x) = -f(x).$$

f est un isomorphisme de A vers B si f est un homomorphisme bijectif de A vers B. A et B sont isomorphes($A \cong B$) s'il existe un isomorphisme de A vers B.

1.2 Algèbre des ensembles

Les algèbres d'ensembles des parties et les algèbres d'intervalles sont considérés comme les premiers exemples d'algèbres de Boole.

Exemple 1.2.1 *(algèbre d'ensemble des parties) Soit X un ensemble quelconque et $P(X)$ son ensemble des parties. La structure $(P(X), \cup, \cap, -, \emptyset, X)$, avec $-a$ est le complémentaire $X \setminus a$ de a dans X, est une algèbre de Boole ; les axiomes **(B1)** à **(B5')** sont simplement des lois élémentaires sur les ensembles.*
$P(X)$ est appelé l'algèbre d'ensembles des parties de X.

Définition 1.2.1 *Une structure $(A, +_A, ._A, -_A, 0_A, 1_A)$ est une sous-algèbre de la algèbre de Boole $(B, +_B, ._B, -_B, 0_B, 1_B)$ si $A \subseteq B$ et $0_A = 0_B$, $1_A = 1_B$ et les opérations $+_A, ._A, -_A$ sont les restrictions de $+_B, ._B, -_B$ dans A.*

Définition 1.2.2 *Une sous-algèbre d'algèbre d'ensemble des parties $P(X)$ est appelé une algèbre de sous-ensemble de X ou une algèbre d'ensemble sur X. Une algèbre de Boole A est une algèbre d'ensemble s'il existe un ensemble X tel que A est une algèbre d'ensemble sur X.*

Notons que si A une algèbre d'ensemble sur X, alors il ne requiert pas seulement que les éléments de A qui sont sous ensemble de X mais aussi les opérations de A sont ceux de la théorie des ensembles héritées de $P(X)$ et que $\emptyset$ et X sont contenus dans A.

Exemple 1.2.2 *(algèbres finie-cofinie). Soit X un tel ensemble. Une sous-ensemble a de X est appelé cofini dans X si $X \setminus a$ est fini. Soit $A = \{a \subseteq X : a \text{ fini ou cofini }\}$. Alors A est une algèbre d'ensembles sur X noté par $FC(X)$ et appelée l'algèbre finie-cofinie sur X.*

Si X est infini de cardinal κ, il en est de même pour $FC(x)$. En effet X contient exactement κ sous-ensemble fini.

Exemple 1.2.3 *(algèbres d'intervalle) Soit L un ensemble totalement ordonné dont l'élément minimal 0_L, on prolonge L par $(L \cup \{\infty\}, <)$ tel que $\infty \notin L$ et pour tout $x \in L$ $x < \infty$. Pour $x, y \in L \cup \{\infty\}$, l'ensemble*

$$[x, y[= \{z \in L : x \leqslant z < y\}.$$

est l'intervalle semi-ouvert de L déterminé par x et y. On montre que l'ensemble de la réunion finie des intervalles semi-ouvert A est une algèbre d'ensembles sur L. On voit que $L = [0_L, \infty[$ et $\emptyset = [x, x[$ sont dans A, et A est stable par l'union finie et par le complémentaire.
L'algèbre de Boole A est appelée l'algèbre d'intervalles de L et notée $Int(L)$.

Notation 1.2.1 *Soient x, y deux élément d'une algèbre de Boole A, $x \nleqslant y$ si $x \leqslant y$ n'est pas vérifiée. $x < y$ (ou $y > x$, x est inférieur strictement à y) si $x \leqslant y$ et $x \neq y$.*

$$A^+ = \{x \in A : 0 < x\}$$

$(= A \setminus \{0\})$ *est l'ensemble des éléments positifs de A.*

Définition 1.2.3 *Soit B une algèbre de Boole et $a \in B$. On dit que a est un atome si $0 < a$ et il n'existe aucun $x \in B$ tel que $0 < x < a$. L'ensemble des atomes de B est noté AtB. On dit que B est sans atome s'il ne contient aucun atome, et atomique s'il existe un atome $a \leq x$ pour tout positif $x \in B$.*

Par exemple l'ensemble des parties de X $P(X)$ et, l'algèbre finie-cofinie sur X (Exemple 1.2.2) sont atomiques : les atomes sont les sanglotants $\{x\}$, où $x \in X$. De même toute algèbre de Boole finie est atomique car sinon on pourrait construire une suite infinie et strictement décroissante dans cette algèbre de Boole.
L'algèbre d'intervalle de $\mathbb{R}$ (Exemple 1.2.3) est sans atome.

Définition 1.2.4 *On appelle filtre d'une algèbre de Boole A une partie non vide F de A tel que :*

i) $1 \in F$.

ii) si $x \in F$ et $y \in A$ et $x \leq y$, alors $y \in F$.

iii) si $x \in F$ et $y \in F$, alors $x.y \in F$.

