

À MES PARENTS

À MA GRAND-MÈRE

À MES FRÈRES

À MA SŒUR

OUHADDOU Nouredine

Remerciements

Je remercie mon Dieu qui m'a donné la volonté, la patience, et surtout la santé durant toutes mes années d'étude.

Mes profonds remerciements à mes premiers fans, mes parents pour leur soutien quotidien infailible, merci à leur enthousiasme débordant qui a été pour moi pilier fondateur de mon action, sans eux je n'aurais jamais pu réaliser ce travail.

J'exprime ma profonde gratitude à mon encadreur **Mr. QESMI Redouane** pour son soutien inoubliable et je le remercie encore pour le sujet qu'il m'a proposé et pour son suivi permanent enrichi de beaucoup d'encouragement, ses remarques et suggestions sans lesquelles ce mémoire n'aurait pas lieu.

Mes vifs remerciements vont également aux membres du jury pour l'intérêt qu'ils ont porté à ma recherche en acceptant d'examiner mon travail et de l'enrichir par leurs propositions.

Par ailleurs, puisque l'occasion se présente ici, je remercie également les autres membres de ma famille, tout spécialement mes frères, ma sœur, mes cousin(e)s ainsi que tous mes amis, qui m'ont toujours soutenu, même à distance.

Un grand merci aussi à tous mes collègues de l'option master MACS.

Je tiens enfin à remercier tous ceux qui ont contribué d'une façon ou d'une autre à la réalisation de ce travail.

Table des matières

Introduction	1
1 Préliminaires	4
1.1 Équation différentielle à retard général	4
1.1.1 Existence, unicité et prolongement des solutions	6
1.1.2 Comparaison avec les équations différentielles ordinaires	7
1.2 Équation différentielle à retard linéaire	7
1.2.1 Semi-groupe associé à l'existence des solutions et son générateur	8
1.2.2 Décomposition spectrale de l'espace de phases	9
1.2.3 Décomposition de $\mathcal{C}$ par l'équation formelle adjointe	12
1.2.4 Estimations sur le sous espace complémentaire	15
1.3 Équation différentielle à retard linéaire non homogène	15
1.3.1 Formule de variation de la constante	16
1.3.2 Décomposition de la formule de variation de la constante	16
1.4 Équation différentielle à retard autonome	17
1.4.1 Points d'équilibres hyperboliques	17
1.4.2 Points d'équilibres non hyperboliques	18
1.4.3 Notions de stabilité	19
1.4.4 Variétés centres local pour les équations différentielles à retard	20
1.4.5 Formes normales	21
1.5 Bifurcation locale	23
1.5.1 Bifurcation à un paramètre	23
2 Calcul des variétés centres pour les EDFRs associées à la singularité de Fold	26

2.1	Linéarisation autour d'une solution particulière (équilibre)	26
2.2	Schémas de calcul	27
2.2.1	Calcul des termes d'une variété centre pour les EDFRs	28
3	Variétés centres pour les EDFRs paramétrées associées à la singularité de Fold	35
3.1	Schémas de calcul	35
3.1.1	Caractérisation d'une variété centre local avec paramètre	38
3.1.2	Calcul des variétés centres	38
3.1.3	Calcul des formes normales	45
4	Exemple d'application	50
	Conclusion	57
	Bibliographie	58

Introduction

La modélisation mathématique de certains problèmes naturels conduit généralement à des modèles qui sont continus. Dans ces modèles, on suppose que l'évolution au cours du temps se fait de manière continue. Ils sont présentés par des équations différentielles, des équations aux dérivées partielles ou par des équations intégrales.

Les équations différentielles à retard surviennent dans certains modèles dont l'état à un instant donné, est une fonction qui dépend de son passé. On peut rencontrer ces équations dans plusieurs domaines d'applications, notamment en économie, physique, médecine, biologie, écologie etc. En effet, dans certains phénomènes, on s'est aperçu que la connaissance de la solution en un point ne suffit pas pour décrire l'évolution sur un intervalle de temps donné.

La signification du retard dans un tel ou tel modèle peut être différent : période d'incubation d'une maladie contagieuse, temps d'accumulation, temps nécessaire pour la maturation des cellules ou la transformation d'un type de cellules en un autre, etc.

Les systèmes dynamiques ne sont pas similaires, il existe deux types de systèmes : les systèmes stables et les systèmes instables, les systèmes dynamiques peuvent avoir aussi de différents comportements asymptotiques en fonction des valeurs de leurs paramètres. Il peut donc exister certaines valeurs pour lesquelles le comportement du système passe d'un état qualitatif à un autre.

Ce changement d'état qualitatif est une bifurcation et la valeur du paramètre associée est appelée valeur de bifurcation, les différentes bifurcations sont répertoriées en fonction de leurs caractéristiques mathématiques.

