كلية العلوم و التقنيات فاس
ⵜⴰⵖⵉⵡⴰⵏⵜ ⵏ ⵜⵎⴰⵙⵙⴰⵏⵉⵏ ⴷ ⵜⵜⵉⴽⵏⵉⴽⵉⵏ
Faculté des Sciences et Techniques de Fès

جامعة سيدي محمد بن عبد الله
ⵜⴰⴷⵔⴰⵙⵜ ⵙⵉⴷⵉ ⵎⵓⵃⵎⵎⴰⴷ ⴱⵏ ⵄⴱⴷⵍⵍⴰⵀ
Université Sidi Mohamed Ben Abdellah

DEPARTEMENT DES MATHEMATIQUES

Master Mathématiques et Applications aux Calculs Scientifiques

MEMOIRE DE FIN D'ETUDES

Pour l'obtention du Diplôme de Master Sciences et Techniques (MST)

Problème de reconstruction des graphes : Conjecture d'Ulam

Réalisé par: BOUHANCH Zakaria

Encadré par: Pr. HILALI Abdelmajid

Soutenu le 13 Juillet 2021

Devant le jury composé de:

- Pr. HILALI Abdelmajid	FST FES	Encadrant
- Pr. EL AYADI Rachid	FST FES	Examinateur
- Pr. EL KHOMSI Mohammed	FST FES	Examinateur

Année Universitaire 2020 / 2021

Remerciements

Je tiens à remercier toutes les personnes qui ont contribué à la réalisation de ce travail, et qui m'ont aidé durant toute cette période de formations.

En guise de reconnaissance, je tiens à remercier tous les membres du corps professoral du Département de Mathématiques et Informatique de la Faculté Des Sciences et Techniques de Fès, qui ont déployé leurs efforts pour assurer une formation aussi complète.

Mes remerciements s'adressent particulièrement à mon encadrant **Mr. ABDELMAJID HILALI** pour ses orientations précieuses et ses conseils pratiques pour que mon travail aboutisse. Je le remercie également pour sa motivation professionnelle ainsi pour le temps qu'il a consacré à la réalisation de ce travail.

Je voudrai remercier également les membres du Jury du grand honneur qu'ils me font en s'intéressant à mon travail et en acceptant de l'examiner et de l'enrichir par leurs propositions.

Je n'oublie pas non plus ma petite famille, ma mère, mon père, ma soeur et mon frère, dont le travail n'aurait pas pu aboutir sans leurs inépuisables soutiens et encouragements.

De peur d'en avoir oublier, je souhaite remercier tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à l'élaboration de ce mémoire ainsi qu'à la réussite de ce parcours universitaire.

Table des matières

Table des figures

Introduction

La théorie des graphes constitue un outil puissant pour schématiser les modèles des liens et relations entre les objets. L'étude des graphes a commencé depuis le 18ième siècle par un problème de curiosité mathématique lorsque Euler a posé le célèbre problème du pont de Konigsberg (Kaliningrad) (les habitants de Königsberg se demandaient s'il était possible, en partant d'un quartier quelconque de la ville, de traverser tous les ponts sans passer deux fois par le même et de revenir à leur point de départ).

La théorie des graphes a connu un essor spectaculaire au cours de ces deux dernières décennies, elle a suscité un intérêt exponentiel essentiellement grâce a son rôle comme un outil de modélisation dans le domaine d'optimisation et de calculs explicites nécessitant la conception et l'analyse de plusieurs algorithmes.

En outre de son rôle éminent dans diverses disciplines telles que l'informatique, les mathématiques appliquées (analyse numérique matricielle), la biologie, la physique (circuits électriques), la chimie..., la théorie des graphes est devenue l'un des instruments les plus efficaces pour résoudre de nombreux problèmes discrets que pose de nombreux théories très utiles telles que la recherche opérationnelle et l'économie. Autrement dit elle contribue à résoudre de nombreux problèmes concrets de la vie courante.

De manière générale, un graphe permet de représenter la structure, les connexions d'un ensemble complexe en exprimant les relations entre ses éléments : réseau de communication, réseaux routiers, interaction de diverses espèces animales, circuits électriques,...etc. Les graphes constituent donc une méthode de pensée qui permet de modéliser une grande variété de problèmes en se ramenant à l'étude de sommets et d'arcs.

Plusieurs auteurs ont énoncé des conjectures dans le domaine de la théorie des graphes, parmi eux on trouve *Ulam*, qui a énoncé pour la première fois la conjecture de reconstruction.

La conjecture de reconstruction, est intéressante non seulement au point de vue mathématique, mais aussi en raison de ses applications dans diverses domaines. Les chimistes peuvent déduire la structure d'une molécule organique à partir de ses produits de décomposition. En réseaux informatiques, le problème de reconstruction peut apparaître comme suit : Compte tenu d'un ensemble représentant une connexion réseau partielle dans une ville à partir de différents endroits, reconstruisez le réseau de la ville toute entière.

Dans ce mémoire nous allons étudier le problème de reconstructions des graphes, nommé aussi **Conjecture d'Ulam**, son énoncé et ses propriétés ainsi que quelques résultats fondamentaux.

Ce mémoire comprend quatre chapitres :

Dans le premier chapitre, nous rappelons quelques concepts de base de la théorie des graphes, nous parlons des graphes simples finis, graphes orientés et d'autres résultats sur les graphes ...

Ensuite, dans le deuxième chapitre, nous nous intéressons à la conjecture de reconstruction des graphes et quelques résultats fondamentaux dans ce sens. Ensuite, nous présentons quelques reformulations de cette conjecture, conjecture de *Harary*, conjecture de *Kelly* et conjecture de l'arête-reconstruction...etc

Dans Le troisième chapitre, nous allons étudier la reconstructibilité de quelques classes de graphes, ainsi que des contre-exemples pour d'autres classes.

En conclusion, dans le dernier chapitre, nous présentons quelques problèmes ouvert où la question de reconstructibilité est toujours ouverte. Il s'agit de quelques classes de graphes qui ne sont pas encore reconstruits.

Chapitre 1

Généralités sur la théorie des graphes

Sommaire

Le premier chapitre comprend des notions élémentaires de la théorie des graphes, dont nous aurons besoin dans les autres chapitres. Nous définissons la notion de graphes et présentons leurs propriétés, classes et quelques théorèmes ...

1.1 Graphes simples

1.1.1 Définitions et concepts de base

Définitions 1.1.1 *Un graphe simple $G = (V, E)$ est la donnée de deux ensembles V et E, tel que E est un ensemble des paires des éléments de V , $E \subset V^{(2)}$.*

Les éléments de V s'appellent les sommets et les éléments de E s'appellent les arêtes.

*Une arête e de l'ensemble E est définie par une paire non ordonnée de sommets, appelés **les extrémités** de e. Si l'arête e relie les sommets u et v, on dira que ces sommets sont **adjacents**, ou incidents avec e, ou bien que l'arête e est incidente avec les sommets u et v.*
*Le nombre de sommets d'un graphe simple est appelé **ordre** du graphe, on le note **Ord(G) ou** $|G|$. le nombre d'arêtes d'un graphe simple est appelé **taille** du graphe, on le note **tail**(G).*

On parlera d'un $(n, p) -$ graphe pour désigner un graphe d'ordre n et de taille p.

Définition 1.1.1 *A tout $(n, p) -$ graphe simple on associe sa matrice d'adjacence $M(G)$.*

C'est la matrice carrée d'ordre n, $M(G) = (m_{ij})$ dont les lignes et les colonnes sont indexées par S et définie par :

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 & si\ v_i \ \ et \ \ v_j \ \ sont \ \ adjacents \\ 0 & sinon \end{cases}$$

Exemple 1.1.1 *La figure ci-dessous présente un graphe simple **d'ordre** 5 et de **taille** 5.*

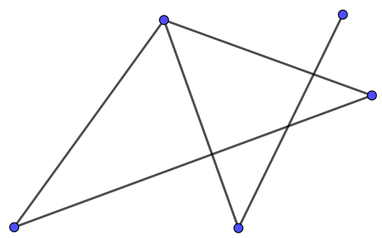


FIGURE 1.1 – Graphe simple

Définitions 1.1.2 *Étant donné un graphe simple $G = (V, E)$ et $v \in V$, on appelle **degré** de v et on note $d_G(v)$ le nombre d'arêtes de E incidentes à v.*

*On dira que le sommet v est **pendant** si son degré est égale à un.*

*Un sommet est dit **isolé** si son degré est nul.*

Définition 1.1.2 *Un graphe simple G est dit k-régulier si tous ses sommets sont de degré k.*

Définition 1.1.3 *On dit que le graphe simple G d'ordre n est **complet**, et on note K_n, si deux sommets quelconques de G sont adjacents.*

Théorème 1.1.1 *Dans un $(n, p)-$ graphe simple G on a :* $\sum_{v \in V} d_G(v) = 2p$

Définitions 1.1.3 *Soient $G = (V, E)$ un graphe simple et $V' \subseteq V$, $E' \subseteq E$ deux sous-ensembles.*
*On dit que $H = (V', E')$ est **un sous-graphe** de G si pour toute arête e de E' les extrémités de e sont dans V'.*

*Si de plus $V = V'$, le graphe $H = (V', E')$ est dit alors **sous-graphe partiel** de G.*
*On appelle **sous-graphe engendré** par V' le graphe $H = (V', E')$ où E' est l'ensemble des arêtes de G ayant leurs extrémités dans V'. On note $G - \{v\}$ le sous-graphe engendré par $V - \{v\}$.*

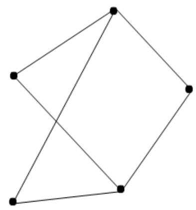
On note G_v le sous-graphe de G obtenu en supprimant le sommet v et toutes les arêtes qui lui sont incidentes.

Définition 1.1.4 *Soit $G = (V, E)$ un graphe simple.*
*On appelle **deck** de G, et on le note **Deck(G)**, l'ensemble des sous-graphe de G obtenu en supprimant un sommet de V et toutes les arêtes qui lui sont incidentes.*

$$Deck(G) = \{G_v, v \in V\}$$

*Les éléments de **Deck(G)** sont appelés **cartes** de G.*

Exemple 1.1.2 *Voici un exemple illustrant la notion du Deck d'un graphe*



G un graphe d'ordre 5

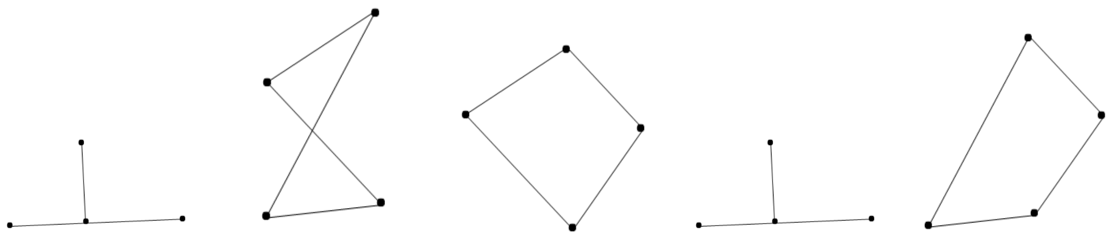


FIGURE 1.2 – ***Deck(G)***

Remarque 1.1.1 *Comme dans l'exemple ci-dessus 1.1.2, l'ensemble Deck(G) peut être considéré comme un multi-ensemble, car il est possible d'avoir $G_v \simeq G_u$, pourtant, ces deux sous-graphe ont été obtenus en supprimant des sommets différents et sont donc des cartes différentes.*

Définition 1.1.5 *Soit $G = (V, E)$ un $(n, p)-$graphe simple.*

On appelle ***complémentaire*** *de G, le graphe $\overline{G} = (\overline{V}, \overline{E})$ qui est défini tel que :*

- $\overline{V} = V$.

- $e \in \overline{E}$ si et seulement si $e \notin E$.

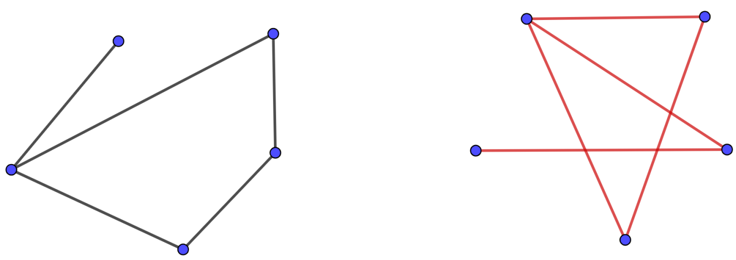


FIGURE 1.3 – Exemple d'un graphe et son complémentaire

Définitions 1.1.4 *Soient $G = (V, E)$ un graphe simple et C, B deux parties de V.*
On dira que C est ***une clique*** *de G si le graphe $G[C]$ engendré par C est un graphe complet.*
On dira que C est ***une clique maximale*** *de G si C est une clique et si le graphe $G[B]$ n'est pas complet chaque fois que C est strictement contenue dans B.*
Une partie I de V est dite ***stable*** *ou indépendante si le graphe complémentaire du graphe engendré par I est complet.*

Définitions 1.1.5

1. *Dans un graphe simple $G = (V, E)$, on appelle* ***chemin*** *de longueur $m - 1$ une suite finie de sommets $(v_1, ..., v_m)$ $(m \geq 2)$ telle que pour tout $1 \leq i \leq m - 1$, $v_i v_{i+1} \in A$. Et on le note $C = [v_1, ..., v_m]$ ou $C = (v_1, ..., v_m)$.*
   Les sommets v_1 et v_m sont appelés les extrémités du chemin.
2. ***Un cycle*** *de longueur $m - 1$ est un chemin $C = (v_1, ..., v_m)$ tel que $v_1 = v_m$.*
3. *Un chemin (respectivement cycle) de longueur strictement supérieure à un dont tous les sommets (sauf éventuellement v_1 et v_m) sont distincts est dit* ***élémentaire****.*

Exemple 1.1.3 *les figures ci-dessous présente un exemple de graphe contenant des chemins et cycles.*

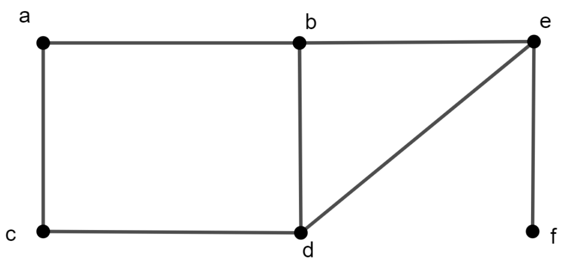


FIGURE 1.4 – Graphe d'ordre 6

Un chemin dans ce graphe est : (a, b, e, f)
Un cycle dans ce graphe est : (a, b, d, c, a)

Définition 1.1.6 *Soit G un graphe simple.*
Un chemin (resp. cycle) ***Hamiltonien*** *est un cycle passant une et une seule fois par chaque sommet de G.*
Une ***corde*** *est une arête reliant deux sommets non adjacents d'un cycle de G.*

Remarque 1.1.2 *Un graphe sans cycle élémentaire est appelé acyclique.*

Graphes connexes

Soit $G = (V, E)$ un graphe simple, deux sommets u et v sont dits connectés s'ils sont liés par un chemin, ce que l'on notera par $u \sim v$.
La relation $\sim$ est une relation d'équivalence sur V. Une classe d'équivalence pour $\sim$ est appelée une composante connexe de G.