Définition 1.2.5 *On dit qu'un filtre p de A est un filtre principal si'il existe $a \in A$ tel que $p = \{x \in X : a \leqslant x\}$.*
p est un filtre trivial si $p = \{1\}$; il est propre si $0 \notin p$ i.e. $p \neq A$.

Définition 1.2.6 *Soit E un sous-ensemble de A. alors l'ensemble $\{x \in A : \exists n \in \mathbb{N}, e_1, ..., e_n \in E$ tel que $\mathrm{e}_1.....\mathrm{e}_n \leqslant x\}$ est le filtre de A engendré par E.*

On dit que E vérifie la propriété d'intersection finie si, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $e_1, ..., e_n \in E$, $\mathrm{e}_1.....\mathrm{e}_n <$ 0.

Définition 1.2.7 *Un filtre p de A est un ultrafiltre si, pour tout $x \in A$, $x \in p$ ou $-x \in p$ mais pas les deux.*

p est premier s'il est propre et, si $x, y \in A, x + y \in P$ implique que $x \in p$ or $y \in p$.

p est maximal s'il est propre et il n'existe aucun filtre propre de A ayant p comme un sous-ensemble propre.

Chapitre 2

Dualité topologique

Le théorème de représentation de Stone (voir Théorème 2.2.1) nous permettra de faire une correspondance entre les algèbres de Boole et des espaces topologiques bien particuliers appelés espaces booléens.

2.1 Espace Booléens

Définition 2.1.1 *Soit (X, τ) un espace topologique.*

1) *Un espace topologique X est Hausdorff si deux éléments distincts sont séparés par deux ouverts disjoints.*

2) *Un espace topologique X est compact si pour tout recouvrement ouvert de X on peut extraire un sous-recouvrement fini.*

Définition 2.1.2 *Soit X un espace topologique. X est zéro-dimensionnel si l'ensemble des ouvert-fermés de X, qu'on notera par $Clop(X)$ est une base pour la topologie de X.*
On dira que X est un espace Booléen s'il est Hausdorff, compact et zéro-dimensionnel.

Exemple 2.1.1 1) *Tout espace discret fini est un espace Booléen. En particulier, on notera par 2 l'espace Booléen de deux éléments $2 = \{0, 1\}$ avec la topologie discrète.*

2) *L'espace produit de toute famille d'espaces Booléens est un espace Booléen. En effet, soit $X = \prod_{i \in I} X_i$ le produit des espaces Booléens X_i.Alors X est un espace Hausdorff et il est compact d'après le théorème de Tychonoff. Soit $i \in I$ et $b_i \in ClopX_i$, on définit le sous-ensemble $s(b_i)$ de X par :*

$$s(b_i) = \{x \in X : x_i \in b_i\}.$$

Alors $X \setminus s(b_i) = s(x_i \setminus b_i)$ *et d'après la définition des ouverts de la topologie produit de* X *on a* $s(b_i)$ *et* $s(x_i \setminus b_i)$ *sont des ouverts, d'ou ouvert-fermé.* X *est zéro-dimensionnel puisque les ensembles* $s(b_i)$ *forment une sous base pour la topologie produit.*

3) Tout sous-espace fermé d'un espace Booléen est un espace Booléen. En effet, Soit X *un espace Booléen et* Y *un sous espace fermé de* X*. alors* Y *est un espace Hausdorff et compact ; de plus il est zéro-dimensionnel puisque les intersections des sous-ensembles fermés de* X *avec* Y *constituent une base fermée de* Y*.*

2.2 Théorème de Stone version topologique

Dans cette section on va voir que chaque algèbre de Boole peut être identifiée à l'algèbre des ouvert-fermés d'un certain espace Booléen.

Définition 2.2.1 *Soit* A *une algèbre de Boole :*

$$Ult(A) = \{p \subseteq A : p \ est \ un \ ultrafiltre \ de \ A\}$$

est l'ensemble des ultrafiltres de A*.*
L'application

$$s : A \longrightarrow P(Ult(A))$$

défini par

$$s(x) = \{p \in Ult(A) : x \in p\}$$

est l'application de Stone.

Définition 2.2.2 *Soit* A *une algèbre de Boole, la topologie de Stone est l'unique topologie sur* $Ult(A)$ *ayant* $s[A]$ *comme base.* $Ult(A)$*, muni d'une topologie de Stone, est l'espace de Stone ou l'espace dual ou l'espace des ultrafiltres de* A*.*

Théorème 2.2.1 *(Théorème de représentation de Stone)[HB, Theorem 7.8., p. 99] Toute algèbre de Boole est isomorphe à l'algèbre ouvert-fermée d'un espace Booléen. Plus précisément, l'espace dual* $Ult(A)$ *d'une algèbre de Boole* A *est un espace Booléen et l'application de Stone de* A *est un isomorphisme de* A *dans* $Clop(Ult(A))$*.*

Preuve. Soit A une algèbre de Boole et $X = Ult(A)$ son espace dual. X est zéro-dimensionnel, par $X \setminus s(a) = s(-a)$ tout ensemble de base $s(a)$ est ouvert-fermé. Ainsi X est un espace Hausdorff, en effet : soit p et q des ultrafiltres distinct de A, par la maximalité de p, si $a \in p \setminus q$ alors $s(a)$ et s(-a) sont des voisinages disjoint de p et q.