Dans les mathématiques des systèmes évolutifs, le concept de la variété centre a été initialement développé pour déterminer la stabilité des équilibres dégénérés. Par la suite, on a réalisé que le concept de la variété centre était fondamental pour la modélisation mathématique.

La théorie des variétés centres joue un rôle important dans l'étude de la stabilité des sys-

tèmes dynamiques lorsque le point d'équilibre n'est pas hyperbolique. La combinaison de cette théorie avec l'approche de la forme normale a été largement utilisée pour étudier les systèmes dynamiques paramétrés présentant des bifurcations. Le théorème des variétés centres fournit, dans ce cas, un moyen de réduire systématiquement la dimension des espaces d'état qui doivent être considérés lors de l'analyse des bifurcations du type donné. En fait, après avoir déterminé la variété centre, l'analyse de ces systèmes dynamiques paramétrés est basée uniquement sur la restriction du système original sur la variété centre dont les propriétés de stabilité sont les mêmes que celles du système d'ordre supérieur.

Un aperçu historique sur les équations différentielles avec retard :

Rappelons ; que les équations à retard, ont été introduites, pour modéliser des phénomènes dans lesquels, il y'a un mélange temporel entre l'action sur le système et la réponse du système à cette action. Par exemple, dans le processus de naissance des populations biologiques (cellules, bactéries, etc). Beaucoup de phénomènes rencontrés en physiques, biologie, chimie, etc, ont trouvé dans la théorie des équations à retard un bon moyen de modélisation (un moyen plus réaliste que dans le cas des équations différentielles ordinaires). A partir des années (40), la théorie des équations à retard a connu un grand développement, notamment on trouve "Belman", "Cooke" (1963) et "Hale" (1977). Mais récemment, de nombreux phénomènes ont été proposé pour la modélisation de certaines situations compliquées, où il y'a un mélange temporel entre l'action sur le système et la réponse du système. A cette notion, le retard peut être donné comme une intégrale et donc il dépend des fonctions inconnues, qui sont les solutions du problème, il est appelé dans ce cas, retard distribué ou retard dépendant de l'état.

Exemple

Imaginons, une population biologique composée d'individus jeunes et adultes. Soit $N(t)$, indiquant la densité d'adultes à un temps t . Supposons que la longueur de la période juvénile est exactement h unité de temps pour chaque individu et supposons que les adultes produisent une mutation à un taux α par tête et que leur probabilité par unité de temps pour mourir est η . Supposons que les nouveaux nés survivant la période juvénile avec une probabilité p et posons $t = \alpha p$. Alors les dynamiques de N , peuvent être décrites par l'équation différentielle suivante

$$\frac{dN(t)}{dt} = -\mu N(t) + rN(t-h) \quad (1)$$

$rN(t-h)$: Signifie que les nouveaux nés deviennent adultes avec un retard, alors la variation

de la densité de population N comprend des valeurs courantes, ainsi que des valeurs au passé. Pour intégrer, l'équation (1) en certains temps $t \in [0, h]$, on nécessite de prescrire la valeur $N(t - h)$. Alors on doit considérer une fonction sur un intervalle de longueur h , pour cela on prescrit N sur l'intervalle $[-h, 0]$, et ensuite utiliser (1) pour $t \geq 0$, alors on supplémente (1) par $N(\theta) = \varphi(\theta)$ pour $-h \leq \theta \leq 0$ où φ est une fonction donnée. Explicitement, on a alors pour tout $t \in [0, h]$

$$N(t) = \varphi(0) \exp(-\mu t) + r \int_0^t \varphi(r - h) \exp(-\mu(t - r)) dr.$$

Présentation du travail

Le premier chapitre sera consacré à un rappel général sur les définitions et les propriétés de la théorie des équations différentielles à retard. La plupart de ce rappel énoncé d'une manière générale (équations linéaires, linéaire non homogène, etc). Sa dernière partie traite une bifurcation locale. On va exploiter les résultats trouvés dans tout ce qui suit.

Dans le deuxième chapitre on s'intéresse au calcul des termes des variétés centres pour l'équation différentielle à retard associées à la singularité de Fold .

Le troisième chapitre est aussi centré sur le calcul des variétés centres et des formes normales pour les équations différentielles à retard paramétrées associées à la singularité de Fold, selon la structure de l'équation linéarisée d'un système à retard évalué à l'équilibre, le cas considéré dans ce chapitre correspond à une valeur propre nulle et simple (Fold).

Dans Le quatrième chapitre, on va présenter l'exemple d'application et on termine ce travail par une conclusion.

Il nous reste à noter que les chapitres sont tous numérotés consécutivement dans ce projet. Les formules, les théorèmes, les lemmes, etc, sont aussi numérotés consécutivement à l'intérieur de chaque partie. Par exemple, l'équation (3.5) est la cinquième équation du chapitre trois.

Les références se trouvent à la fin et ils sont classés alphabétiquement.