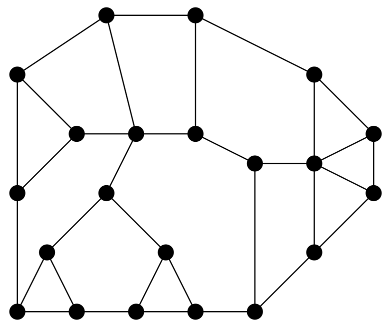
Définition 1.1.7 *Un graphe simple G est dit connexe si deux sommets quelconques de G sont connectés.*

Définition 1.1.8 *Soit $G = (V, E)$ un graphe simple connexe d'ordre ≥ 2.*
Un sommet v est un point ***d'articulation*** *de G si $G - v$ est non connexe.*
Une arête e de G est ***un pont*** *si $G - e$ est non connexe.*

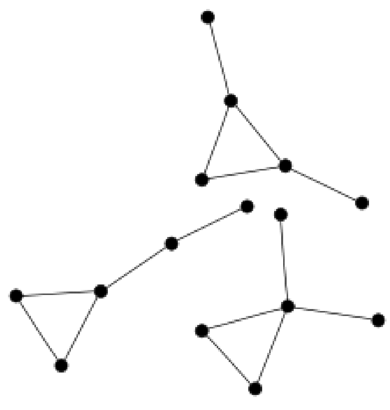
Théorème 1.1.2 *Un sommet v d'un graphe simple connexe G est un point d'articulation de G si et seulement si il existe deux sommets v' et v'' distincts de v tels que v appartient 'à chaque chemin élémentaire reliant v' et v''.*

Proposition 1.1.1 *Soit $G = (V, E)$ un graphe simple. Alors G est une réunion disjointe des graphes connexes qui sont les composantes connexes de G.*

Exemple 1.1.4 *les figures ci-dessous présente un exemple de graphe connexe et un autre graphe non connexe.*



(a) Graphe connexe



(b) Graphe non connexe, avec trois composantes connexes.

FIGURE 1.5 – Graphe connexe

Graphes isomorphes

Deux graphes simples $G = (V, E)$ et $G' = (V', E')$ sont dits **isomorphes** s'il existe une application $f : V \to V'$ bijective qui conserve toutes les arêtes.
Autrement dit, une paire de sommets $\{u, v\}$ de G est une arête de G si et seulement si $\{f(u), f(v)\}$ est une arête de G'.
On écrit $G \simeq G'$ lorsqu'il existe un isomorphisme de G sur G' .
Le relation " *est isomorphe à* " est une relation d'équivalence.
On dira que le graphe $G = (V, E)$ contient le graphe $G' = (V', E')$ si G' est isomorphe à un sous-graphe induit de G.

Proposition 1.1.2 *Si deux graphes simples $G = (V, E)$ et $G = (V', E')$ sont isomorphes alors ils ont la même taille et le même ordre.*

Proposition 1.1.3 *Si $f : V \to V'$ est un isomorphisme de $G = (V, E)$ sur $G' = (V', E')$ alors,*

$$\forall v \in V, d_G(v) = f\left(d_{G'}(v)\right)$$

Définition 1.1.9 (Hypomorphisme) *Soit $G = (V, E)$ et $H = (V', E')$ deux graphes simples d'ordre n.*
*Une application $\sigma : V \to V'$ est dite **hypomorphisme** si σ est bijective telle que :*

$$G_v \simeq H_{\sigma(v)} \ , \ \forall v \in V$$

*Deux graphes G et H sont **hypomorphe** s'il existe un hypomorphisme de V dans V'.*

Paramètres d'un Graphe

Un paramètre (ou invariant) d'un Graphe est une propriété ϕ, telle que quelques soient G et H deux graphes isomorphes, on a $\phi(G) = \phi(H)$

1.1.2 Quelques classes de graphes

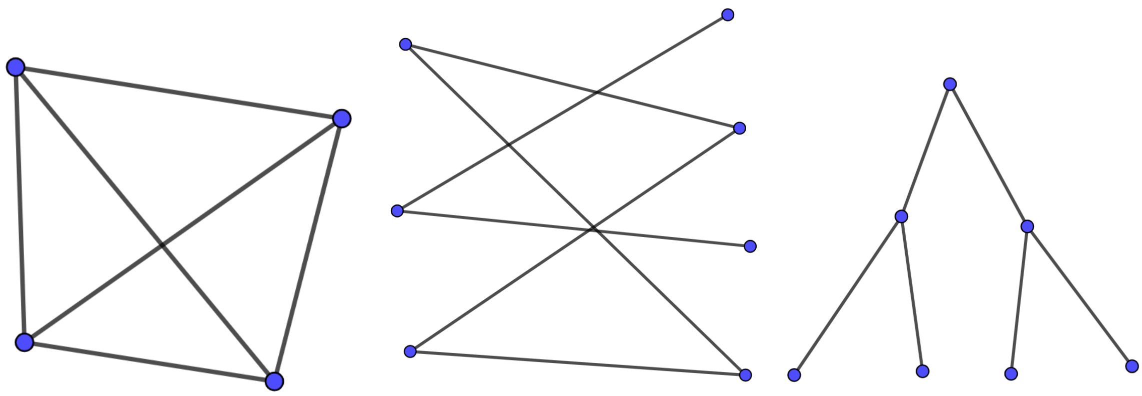
Définitions 1.1.6

*a) Le graphe $G = (V, E)$ est dit **biparti** s'il existe une partition en deux sous-ensembles disjoints S_1 et S_2 tels que S_1 et S_2 sont des stables.*

*b) On appelle **arbre** tout graphe simple connexe sans cycle.*

On appelle forêt tout graphe simple sans cycle.

Proposition 1.1.4 *Un graphe simple connexe $G = (V, E)$ est un arbre si et seulement si chacune de ses arêtes est un pont.*



(a) Graphe complet K_4 (b) Graphe biparti (c) Arbre

FIGURE 1.6 – Quelques classes de graphes

Définitions 1.1.7 *Soit $\mathcal{G}$ une classe de graphes et G et F deux graphes tels que $F \in \mathcal{G}$ et $n(F, G)$ le nombre des sous-graphes de G isomorphes à F.*

1. *Un sous-graphe de G qui appartient à $\mathcal{G}$ sera appelé un **$\mathcal{G}$-sous-graphe** de G.*
2. *Un **$\mathcal{G}$-sous-graphe maximal** de G est un $\mathcal{G}$-sous-graphe de G qui n'est pas un sous-graphe d'aucun autre $\mathcal{G}$-sous-graphe de G.*
3. *Une $(\mathbf{F}, \mathbf{G})$**-chaîne** de longueur n est une suite $(X_0, X_1, ..., X_n)$ des $\mathcal{G}$-sous-graphes de G telle que $F = X_0 \subset X_1 \subset ... \subset X_n \subset G$*
4. *Deux (F, G)-chaînes sont **isomorphes** si elle ont la même longueur et les termes correspondants sont des graphes isomorphes.*
5. *Le rang de F dans G est la longueur de la plus longue (F, G)-chaîne,qu'on le noté $rang(F)$.*

Exemple 1.1.5 *Si $\mathcal{G}$ est la classe des graphes connexes, les $\mathcal{G}$-sous-graphes maximaux de G sont les composantes connexes de G.*

1.2 Graphes orientés

Définitions 1.2.1 *Un graphe orienté $G = (V, E)$ est la donné d'un ensemble fini non vide de sommets V et d'un ensemble d'arc $E \subset V \times V$.*
*- Si $e = (v, v') \in E$, on dit que e est **un arc** de v à v', on le note $e = vv'$. Si $v = v'$, on dit alors que e est **une boucle** en v.*
*- Si $vv' \in E$ ou $(v', v) \in E$, les sommets v et v' sont dits **adjacents.***

Définitions 1.2.2 *Soit $e = vv'$ un arc d'un graphe orienté G.*
*On dit que e est **incident** à v vers l'extérieur et incident à v' vers l'intérieur.*
Le nombre d'arcs incidents à v vers l'extérieur est noté $d_G^+(v)$ ou $(d^+(v))$ et s'appelle le demi-degré extérieur de v. Par analogie, le demi-degré intérieur de v, noté $d_G^-(v)$ ou $(d^-(v))$ est le nombre d'arcs incidents à v vers l'intérieur.
Le degré $d_G(v)$ est égal à $d_G^+(v) + d_G^-(v)$.
Si $d_G(v)$ est pair (resp. impair) alors le sommet v est dit pair (resp. impair).
Si $d_G(v) = 1$ le sommet v est dit pendant.
*Un arc est **pendant** s'il est incident à un sommet pendant.*

Exemple 1.2.1 *Soit $G = (V, E)$ un graphe orienté défini par :.*
$V = \{a, b, c, d\}$
$E = \{(a, b); (a, c); (c, b); (c, d); (d, a)\}$

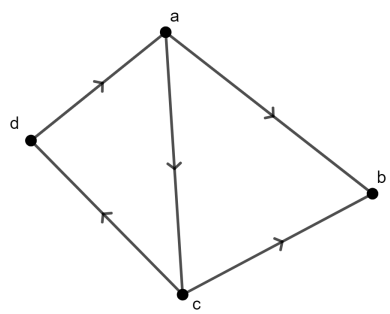


FIGURE 1.7 – Graphe orienté avec 4 sommets

$d_G^+(c) = 2$ *et* $d_G^-(c) = 1$ *donc* $d_G(c) = 3$

Lemme 1.2.1 *Soit $G = (V, E)$ un graphe orienté de taille p, alors :*

$$\sum_{v \in V} d_G^+(v) = \sum_{v \in V} d_G^-(v) = p$$

Définitions 1.2.3 *Dans un graphe orienté fini $G = (V, E)$, un **chemin** est une suite alternée finie C de sommets et d'arcs de G, $C = [v_1 v_2 ... v_m]$ telle que $v_i v_{i+1} \in E$, v_1 est l'extrémité initiale (ou origine) de C et v_m son extrémité finale.*
La longueur $l(C)$ du chemin C est égale au nombre d'arcs qu'il comporte (un arc peut éventuellement être répété).
*Le chemin C est un **circuit** si $v_1 = v_m$.*
Si un arc ne figure plus d'une fois dans le chemin, ce dernier est dit simple.
Si aucun sommet ne figure plus d'une fois dans le chemin (sauf peut être v_1 et v_n), ce dernier est alors dit élémentaire. De façon analogue, on définit un circuit simple et un circuit élémentaire.
Une chaîne de v_1 à v_m de longueur $m - 1$ est une suite de sommets $[v = v_1 v_2 ... v_m = v']$ telle que pour tout $i = 1, .., m - 1$, $v_i v_{i+1} \in E$ ou $v_{i+1} v_i \in E$. La chaîne C est un cycle si $v = v'$.

Graphes orientés fortement connexes

Définition 1.2.1 *Un graphe orienté $G = (V, E)$ est **fortement** connexe si pour tout couple (v, v') de sommets il existe un chemin de v à v'.*

Définition 1.2.2 *Un graphe orienté $G = (V, E)$ est **simplement** connexe si pour tout couple (v, v') de sommets il existe une chaîne de v à v'.*

Proposition 1.2.1 *Soit $G = (V, E)$ un graphe orienté. Alors G admet une décomposition unique en graphes fortement connexes qui sont les composantes fortement connexes de G.*

1.2.1 Les tournois

Définition 1.2.3 *Un graphe orienté $T = (V, E)$ est dit **tournoi** s'il vérifie :*

$$\forall x, y \in V \text{ avec } x \neq y; (x, y) \in E \text{ si et seulement si } (y, x) \notin E$$

.
Un tournoi est donc un graphe orienté (digraphe) obtenu en attribuant une direction à chaque arête dans un graphe complet non orienté.

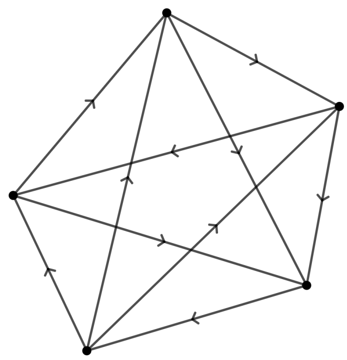


FIGURE 1.8 – Tournoi avec 5 sommets

Définition 1.2.4 *Un tournoi $T = (V, E)$ est dit **transitif** si :*

$$\forall x, y, z \in V \quad , (x, y) \in E \text{ et } (y, z) \in E \Longrightarrow (x, z) \in E$$

Définition 1.2.5 *Soit $T = (S, A)$ un tournoi.*

1. *Le **dual** de T est le tournoi noté $T^* = (S, A^*)$ défini par :*
   $\forall x, y \in S \quad (y, x) \in A^*$ *si et seulement si* $(x, y) \in A$
2. *Un tournoi est dit **auto-dual** lorsque T est isomorphe à T^*.*

Définition 1.2.6 *Un tournoi fini $T = (V, E)$ défini sur un ensemble fini V et soit X une partie de V.*
*Le **sous-tournoi** induit par X est défini par $T(X) = (X, E \cap (X \times X))$.*

Définition 1.2.7 *Un tournoi fini $T = (V, E)$ est dit **fortement connexe** si pour tous $x, y \in V$ avec $x \neq y$, il existe une suite de sommets $(x_0 = x, x_1, ..., x_p = y)$ telle que pour tout $i \in \{0, 1, 2, ..., p-1\}$, on a $(x_i, x_{i+1}) \in E$, autrement dit T est fortement connexe si et seulement s'il a un cycle hamiltonien.*

Les tournois indécomposables

Définition 1.2.8 (Intervalle) *Étant donné un tournoi $T = (V, E)$.*
*On dit qu'une partie I de V est **un intervalle** de T si pour tous a, b de I et x de $V \setminus I$, on a :*

$$(a, x) \in E \text{ si et seulement si } (b, x) \in E$$

.

Remarque 1.2.1 *Soit $T = (V, E)$ un tournoi défini sur un ensemble fini V, alors l'ensemble vide, les singletons de V et l'ensemble V sont des intervalles de T, appelés, intervalles triviaux.*

Définition 1.2.9 *Un tournoi T ayant au moins 3 sommets est dit **indécomposable** lorsque tous ses intervalles sont triviaux dans le cas contraire il est dit **décomposable**.*

Exemple 1.2.2 *Voici un tournoi non transitif à 3 sommets. Il est indécomposable car ces intervalles sont tous triviaux.*

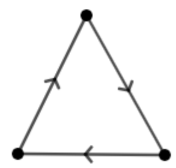


FIGURE 1.9 – Tournoi indécomposable

Définition 1.2.10 *Soient $T_1, T_2, ..., T_m$ des tournois définis sur des ensembles $V_1, V_2, ..., V_m$ qui sont deux à deux disjoints et R un tournoi défini sur l'ensemble $\{1, 2, ..., m\}$, **la dilatation** de R par les tournois $T_1, T_2, ..., T_m$ est le tournoi noté $R(T_1, T_2, ..., T_m)$ défini sur $V = V_1 \cup V_2 \cup ... \cup V_m$ par :*
(x, y) arc de $R(T_1, T_2, ..., T_m)$ si et seulement si (x, y) est un arc de l'un des tournois $T_1, T_2, ..., T_m$ et s'il existe $i, j \in \{1, 2, ..., m\}$, $i \neq j$ tel que $x \in V_i$, $y \in V_j$, on a (i, j) est un arc de R.