Pour montre que X est compacte, soit U est un recouvrement ouvert de X. Il suffit de considérer le cas ou chaque élément de U est un ensemble de base ; donc posons $U = \{s(a) : a \in A'\}$, où $A' \subseteq A$. Supposons qu'aucune sous ensemble fini de U recouvre X. Alors Soit $n \in w$ et $a_1, ..., a_n \in A'$,

$$s(a_1) \cup ... \cup s(a_n) \neq X = s(1),$$

donc $a_1 + ... + a_n \neq 1$ et $-a_1..... - a_n \neq 0$. il en résulte que l'ensemble $-A' = \{-a : a \in A'\}$ ayant la propriété d'intersection finie. D'après [HB, Proposition 2.16., p. 33], il existe p un ultrafiltre de A inclus dans $-A'$. Alors pour tout $a \in A'$ on a $-a \in p$, $a \notin p$ et $p \notin s(a)$ ce qui contredit le fait que U couvre X.

Donc X est un espace Booléen. Puisque l'application de Stone s est un monomorphisme de A vers $ClopX$, il nous reste que de montrer que $ClopX = s[A]$. Mais Ceci résulte de [HB, Lemma 7.6.(a), p. 98] en considérant la base $B = s[A]$ de X. □

Définition 2.2.3 *Soit X un espace Booléen. Alors $Clop(X)$ est l'algèbre dual de X. Pour tout $x \in X$, l'ensemble :*

$$t(x) = \{a \in Clop(X) : x \in a\}$$

est un ultrafiltre de $Clop(X)$. Ceci définit l'application

$$t : X \ \rightarrow \ Ult(Clop(X)).$$

Théorème 2.2.2 *[HB, Theorem 7.10., p. 100] Tout espace Booléen est homéomorphe à un espace de Stone d'une algèbre de Boole. Plus précisément, pour un espace Booléen X, l'application $t : X \ \rightarrow \ Ult(Clop(X))$. est un homéomorphisme de X dans $Ult(Clop(X))$.*

Preuve. Puisque X et $Ult(ClopX)$ sont des espaces compacts Hausdorff alors, il suffit de montrer que t est continue et bijective. Soit $A = (Clop(X))$. La continuité de t vientvient du fait que les images réciproques des ensembles $s(a), a \in A$, sont ouverts. En effet, pour $a \in A$ et $x \in X$, $x \in t^{-1}[s(a)]$ssi $t(x) \in s(a)$ ssi $a \in t(x)$ ssi $x \in a$, donc $t^{-1}[s(a)] = a$ est ouvert-fermé.

pour tout $x, y \in X$ tel que $x \neq y$. Puisque X est un espace Booléen, si a est un ouvert-fermé de X tel que $x \in a$ et $y \notin a$. Donc $a \in t(x) \setminus t(y)$. D'ou t est injective.

Pour prouver que t est surjective, prenons un ultrafiltre p de $A = Ult(A)$. X est un compact et p est une famille des parties fermées de X avec la propriété d'intersection finie. Soit alors $x \in X$ tel que $x \in a$ pour $a \in p$. donc $p \subseteq t(x)$, d'ou $p = t(x)$ par la maximalité d'ultrafiltre p. □

Exemple 2.2.1 *(Algèbres de Boole finie). Soit A une algèbre de Boole, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- *A est finie.*
- *$Ult(A)$ est un espace Booléen fini.*
- *$Ult(A)$ est un espace discret fini.*
- *$Clop(Ult(A)) = P(UIt(A))$.*
- *L'application de Stone de A est un isomorphisme de A dans $P(X)$, pour certain ensemble fini X.*

Proposition 2.2.1 *[HB, Proposition 7.18., p. 103] Les atomes d'une algèbre de Boole A correspondent aux points isolés de $Ult(A)$. Donc A est sans atome si et seulement si $Ult(A)$ n'a aucun point isolé, et A est atomique si et seulement si les points isolés de $Ult(A)$ constituent un sous-ensemble dense dans $Ult(A)$.*

Preuve. On pourra définir une bijection f de l'ensemble $At(A)$ des atomes de A sur l'ensemble $Is(X)$ des points isolés de $X = Ult(A)$, en prenant pour chaque $a \in AtA$, $f(a) = x$ ssi $s(a) = \{x\}$. □

Chapitre 3

Algèbre d'intervalle superatomique

Les algèbres d'intervalles constituent une classe d'algèbres booléennes qui découle d'une classe apparemment plus simple de structures -les ordres totaux- par une construction tout aussi simple en prenant des unions finies d'intervalles semi-ouverts.
Les algèbres d'intervalles ont été largement utilisées pour construire des algèbres de Boole avec des caractéristiques particulières. Nous allons voir dans ce chapitre la caractérisation des algèbres d'intervalles ainsi que leurs espaces de Stone. On va voir de plus la notion de superatomicité.