Préliminaires

Ce chapitre constitue une partie préliminaire dans laquelle on rappelle des notions et des résultats fondamentaux des équations différentielles à retard linéaires, linéaire non homogène etc, qui représentent un outil indispensable dans la suite. Pour plus de détails nous référons aux livres de Hale (1977)[7] et (1993)[8].

1.1 Équation différentielle à retard général

Soit $r \geq 0$ un réel donné. On note par $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}^n)$ l'espace de Banach des fonctions définies et continues sur l'intervalle $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ muni de la topologie de la convergence uniforme. Pour $[a, b] = [-r, 0]$ on pose

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}([-r, 0], \mathbb{R}^n),$$

et on désigne la norme d'un élément ϕ de $\mathcal{C}$ par

$$\|\phi\| = \sup\{\|\phi(\theta)\| : -r \leq \theta \leq 0\}.$$

Définition 1.1.1 ([15]) – Fixons $t_0 \in \mathbb{R}$ et $A \geq 0$. Soient $x \in \mathcal{C}([t_0 - r, t_0 + A], \mathbb{R}^n)$ et $t \in [t_0, t_0 + A]$. On définit une nouvelle fonction x_t , élément de $\mathcal{C}$, par

$$x_t(\theta) = x(t + \theta), \quad \theta \in [-r, 0].$$

Remarque 1.1.1 – Pour tout t fixé, la fonction x_t est obtenue en considérant la restriction de la fonction x sur l'intervalle $[t - r, t]$, translatée sur $[-r, 0]$.

Définition 1.1.2 ([15]) – Soient U un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathcal{C}$ et $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction continue. On appelle équation différentielle fonctionnelle à retard (EDFR) sur U une relation de la forme

$$\dot{x}(t) = f(t, x_t), \quad (1.1)$$

où le point "." représente la dérivée à droite.

Remarque 1.1.2 – Une application telle que f , définie sur un ensemble de fonctions, est parfois désignée sous le nom de fonctionnelle au lieu de fonction.

Définition 1.1.3 ([15]) – On dit que x est solution de l'équation (1.1) s'il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ et $A > 0$ tels que $x \in \mathcal{C}([t_0 - r, t_0 + A], \mathbb{R}^n)$, $(t, x_t) \in U$ et x vérifie la relation (1.1) pour tout $t \in [t_0, t_0 + A]$.

– Pour $t_0 \in \mathbb{R}$ et $\phi \in \mathcal{C}$ donnés, x est dite solution du problème à valeur initiale

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x_t), & \text{si } t \geq t_0 \\ x_{t_0} = \phi, & \text{si } t = t_0 \end{cases} \quad (1.2)$$

s'il existe $A > 0$ tel que x est solution de (1.1) sur $[t_0 - r, t_0 + A]$ et $x_{t_0} = \phi$.

– Pour $t_0 \in \mathbb{R}$ et $\phi \in \mathcal{C}$ donnés, la solution du problème (1.2) est dite unique si deux solutions coïncident là où elles sont simultanément définies.

Définition 1.1.4 ([15]) – On dit que l'équation (1.1) est autonome si la fonction f ne dépend pas de t . On note dans ce cas $f(u)$ au lieu de $f(t, u)$.

Lemme 1.1.1 ([11]) – Si $x \in \mathcal{C}([t_0 - r, t_0 + A], \mathbb{R}^n)$ alors la fonction $t \rightarrow x_t$ est continue de $[t_0 - r, t_0 + A]$ dans $\mathcal{C}$.

Proposition 1.1.1 ([15]) – Soient $t_0 \in \mathbb{R}$ et $\phi \in \mathcal{C}$ données, et soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction continue. Une fonction x est solution du problème (1.2) si et seulement si elle est solution de l'équation intégrale

$$x(t) = \phi(0) + \int_{t_0}^t f(s, x_s) ds, \quad t \geq t_0; \quad x_{t_0} = \phi. \quad (1.3)$$

Remarque 1.1.3 – Souvent dans les applications il est plus commode de convertir le problème (1.2) en l'équation intégrale (1.3) et de travailler avec cette expression de la solution considérée.

1.1.1 Existence, unicité et prolongement des solutions

Nous rappelons, dans ce paragraphe, quelques résultats de base sur l'existence, l'unicité et le prolongement des solutions de l'équation (1.1).

Théorème 1.1.1 ([15]) (Existence) – Soient U un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathcal{C}$ et $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction continue. Si $(t_0, \phi) \in U$, alors le problème (1.2) admet au moins une solution.

Plus généralement, si la fonction f est continue et $W \subset U$ et compact, alors il existe un voisinage $V \subset U$ de W tel que $f|_V$ soit bornée, et il existe $A > 0$ tel que, pour tout $(t_0, \phi) \in W$, il existe au moins une solution x du problème (1.2), définie sur l'intervalle $[t_0 - r, t_0 + A]$.