Définition 1.2.11 ***Un diamant** est un tournoi de 4 sommets $\{a, b, c, d\}$ contenant un seul 3-cycle,*
*si $\{b, c, d\}$ est ce 3-cycle alors a est dit **le sommet** (ou la pointe) de ce diamant.*

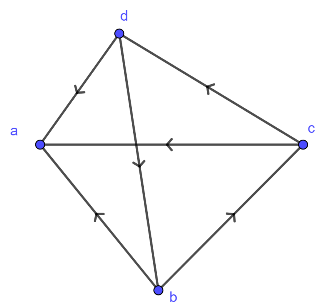


FIGURE 1.10 – Un diamant de sommet a

Chapitre 2

Conjecture d'ULAM

Sommaire

Dans ce chapitre on va présenter le problème de reconstruction des graphes à partir d'une famille de ses sous-graphes.On va traiter le problème suivant :

> Est-ce qu'un graphe peut se caractérisé, à un isomorphisme prés, par une famille de ses sous-graphes propres ?

2.1 Historique

STANISLAW ULAM

La **conjecture d'Ulam** [1] (ou la conjecture de la reconstruction des graphes), est considérée comme l'un des problèmes célèbres de la théorie des graphes, cette conjecture stipule qu'un graphe simple d'ordre supérieur ou égale à trois peut être déterminé de façon unique à un isomorphisme près (reconstruit) à partir de la famille de ses sous-graphes induits propres maximaux. Plusieurs travaux ont été faits pour prouver cette conjecture pour plusieurs classes de graphes et aucun contre exemple n'a été trouvé. Parmi les publications qui ont traité ce sujet, on trouve le travail de ***Bondy et Hemminger*** [9] qui ont fait une étude détaillée de ce problème. La conjecture d'Ulam est restreinte pour les graphes simples non orientés et finis, mais d'autres auteurs ont étudié le reconstructibilité de quelques classes de graphes et donner des contre exemples sur la non reconstructibilité de quelques autres. Le problème de reconstruction a connu plusieurs reformulations et améliorations, une de ces reformulations est due à ***Harary*** [2] en 1964 [8], appelée **" Conjecture de l'arête-reconstruction "**, dans laquelle il affirme que tout graphe simple ayant au moins 4 arêtes peut être reconstruit à partir de ses sous-graphes partiels propres maximaux.
Une autre conjecture qui généralise celle d'Ulam a été proposée par ***P.Kelly*** [3] en 1957 [13], qui affirme tout graphe simple, est uniquement déterminé à un isomorphisme prés par la famille des sous-graphes obtenus en enlevant k sommets du graphe.

1. Stanislaw ULAM, né le 13 avril 1909 à Lemberg et décédé le 13 mai 1984 à Santa Fé, est un mathématicien polono-américain. Il a aidé à développer la théorie qui permit la bombe à hydrogène.
2. Frank HARARY, né le 11 mars 1921 à New York et mort le 4 janvier 2005 à Las Cruces, au Nouveau-Mexique, est un mathématicien américain, qui a travaillé en théorie des graphes et ses applications.
3. Francis Patrick KELLY, né le 28 décembre 1950, est un mathématicien britannique, professeur de mathématiques des systèmes au Laboratoire de Statistique de l'université de Cambridge.

Dans ce chapitre nous faisons un résumé des résultats relatifs aux conjectures présentées ci-dessus.

2.2 Conjecture de la reconstruction des graphes

La conjecture de reconstruction des graphes est considérée comme l'un des anciens problèmes non résolus en théorie de graphes qui s'intéresse sur la caractérisation d'un graphe par une famille de ses sous-graphes.

2.2.1 Conjecture d'ULAM

En premier lieu, nous allons présenter l'énoncé original de la conjecture d'ULAM énoncé dans [19].

Conjecture :[19] Supposons que dans deux ensembles A et B contenant n éléments, on définie une fonction distance ρ pour touts pairs de points distincts dont la valeur est soit 1 ou 2, et $\rho(p,p) = 0$.
Supposons que pour tout sous ensemble de A avec $n-1$ points , il existe un système isométrique des $n-1$ points de B, et que le nombre des sous ensembles distincts isomorphe à tout sous ensemble de $n-1$ points est le même pour A et B.
Est-ce que A et B sont isomorphes ?

Nombreuses sont les reformulations de la conjecture originale d'Ulam. Par la suite, nous allons voir celles appliquées aux graphes.

Conjecture de Reconstruction (RC)

Conjecture 1 (RC) :[Ulam-Kelly 1942]
Soient G et H deux graphes simples ayant au moins trois sommets. S'il existe une application bijective $\psi : V(G) \to V(H)$ telle que $G_v \simeq H_{\psi(v)}$ pour tout sommet $v \in V(G)$, alors $G \simeq H$.

Définition 2.2.1 *- On dit que H est une **reconstruction** de G si $V(G) = V(H)$ et $G_v \simeq H_v$, autrement dit si Deck(G) = Deck(H).*
*- G sera dit **reconstructible** si toute reconstruction de G est isomorphes à G.*

Voici donc une formulation de la conjecture d'Ulam :

Tout graphe simple d'ordre supérieur ou égal à trois est **reconstructible**

Remarque 2.2.1 *Les graphes ne sont pas tous reconstructible. En effet la condition que le nombre de sommets soit supérieur ou égal à trois est* ***nécessaire****.*

Exemple 2.2.1 *Soit* $G = K_2$ *le graphe complet d'ordre deux et* $H = \overline{K_2}$ *son complémentaire.*

FIGURE 2.1 – Exemples de graphes non reconstructible

On constate que ces deux graphes sont des reconstructions l'un de l'autre, mais ils ne sont pas isomorphes, la conjecture de reconstruction affirme que ce sont les seuls graphes simples non reconstructibles.

Proposition 2.2.1 *Soit* $G = (V(G), E(G))$ *un graphe simple :*
Voici quelques propriétés de G *qu'on peut déterminé à partir de son Deck.*
• $|V(G)| = |Deck(G)|$
• *Chaque arête de* $E(G)$ *va être manquée exactement dans deux cartes. Donc chaque arête va se présenté dans* $n-2$ *cartes. Et on aura :*

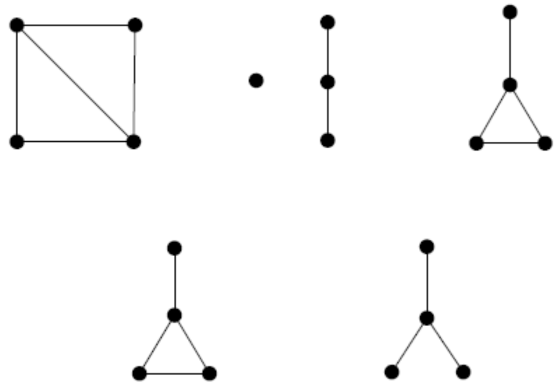
$$|E(G)| = \frac{1}{n-2} \sum_{v \in V(G)} |E(G_v)|$$

Lemme 2.2.1 *Soit* $G = (V(G), E(G))$ *un graphe simple.*
$\forall v \in V(G)$ *on a :*

$$deg(v) = |E(G)| - |E(G_v)|$$

Donc puisque $|E(G)|$ *peut être déterminer à partir du* $Deck(G)$*, on peut aussi déterminer le degré de* v *pour tout* $v \in V(G)$*.*

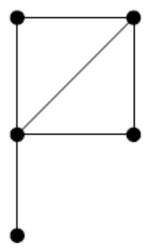
Exemple 2.2.2 (Exemple de reconstruction) *On va essayer de reconstruire, si possible, un graphe ou plus à partir du deck suivant :*



Le nombre de cartes est 5*, donc* $|V(G)| = 5$
Et on sait que :

$$|E(G)| = \frac{1}{n-2} \sum_{v \in V(G)} |E(G_v)|$$

Donc $|E(G)| = \frac{1}{3}(5+2+4+4+3) = 6$
Il s'agit donc d'un graphe d'ordre $|V(G)| = 5$ *et de taille* $|E(G)| = 6$*.*
Le degré de sommets manqués dans chaque carte est, respectivement, $1, 4, 2, 2, 3$
Il est à noter que le degré du sommet supprimé dans la deuxième carte est 4*, il doit être donc relier à tous les autres sommets. Notre unique graphe reconstruit est :*



Théorème 2.2.1 *Un graphe simple* G *est reconstructible si et seulement si son graphe complémentaire* $\overline{G}$ *est reconstructible.*

Preuve. Soit G un graphe simple d'ordre n. Supposons que G est reconstructible.
Étant donné le deck de $\overline{G}$: $Deck(\overline{G}) = \{\overline{G} - v_i; i = 1, 2, ..., n\}$.
Alors $\{\overline{\overline{G} - v_1}, \overline{\overline{G} - v_2}, ..., \overline{\overline{G} - v_n}\} = \{G - v_1, G - v_2, ..., G - v_n\} = Deck(G)$.

Par conséquent, G peut être obtenu uniquement à partir de $Deck(G)$ qui est connu.
Par suite, $\overline{G}$ est connu.Donc $\overline{G}$ est reconstructible.
La deuxième implication découle du fait que $\overline{\overline{G}} = G$. ■
Plusieurs mathématiciens ont trouvé d'autres façons pour réaffirmer la Conjecture d'Ulam. L'une des reformulations les plus utiles a été énoncée par **Frank Harary**.

La reformulation de Harary de la conjecture de reconstruction (HC)

Conjecture 2 (HC) :[8]
Tout graphe simple G d'ordre supérieur ou égal à trois est uniquement déterminé, à isomorphisme prés, par la famille de ses sous-graphes G_v pour tout $v \in V(G)$.
Autrement dit, G peut être reconstruit à partir de son $Deck(G)$.

Proposition 2.2.2 *[15] RC est vraie si et seulement si HC est vraie.*

Preuve. Soient G et H deux graphes simples d'ordre égale au moins trois.
Supposons que RC est vraie, et considérons *Deck(G)* le deck de G, supposons aussi que *Deck(G)* est aussi le deck de H. Alors G et H sont hypomorphes et puisque G et H sont isomorphes d'où G est uniquement déterminé par son *Deck(G)*.
Réciproquement,G est uniquement déterminé par son *Deck(G)*,et soit H un graphe hypomorphe à G c'est-à-dire *Deck(G)=Deck(H)*, donc G et H son isomorphes, par suite RC est vraie. ■
Les deux conjectures, de Kelly-Ulam et celle de Harary, sont logiquement équivalentes, bien qu'elles semblent tout à fait différentes. Il est possible donc de travailler à une solution de toute déclaration du problème qui est logiquement équivalent à l'un de ces problèmes.

Conejcture de Kelly

Kelly a donné une généralisation à la conjecture d'Ulam en affirmant qu'un graphe simple d'ordre assez grand peut être caractérisé par la famille de sous-graphes obtenu en enlevant $2, 3, ..., k$ sommets.
On note donc $Deck_k(G)$ l'ensemble des cartes obtenues en supprimant une combinaison unique de k sommets.
De façon plus formelle, on a :

Théorème 2.2.2 (Kelly 1957) *[14] Pour tout entier $k > 0$, il existe un entier $v(k)$, tel que tout graphe simple G d'ordre $n > v(k)$ est caractérisé, à isomorphisme près, par la famille des sous-graphes de $Deck_k(G)$.*

Définition 2.2.2 *Soient S un ensemble à n éléments et k un entier naturel inférieur ou égale à n.*

a) *Deux graphes simples G_1 et G_2 définis sur l'ensemble S sont **(k)-hypomorphes**, si pour toute partie A de S de cardinal k, les sous-graphes $G_1[A]$ et $G_2[A]$ sont isomorphes.*
b) *Un graphe simple G est **(k)-reconstructible** si tout graphe (k)-hypomorphe à G est isomorphe à G.*

Pour montrer la conjecture directement, deux approches se présentent :
L'une consiste à reconstruire les classes de graphes, dans l'espoir de trouver suffisamment de classes contenant tous les graphes. L'autre approche est à travers la reconstruction de paramètres.

2.2.2 Les paramètres reconstructibles d'un graphe

Dans ce qui suit, G sera considéré comme un graphe simple d'ordre > 3.

Définition 2.2.3 *Soit G un graphe. On dit qu'un paramètre $\theta = \theta(G)$ de G est **reconstructible**, si pour toute reconstruction H de G, on a $\theta(G) = \theta(H)$. Autrement dit, $\theta(G)$ peut être obtenu de façon unique à partir du Deck(G).*

Exemple 2.2.3
1. *L'ordre d'un graphe G est reconstructible.*
   En effet, soit G_v une carte de Deck(G), il est claire que G_v contient tous les sommets sauf v et donc $V(G) = V(G_v) + 1$
2. *La taille d'un graphe G est reconstructible.*
   En effet, considérons le Deck(G) d'un graphe G d'ordre n et de taille p.
   Donc $|E(G_{v_i})|$ est le nombre des arêtes de la carte G_{v_i}.
   $\sum\limits_{v_i \in V} |E(G_{v_i})|$ est donc la somme des arêtes de toutes les cartes dans Deck(G).
   Soit v_1v_2 une arête de G, cette arête ne se trouve pas dans les deux cartes G_{v_1} et G_{v_2}, pourtant elle est dans les $n-2$ cartes qui restent. Il s'en suit que $p = \dfrac{\sum |E(G_{v_i})|}{n-2}$

Parmi les résultats les plus utiles dans les méthodes de reconstruction, on trouve le lemme énoncé par Kelly.