3.1 Caractérisation des algèbres d'intervalle

L'objectif de cette sous-section est de donner une caractérisation algébrique des algèbres d'intervalle et la topologie de leurs espaces de Stone.
Nous rappelons brièvement certaines notations concernant les ordres totaux et les algèbres d'intervalles. Dans un ensemble totalement ordonné $(X, \leqslant)$ on écrit :

$$]-\infty, a] = \{x \in X : x \leqslant a\}.$$

$$]a, +\infty[= \{x \in X : a < x\}.$$

etc. Plus formellement, nous supposons que $-\infty$ et $+\infty$ sont des éléments distincts non contenus dans X, et que $-\infty < a < +\infty$ pour tout $a \in X$, et les ensembles comme $]-\infty, a]$, $]a, +\infty[$, etc. sont dans $X \cup \{-\infty, +\infty\}$

Notation 3.1.1 *Soit M et N deux sous-ensembles d'un ensemble totalement ordonné X, on écrit :*

$$M \ll N$$

Si $m < n$ pour tout $m \in M$ et $n \in N$.

Soit L un ensemble totalement ordonné dont l'élément minimal est 0_L, l'algèbre d'intervalle $Int(L)$ de L a été définie dans l'exemple 1.2.3 comme l'algèbre des ensembles sur L constituée de toutes unions finies d'intervalles semi-ouverts $[x, y[$ où $x \leqslant y$ dans L. chaque élément a dans $Int(L)$ a une représentation standard :

$$a = [x_1, y_1[\cup[x_2, y_2[\cup ... \cup [x_n, y_n[,$$

où $0_L \leqslant x_1 < y_1 < x_2 < y_2 ... < x_n < y_n \leqslant +\infty$.
Et cette représentation est unique puisque x_1 est le premier point situé dans a, y_1 est le premier point de $L \cup \{+\infty\}$ plus grand que x_1 et n'est pas situé dans a, etc.
On notera qu'on peut avoir des ensembles ordonnées L et L' non isomorphes ayant des algèbres d'intervalle isomorphes. On prendra par exemple $L = ([0, 1[\cap\mathbb{Q})\cup[1, 2[$ et $L' = ([0, 1[\cup[1, 2[)\cap\mathbb{Q}$. Alors on pourra vérifier que $Int(L)$ et $Int(L')$ sont isomorphe à l'algèbre de produit $Int([0, 1[\cap\mathbb{Q})\times Int([1, 2[)$. [HB, p. 242]
En effet, Soit a un élément de $Int(L)$ alors a s'écrit d'une manière unique comme l'union des intervalle semi-ouvert :

$$a = [x_1, y_1[\cap\mathbb{Q} \cup [x_2, y_2[\cap\mathbb{Q} ... \cup [x_n, y_n[\cap\mathbb{Q} \cup [x'_1, y'_1[\cup ... \cup [x'_n, y'_n[$$

Où $0 \leqslant x_1 < y_1 < ... < y_n \leqslant 1$ et $1 \leqslant x'_1 < y'_1 < ... y'_n \leqslant 2$
Donc $a = a' \cup b'$ où $a' \in Int([0, 1[\cap\mathbb{Q})$ et $b' \in Int([1, 2[)$, alors si f une application tel que :

$$\begin{array}{rccc} f & : & Int(L) & \rightarrow & Int([0, 1[\cap\mathbb{Q}) \times Int([1, 2[) \\ & & a & \mapsto & (a', b') \end{array}$$

Alors f est un isomorphisme d'algèbre.

Remarque 3.1.1 *[HB, Remark 15.2., p. 242] Soient A et B deux algèbre de Boole, $C \subseteq A$ une chaine (avec l'ordre Booléen de A) et $f : C \longrightarrow B$ une application, alors on peut prolonger f par un morphisme $g :< C > \rightarrow B$ si et seulement si*

(a) f est préserve l'ordre i.e $x \leqslant y$ implique que $f(x) \leqslant f(y)$,

(b) $0_A \in C$ implique que $f(0_A) = 0_B$ de même pour 1_A.

Ainsi g est injective si et seulement si, De plus, *(c) f est injective,*

(d) $x \in C \setminus \{0_A\}$ implique que $f(x) \neq 0_B$, de même pour 1_A.

En effet, ceci découle de [HB, Theorem 5.5., p. 67] et [HB, Proposition 5.6. (2), p. 68] car les produits élémentaires sur la chaîne C ont la forme $x.-y$ (où $x, y \in C$), x (où $x \in C$) et y (où $y \in C$)

Théorème 3.1.1 *[HB, Theorem 15.3., p. 243] Une algèbre de Boole A est isomorphe à une algèbre d'intervalle si et seulement si elle est engendrée par une chaine $C \subseteq A$. De plus, si $A \cong Int(L)$, alors on peut considérer C isomorphe à L.*

preuve. Si $A = Int(L)$, alors $C = \{[0_L, x[: x \in L\}$ est une chaine engendre A, et isomorphe à L. Inversement, supposons que A est engendrée par une chaine C et que, sans perte la généralité, $0_L \in C$ mais $1_L \notin C$. alors d'après la remarque 3.1.1, il existe un unique monomorphisme (morphisme injectif) g de A dans $Int(C)$ satisfaite $g(x) = [0_A, x[$ pour tout $x \in C$. g est surjective puisque $g[C]$ engendre $Int(C)$. □

Pour décrire les espaces duaux des algèbres d'intervalles, nous avons besoin plus d'information de la théorie des ensembles ordonnées.