Définition 1.1.5 – Soient U un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathcal{C}$ et $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction. On dit que $f = f(t, x)$ est lipschitzienne en x dans les compacts de U si pour tout compact K dans U , il existe une constante $L > 0$ telle que

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq L |x_1 - x_2|,$$

à chaque fois que (t, x_1) et (t, x_2) sont dans K .

Théorème 1.1.2 ([15]) (Unicité) – Soient U un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathcal{C}$ et $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction continue. On suppose que $f = f(t, x)$ est lipschitzienne en x dans les compacts de U . Si $(t_0, \phi) \in U$, alors le problème (1.2) admet une solution unique.

On suppose que la fonction f dans l'équation (1.1) est continue. Soit x une solution de cette équation, définie sur l'intervalle $[t_0 - r, a]$, $a > t_0$.

Définition 1.1.6 – On dit que $\tilde{x}$ est un prolongement de x s'il existe $b > a$ tel que $\tilde{x}$ est définie sur $[t_0 - r, b]$. coïncide avec x sur $[t_0 - r, a]$ et vérifie l'équation (1.1) sur $[t_0 - r, b]$.

Définition 1.1.7 – La solution x est dite maximale si elle n'admet pas de prolongement, c'est-à-dire que l'intervalle $[t_0 - r, a]$ est l'intervalle maximal d'existence de la solution x .

Théorème 1.1.3 ([15]) (Prolongement) – Soient U un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathcal{C}$ et $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction continue. Soit x une solution maximale de l'équation (1.1) et soit $[t_0 - r, b]$ son intervalle maximal d'existence. Alors, pour tout compact W dans U , il existe t_W tel que $(t, x_t) \notin W$ pour $t \in [t_W, b]$.

1.1.2 Comparaison avec les équations différentielles ordinaires

1) Pour résoudre l'équation différentielle à retard :

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t-r))$$

il faut connaître $x(t)$ sur un intervalle $[t_0 - r, t_0]$ de longueur r . Par contre, pour résoudre une équation différentielle ordinaire il suffit de connaître $x(t)$ en un seul point.

2) Une équation différentielle à retard linéaire et homogène, peut avoir des solutions oscillantes non triviales, c'est à dire des solutions qui s'annulent plusieurs fois, mais elles ne sont pas identiquement nulles, or si la solution d'une équation différentielle ordinaire linéaire et homogène, s'annule en un point, elle est nulle partout (grâce à l'unicité de la solution). D'une manière générale, si deux solutions d'une équation différentielle, ordinaire se rencontrent en un point, et si la condition d'unicité est satisfaite, alors elles sont égales, sur tout le domaine de définition.

Par contre, deux solutions, d'une équation différentielle, à retard peuvent se rencontrer en plusieurs points, sans qu'elles soient égales.

Exemple

Soit l'équation suivante $\dot{x}(t) = -x(t - \pi/2)$ qui admet comme solutions : $x(t) = \cos t$ et $y(t) = \sin t$.

On remarque que $x\left(\frac{\pi}{4}\right) = y\left(\frac{\pi}{4}\right)$ et $x \neq y$.

1.2 Équation différentielle à retard linéaire

La classe d'équation que nous aurons besoin de considérer dans le reste de ce mémoire est l'équation différentielle à retard linéaire

$$\frac{dx(t)}{dt} = Lx_t,$$

où L est un opérateur linéaire borné de $\mathcal{C}$ dans $\mathbb{R}^n$. L'opérateur $L : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}^n$ est de la forme $L(\phi) = \int_{-r}^0 d\eta(\theta) \phi(\theta)$ où η est une fonction matricielle d'ordre n qui définie sur $[-r, 0]$ est satisfaisant $\eta(0) = 0$.

Exemple

On considère l'équation linéaire à retard suivante

$$\frac{dx(t)}{dt} = -\frac{\pi}{2}x(t-1),$$

où x est définie sur l'espace de phase $\mathcal{C} = \mathcal{C}([-1, 0], \mathbb{R})$. L'opérateur L est définie par $L\phi = -\frac{\pi}{2}\phi(-1)$ et la normalisation de l'opérateur L est définie par :

$$\eta(\theta) = \begin{cases} 0 & \text{si } \theta \in]-1, 0] \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } \theta = -1. \end{cases}$$

1.2.1 Semi-groupe associé à l'existence des solutions et son générateur

Définition 1.2.1 – Soit X un espace de Banach, et $(T(t))_{t \geq 0}$ une famille d'opérateurs linéaires bornés, définis sur X à valeurs dans lui même par $T(t)\varphi = x_t(., \varphi)$. La famille $(T(t))_{t \geq 0}$ est dite semi-groupe d'opérateurs linéaires fortement continus, ou C_0 -semi-groupe, si les propriétés suivantes sont satisfaites :