Théorème 2.2.3 (Lemme de *Kelly*) *Soit G et F deux graphes tels que $|V(F)| < |V(G)|$, alors le nombre $n(F,G)$ de sous-graphes de G isomorphes à F est reconstructible.*

Preuve. Chaque sous graphe partiel de G isomorphe à F apparaît exactement dans $|V(F)| - |V(G)|$ sous graphe G_v, donc,

$$n(F,G) = \sum_{v \in V(G)} \frac{n(F,G_v)}{|V(F)| - |V(G)|}$$

Il est clair que le côté droit de cette égalité est reconstructible.Donc $n(F,G)$ est reconstructible. ■

Corollaire 2.2.1 *Soient deux graphes G et F tels que $|V(F)| < |V(G)|$ alors, le nombre de sous-graphes de G isomorphes à F et qui possèdent un sommet donné v est reconstructible.*

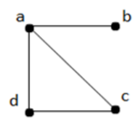
Preuve. Ce nombre est $n(F,G) - n(F,G_v)$, avec $n(F,G_v)$ est le nombre de sous-graphes de G isomorphes à F qui ne contient pas le sommet v, et selon le lemme de Kelly $n(F,G)$ est reconstructible,et $n(F,G_v)$ peut être clairement déterminé à partir de Deck(G), donc le nombre de sous-graphes de G isomorphes à F et qui possèdent le sommet v est reconstructible. ■

Remarque 2.2.2 *En prenant $F = K_2$ dans le lemme de kelly (2.2.3) et $F = K_2$ dans le corollaire (2.2.1), on trouve que le nombre d'arête et la séquence des degrés respectivement, sont des paramètres reconstructibles.*

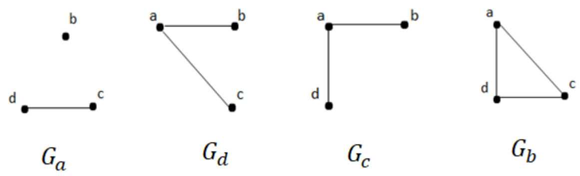
Théorème 2.2.4 *La séquence des degrés d'un graphe G est reconstructible.*

Preuve. Soient G un graphe simple d'ordre n et de taille p et G_v une carte du deck de G, le degré de v dans G est égale à p-$|E(G_v)|$ et comme p est reconstructible et $E(G_v)$ est connu à partir de G_v, alors le degré de v dans G est reconstructible, ainsi la séquence des degrés de G est reconstructible. ■

Exemple 2.2.4 *Soit G un graphe d'ordre 4 et taille 4.*



Graphe G d'ordre 4



Donc :
$deg_G(a) = 4 - |E(G_a)| = 4 - 1 = 3$
$deg_G(b) = 4 - |E(G_b)| = 4 - 3 = 1$
$deg_G(c) = 4 - |E(G_c)| = 4 - 2 = 2$
$deg_G(d) = 4 - |E(G_d)| = 4 - 2 = 2$
Alors la séquence des degrés de G est $(3, 2, 2, 1)$

Remarque 2.2.3 *La séquence des degrés des voisins d'un sommet v est aussi reconstructible. En effet, la séquence des degrés des sommets de G différents de v et la séquence des degrés des sommets de G_v sont reconstructibles.*

Rappelons qu'un graphe G est dit k-connexe avec $k > 0$ si et seulement si $|G| > k$ et pour tout sous-ensemble $S \subset V(G)$ de cardinal inférieur strictement à k, le graphe $G - S$ est connexe. La 1-connexité se confonde avec la connexité usuelle lorsque G n'a pas un sommet isolé, et la connectivité $k(G)$ de G est le plus grand entier k tel que G est k-connexe.

Lemme 2.2.2 *La connexité d'un graphe est reconstructible.*

Preuve. Supposons que G est non connexe et soit v un sommet de G alors, $G - v$ est connexe si et seulement si G a précisément deux composantes et $G = v + (G - v)$. Donc $Deck(G)$ ne contient qu'une seule carte connexe. D'autre part supposons que G est un graphe connexe, alors G contient au moins deux sommets qui ne sont pas d'articulation, donc $Deck(G)$ contient au moins deux cartes connexe, et puisque l'ordre de G est au moins égale à 3, cela implique que la connexité de G peut être déterminée à partir de $Deck(G)$. ■

Lemme 2.2.3 *La connectivité d'un graphe est reconstructible.*

Preuve. Si $k(G) = 0$ alors G est non connexe et le résultat découlera du lemme 2.2.2, sinon nous supposons que G est connexe, alors il est facile de voir que $k(G) = 1 + min_{v \in V(G)} k(G - v)$ d'où $k(G)$ peut être déterminé à partir de $Deck(G)$. ■

2.2.3 Classes de graphes reconstructibles

Plusieurs classes de graphes sont reconstructibles. Nous allons essayer d'examiner quelques-unes et prouver qu'elles sont reconstructibles. Nous supposerons que nos graphes ne sont pas des multigraphes ou des digraphes, car on va voir par la suite que la conjecture de reconstruction est fausse pour ces deux types de graphes.
Il est bien à noter que le faite de prouver que ces graphes sont reconstructibles et proposer une méthode de reconstruction sont deux problèmes différents. Les preuves suivantes montrent simplement que si nous reconstruisons ces types de graphe, alors la reconstruction est unique à un isomorphisme près.

Définition 2.2.4 *On dit qu'une classe $\mathcal{G}$ est reconstructible si chaque graphe dans $\mathcal{G}$ est reconstructible.*

Pour montrer qu'une classe de graphes est reconstructible, il suffit que :

1. Toute reconstruction appartient à la classe $\mathcal{G}$.(**Reconnaissance**).
2. Pour tout G dans $\mathcal{G}$, chaque reconstruction de G est isomorphe à G. (**Faible reconstruction**).

La classe $\mathcal{G}$ est donc reconstructible si elle est à la fois Reconnaissable et Faiblement reconstructible.

Théorème 2.2.5 *La classe des graphes réguliers est reconstructible.*

Preuve. Soient $\mathcal{G}$ la classe des graphes $k-$ régulier avec $k > 0$, et $Deck(G)$ le deck d'un graphe G de $\mathcal{G}$.
D'après le théorème (2.2.4), la séquence de degré de G est reconstructible, donc toute les reconstructions de G sont $k-$ régulières, par suite toute reconstruction de G appartient à $\mathcal{G}$, d'où $\mathcal{G}$ est Reconnaissable.
Il reste à montrer que $\mathcal{G}$ est Faible reconstructible, c'est à dire montrer que tout reconstruction de G est isomorphe a G, considérons une carte G_v de $Deck(G)$, G est k-régulier alors G_v contient

exactement k sommets de degré $k-1$ et le reste des sommets a un degré k. G peut être donc obtenu uniquement en ajoutant un nouveau sommet à n'importe quel G_v et en le joignant à tous les k sommets de G_v de degré $k-1$, par conséquent,toute les reconstructions de G sont isomorphes.
Ce qu'il faut démontrer ■

Théorème 2.2.6 *La classe des graphes complets est reconstructible.*

Preuve. Soit G un graphe complet. Par définition, un graphe complet est un graphe régulier d'ordre $n-1$. D'après le théorème (2.2.5), les graphes réguliers sont reconstructibles.
Par suite, G est reconstructible. ■
Parmis les classes de graphes qui sont reconstructibles, on trouve la classe des graphes non-connexe (*Harary 1957*). Il existe plusieurs preuves qui ont été faites pour démontrer la reconstruction des composantes connexes d'un graphe non-connexe.
L'un des théorèmes qui permettent d'obtenir une démonstration plus simple de quelques résultats principaux dans la reconstruction des graphes non connexe est celui dû à ***Bondy et Hemminger*** [9].

Théorème 2.2.7 (Counting Theorem [9]) *Soit $\mathcal{G}$ une classe reconnaissable de graphes et soit $\mathcal{F}$ une classe quelconque de graphes, telle que pour tout G dans $\mathcal{G}$, chaque $\mathcal{F}$-sous graphe de G est :*

1. *sommet propre.*
2. *Contenu dans un seul $\mathcal{F}$-sous-graphe maximal de G :*

Alors pour tout F dans $\mathcal{F}$ et G de $\mathcal{G}$, le nombre $m(F,G)$ des $\mathcal{F}$-sous-graphes maximaux de G isomorphes à F est reconstructible.

Preuve. On a d'après (1) tout $\mathcal{F}$-sous-graphe de G est sommet propre alors aucun $\mathcal{F}$-sous-graphe maximal n'aura $|V(G)|$ sommets donc $|V(F)| < |V(G)|\ \forall F \in \mathcal{F}$.
Montrons par récurrence sur le rang de F l'égalité suivante :

$$m(F,G) = \sum_{n=0}^{rang(F)} \sum (-1)^n n(F,F_1)n(F_1,F_2)...n(F_{n-1},F_n)n(F_n,G) \tag{2.1}$$

où la somme interne est prise sur les (F,G)-chaînes non isomorphes $(F_0,F_1,F_2,...,F_n)$.
Si nous supposons que le rang de F égale à 0, alors la longueur de la plus longue (F,G)-chaînes égale à 0, donc toute (F,G)-chaînes est de longueur 0, c'est-à-dire tout sous-graphe de

G isomorphe à F est un $\mathcal{F}$-sous-graphe maximal de G d'où $m(F,G) = n(F,G)$: alors (2.1) est clairement vérifiée pour $rang(F) = 0$.
Supposons qu'il est vraie $\forall F \in \mathcal{F}$ avec $rang(F) < r$.
Soit maintenant $F \in \mathcal{F}$ tel que $rang(F) = r$, et soit $(F_1, F_2, ..., F_p)$ la liste des $\mathcal{F}$-sous-graphe maximal de G, d'après la condition (2) on a tout sous-graphe de G isomorphe à F appartient à un seul F_i, d'où $n(F,G) = \sum_{i=1}^{p} n(F, F_i)$ qui peut s'écrire sous la forme :

$$n(F,G) = \sum_{X} n(F,X)m(X,G) \tag{2.2}$$

où la somme est prise sur l'ensemble des graphes X isomorphe aux $\mathcal{F}$-sous-graphe maximaux de G et on peut négliger la condition de maximalité de X dans l'égalité (2.2) car $m(X,G) = 0$ s'il n'existe pas de $\mathcal{F}$-sous-graphe maximale de G isomorphe à X d'où l'égalité (2.2) peut s'écrire sous la forme :

$$m(F,G) = n(F,G) - \sum_{X} n(F,X)m(X,G) \tag{2.3}$$

où la somme est prise sur l'ensemble des graphes X isomorphes aux $\mathcal{F}$ -sous-graphes de G non isomorphes à F. On peut considérer dans (2.3) uniquement les X tels que $n(F,G) > 0$, dans ce cas le rang de X est inférieur strictement à r donc on peut appliquer l'hypothèse de récurrence à $m(X,G)$ dans (2.3) et on obtient l'égalité (2.1). Alors soit maintenant H une reconstruction de G, et comme $\mathcal{C}$ est reconnaissable, H satisfait aux condition (1) et (2), ainsi l'égalité (2.1) s'applique au graphe H, et on a pour toute (F,G)-chaîne, il existe une (F,H) -chaîne isomorphe à celle-là et vice versa. De plus on a $|V(F)| <| V(G)$ pour tout $F \in \mathcal{F}$ d'où d'après le lemme de *Kelly* le coté droit de l'égalité (2.1) est égale pour G et H donc $m(F,G)$ est reconstructible.
■

Théorème 2.2.8 *La classe des graphes non connexes est reconstructible.*

Preuve. On sait qu'un graphe G est non connexe si et seulement s'il a au plus une carte de $Deck(G)$ connexe, et par conséquence toute reconstruction de G est non connexe, d'où la classe $\mathcal{C}$ des graphes non connexes est reconnaissable. Donc, dans le cas où $\mathcal{F}$ est la classe des graphes connexes, il est claire que les composantes connexes de G sont exactement les $\mathcal{F}-$ sous-graphes maximaux de G, alors le théorème de dénombrement (2.2.7) montre que nous pouvons reconstruire les composantes connexes de G d'où la faible reconstruction de $\mathcal{C}$ donc la classe des graphes non connexes est reconstructibles. ■

La reconstruction des arbres

Un arbre est soit **central** (a un centre [4]) ou **bicentral** (a deux, adjacent, centres). A base de cette propriété, ***Kelly*** (1957) a prouvé que les arbres sont renconstructibles.
Ce résultat a été prouvé par plusieurs auteurs, parmi eux, on trouve ***Bondy et Hemminger*** [9] qui ont donné une preuve plus simple en employant le théorème (2.2.7). La démonstration est basée sur le fait que tout arbre T est reconstructible à partir d'un sommet périphérique. [5]

Théorème 2.2.9 *[9] Les arbres sont reconstructibles.*

Preuve. Les arbres sont reconnaissables, car un graphe G est un arbre si et seulement si G est connexe et $|E(G)| = |V(G)| - 1$.
Un arbre est une chaîne si et seulement si chaque degré est au plus égale à deux. Ainsi, les chaînes sont reconstructibles.
Dans un arbre qui n'est pas une chaîne, toute plus longue chaîne est un sous-graphe propre. Il résulte de la lemme de *Kelly* que le diamètre et le rayon d'un arbre sont reconstructibles, et donc que les arbres centrés et bicentrés sont reconnaissables.
Sachant qu'un sommet v d'un arbre est périphérique si et seulement si $deg(v) = 1$ et que v soit sur une plus longue chaîne, on en déduit que le nombre de sommets périphériques est reconstructible.
Une branche d'un arbre centré (bicentré) est un sous-arbre de G admettant le centre comme sommet pendant et maximal pour cette propriété. Une branche est appelée rayonnante si elle comporte un sommet périphérique de l'arbre. Notons qu'un arbre bicentré a exactement deux branches, qui sont rayonnantes. Un arbre est dit fondamental s'il possède exactement deux branches, dont l'une est une chaîne appelée **tige**, et l'autre est appelée **feuillage**.
Un arbre (différent d'une chaîne) de rayon r est fondamental si et seulement s'il ne contient pas de sous-graphe isomorphe à l'un des trois graphes illustrés dans la figure (2.2) (où les centres sont identifiés par la lettre c et les distances α et β varient entre 1 et $r-1$). Les arbres de ces types sont reconnaissables.

4. Le centre d'un arbre est le sommet avec une excentricité minimale. L'excentricité d'un sommet X dans un arbre G est la distance maximale entre le sommet X et les autres sommets de l'arbre.
5. un sommet qui est extrémité d'une longue chaîne dans un arbre.

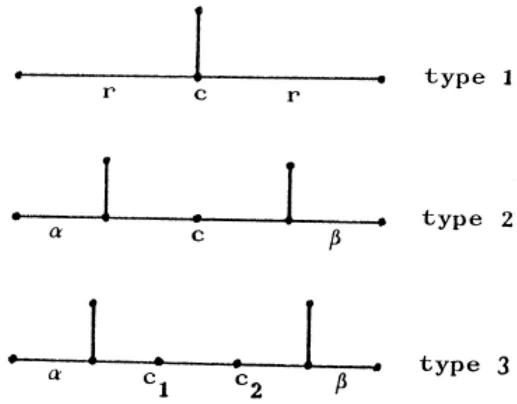


FIGURE 2.2 – Arbres non fondamentaux

Par exemple, un arbre G est de type 1 si et seulement s'il contient une chaîne de longueur $2r = |V(G)| - 2$ et $r + 2$ chaînes de longueur $r + 1$. Par conséquent, par la lemme de *Kelly*, les arbres fondamentaux sont reconnaissables.

Les arbres fondamentaux sont faiblement reconstructibles. Soit G un arbre fondamental centré (bicentré). Alors, toutes les reconstructions de G sont isomorphes à G car elles peuvent être obtenues, à un isomorphisme près, à partir du sous-arbre bicenté (centré) G_v, ayant le sommet de degré plus grand que 2 le plus près de l'arête central (sommet central), en allongeant d'un sommet une de ses chaînes rayonnantes.