On rappelle que si $(X, \leqslant)$ un ensemble totalement ordonné, alors les intervalles ouverts $]x, y[= \{z \in X : x < z < y\}$, où $x, y \in X \cup \{-\infty, +\infty\}$, constituent une base pour la topologie définie sur X, la topologie d'ordre. Cette topologie est Hausdorff et les intervalles fermées $[x, y] = \{z \in X : x \leqslant z \leqslant y\}$,

$$]-\infty, x], [x, +\infty[,$$

avec $x, y \in X$, sont fermées topologiquement. $(X, \leqslant)$ est complet si pour tout sous-ensemble M de X, la borne supérieur $supM$ et la borne inférieure $infM$ de M sont existe ; en particulier, $0_X = infX$ et $1_X = supX$ sont respectivement l'élément minimal et l'élément maximal de X.

On dit que $x, y \in X$,forment un saut dans X et on note $x \lessdot y$ si $x < y$ mais il n'existe aucun élément $z \in X$ tel que $x < z < y$. Il est claire que $x \lessdot y$ définie une partition

$$X =]-\infty, x] \cup [y, +\infty[$$

de X en deux parties ouvert-fermé ; de même, si $x \lessdot y < r \lessdot s$, alors

$$X =]-\infty, x] \cup [y, r] \cup [s, +\infty[$$

est une partition d'ouvert-fermé.

Définition 3.1.1 *On dit que un ensemble totalement ordonné* $(X, \leqslant)$ *est un ordre Booléen s'il est complet et l'ensemble des saut de* X *est dense dans* X *i.e. pour tout* $r < s \in X$ *il existe* $x, y \in X$ *tel que* $r \leqslant x < y \leqslant s$.

On va donner l'exemple standard d'un ordre Booléen. La preuve du théorème 3.1.2 montre que cet exemple collecte tout ordres Booléen, à isomorphe près.

Exemple 3.1.1 *[HB, Example 15.5., p. 244]. Soit* $(C, \leqslant)$ *un ensemble totalement ordonné. un segment initial de* C *est un sous-ensemble* F *de* C *tel que* $x \in F$ *et* $y \in C$, $y \leqslant x$ *implique que* $y \in F$. *L'ensemble*

$$C^* = \{F \subseteq C : \ F \text{ est un segment initial } \}$$

est clairement totalement ordonné par l'inclusion ; on montre qu'il est un ordre Booléen.

Tout sous-ensemble M *de* C^* *ayant* $\cap M$ *comme la borne inférieur et* $\cup M$ *comme la borne supérieur dans* C^*, C^* *est complet. Si* $F < E$ *dans* C^* *alors prenons un point* x *dans* C *tel que* $x \in E \setminus F$. *Donc, dans* C^*,

$$F \leqslant]-\infty, x[\lessdot]-\infty, x] \leqslant E.$$

La proposition suivante réduit les propriétés topologique d'un espace topologique totalement ordonné à celles de la théorie des ordres.

Proposition 3.1.1 *[HB, Proposition 15.6., p. 244] Soit* $(X, \leqslant)$ *un ensemble totalement ordonné et* τ_X *sa topologie d'ordre*

(a) (X, τ_X) *est un espace compact Hausdorff si et seulement si* $(X, \leqslant)$ *est complet.*

(b) (X, τ_X) *est un espace Booléen si et seulement si l'ordre totale est un ordre Booléen.*

Preuve. Dans toute la preuve, notons que la topologie d'ordre d'un ensemble totalement ordonné est Hausdorff

(a) Premièrement, on montre que si $(X, \leqslant)$ n'est pas complet, alors (X, τ_X) n'est pas compact. Supposons par exemple, que $M \subseteq X$ ne possède pas une borne supérieur. Donc il ne possède pas un élément maximal, l'ensemble N des majorants de M ne possède aucun élément minimal, et puisque

$$X = \bigcup_{m \in M}]-\infty, m[\cup \bigcup_{n \in N}]n, +\infty[$$

alors il existe un recouvrement ouvert de X mais on ne peut pas extraire un sous recouvrement fini de X, et par conséquent X ne peut pas être compact.
Inversement, supposons que $(X, \leqslant)$ est complet et soit U un recouvrement ouvert de X. On définie l'ensemble

$$S = \{x \in X : [0_X, x] \text{ soit roucovert par un nombre fini des élément de } U\}.$$

et $s = sup\ S$. Soit $u \in U$ tel que $s \in u$ et soient $a, b \in X \cup \{-\infty, +\infty\}$ tel que $s \in]a, b[\subseteq u$. Donc $a < s$, il existe un sous-ensemble fini U' de U tel que $[0_X, a] \subseteq \bigcup U'$ si (a=-∞,on prend $U' = \emptyset$). Maintenant si b=+∞, alors $U' \cup \{u\}$ est un sous recouvrement ouvert de U c'est terminer. Si $b \in X$, on prend $v \in U$ tel que $b \in v$. donc $[0_X, b]$ est recouvert par l'ensemble fini $U' \cup \{v, u\}$ de U, donc $s < b$ ce qu'est absurde par définition de s.