- i) $T(0) = \mathcal{Id}$, ($\mathcal{Id}$ est l'opérateur identité),
- ii) $T(t_1 + t_2) = T(t_1)T(t_2)$, $t_1, t_2 \geq 0$,
- iii)

$$\lim_{t \rightarrow 0} \|T(t)\phi - \phi\| = 0, \quad \phi \in X$$

Pour chaque C_0 -semi-groupe $(T(t))_{t \geq 0}$, on associe l'opérateur

$$A : D(A) \longrightarrow X,$$

défini par :

$$A\phi = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{T(t)\phi - \phi}{t}, \quad \phi \in D(A) \tag{1.4}$$

où

$$D(A) = \left\{ \varphi \in X : \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t)\varphi - \varphi}{t} \text{ existe dans } X \right\},$$

est le domaine de l'opérateur A .

A est appelé : Générateur infinitésimal du semi-groupe $(T(t))_{t \geq 0}$.

Théorème 1.2.1 ([17]) – Si $T(t)$ est un C_0 – semi-groupe, alors :

- i) pour chaque $\phi \in X, t \longrightarrow T(t)\phi$ est continu sur $\mathbb{R}^+$,
- ii) pour chaque $\phi \in D(A), t \longrightarrow T(t)\phi$ est de classe C^1 et satisfait l'équation différentielle ordinaire :

$$\frac{d}{dt}T(t)\phi = T(t)A\phi = AT(t)\phi.$$

D'après les théorèmes d'existence et d'unicité des solutions, si L est un opérateur linéaire borné de $\mathcal{C}$ dans $\mathbb{R}^n$, alors pour toute donnée initiale $\phi \in \mathcal{C}$, l'équation

$$\frac{dx(t)}{dt} = Lx_t, \quad t > 0 \quad (1.5)$$

possède une et une seule solution $x(., \phi)$ vérifiant :

$$x_t(\phi)(\theta) = \begin{cases} x(t + \theta), & \text{si } t + \theta \geq 0 \\ \phi(t + \theta), & \text{sinon .} \end{cases}$$

Soit $T(t) : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ l'opérateur solution de l'équation (1.5) défini par

$$T(t)\phi = x_t(\phi), \quad t \geq 0. \quad (1.6)$$

Proposition 1.2.1 ([8]) – L'opérateur solution $T(t), t \geq 0$, défini par la relation (1.6), est un C_0 – semi-groupe, de générateur infinitésimal donné par :

$$D(A) = \left\{ \phi \in \mathcal{C} : \frac{d\phi}{d\theta} \in \mathcal{C} \text{ et } \frac{d\phi}{d\theta}(0) = L\phi \right\},$$

avec

$$A\phi = \frac{d\phi}{d\theta}.$$

De plus, $T(t)$ est complètement continu pour $t \geq r$; c'est-à-dire que $T(t), t \geq r$, est continu et que l'image de tout borné est relativement compact.

1.2.2 Décomposition spectrale de l'espace de phases

Définition 1.2.2 – Soit $B : X \longrightarrow X$ un opérateur linéaire, où X est un espace de Banach. L'ensemble résolvant de B noté $\rho(B)$ est l'ensemble des valeurs $\lambda \in \mathbb{C}$ pour lesquelles l'opérateur $\lambda \mathcal{I}d - B$ ($\mathcal{I}d$ étant l'opérateur identité), à un inverse borné de domaine dense dans X , Autrement dit

$$\rho(B) = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : (\lambda \mathcal{I}d - B)^{-1} \text{ existe et } \overline{D(\lambda \mathcal{I}d - B)} = X \right\}.$$

Le complémentaire de $\rho(B)$ dans $\mathbb{C}$ est appelé spectre de B et est noté $\sigma(B)$, et on écrit :

$$\sigma(B) = \mathbb{C} \setminus \rho(B).$$

Lemme 1.2.1 ([8]) – Soit A l'opérateur défini par (1.4), alors :

- 1) λ est dans $\sigma(A)$ si et seulement si il satisfait l'équation caractéristique suivante

$$\det \Delta(\lambda) = 0, \quad (1.7)$$

associé à l'équation (1.5); $\Delta(\lambda)$ est la matrice définie par :

$$\Delta(\lambda) = \lambda \mathcal{I}d - Le^\lambda.$$

- 2) le sous espace propre généralisé noté $M_\lambda(A) := \cup_{k \geq 0} \text{Ker}(A - \lambda \mathcal{I}d)^k$ associé à chaque $\lambda \in \sigma(A)$ a pour dimension la multiplicité de λ en tant que racine de l'équation (1.7).
- 3) si λ est un élément de $\sigma(A)$, alors il existe un entier naturel k tel que le sous espace propre généralisé associé à λ , est donné par :

$$M_\lambda(A) = \text{Ker}(A - \lambda \mathcal{I}d)^k,$$

de plus, on a la décomposition suivante :

$$\mathcal{C} = \text{Ker}(A - \lambda \mathcal{I}d)^k \oplus \text{Im}(A - \lambda \mathcal{I}d)^k.$$