Il reste à prouver que les arbres non fondamentaux sont reconstructibles. Soient G un arbre non fondamentale et F un arbre fondamental de même diamètre que G. D'après le théorème de dénombrement, le nombre de sous-arbres fondamentaux maximaux de G isomorphes à F est reconstructible. Nous pouvons utiliser cette information pour trouver les branches rayonnantes de G. Toute branche rayonnante, qui n'est pas une chaîne, comportant k sommets périphériques de G est le feuillage de $p(G) - k$ sous-arbres fondamentaux de G, où $p(G)$ est le nombre de sommets périphériques dans G. Ceci nous donne les branches rayonnantes qui ne sont pas des chaînes. Le nombre de branches rayonnantes est alors $p(G)$ moins le nombre total de sommets périphériques des branches rayonnantes qui ne sont pas des chaînes.

Dans le cas où G est centré, il reste encore à reconstruire les branches non-rayonnantes. Mais, ce ne sont que les branches non-rayonnantes d'un G_v obtenues en supprimant soit un sommet périphérique d'une branche rayonnante qui comporte au moins deux sommets périphériques, si une telle branche existe, soit un sommet pendant non-périphérique d'une branche rayonnante, si une telle branche existe. Autrement dit, toutes les branches rayonnantes sont des chaînes, et les branches non-rayonnantes peuvent être obtenues à partir d'un G_v, où v est un sommet périphérique. ■

2.3 Conjecture de l'arête-reconstruction

Malgré les efforts, peu de progrès a été réalisé dans l'étude de la conjecture de reconstruction. Pourtant, plusieurs classes de graphes suffisamment connues et de structure assez simple (les graphes bipartis, les graphes planaires, etc...) ne sont pas encore reconstruites.
L'arête-reconstruction était un problème qui paraît naturel à considérer en relation avec la Conjecture de reconstruction. Beaucoup de recherches ont été faites pour prouver les résultats déjà montrés, cette fois-ci au sujet de l'arête reconstruction. Nous discuterons quelques principaux résultats dans ce domaine.
Harary [6] a formulé la conjecture de l'arête-reconstruction, analogue à celle d'U1am.
Pour cela nous aurons besoin d'une terminologie relative au processus de l'arête-reconstruction. De façon analogue, nous définissons le sous-graphe $G - e$, noté G_e, comme étant le sous graphe de G obtenu en supprimant l'arête e de $E(G)$.

Définition 2.3.1 *Etant donné un graphe simple $G = (V, E)$ alors, le multi-ensemble de tous les sous-graphes G_e de G est appelé* ***arête-deck*** *de G. Une arête-reconstruction d'un graphe G est un graphe H tel que G et H ont le même* ***arête-deck****. Nous disons que G est* ***arête-reconstructible*** *si toute arête-reconstruction de G est isomorphe à G.*

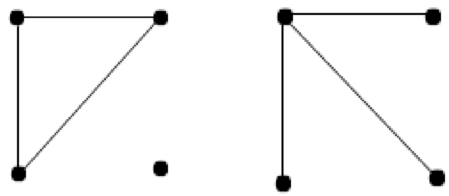
> Les notions des paramètres arête-reconstructibles, classes de graphes arête-reconnaissable et faiblement arête-reconstructible sont analogues à celles déjà citées.

En 1964 *Harary* a conjecturé dans [6] une conjecture analogue à celle d'Ulam.

Conjecture de l'arête-reconstruction

Conjecture : [6] 1964
Tout graphe simple ayant au moins 4 arêtes est arête-reconstructible.

Remarque 2.3.1 *la condition que G ait au moins 4 arête est nécessaire.*
En effet,les deux G_1 et G_2, ont même arête-deck, donc il sont arête-reconstructions l'un de l'autre, mais ne sont pas isomorphes ce qui montre qu'il ne sont pas arête-reconstructibles.



G_1 G_2

Dans la suite, on va considérer des graphes simples non orientés ayant au moins quatre sommets. On a le sentiment intuitif que cette conjecture est plus faible que la Conjecture de reconstruction, ce qui est confirmé par un théorème de *Harary et Palmer* (1965) : un graphe est reconstructible si son graphe adjoint est reconstructible. En 1969, *Hemminger* [16] a prouvé qu'un graphe est arête-reconstructible si et seulement si son graphe adjoint est reconstructible.
Voici une autre formulation de quelques résultats dans le cas d'arête-reconstruction :

Lemme 2.3.1 (de Kelly pour les arêtes) *Étant donné deux graphes G et F tel que $|E(F)| < |E(G)|$, le nombre de sous-graphes de G isomorphe à F est arête-reconstructible.*

Théorème 2.3.1 (de Bondy cas des arêtes [15] [9]) *Soit $\mathcal{G}$ une classe reconnaissable de graphes et soit $\mathcal{F}$ une classe quelconque de graphes, telle que pour tout G dans $\mathcal{G}$, chaque $\mathcal{F}$-sous graphe de G est :*

1. *Arête propre.*
2. *Contenu dans un seul $\mathcal{F}$-sous-graphe maximal de G :*

Alors pour tout F dans $\mathcal{F}$ et G dans $\mathcal{G}$, le nombre $m(F, G)$ des $\mathcal{F}$-sous-graphes maximaux de G isomorphes à F est arête-reconstructible.

2.3.1 Relation entre la reconstrcution et l'arête-reconstruction

En se basant sur le théorème (2.3.1), on peut démontrer une relation d'implication entre la reconstructibilité d'un graphe et son arête-reconstructibilité.
Mais avant d'énoncer ce théorème, nous aurons besoin du lemme suivant :

Lemme 2.3.2 *Le nombre de sommets isolés d'un graphe G est arête-reconstructible.*

Preuve. Soit G un graphe, et soit m le nombre minimum des sommets isolés dans un sous-graphes de G obtenu en supprimant une arête. Si G contient un chemin ou un cycle de longueur

3, le nombre des sommets isolés de G est m, car le fait de supprimer l'arête médiane du chemin ou l'une des arêtes du cycle n'augmentera pas le nombre de sommets isolés de G. Et donc si G contient autre sous-graphes, le nombre des sommets isolés de G est $m-1$ s'il contient un chemin de longueur 2, et $m-2$ dans les autres cas. ∎

Corollaire 2.3.1 *La conjecture arête-reconstruction est vraie pour tous les graphes si elle est valide pour les graphes sans sommets isolés.*

Preuve. Supposons que La conjecture d'arête-reconstruction est valide pour les graphes sans sommets isolés.
Soit G un graphe arbitraire, et soit H une reconstruction de G. Si G a n sommets isolés, alors H l'a aussi.
On peut écrire : $G = G' + nK_1$ et $H = H' + nK_1$, où G' et H' sont deux graphes sans sommets isolés.
Puisque $H_e \simeq G_e$ pour tout $e \in E(G)$, donc $H'_e \simeq G'_e$ $\forall e \in E(G)$.
Si maintenant G' est arête-reconstrcutible, alors $H' \simeq G'$, et donc $H \simeq G$.
Par suite G est arête-reconstructible. ∎

Théorème 2.3.2 *Soit G un graphe sans sommets isolés donc, si G est reconstructible alors G est arête-reconstructible.*

Preuve. Soit G un graphe sans sommets isolés et soit $\mathcal{G}$ la classe de toutes les arêtes-reconstructions de G et $\mathcal{F}$ la classe des graphes d'ordre $|V(G)|-1$. Comme toutes les arêtes-reconstructions de G n'ont pas de sommet isolé (lemme 2.3.2), alors tous les $\mathcal{F}$-sous-graphes sont arête propres, et donc G est arête reconnaissable. Le théorème de dénombrement (2.3.1) peut être donc s'appliquer. Les $\mathcal{F}$-sous-graphes maximaux de G sont précisément les sous-graphes induits propres maximaux de G (les G_v, $v \in V(G)$), et comme toute arête-reconstruction de G a les même G_v car les $\mathcal{F}$-sous-graphes maximaux de G sont arête-reconstructibles et G est reconstructible, il s'en suit que G est arête-reconstructible. ∎
Le théorème ci-dessus ainsi que les résultats précédents nous montrent que plusieurs paramètres et classes de graphes sont arête-reconstructibles , à titre d'exemple, les graphes réguliers, les graphes non connexes avec au moins deux composantes d'ordre supérieure à 2, les arbres, le nombre chromatique, le nombre d'arbres couvrants ...
Un autre résultat lié à ce problème est celui donné par ***Nash-williams*** [5].

Précisons quelques notations d'abord, soient G et H deux graphes, et F un sous graphe partiel de G. L'ensemble noté $|G \to H|_F$ est l'ensemble des applications injectives
$\pi : V(G) \to V(H)$, telles que pour toute arête uv de G, $\pi(u)\pi(v)$ est une arête de H si et seulement si uv est une arête de F.
On note $G \to H = (G \to H)_F$ et $|G \to H|_F = |(G \to H)_F|$.

Théorème 2.3.3 (*Nash-Williams* [5]) *Un graphe G est arête-reconstructible si l'on a une des conditions suivantes :*

1. *Il existe un sous-graphe partiel F de G tel que $|G \to H|_F = |G \to G|_F$ pour toute arête-reconstruction H de G.*
2. *Il existe un sous-graphe partiel F de G tel que $|E(G)| - |E(F)|$ est pair et $|G \to G|_F = 0$.*

Corollaire 2.3.2 (*Lovàsz* [10]) *G est arête-reconstructible si $|E(G)| > \frac{1}{2}\binom{|V(G)|}{2}$*

Preuve. Soit F le sous graphe partiel nul de G, on remarque que $|G \to H|_F = |G \to \overline{H}|$. Donc si $|E(G)| > \frac{1}{2}\binom{|V(G)|}{2}$ nous aurons $|G \to \overline{H}| = 0$ pout tout arête-reconstruction H de G. Par suite la condition (1) du théorème (2.3.3) est vérifiée, d'où G est arête-reconstructible. ■

Corollaire 2.3.3 (*Muller* [20]) *G est arête-reconstructible si $2^{|E(G)|-1} > |V(G)|$!*

Corollaire 2.3.4 *Un graphe G d'ordre n et de taille p est arête-reconstructible si $p > nlog(\frac{n}{2})$*

2.4 Nombre de reconstructions

Lorsque les recherches sur le problème de la reconstruction commence à ralentir, les auteurs ont eu l'idée de travailler sur les nombres de reconstructions. Bien que leur concept rend réellement la reconstruction plus difficile, il a réussi à mettre en lumière plusieurs questions qui servent par la suite a avancé dans la résolution de ce problème. En fait, ***Bollobàs*** [1] a prouvé de façon probabiliste que presque tous les graphes peuvent être reconstruits avec seulement trois cartes de leurs deck. Parmi les types du nombre de reconstruction, on trouve le nombre de reconstruction **existentielle** et le nombre de reconstruction **universel**.

Définition 2.4.1 *Soit G un graphe d'ordre n et de taille p.*

1. *On appelle nombre de reconstruction **existentielle** le nombre minimum de sous-graphes, obtenu en supprimant un sommet, nécessaires pour reconstruire de façon unique, à isomorphisme près, le graphe G, et on le note $\exists nr(G)$*
2. *On appelle nombre de reconstruction **universel** le nombre minimum des multi-sous-ensembles de $Deck(G)$ de taille n reconstruisant G de façon unique, à isomorphisme près. On le note $\forall nr(G)$*

Nous allons nous intéresser au nombre de reconstructions **existentielle**.

Pour un graphe G, si $\exists nr(G)$ existe alors G est reconstructible et dans le cas contraire nous avons $\exists nr(G) = \infty$

Proposition 2.4.1 *Pour tout graphe G d'ordre supérieure ou égale à trois, on a $\exists nr(G) > 2$*

Preuve. Pour qu'un graphe simple G d'ordre ≥ 3 ait 2 comme nombre de reconstructions existentielle, il faut choisir deux cartes du $Deck(G)$ ce qui va nous permettre de créer un sous-ensemble de $Deck(G)$ unique pour la classe d'automorphisme de G. Cependant, pour deux sommets u et v de G, nous pouvons donc construire un graphe H qui partage le même sous-deck G_u, G_v en copiant G et en inversant u et v. ■

Théorème 2.4.1 ([17] , [21]) *Si G est un graphe non connexe dont toutes les composantes connexes ne sont pas isomorphes alors $\exists nr(G) = 3$*

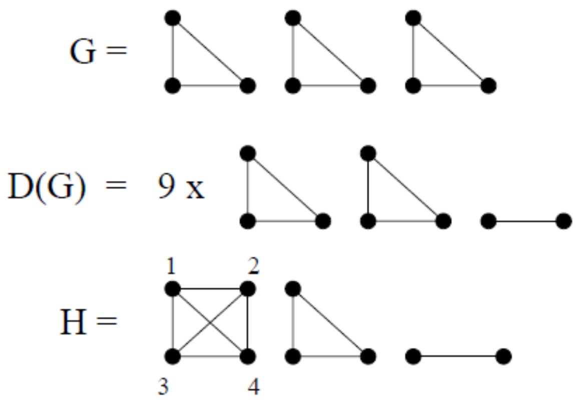
Théorème 2.4.2 *Si G est un graphe non connexe avec des composantes isomorphes d'ordre c, alors $\exists nr(G) \leq c + 2$*

W. Myrvold a prouvé en utilisant le théorème précédent (2.4.2) une méthode de calcul de $\exists nr(G)$ pour un graphe G non connexe composé entièrement des des cliques de même taille.

Théorème 2.4.3 ([21]) *Pour tout graphe G non connexe de la forme pK_c,*
on a $\exists nr(G) = c + 2$

Preuve. Soit G un graphe simple non connexe de la forme pK_c, alors il est claire donc que $Deck(G)$ est constitué de $|V(G)| = p * c$ cartes de la forme $(p-1)K_c \cup K_{c-1}$, et soit maintenant un graphe non connexe $H = K_{c+1} \cup (p-2)K_c \cup K_{c-1}$.
La suppression de chaque sommet de K_{c+1} de H nous permet de recréer le seul multi-sous-deck de G de taille $c + 1$, et cela signifie que $\exists nr(G) > c + 1$, et l'application de théorème (2.4.2) ($\exists nr(G) \leq c + 2$) implique que $\exists nr(G) = c + 2$. ■

Exemple 2.4.1 *Voici un exemple qui illustre la preuve du théorème (2.4.3).*



Soit le graphe non connexe $G = 3K_3$*, alors la suppression de chaque sommet numéroté du graphe* H *nous permet de recréer les* 4 *cartes de* $Deck(G)$ *et donc par (2.4.3)* $\exists nr(G) = 5$

Chapitre 3

Problème de reconstruction pour quelques classes de graphes

Sommaire

3.1 Graphes orientés

Introduction

La conjecture d'Ulam affirme que tout graphe G d'ordre $n > 3$ peut être reconstruit à partir de son *Deck*, et malgré le fait que plusieurs résultats ont été écrits dans ce sens, la conjecture n'a été vérifiée que pour quelques classes de graphes (les arbres,les graphes k-réguliers, les graphes non connexes...)
La question de reconstructibilité est aussi posée pour les graphes orientés. En effet, la conjecture de reconstruction n'est pas en générale vraie pour les graphes orientés.
Un contre exemple est illustré dans la figure (3.1) pour les tournois d'ordre 3.