(b) Si $(X, \leqslant)$ est un ordre Booléen, donc (X, τ_X) est un espace compact Hausdorff d'après (a). Pour prouver que X est zéro-dimensionnel, on suppose que $x \in X$ et $]a, b[$ est un intervalle ouvert contient x. Puisque $(X, \leqslant)$ est un ordre Booléen, il existe des élément de saut tel que

$$a \leqslant s \lessdot t \leqslant x \leqslant r \lessdot p \leqslant b;$$

donc $[t, r]$ est un ouvert-fermé de $]a, b[$ contient x. Pour montrer la réciproque, on suppose que (X, τ_X) est un espace Booléen ; d'après (a), $(X, \leqslant)$ est complet.

Claim. Si a une partie ouvert-fermé de X alors a et $-a = X \setminus A$ sont des unions d'un nombre fini d'intervalles ouvert-fermé dont les extrémités sont des points saut dans X.

Soit a un ouvert-fermé, alors $a = \bigcup U$ et $-a = \bigcup V$, où les éléments de U (respectivement de V) sont des intervalles ouverts non vide de X. Par la compacité de X et la fermeture de a et $-a$, on peut écrire

$$a = u_1 \cup ... \cup u_n, \qquad -a = v_1 \cup ... \cup v_m,$$

où $u_i \in U$ et $v_j \in V$. On peut supposer que, par la notation 3.1.1, $u_1 \ll ... \ll u_n$ et $v_1 \ll ... \ll v_n$, et plus précisément $n = m$ et

$$u_1 \ll v_1 \ll ... \ll v_n.$$

Puisque $(X, \leqslant)$ est complet et a et $-a$ sont deux fermées, sup u_1 existe et il est dans a ; de même, inf v_1 est un élément de $-a$. Donc sup $u_1 \in u_1$, inf $v_1 \in v_1$ et sup $u_1 \lessdot$ inf v_1. même raison appliqué sur les extrémités de u_2 et v_2, etc. Ce qui montre que

$$u_i = [x_i, y_i]\,, \quad v_i = [r_i, s_i]$$

où $x_1 = 0_X, s_n = 1_X, y_i \lessdot r_i$ et, pour $i < n, s_i \lessdot x_{i+1}$ ce que termine la preuve du Claim.

Maintenant, si (X, τ_X) est un espace Booléen alors d'après le Claim précèdent si on prend deux éléments de X tel que $r < s$ il existe un ouvert-fermé a de X contient r mais ne contient pas s on utilise la notation de preuve alors $r \in u_i$. donc il est claire que $r \leqslant y_i \lessdot r_i \leqslant s$. $\square$

Théorème 3.1.2 *[HB, Theorem 15.7., p. 245] Un espace Booléen est homéomorphe à un espace dual d'une algèbre d'intervalle si et seulement si sa topologie est induite par un ordre total*

Preuve. Supposons tout d'abord que $\leqslant$ est un ordre total sur un espace Booléen en induisant la topologie de X. Donc $(X, \leqslant)$ est un ordre de Boole d'après 3.1.1(b) et l'algèbre duale $Clop(X)$ de X est engendré par la chaine

$$C = \{[0_X, x] : x \lessdot y \text{ pour certains } y \in X\},$$

cela immédiatement d'après le **Claim**.
D'après le théorème 3.1.1 $Clop(X)$ est isomorphe à une algèbre d'intervalle.

Inversement, supposons que X est l'espace dual $Ult(A)$ d'une algèbre de Boole A engendrée par une chaine C ; on peut supposer que $0_A \in C$ et $1_A \notin C$. Considérons l'ordre Booléen $(C^*, \subseteq)$ des segment initiaux de C construits dans l'exemple 3.1.1. On montre que l'application définie par :

$$\begin{array}{cccc} \phi & : & X & \to & C^* \\ & & p & \mapsto & \phi(p) = C \setminus p \end{array}$$

est un homéomorphisme de X dans l'espace Booléen associé, d'après 3.1.1(b), avec l'ordre total $(C^*, \subseteq)$.

Pour tout ultrafiltre p de A, $p \cap C$ est un segment final (i.e. si $x \in p \cap C$ et $y \in C$, $y \geqslant x$, donc $y \in p \cap C$. L'homéomorphisme caractéristique de p de A dans 2 est complètement déterminer par son action dans l'ensemble C, i.e. p est déterminé par $p \cap C$. Inversement, la remarque 3.1.1 montre que pour tout segment final u de C il existe un ultrafiltre p de A tel que $p \cap C = u$. Ainsi, l'affectation de $p \cap C$ à p donne une bijection de $X = UltA$ dans l'ensemble des segment finaux de C et ϕ définie ci-dessus est une bijection de X dans C^*.