- 4) Une base canonique de l'espace propre généralisé $M_\lambda(A)$ est donnée par

$$\phi(\theta) := \sum_{j=0}^{k-1} \gamma_{j+1} \frac{\theta^j}{j!} e^{\lambda \theta}, \text{ pour } \theta \in [-r, 0]$$

où $\gamma = \text{col} \{\gamma_1, \dots, \gamma_k\}$ satisfait $A_k \gamma = 0$, A_k est la matrice d'ordre k définie par

$$A_k = \begin{pmatrix} P_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ P_2 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ P_k & \dots & \dots & P_2 & P_1 \end{pmatrix}, \quad (1.8)$$

et

$$P_j = \frac{1}{(j-1)!} \frac{d^{(j-1)}}{d\lambda^{(j-1)}} \Delta(\lambda) \text{ pour } j = 1, \dots, k. \quad (1.9)$$

- 5) le sous espace $M_\lambda(A)$ est invariant par A , et par conséquent par $(T(t))_{t \geq 0}$.

On déduit du Lemme (1.2.1) que pour tout $\lambda \in \sigma(A)$, $M_\lambda(A)$ est de dimension finie.

Soient d la dimension de $M_\lambda(A)$, $\{\phi_1^\lambda, \dots, \phi_d^\lambda\}$ une base de $M_\lambda(A)$ et $\Phi_\lambda = \{\phi_1^\lambda, \dots, \phi_d^\lambda\}$. Puisque $AM_\lambda(A) \subseteq M_\lambda(A)$, il existe une matrice carrée constante B_λ d'ordre d telle que

$$A\Phi_\lambda = \Phi_\lambda B_\lambda.$$

De plus, on a le résultat suivant :

Proposition 1.2.2 ([7]) — On a les assertions suivantes

i) pour tout $\theta \in [-r, 0]$,

$$\Phi_\lambda(\theta) = \Phi_\lambda(0)e^{B_\lambda\theta}.$$

ii) la restriction du semi-groupe $(T(t))_{t \geq 0}$ sur le sous espace propre $M_\lambda(A)$ est donné par :

$$T(t)\Phi_\lambda a = \Phi_\lambda e^{B_\lambda t} a,$$

avec, $t \geq 0$ et $a \in \mathbb{R}^d$.

Remarque 1.2.1 — La relation ii) permet de définir $T(t)$ sur $M_\lambda(A)$ pour tout $t \in (-\infty, +\infty)$. De plus, si λ est la valeur caractéristique de (1.5) de plus grande partie réelle, l'équation à retard (1.5) a les mêmes comportements asymptotiques que l'équation différentielle ordinaire suivante :

$$\frac{d}{dt}y(t) = B_\lambda y(t).$$

Théorème 1.2.2 ([8]) — Soient $\Lambda = \{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$ un ensemble fini de valeurs caractéristiques de l'équation (1.5),

$$\Phi_\Lambda = (\Phi_{\lambda_1}, \dots, \Phi_{\lambda_p})$$

et

$$B_\Lambda = \text{diag}(B_{\lambda_1}, \dots, B_{\lambda_p}),$$

où $\Phi_{\lambda_j}, j = 1, \dots, p$ est une base du sous espace propre généralisé associé à $\lambda_j, j = 1, \dots, p$, et B_{λ_j} est la matrice définie par

$$A\Phi_{\lambda_j} = \Phi_{\lambda_j} B_{\lambda_j}, \quad j = 1, \dots, p.$$

Alors, l'unique valeur propre de B_{λ_j} est λ_j , et pour tout vecteur a ayant la même dimension que l'ordre de la matrice Φ_Λ , la solution $T(t)\Phi_\Lambda a$, de condition initiale $\Phi_\Lambda a$ en $t = 0$, est définie sur $(-\infty, +\infty)$ par la relation

$$T(t)\Phi_\Lambda a = \Phi_\Lambda e^{B_\Lambda t} a, \quad t \neq 0$$

$$\Phi_\Lambda(\theta) = \Phi_\Lambda(0)e^{B_\Lambda \theta}, \quad -r \leq \theta \leq 0.$$

De plus, il existe un sous espace Q_Λ de C invariant par le semi groupe $(T(t))_{t \geq 0}$;

$$T(t)Q_\Lambda \subseteq Q_\Lambda,$$

pour tout $t \geq 0$ et vérifiant la décomposition

$$C = Q_\Lambda \oplus P_\Lambda,$$

où $P_\Lambda = \{\phi \in C : \phi = \Phi_\Lambda a, \text{ où } a \text{ est un vecteur}\}$ est l'espace engendré par la famille Φ_Λ .