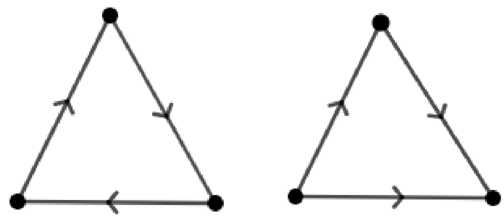


FIGURE 3.1 – Non reconstructible tournois avec 3 sommets

Harary et Palmer ont montré la conjecture pour les tournois non fortement-connexe d'ordre supérieure ou égale à 5.

Théorème 3.1.1 (Théorème 3.1 [9]) *Les tournois non fortement connexe ayant au moins* 5 *sommets sont reconstructibles.*

En 1975, ***Stockmeyer*** a prouvé la non reconstruction des tournois d'ordre $2^n + 2^m$, pour tout m et n qui ne sont pas touts les deux nuls.

3.1.1 Classe de tournois reconstructible

Dans cette section, on va présenter une famille de tournoi qui vérifie la conjecture de reconstruction. Il s'agit des tournois sans diamants.
Rappelons, la définition d'un tournoi sans diamant.

> Un tournoi est dit **sans diamant**, si toutes les restriction à quatre sommets sont soit : Des chaînes ou fortement connexe. Autrement dit, ces restrictions sont transitifs ou hamiltoniens.

Caractérisation des tournois sans diamant

Définition 3.1.1 *Pour tout entier positive h, on définit le tournoi T_h sur $\{0, 1, ..., 2h\}$ par :*
$(i, i+j)$ est un arc de T_h $\forall i = 0, 1, ..., 2h$ et $j = 1, 2, ..., h$
$(i+j, i)$ est un arc de T_h $\forall i = 0, 1, ..., 2h$ et $j = h+1, h+2, ..., h$, où $+$ désigne la somme modulo $2h+1$.

Proposition 3.1.1
1. *T_h admet la permutation circulaire $\Phi(i) = i+1$ comme automorphisme.*
2. *La restriction de T_h sur $\{0, 1, ..., h\}$ est une chaîne maximale de longueur maximale, notée $(0, 1, 2, ..., h)$.*
3. *T_h est irréductible (indécomposable) et sans diamant.*

Preuve.

1. Par construction de T_h on a (i, j) dans T_h entraîne que $(i+1, j+1)$ est dans T_h.
2. Par construction de T_h on voit que $(0, 1, 2, ...h)$ est une chaîne et pour tout $j = h+1, h+2, ..., 2h$, (h, j) et $(j, 0)$ sont dans T_h donc $(0hj)$ est un cycle de T_h d'où $(0, 1, 2, ...h)$ est une chaîne maximale de longueur $h+1$.

   Enfin, soit C une chaîne de T_h, par permutation on peut supposer que C commence par 0, et la base de C est une partie de $\{0, 1, ..., h\}$ donc C est de longueur $\leq h+1$.
3. Soient deux sommets i et j de T_h, on peut supposer que $i < j \leq h$ donc $(j, +h)$ et $(j+h, i)$ sont dans T_h, donc touts les intervalles de T_h contenant i et j contient outs les éléments de la chaîne $(j, .., j+h)$ et par suite contient $i+h+1$ donc touts les éléments de la chaîne $(i+h+1...i)$, donc en définitive égale à la base de T_h ce qui implique que T_h est irréductible, et il est sans diamant car sa restriction sur 4 sommets est une chaîne.

■

Par extension, un tournoi T isomorphe à un tournoi T_h est appelé **tournoi irréductible et sans diamant de largeur** h.

Proposition 3.1.2 *Deux tournois irréductibles sans diamant sont isomorphes si et seulement si ils ont même largeur.*

Preuve. Soient T et T' deux tournois irréductibles sans diamant isomorphes de largeur h et h' respectivement, on suppose $h \leq h'$, T_h et $T_{h'}$ étant isomorphes, si on avait $h < h'$, alors une chaîne maximale de longueur maximale de $T_{h'}$ n'aurait pas d'image dans T_h donc $h = h'$.
Réciproquement si T et T' deux tournois irréductibles sans diamant de largeur h ils sont tous les deux isomorphes a T_h. ■

Théorème 3.1.2 (de caractérisation) *Un tournoi T est sans diamant si et seulement si il existe un entier h tel que T soit une T_h-somme de chaînes.*

La reconstruction des tournois sans diamant

Théorème 3.1.3 *Tout tournoi T sans diamant d'ordre ≥ 6 est reconstructible.*

Pour démontrer ce résultat, on aura besoin des lemmes suivants :

Lemme 3.1.1 *Soient T un tournoi sans diamant d'ordre $n > 3$, T' un tournoi $(n-1)$-hypomorphes à T, $C(x)$ et $C'(x)$ les chaînes de dilatation contenant x dans T et T' respectivement, on a :*

1. *T est une chaîne si et seulement si T' est une chaîne.*
2. *T' est un tournoi sans diamant de même largeur que T.*
3. *pour un entier k donné, si $C(x)$ est de cardinal k alors $C'(x)$ est de cardinal k, et le nombre de chaînes de dilatation de cardinal k est le même dans T et T'.*

On rappelle qu'une **relation binaire** $\mathcal{R}$ sur un ensemble d'éléments E, est une application de $E \times E$ dans un ensemble arbitraire à deux éléments, qui sera par la suite la paire $\{+, -\}$, où $\mathcal{R}(x, y) = +$ signifie que x est en relation avec y et $\mathcal{R}(x, y) = -$ signifie que x n'est pas en relation avec y.

1. Deux relations binaires $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$ sont **isomorphes** s'il existe une bijection f de E_1 sur E_2, telles que pour tout n-uplets $(x_1, x_2, ..., x_n)$ de E_1 on a :

$$\mathcal{R}_1(x_1, x_2, ..., x_n) = \mathcal{R}_2(f(x_1), f(x_2), ..., f(x_n))$$

2. Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire sur un ensemble E, une partie I de E est un $\mathcal{R}$-intervalle, ou **intervalle** de $\mathcal{R}$ lorsque pour tous a, b de I et pour tout x de $E \setminus I$ on a :

$$\mathcal{R}(a, x) = \mathcal{R}(b, x) \text{ et } \mathcal{R}(x, a) = \mathcal{R}(x, b)$$

Lemme 3.1.2 *Soient deux relations binaires $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ de même base E. D et D' des intervalles non triviaux de $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ tels qu'il existe un isomorphisme f de $\mathcal{R}_{|D}$ sur $\mathcal{R}'_{|D'}$ et pour un x de D, un isomorphisme f_x de $\mathcal{R} - x$ dans $\mathcal{R}' - x$ tel que $f_x(D - x) = D' - x$, alors $\mathcal{R}$ est isomorphe à $\mathcal{R}'$.*

Voici un corollaire déduit du lemme précédent :

Corollaire 3.1.1 *Si deux tournois T et T' sont sans diamant, (-1)-hypomorphes et tels qu'il existe un x et l'isomorphisme f_x, de $T - x$ sur $T' - x$ vérifiant $C(x) - x$ non vide et $f_x(C(x) - x) = C'(x) - x$, alors T et T' sont isomorphes.*

Lemme 3.1.3 *Soit T un tournoi sans diamant de largeur h et soit m le cardinal maximal des chaînes de dilatation de T, si $m > 1$ et s'il existe un entier k, $0 < k < m$, tel qu'il n y ait pas de chaîne de dilatation de cardinal k dans T, alors T est (-1) reconstructible.*

Lemme 3.1.4 *Soit T un tournoi sans diamant de largeur h et soit m le cardinal maximal des chaînes de dilatation de T, si $m \neq 2$ et s'il existe un entier k, $0 \leq k \leq m$, tel que les chaînes de cardinale k soient régulièrement réparties dans dans T, alors T est (-1) reconstructible.*

Définition 3.1.2 *Étant donné un tournoi sans diamant T de largeur h, $C_0, C_1, ..., C_{2h}$, les chaînes de dilatation. On dit que les chaînes de dilatation d'un cardinal donné k, sont **régulièrement réparties** dans T, lorsqu'il existe une permutation $\pi = \phi^p$ (p entier, $\phi(i) = i + 1$) tel que si C_i est de cardinal k, alors $C_{\pi(i)}$ est de cardinal k.*
*De plus si C_i est réduit à un singleton $\{x\}$ (resp. à une paire $\{x, y\}$, resp.à $\{x, y, z\}$) on dit que C_i est le **pic** x (resp. le **duo** $\{x\}$, resp.le **trio** $\{x, y, z\}$).*

Preuve du théorème 3.1.3

Preuve. Soit T un tournoi sans diamant d'ordre ≥ 6, m le cardinal maximal des chaînes de dilatation de T et T' un tournoi (-1)-hypomorphe à T.

Si $m \geq 4$, on prend x et y dans des chaînes de cardinal 2 et 3 respectivement et on obtient par la (-1)-hypomorphie que les chaînes de cardinal 4 sont régulièrement réparties dans T et le lemme (3.1.4) donne la conclusion.

Si $m = 3$, on pose n_1, n_2 et n_3 le nombre de pics, de duos et de trios respectivement, ainsi, si $n_2 \geq 2$ on prend x et y dans deux duos distincts et on obtient que les trios sont régulièrement réparties.

Si $n_2 = 2$ et $n_3 \geq 2$, on prend x et y dans deux trios différents et on obtient que les pics sont régulièrement réparties.

Si $n_2 = n_3$=1 alors $h \geq 2$, sinon on aurait $n \leq 6$ ce qui contredit l'ordre de T, on considère donc deux possibilités :

1. Si le trio et le duo sont consécutifs, par exemple en C_{i+h} et C_{i+h+1}, soit x le pic en C_i, $T-x$ isomorphe à $T'-x$ entraîne qu'ils sont également consécutifs dans T', seule éventualité pour avoir une chaîne de cardinal 5 dans $T'-x$ comme il y en a dans $T-x$, mais alors si c'est C_{i+h} (resp. C_{i+h+1}) le trio, en posant y le pic en C_{i-1}, (resp. C_{i+1}), l'isomorphisme de $T-y$ sur $T'-y$ entraine que dans T, y est en C'_{i-1} (resp.C'_{i+1}) de telle sorte que C'_{i+h} (resp. C'_{i+h+1}) soit le trio et on a l'isomorphisme entre T et T'.
2. si le trio et le duo ne sont pas consécutifs, on suppose que dans T, il y a r éléments entre le duo et le trio sur la chaîne maximal qui les contient tous les deux, en prenant y hors de cette chaîne de sorte que dans $T-y$ il ait une chaîne de dilatation de cardinal 4, on obtient que dans T il y a au moins $r-1$ éléments entre le duo et le trio et qu'ils sont dans le même ordre sur la chaîne maximale qui les contient, de là, s'il n'y avait que $r-1$ éléments entre eux dans T, on prend y' un pic de T tel que dans $T-y'$ il n'y ait que $r-2$ entre le duo et la chaîne de quatre éléments et on obtient une contradiction, donc il y a exactement r éléments dans T entre le duo et le trio comme dans T, et comme ils sont dans le même ordre sur T_h, on a l'isomorphisme entre T et T'.

Si $m = 2$, pour simplifier on dira que C_i est opposé à C_{i+h} et à C_{i+h+1} et on pose S_1 (resp.S'_1) l'ensemble des pics dans T (resp. dans T_0), S_2 (resp. S'_2) l'ensemble des pics C_i de T (resp. C_0 dans T_0), tels que C_{i+h} est un duo et C_{i+h+1} est un pic, S_3 (resp. S'_3) l'ensemble des pics C_i de T (resp. C_0 dans T_0), tels que C_{i+h} est un pic et C_{i+h+1} est un duo,on a alors $S_1 = S'_1$, car seuls les éléments de S_1 font apparaître un duo supplémentaire dans T, donc aussi dans T_0,

il s'en suit alors que $S_2 \cup S_3 = S'_2 \cup S'_3$, ce qui va nous pousser à étudier les cas possibles : $S_2 \neq S'_3$, $S_2 = S'_3$, T admet deux duos consécutifs et si T il y a un pic x en C_{i+h} encadré par deux duosC_{i+h-1} et C_{i+h+1},
Ce qui va nous donner toujours une contradiction avec le fait que $S_1 \neq S'_1$ et cela achève la preuve.
Enfin, pour $m = 1$, on aura T régulier et le lemme (3.1.4) entraîne que T est (-1)-reconstructible d'où le théorème est ainsi établi. ■

3.1.2 Contre-exemple sur la non-reconstructiblité des tournois

Notions et outils

Avant de traiter ces contre exemples, nous allons présenter quelques définitions dont on aura besoin.

Soit G un tournoi d'ordre p. On appelle **score d'un sommet** v, le nombre d'arcs incidents à v vers l'extérieur $d_G^+(v)$, et **la séquence des scores** d'un graphe orienté, la séquence de tous les scores des sommets.

> *Harary et Plamer*, ont prouvé que dans un tournois d'ordre ≥ 5 la séquence des scores est complètement déterminée par la séquence des scores de ses sous-tournois.

Un sommet v_i **domine** un sommet v_j, et on note $v_i \to v_j$, si (v_i, v_j) est un arc de G.

On peut donc définir la matrice de dominance par une matrice d'ordre p, avec :

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 & si\ v_i \quad domine \quad v_j \\ 0 & sinon \end{cases}$$

Voici quelques fonctions qui seront utils dans notre discussion autour de la reconstrcution des tournois.

1. Pour tout entier non nul k, on définit la fonction **pow(k)** comme étant le plus grand entier i tel que : $2^i \ \ divise \ \ k$.
2. **odd(k)** est le quotient de la division de k par $2^{pow(k)}$.

Exemple 3.1.1 $192 = 2^6 \times 3 \quad donc \quad pow(192) = 6 \quad et \quad odd(192) = 3$
Dans le cas où k est impair on a : $pow(k) = 0$

Les tournois A_n

Maintenant, on va s'intéresser a une famille spécifique de tournois.

Définition 3.1.3 *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note A_n le tournoi qui a $p = 2^n$ sommets, $V(A_n) = \{v_1, v_2, ..., v_p\}$, où $v_i \to v_j$ si et seulement si $odd(j - i) \equiv 1[4]$*

Exemple 3.1.2 *Le tournoi A_3 est d'ordre 8 et a pour matrice de dominance, la matrice suivante :*

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

FIGURE 3.2 – La matrice de dominance de A_3

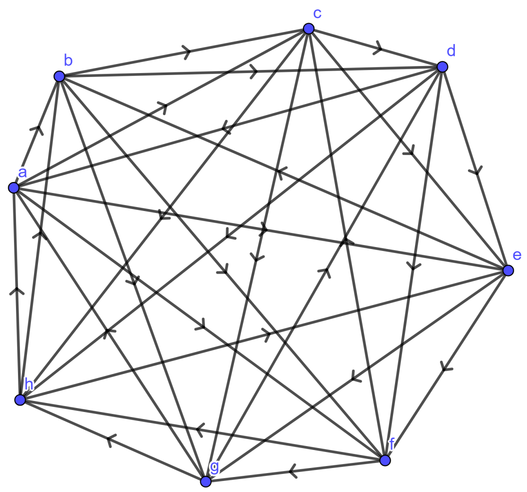


FIGURE 3.3 – Le tournoi de A_3 d'ordre 8

Voici quelques résultats autour des tournois A_n :

Résultat 1 : Le tournoi A_n est auto-dual.