Puisque X avec la topologie de Stone et C^* avec la topologie d'ordre sont des espaces Booléens, il suffit de montrer que ϕ est une application ouverte. il est suffisamment de prouver que $\phi(v)$ est un ouvert-fermé pour tout partie ouvert-fermé v dans X, posons $v = s(c)$ où $c \in A$

et $s : A \rightarrow ClopX$ est l'isomorphisme de Stone. Ainsi, puisque ϕ est bijective et C engendre A, il suffit de considérer $c \in C$. pour l'élément $e =]-\infty, c[$ et $f =]-\infty, c]$ de C^*, on trouve que $e \lessdot f$ et que

$$\begin{aligned} \phi[s(c)] &= \{\phi(p) : c \in p\} \\ &= \{C \backslash p : c \in p\} \\ &= [0_{C^*}, e] \end{aligned}$$

est une partie *Clopen* de C^*. □

3.2 Algèbres d'intervalle superatomiques

Cette partie concerne les algèbre de Boole superatomique, c'est-à-dire les algèbres dont tous les sous-algèbres sont atomique.

Définition 3.2.1 *[HB, Definition 17.1., p. 272] On dit qu'une algèbre de Boole B est superatomique si toute image homomorphe de B est atomique ; en particulier, l'algèbre de Boole triviale et toute algèbre de Boole finie sont superatomiques.*

Définition 3.2.2 *Une algèbre de Boole B est une image homomorphe d'une algèbre de Boole A s'il existe un morphisme surjectif f de A sur B*

Remarque 3.2.1 *Une algèbre de Boole A est superatomique si et seulement si tout espace quotient de A est atomique.*
En effet, Soit A une algèbre de Boole, supposons que A est superatomique, et soit $f : A \rightarrow B$ un homomorphisme surjectif, d'après le théorème d'homomorphisme[HB, Proposition 5.23., p. 77] on a : $B \cong A/I$ avec $I = ker(f)$ d'ou B est atomique. Inversement, si toute image homomorphisme de A est atomique, alors l'homomorphisme

$$\begin{array}{cccc} \pi & : & A & \rightarrow & A/I \\ & & x & \mapsto & \pi(x) = \bar{x} \end{array}$$

est surjectif donc A/I est atomique, ce que donne que A est superatomique.

Définition 3.2.3 *Un espace topologique est dispersé si, pour tout sous-espace fermé Y de X, les points isolés de Y sont denses dans Y.*

Remarque 3.2.2 *[HB, Remark 17.2., p. 272] Une algèbre de Boole est superatomique si et seulement si son espace dual est dispersé.*

Exemple 3.2.1 *(algèbre finie-cofinie)[HB, Example 17.3., p. 272]. Soit I un ensemble infini muni de la topologie discrète, d'après l'exemple 1.2.2 $FC(I)$ est une algèbre d'ensemble sur I. On montre que l'espace de Stone de l'algèbre finie-cofinie est la compactification d'Alexandrof de I. Tout d'abord un ultrafiltre de $FC(I)$ s'écrit comme suit : pour tout $i \in I$*

$$U_i = \{a \in FC(I) : i \in a\}$$

soit

$$G_\infty = \{a \in FC(I) : a \text{ cofinie } \},$$

un ultrafiltre, alors $G_\infty \neq U_i$ pour tout $i \in I$ car l'ensemble $I \backslash \{i\}$ est dans G_∞ mais n'appartient à aucun U_i. Donc $st(FC(I)) = G_\infty \cup U_i$ pour tout $i \in I$. Soit a finie, alors a^c cofinie, et $G_\infty \in s(a^c) = s(a)^c$. $s(a)$ est un compact, et son complémentaire contient G_∞ d'ou $st(FC(I)) = I \cup \{\infty\}$.
Si on pose $X = I \cup \{\infty\}$, Alors X est un espace Booléen dont l'algèbre dual est l'algèbre finie-cofinie $FC(I)$ sur I. On montre que l'algèbre $FC(I)$ est superatomique : Soit Y une partie fermée de X. si Y est finie, alors elle est discrète et tout point $y \in Y$ est isolé dans Y. Sinon, ∞ est le seule point non isolé de Y, en effet : supposons que un ultrafiltre $U_j \in s(i)$ et $U_i \neq U_j$, alors $\exists a \in U_j \setminus U_i$ donc $a \cap \{i\} = \emptyset \in U_j$ ce qui est absurde. donc pour tout $i \in I, U_i$ est isolé. Et par suit les points isolées de Y sont dense dans Y.