Le Théorème (1.2.2), donne une image très claire du comportement des solutions du système (1.5). En fait, sur les sous espaces généralisés, le système (1.5) se comporte comme une équation différentielle ordinaire en dimension finie. La décomposition précédente de C joue un rôle très important pour l'étude des systèmes qui sont perturbations de systèmes linéaires.

1.2.3 Décomposition de C par l'équation formelle adjointe

Soit $C^* = C([0, r], \mathbb{R}^{n*})$, où $\mathbb{R}^{n*}$ est l'espace des vecteurs lignes de dimension n . Pour tout α dans C^* , on définit la forme bilinéaire suivante :

$$(\alpha, \phi) = \alpha(0)\phi(0) - \int_{-r}^0 \int_0^\theta \alpha(\xi - \theta)[d\eta(\theta)]\phi(\xi)d\xi, \quad (1.10)$$

où $\eta(\theta)$ est une fonction matricielle d'ordre n , $\theta \in [-r, 0]$, à variation bornée, normalisée, continue à gauche sur $(-r, 0)$ et $\eta(0) = 0$, associé à l'opérateur L :

$$L\phi = \int_{-r}^0 d[\eta(\theta)]\phi(\theta), \quad \phi \in C$$

où L est l'opérateur défini par l'équation (1.5). On définit l'opérateur adjoint formel A^* de A (relativement au produit défini par (1.10)) par :

$$(\alpha, A\phi) = (A^*\alpha, \phi), \text{ pour } \phi \in D(A) \text{ et } \alpha \in D(A^*).$$

Alors A^* est de domaine dense dans $\mathcal{C}^*$,

$$D(A^*) = \left\{ \alpha \in \mathcal{C}^*, \frac{d}{ds}\alpha \in \mathcal{C}^* \text{ et } \frac{d\alpha(0)}{ds} = - \int_{-r}^0 \alpha(-\theta)d\eta(\theta) \right\},$$

et

$$A^*\alpha(s) = \begin{cases} -\frac{d\alpha(s)}{ds}, & \text{si } 0 < s \leq r \\ \int_{-r}^0 \alpha(-\theta)d\eta(\theta), & \text{si } s = 0 \end{cases}$$

pour tout $\alpha \in D(A^*)$. L'équation adjointe de l'équation (1.5) est donnée par :

$$\frac{d}{d\tau}y(\tau) = - \int_{-r}^0 y(\tau - \theta)d\eta(\theta). \quad (1.11)$$

Si y est une solution de l'équation (1.11) sur l'intervalle $(-\infty, \sigma + r]$, alors, pour $\tau \in (-\infty, r]$, on désigne par y^τ l'élément de $\mathcal{C}^*$ défini par

$$y^\tau(\xi) = y(\tau + \xi), \quad 0 \leq \xi \leq r.$$

Si $y(\alpha)$ est une solution de l'équation (1.11) sur $(-\infty, r]$ de condition initiale α en 0. définissons

$$T^*(\tau)\alpha = y^\tau(\alpha), \quad -\infty < \tau \leq 0.$$

Alors $T^*(\tau)$ à les mêmes propriétés que le semi-groupe $T(t)$ associé à l'équation (1.5) et on a :

$$\frac{d}{d\tau}T^*(\tau)\alpha = -A^*T^*(\tau)\alpha = -T^*(\tau)A^*\alpha,$$

pour tout $\alpha \in D(A^*)$.

Lemme 1.2.2 ([7]) – λ est un élément de $\sigma(A)$ si et seulement si λ est un élément de $\sigma(A^*)$, et pour tout λ dans $\sigma(A^*)$, le sous espace propre généralisé associé à λ est de dimension finie.

Lemme 1.2.3 ([8]) – Une condition nécessaire et suffisante pour que l'équation

$$(A - \lambda \mathcal{I}d)^k \phi = \psi, \quad \psi \in \mathcal{C}$$

ait une solution ϕ dans $\mathcal{C}$, c'est à dire que $\psi \in \text{Im}(A^* - \lambda \mathcal{I}d)^k$, est que $(\alpha, \psi) = 0$ pour tout α dans $\text{Ker}(A^* - \lambda \mathcal{I}d)^k$.