Preuve. Si on défini un application $\phi : A_n \to A_n$ avec $\phi(v_i) = v_{p+1-i}$. ϕ est donc un isomorphisme qui inverse la direction de tous les arcs de A_n. Donc $A_n \simeq \overline{A_n}$ ■

Résultat 2 : Pour un tournoi A_n, avec $V(A_n) = \{v_1, v_2, ..., v_p\}$. Alors les 2^{n-1} premiers sommets ont un score de 2^{n-1}, et le reste ont un score de $2^{n-1} - 1$.

Preuve. Fixons i, $i = 1, 2, ..., p$, les sommets de A_n autres que v_i et $v_i \pm p/2$ peuvent être associé en faisant correspondre v_i avec v_{2i-j} (où l'indice j peut être réduit modulo 2^n), il est clair donc de voir que v_i domine chaque point dans chaque paire, ce qui implique que v_i domine $2^n - 1$ sommets. De plus, pour $i \leq 2^{n-1}$, v_i domine $v_{i+p/2}$, par suite le score du reste des sommets est $2^{n-1} - 1$. ■

Résultat 3 : L'identité est le seul automorphisme du tournoi A_n .

Preuve. Par récurrence, Pour $n = 1$, on peut voir que A_1 a 2^1 sommets, donc par définition du tournoi, il existe une seule arête, soit $v_1 \to v_2$ ou $v_2 \to v_1$. Par définition d'automorphisme, il est clair qu'on peut juste associer v_1 a v_2 et de même pour v_2. Donc le seul automorphisme est l'automorphisme identité.

Pour $n > 1$, on suppose que pour A_n le seul automorphisme est l'identité, et on montre que pour A_{n+1} le seul automorphisme est l'automorphisme identité. Il est clair que A_{n+1} a $2^n + 2^n$ sommets, donc d'après le résultat **2** (3.1.2.0), on sait que les 2^n premiers sommets ont un score de 2^n et le reste ont un score de $2^n - 1$. Puisqu'un automorphisme doit préserver le score, les 2^n premiers sommets produisent un tournoi T_1 isomorphe à A_n, il est nécessaire donc d'avoir juste l'automorphisme identité. De même, pour les 2^n derniers sommets produit un tournoi T_2 isomorphe à A_n, donc ils ont seulement l'identité comme automorphisme. Donc $T_1 \cup T_2 \simeq A_{n+1}$ a seulement l'automorphisme identité. Par récurrence, le seul automorphisme de A_n est l'automorphisme identité. ■

Théorème 3.1.4 *Pour tout entier k, tel que $1 \leq k \leq 2^n$, les tournois $A_n - v_k$ et $A_n - v_{p+1-k}$ sont isomorphes.*

Corollaire 3.1.2 *Chaque sous-tournoi de A_n obtenu en supprimant un sommet est auto-dual.*

Preuve. Le résultat **1** (3.1.2.0) implique que pour tout i le dual du sous-tournoi $A_n - v_i$ est isomorphe à $A_n - v_{p+1-i}$, qui est d'après le théorème (3.1.4) isomorphe à $A_n - v_i$, d'où $A_n - v_i$ est isomorphe a son auto-dual. ■

Dans ce qui suit, nous allons présenter quelques familles de tournois pour lesquelles la conjecture de reconstruction est fausse.

Les tournois d'ordre $2^n + 1$

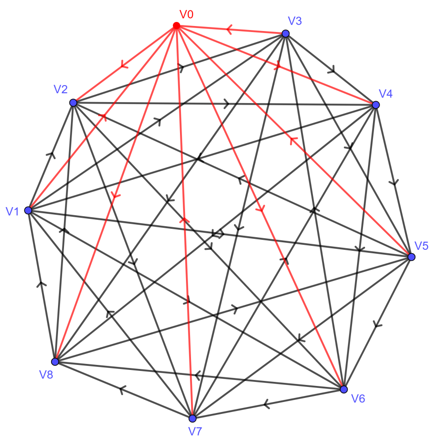
La première famille pour laquelle on va montrer que la conjecture de reconstruction est fausse est la famille de tournoi d'ordre $2^n + 1$. Pour cela on va augmenter l'ordre du tournoi A_n de deux manières différentes.

Définition 3.1.4 *Pour chaque entier positive n.*
On définit le tournoi $\mathbf{B_n}$ *comme étant le tournoi obtenu en ajoutant un sommet v_0 au tournoi A_n, où v_0 domine $v_2, v_4, ..., v_p$ et dominé par $v_1, v_3, ..., v_{p-1}$.*
Et le tournoi $\mathbf{C_n}$ *comme étant le tournoi obtenu en ajoutant un sommet v_0 au tournoi A_n, où v_0 domine $v_1, v_3, ..., v_{p-1}$ et dominé par $v_2, v_4, ..., v_p$.*

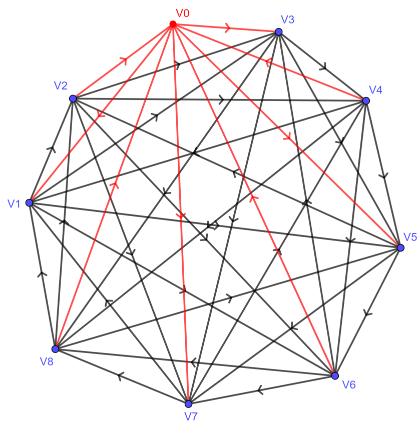
Exemple 3.1.3 *Voici le petit contre exemple de la non reconstructibilité des tournois. les deux tournois B_3 et C_3*

$$
\begin{array}{c|c}
 & v_0 \; v_1 \; v_2 \; v_3 \; v_4 \; v_5 \; v_6 \; v_7 \; v_8 \\
\begin{matrix} v_0 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \\ v_8 \end{matrix} &
\begin{pmatrix}
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c|c}
 & v_0 \; v_1 \; v_2 \; v_3 \; v_4 \; v_5 \; v_6 \; v_7 \; v_8 \\
\begin{matrix} v_0 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \\ v_8 \end{matrix} &
\begin{pmatrix}
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

FIGURE 3.4 – Matrice d'adjacence de B_3 et C_3



Tournoi B_3



Tournoi C_3

FIGURE 3.5 – Les deux tournois B_3 et C_3

Théorème 3.1.5 *Les tournois B_n et C_n ne sont pas isomorphes.*

Preuve. Par récurrence, pour $n = 1$, on voit que B_1 est transitive avec 3 sommets et que C_1 est un cycle avec 3 sommets, donc B_1 et C_1 ne sont pas isomorphe.
Pour $n = 2$, l'unique sommet v_1 de score 3 de B_2 est dominé par l'unique sommet v_4 de score 1, alors que dans C_2, l'unique sommet v_1 de score 3 domine l'unique sommet v_3 de score 1, et donc puisque l'isomorphisme préserve la séquence des scores, on peut déduire que B_2 et C_2 ne sont pas isomorphes.
Pour $n \geq 3$, d'après le résultat **2** (3.1.2.0), on voit que les sommets de B_n qui ont le score $2^{n-1} + 1$ sont $v_1, v_3, ..., v_{(p/2)-1}$. Ces sommets produits un sous-tournois de B_n qu'on le note T_1. De même, on voit que les sommets de C_n qui ont le score $2^{n-1} + 1$ sont $v_2, v_4, ..., v_{p/2}$. Ces sommets produits un sous-tournois de C_n qu'on le note T_2. Ainsi tout isomorphisme de B_n à C_n doit être une extension d'un isomorphisme de T_1 sur T_2.
Soit maintenant l'application $\phi : T_1 \to A_{n-2}$ définie par $\phi(v_i) = v_{(i+1)/2}$, il est clair que ϕ est un isomorphisme de T_1 dans A_{n-2}, de façon similaire, on définit l'application $\sigma : T_2 \to A_{n-2}$ par $\sigma(v_i) = v_{i/2}$, σ est aussi un isomorphisme de T_2 dans A_{n-2}.
Par propriété d'isomorphisme, on peut définir une fonction $\sigma^{-1}\phi$ qui est un isomorphisme de T_1 dans T_2 tel que $\sigma^{-1}\phi(v_i) = v_{i+1}$, d'après le résultat **3** (3.1.2.0), il s'agit du seul isomorphisme qui envoie v_i à v_{i+1}, donc tout isomorphisme de B_n dans C_n doit envoyer v_1 à v_2.
De plus les sommets de B_n et C_n de score $2^{n-1}-1$ permettent de conclure que tout isomorphisme de B_n sur C_n doit donc envoyer v_p vers v_{p-1}, alors que v_1 est dominé par v_p dans B_n, tandis que v_2 domine v_{p-1} dans C_n, d'où aucun isomorphisme de ce type ne peut exister, donc B_n et C_n ne sont pas isomorphes. ∎
Maintenant, on va observer comment les deux tournois B_n et C_n sont des contre-exemples pour la conjecture de reconstruction.

Théorème 3.1.6 *Les tournois $B_n - v_0$ et $C_n - v_0$ sont isomorphes, et pour tout k ; $1 \leq k \leq p$, les tournois $B_n - v_k$ et $C_n - v_{p+1-k}$ sont isomorphes.*

Preuve. Il est clair que $B_n - v_0 \simeq C_n - v_0$, car les deux tournois sont obtenus en ajoutant un sommet v_0 à A_n.
Pour $1 \leq k \leq p$, si on considère un isomorphisme ϕ, de $A_n - v_k$ dans $A_n - v_{p+1-k}$, on peut arriver au deuxième résultat. On ajoute un sommet v_0 a $A_n - v_k$ de la même façon à obtenir B_n, et de même pour $A_n - v_{p+1-k}$, on ajoute un sommet v_0 de façon similaire a obtenir C_n, on remarque donc que ϕ peut être étendu à un isomorphisme de $B_n - v_k$ dans $C_n - v_{p+1-k}$. ∎

Alors puisque il y a un hypomorphisme entre B_n et C_n, et on a montrer que B_n et C_n ne sont pas isomorphes, il est clair que B_n et C_n sont des tournois qui contredisent la conjecture de reconstruction.

Les tournois d'ordre $2^n + 2$

On va s'intéresser à une autre famille de tournoi qui n'est pas reconstructible. Pour cela, on va augmenter les deux tournois B_n et C_n.

Définition 3.1.5 *Pour chaque entier positive n.*
On définit le tournoi $\mathbf{D_n}$ *d'ordre* $2^n + 2$ *comme étant le tournoi obtenu en ajoutant un sommet* v_{p+1} *au tournoi* B_n*, où* v_{p+1} *domine* $v_1, v_3, ..., v_{p-1}$ *et dominé par* $v_2, v_4, ..., v_p$ *et* v_0*.*
Et le tournoi $\mathbf{E_n}$ *d'ordre* $2^n + 2$ *comme étant le tournoi obtenu en ajoutant un sommet* v_{p+1} *au tournoi* C_n*, où* v_{p+1} *dominev*$_2, v_4, ..., v_p$ *et dominé par* $v_1, v_3, ..., v_{p-1}$ *et* v_0*.*

Théorème 3.1.7 *Les tournois* D_n *et* E_n *ne sont pas isomorphes.*

Preuve. En utilisant le résultat **2** (3.1.2.0), les sommets de score $2^{n-1} - 1$ sont $v_0, v_2, ..., v_{p/2}$, cependant ces sommets génèrent un sous-tournoi de D_n isomorphe à B_{n-1}, et un sous-tournoi de E_n isomorphe à C_{n-1}, ainsi tout isomorphisme entre D_n et E_n doit être une extension d'un isomorphisme entre B_{n-1} et C_{n-1}, ce qui est impossible selon le théorème (3.1.5), d'où D_n et E_n ne sont pas isomorphes. ■

Théorème 3.1.8 *Pour tout* k *;* $1 \leq k \leq p+1$*, les tournois* $D_n - v_k$ *et* $E_n - v_{p+1-k}$ *sont isomorphes.*

Preuve. Il est clair pour $k = 0$ et $k = p + 1$.
Supposons $1 \leq k \leq p$, si on applique le théorème (3.1.5), on voit facilement que l'extension de cet isomorphisme qui va associer v_0 à v_0 et v_{p+1} à v_{p+1}, va donner un isomorphisme de $D_n - v_k$ dans $E_n - v_{p+1-k}$. Donc pour tout k ; $1 \leq k \leq p+1$, les tournois $D_n - v_k$ et $E_n - v_{p+1-k}$ sont isomorphes. ■

Conclusion :

Les paires uniques des tournois d'ordre 3 et 5 qui ne sont pas reconstructibles sont respectivement B_1, C_1 et B_2, C_2,de plus on ne connaît pas des contre-exemples d'ordres impair autres que B_n et C_n, ils sont donc les seuls contre-exemples d'ordre impair.

Dans cette section, on a pu présenter deux familles infinies de tournois pour lesquelles la conjecture de reconstruction n'est pas vraie.

L'une nous donne une famille contre-exemples d'ordre impair, et l'autre d'ordre pair.

3.2 Graphes parfaits

3.2.1 Rappel sur les graphes parfaits

Définition 3.2.1 ***Une coloration*** *d'un graphe $G = (V, E)$ est une application f des sommets de G vers un ensemble de couleurs C telle que deux sommets adjacents reçoivent des couleurs différentes. Si $|C| = k$, alors f est une k-coloration propre de G.*
Le nombre chromatique *de G, noté $\chi(G)$, est défini comme étant le plus petit entier k tel que G admet une k-coloration propre.*

Une coloration propre de G utilisant k couleurs est une partition de V en ensembles $S_1, S_2, ..., S_k$ tels que pour tout $1 \leq i \leq k$, S_i est un stable.