Exemple 3.2.2 *(algèbres d'intervalles d'ensembles bien ordonnés)[HB, Example 17.4., p. 272].Soit $(X, \leqslant)$ un ensemble bien ordonné avec l'élément maximal 1_X. Donc $(X, \leqslant)$ est un ordre de Boole au sens de la définition 3.1.1 ; d'après la proposition 3.1.1 il est un espace Booléen dans son ordre topologie et*

$$A = \textit{ Clop } X \cong \text{Intalg}\,(X \backslash \{1_X\})$$

*d'après le **Claim** dans la preuve de la proposition 3.1.1. L'espace X est un espace dispersé. En effet, notons que x est un point isolé dans X si et seulement si x n'est pas un point d'accumulation dans $(X, \leqslant)$ i.e.si et seulement si x est l'élément minimal 0_X de X ou le successeur immédiat d'un élément dans X. par conséquent, les points isolés de X sont dense dans X. De même, soit Y une partie fermée de X. la topologie définie sur Y est la topologie induite par la restriction $\leqslant_Y$ d'ordre total $\leqslant$. Puisque $\leqslant_Y$ est un bon ordre dans Y, tout ce qui précède montre que les pointes isolés de Y sont dense dans Y.*

Proposition 3.2.1 *[AB, Proposition 1., p.2] Soit B une algèbre de Boole. les conditions suivantes sont équivalentes :*

i) B est superatomique ; c'est-à-dire que tout image homomorphe de B est atomique.

ii) Toute sous-algèbre de B est atomique.

iii) il n'existe aucune injection d'une algèbre dénombrable sans atome dans B.

Preuve. $i) \Rightarrow ii)$: Supposons que B n'a aucun sous-algèbre atomique A. D'après le corollaire [HB, Corollary 5.10., p. 70], il existe une image homomorphisme A' de B tel que A et un sous algèbre dense dans A'; donc A' est une image homomorphisme non atomique de B, en effet, puisque A est non atomique alors $\exists x \in A$ tel que $0 < a \leqslant x$ implique que a n'est pas atome, puisque $x \in A'$, si A' est atomique alors, $\exists b$ atome de A' tel que $0 < b \leqslant x$ par la densité de A dans A' $0 < a \leqslant b \leqslant x$ ce qui implique que $a = b$, donc a est un atome dans A contradiction avec le fait que a n'est pas atome.
$ii) \Rightarrow iii)$: S'il existe $i : A \rightarrow B$ une injection alors $i(A)$ est une sous algèbre de B, donc $i(A)$ est atomique, or $A \cong i(A)$ donc $i(A)$ sans atome, ce qui est absurde.
$iii) \Rightarrow i)$: évident □

Exemple 3.2.3 *(Algèbre d'intervalle de $\mathbb{R}$). $(\mathbb{R}, \leqslant)$ est un ensemble totalement ordonné, avec l'élément minimal, $\{-\infty\}$.*
L'algèbre d'intervalle de $\mathbb{R}$, $Int(\mathbb{R})$ n'est pas superatomique, car il ne contient aucun atome. En effet : supposons qu'il existe $a \in Int(\mathbb{R})$ tel que a est un atome, alors a s'écrit d'une façons unique

$$a = \bigcup_{i=1}^{n} [x_i, y_i[$$

tel que $x_1 < y_1 < x_2 < y_2 ... < y_n$, par la densité de $\mathbb{R}$ il existe $d \in \mathbb{R}$ de sort que

$$[x_1, d[\subsetneq [x_1, y_1[\subseteq a$$

ce que donne

$$\emptyset \subsetneq [x_1, d[\subsetneq a$$

ce que contredit le fait que a un atome.
$Int(\mathbb{R})$ n'est pas complet. En effet : $]0, +\infty[\notin Int(\mathbb{R})$. Car sinon

$$]0, +\infty[= [x_1, y_1[\cup [x_2, y_2[\cup ... \cup [x_n, y_n[,$$

par suite $x_1 \in]0, +\infty[$, *donc il* $\exists \epsilon > 0$ *tel que*

$$]x_1 - \epsilon, x_1 + \epsilon[\subseteq]0, +\infty[$$

soit $y \in]x_1 - \epsilon, x_1 + \epsilon[$ *tel que* $y < x_1$ *donc* $y \in]0, +\infty[$ *mais* $y < x_1 < y_1 < x_2 < y_2 ... < y_n$ *ce qu'est absurde.*

maintenant, soit $([1/n, +\infty[)_{1 \leqslant n < w}$ *une partie de* $Int(\mathbb{R})$ *on a*

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} [1/n, +\infty[=]0, +\infty[\notin Int(\mathbb{R}).$$

donc $Int(\mathbb{R})$ *n'est pas complet.*

Conclusion

L'algèbre d'intervalle reste l'une des classes d'algèbres de Boole qui possède assez riche en propriétés qui ne sont pas partagé avec d'autre classes d'algèbres de Boole.

Bibliographie

[AB] Uri Abraham and Robert Bonnet. every superatomic subalgebra of an interval algebra is embeddable in an ordinal algebra. Proceedings of the American Mathematical Society, 115(3) :585-592,1992.

[HB] Koppelberg, S. HandBook of Boolean Algebras, Volume I. North Holland P.C., (1989).