Exemple 3.2.1 *Considérons les figures suivants*

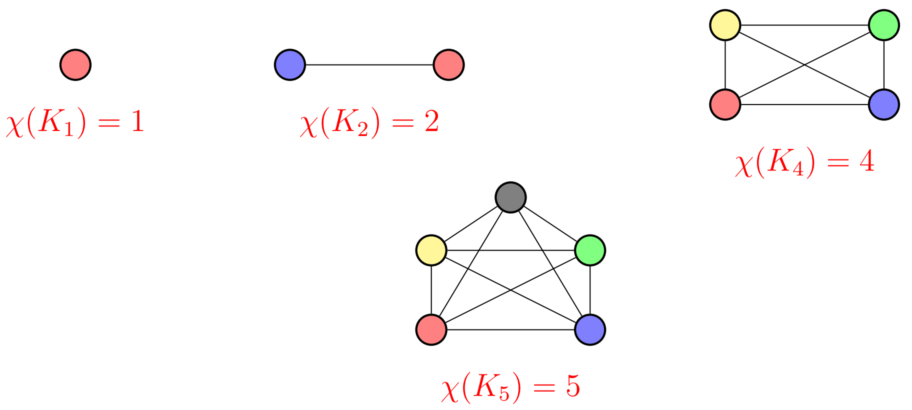


FIGURE 3.6 – Le nombre chromatique de quelques graphes complets

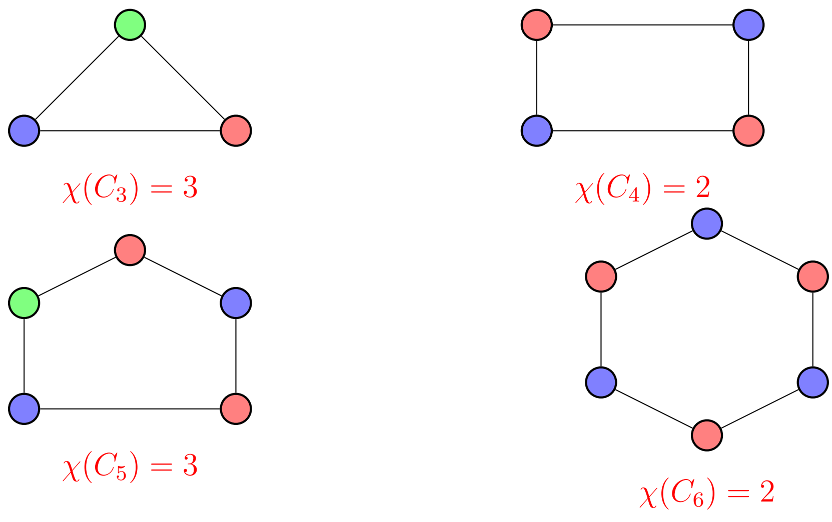
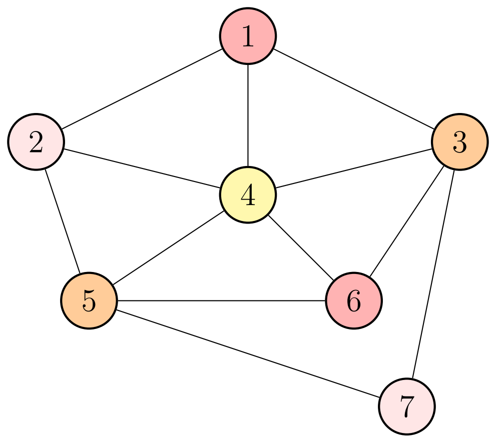


FIGURE 3.7 – Le nombre chromatique des cycles élémentaires d'ordres 3 à 6

Remarque 3.2.1 *1. Si n est impair, $\chi(K_n) = n$ et $\chi(C_n) = 3$.*

2. Si n est pair, $\chi(K_n) = n$ et $\chi(C_n) = 2$.

Exemple 3.2.2 *La figure 3.8 illustre un exemple de graphe 4-coloriable.*



$$S_1 = \{2, 7\}, S_2 = \{1, 6\}, S_3 = \{4\}, S_4 = \{3, 5\}.$$

FIGURE 3.8 – Graphe admettant une 4-coloration

Ce graphe est 4-coloriable donc $\chi(G) \leq 4$, il contient un C_5 impair donc $\chi(G) \geq 3$, de plus le sommet 4 est adjacent à tous les sommets de C_5, il faut donc colorier ce sommet avec une couleur différente des couleurs déjà affectées aux sommets de C_5, on en conclut que $\chi(G) \geq 4$, donc le nombre chromatique de G est $\chi(G) = 4$.

Définition 3.2.2 *Soit G un graphe simple.*
On note $\omega(G)$ la taille d'une clique de G de taille maximale.
Autrement dit $\omega(G) := max\{|C| : C$ est une clique de $G\}$, où $|C|$ désigne le nombre d'éléments de C.

Les graphes parfaits

Définition 3.2.3 *On définit la classe des graphes parfaits comme la classe des graphes G tels que pour tout sous-graphe H de G, on a :*

$$\chi(H) = \omega(H)$$

Définition 3.2.4 (Graphe triangulé) *Un graphe est dit **triangulé** si tout cycle élémentaire de longueur au moins 4 admet une corde.*

Exemple 3.2.3 *Le graphe* (a) *de la figure suivante est un graphe triangulé, par contre, le graphe* (b) *n'est pas triangulé, car il contient un cycle longueur* 4 *qui n'admet pas de corde.*

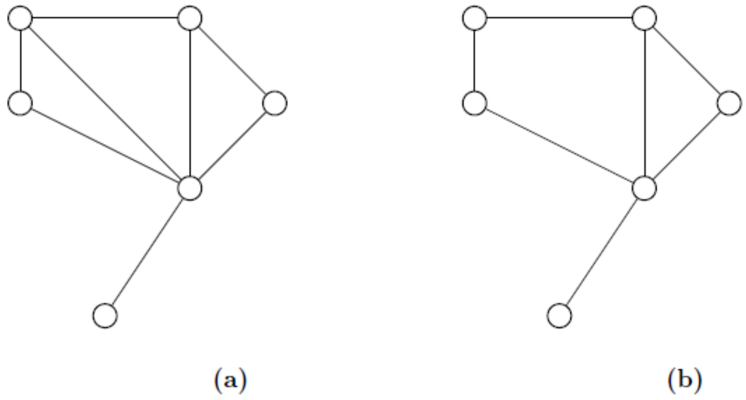


FIGURE 3.9 – Graphe triangulé et non triangulé

3.2.2 Reconstruction des graphes parfaits

Théorème 3.2.1 *[11] La classe des graphes parfaits est reconnaissable.*

Preuve. Une application du lemme de *Kelly* montre que la clique d'un graphe est reconstructible. Cette clique est définie comme étant une séquence $(C_i)_{i=1,2,..,|G|}$, où (C_i) est le nombre des i-cliques de G.
Ainsi la taille d'une clique est reconstructible. De plus, on sait que le nombre chromatique d'un graphe est reconstructible.
Supposons que G est un graphe parfait et montrons que tout reconstruction de G est reconstructible.
Soit H un reconstruction de G.
On a :

$$\chi(H) = \chi(G) = \omega(G) = \omega(H)$$

Soit donc $A \subset V(H)$, par définition, il existe sous-ensemble $A' \subset V(G)$ tel que A est isomorphe à A'.
Comme G est parfait $\chi(A) = \omega(A)$.
Par suite H est parfait. ■

Théorème 3.2.2 *[11] La classe des graphes triangulés est reconnaissable.*

Preuve. Supposons que G est un graphique triangulé.
Il existe alors une corde dans un 3-cycle de G, qui commence par un sommet x.
Par définition, le sous-graphe induit par $x \cup Adj(x)$ est une clique avec $d(x) + 1$ sommets.
Soit H une reconstruction de G et ρ une bijection de $V(G)$ sur $V(H)$.
Puisque G_x est triangulé, $H_{\rho(x)}$ est également triangulé. G_x possède exactement un $d(x) + 1$ clique moins que G.
Puisque le degré de x en G est égal au degré de $\rho(x)$ en H et que la clique de G est reconstructible, $\rho(x)$ est simplement en H. Ainsi H est triangulé. ∎

Chapitre 4

Quelques problèmes ouverts

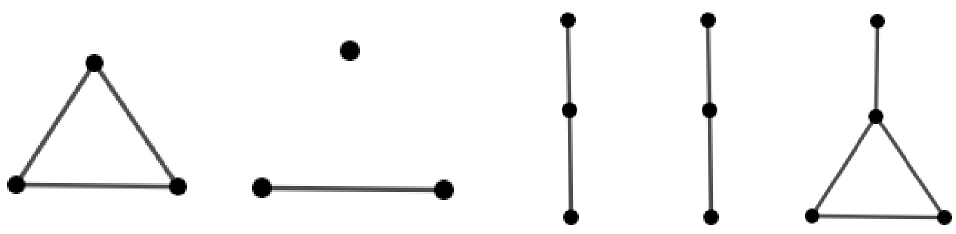
Sommaire

Le problème de reconstruction de graphes constitue un problème où il reste beaucoup de choses à faire, on pourrait établir une longue liste de problèmes concernant ce sujet ; par exemple, il reste beaucoup de classes de graphes à reconstruire.
Les problèmes que nous allons cité par la suite sont inspirés par les résultats existants dans les chapitres précédents, en espérant, que les mêmes méthodes peuvent nous poussés à aboutir de meilleurs résultats dans l'approche du problème initial.

4.1 Problème du Deck Légitime

Un problème qui semble aussi fondamentale que le problème de reconstruction, est celui appelé le problème du **Deck Légitime** (Harary, 1969).
On rappelle qu'un deck $\{H_i, 1 \leq i \leq n\}$ de n cartes est une collection de n graphes ayant $n-1$ sommets. S'il existe un graphe G avec un ensemble de sommets $\{1, 2, ..., n\}$ tel que $G_i = H_i$ pour $1 \leq i \leq n$, alors $\{H_i, 1 \leq i \leq n\}$ est dit **légitime**, et on dit que G est un **générateur** de deck.
Les deck qui ne sont pas légitimes sont dits illégitimes.

Exemple 4.1.1 *la figure (4.1) présente un deck $\{H_1, H_2, H_3, H_4\}$ qui est légitime avec son générateur G.*



H_1 H_2 H_3 H_4 G

FIGURE 4.1 – Exemple d'un deck légitime

Et la figure (4.2) présente un deck $\{H_1, H_2, H_3, H_4\}$ *qui est illégitime, car d'après* H_1 *on voit que tout générateur est acyclique, et d'après* H_2 *on constate qu'on peut pas avoir un générateur.*

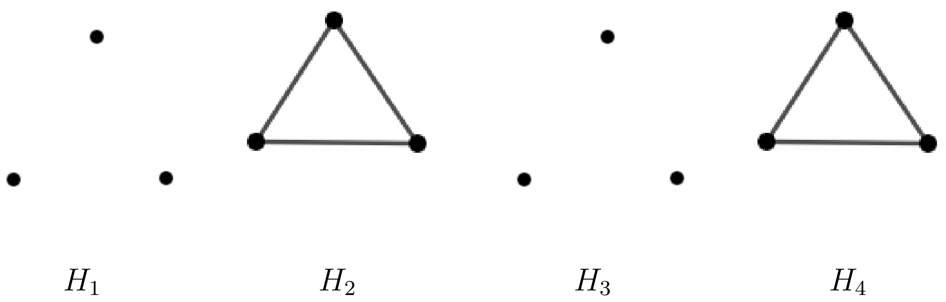


FIGURE 4.2 – Exemple d'un deck illégitime

Pour la conjecture de reconstruction, le problème consiste à montrer qu'aucun deck n'a plus d'un générateur, à isomorphe prés.
Le problème du légitime deck consiste donc a donné une caractérisation des decks légitimes.

4.2 Problèmes non-résolus

Problème 1 : Un graphe G est dit **bi-degré**, si le degré des sommets vaut p ou q (où p et q sont des entiers différents). On a déjà montré que tout graphe régulier est reconstructible.
Alors la question qui se pose : Est-ce que les graphes bi-degré sont reconstructibles ?

Problème 2 : Est-ce que les graphes bipartis sont reconstructibles ?

Problème 3 : Peut-on reconstruire les multigraphes d'ordre supérieur 3, sachant que les graphes d'ordre supérieur 3 sont reconstructibles ?

Problème 4 : Un graphe est dit **planaire** si on peut le représenter dans le plan de telle sorte que ses arêtes ne se croisent pas.
Est-ce que les graphes planaires sont reconstructibles ?

Conclusion

Le problème de reconstruction des graphes reste l'un des problèmes non-résolus en théorie de graphe. La conjecture stipule que chaque graphe simple fini ayant au moins trois sommets peut être déterminé (*reconstruit*) de façon unique, à un isomorphisme près, à partir de ses sous-graphes obtenus en supprimant chaque sommet du graphes et les arêtes qui lui sont incidentes.

Tout au long de ce mémoire, nous avons fait une étude du problème de reconstruction des graphes. Nous avons présenté la conjecture de reconstruction et ses reformulations, ainsi que quelques approches permettant de prouver cette conjecture. Ensuite, nous avons traité la reconstruction de quelques classes de graphes ce qui nous a amené à quelques contre-exemples où la conjecture de reconstruction n'est pas vraie.

Certes plusieurs articles et publications ont traité ce sujet, et ils ont pu prouver cette conjecture pour plusieurs classes infinies de graphes, mais toutes ces recherches n'ont pas encore abouti à des résultats aussi important dans le cas général.

Bibliographie

[1] B.Bollobas, *Almost Every Graph has Reconstruction Number Three.* Journal of Graph Theory, 14(1) :1-4,1990.

[2] B.McMullen, *Graph reconstruction numbers.* Thesis. Rochester Institute of Technology, 2006.

[3] B.McMullen and S.Radziszowski, *Graph reconstruction numbers.* Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing 62, 85-96, 2007.

[4] C.Gnanvo and P.Ille. *La reconstruction des tournois sans diamant* Mathematical Logic Quarterly, 38(1) :283-291, 1992.

[5] C. St JA Nash-W, *The reconstruction problem.* Selected topics in graph theory, 1 :205-236,1978.

[6] F.Harary, *On the reconstruction of a graph from a collection of subgraphs.* ,In Theory of Graphs and its Applications(Proc.Sympos.Smolenice,1963), pages 47-52.Publ. House Czechoslovak Acad.Sci.Prague,1964.

[7] F.Harary and Ed.Palmer. *On the Problem of Reconstructing a Tournament from Subtournaments* Monatshefte fur Mathematik, 71(1) : 14-23,1967.

[8] F. Harary. *A survey of the reconstruction conjecture.* In Graphs and combinatorics, pages 18-28.Springer,1974.

[9] J.A.Bondy and R.L.Hemminger, *Graph reconstruction-a survey.* Journal of Graph Theory, Vol. 1 (1977) 227-268.

[10] L.Lovàz, *A note on the line reconstruction problem.* Journal of Combinatorial Theory (B) 13,309-310 (1972).

[11] M.VON RIMSCHA, *Reconstructibility And Perfect Graphs.*,University of Illinois, Urbana USA, Discrete Mathematics 47 (1983) 283-291.

[12] PAUL K. STOCKMEYER, *The falsity of the reconstruction conjecture for tournaments* Journal of Graph Theory, Vol 1 (19-25), 1977.

[13] P.J.Kelly, *On isometric transformations.* ,PhD thesis,1942.

[14] P.J.Kelly, *A Congruence Theorem for Trees* , Pacific J.Math, 7, 961-968, 1957.

[15] R.Kaschek, *A first introduction to graph reconstruction.*

[16] R.L.Hemminger, *On reconstructing a graph.* ,Proceedings of the American Mathematical Society, Vanderbilt University, 20(1) :185-187,1969.

[17] R. Molina, *Correction of a proof on the ally-reconstruction number of a disconnected graph.* ArsCombinatoria, 40 :59-64,1995.

[18] S.J.Mary , *Reconstructing Properties Of Graphs.* ,IJRTER-2016, Volume 02, Issue 12 ; December - 2016 [ISSN : 2455-1457].

[19] S.M.Ulam, *A collection of mathematical problems*, volume 8. Interscience Publishers,1960.

[20] V.Muller, *The edge reconstruction hypothesis is true for graphs with more than* $nlog(2/n)$ *edges.* Journal of Combinatorial Theory (B) 22, 281-283 (1977).

[21] W.J.Myrvold, *The ally reconstruction number of a disconnected graph.* Ars Combinatoria, 28 :123-127, 1989.