Lemme 1.2.4 ([8])— On a les assertions suivantes

i) Une base canonique de $M_\lambda(A^*)$ peut être obtenue de la manière suivante

$$\Psi(s) = \sum_{j=1}^k \beta_j \frac{(-s)^{k-j}}{(k-j)!} e^{-\lambda s}, \text{ pour } s \in [0, r] \quad (1.12)$$

avec $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_k)$ satisfait $\beta A_k = 0$, où A_k est la matrice donnée par les formules (1.8) et (1.9).

ii) Soit $\lambda \in \sigma(A)$, soient $\Psi_\lambda = \text{col}(\psi_1, \dots, \psi_p)$ et $\Phi_\lambda = (\phi_1, \dots, \phi_p)$ des bases de $M_\lambda(A^*)$ et $M_\lambda(A)$ respectivement, et soit

$$(\Psi_\lambda, \Phi_\lambda) = (\psi_i, \phi_j), \quad i, j = 1, 2, \dots, p.$$

Alors $(\Psi_\lambda, \Phi_\lambda)$ est non singulière et peut être choisie égale à la matrice identité. Par le théorème (1.2.2), la décomposition de $\mathcal{C}$ est donnée par :

$$\phi = \phi^{P_\lambda} + \phi^{Q_\lambda}, \quad \phi \in \mathcal{C}, \quad \phi^{P_\lambda} \in P_\lambda, \quad \phi^{Q_\lambda} \in Q_\lambda$$

où

$$P_\lambda = M_\lambda(A) = \{\phi \in \mathcal{C} : \phi = \Phi_\lambda b, b \in \mathbb{R}^p\},$$

$$Q_\lambda = \{\phi \in \mathcal{C} : (\Psi_\lambda, \phi) = 0\},$$

$$\phi^{P_\lambda} = \Phi_\lambda b, \quad b = (\Psi_\lambda, \phi) \text{ et } \phi^{Q_\lambda} = \phi - \phi^{P_\lambda}.$$

Lemme 1.2.5 ([8]) — $\dim M_\lambda(A) =$ multiplicité de λ comme racine de $\det \Delta(\lambda) = 0$.

Théorème 1.2.3 ([7]) — Soit $\Lambda = \{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$ un ensemble fini de $\sigma(A)$, on définit $\Psi_\Lambda = \text{col} \{\psi_{\lambda_1}, \dots, \psi_{\lambda_p}\}$ comme étant une base du sous espace

$$P_\Lambda^* = \oplus_{i=1}^p M_{\lambda_i}(A^*),$$

et $\Phi_\Lambda = \text{col} \{\phi_{\lambda_1}, \dots, \phi_{\lambda_p}\}$ une base du sous espace

$$P_\Lambda = \oplus_{i=1}^p M_{\lambda_i}(A).$$

L'espace $\mathcal{C}$ se décompose comme suit :

$$\mathcal{C} = P_\Lambda \oplus Q_\Lambda$$

$$\text{où } Q_\Lambda = \{\phi \in \mathcal{C} : (\Psi_\Lambda, \phi) = 0\} \text{ et } P_\Lambda = \{\Phi_\Lambda (\Psi_\Lambda, \phi), \phi \in \mathcal{C}\}$$

De plus, pour tout ϕ dans $\mathcal{C}$, on a

$$\phi = \phi^{P_\Lambda} + \phi^{Q_\Lambda},$$

avec $\phi^{P_\Lambda} = \Phi_\Lambda(\Psi_\Lambda, \phi)$ Dans ce cas on dit que $\mathcal{C}$ se décompose par Λ .

1.2.4 Estimations sur le sous espace complémentaire

Soit $\Lambda = \{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$ un ensemble fini de valeurs propres de A . D'après le théorème (1.2.2), il existe une matrice $B = B_\Lambda$, dont les valeurs propres coïncident avec Λ , telle que pour tout $\phi \in \mathcal{C}$

$$T(t)\phi^{P_\Lambda} = \Phi_\Lambda e^{Bt} a,$$

où $\phi^{P_\Lambda} = \Phi_\Lambda a$ est la projection de ϕ sur le sous espace P_Λ et Φ_Λ la base de P_Λ . Le théorème qui suit, donne des estimations des solutions sur les sous-espaces P_Λ et Q_Λ .

Théorème 1.2.4 ([8]) – Pour tout réel β , soit

$$\Lambda = \Lambda(\beta) = \{\lambda \in \sigma(A); \operatorname{Re} \lambda > \beta\},$$

on suppose que $\mathcal{C}$ se décompose par Λ sous la forme

$$\mathcal{C} = P_\Lambda \oplus Q_\Lambda,$$

alors il existe des constantes positives γ et $K = K(\gamma)$ telles que :

$$\begin{aligned} \|T(t)\phi^{P_\Lambda}\| &\leq K e^{(\beta-\gamma)t} \|\phi^{P_\Lambda}\|, \quad t \leq 0 \\ \|T(t)\phi^{Q_\Lambda}\| &\leq K e^{(\beta-\gamma)t} \|\phi^{Q_\Lambda}\|, \quad t \geq 0 \end{aligned}$$

pour tout $\phi \in \mathcal{C}$.

Corollaire 1.2.1 ([8]) – Si toutes les racines de l'équation caractéristique (1.7) sont à parties réelles négatives, alors il existe des constantes positives K et δ telles que :

$$\|T(t)\phi\| \leq K e^{-\delta t} \|\phi\|, \quad t \geq 0$$

pour tout $\phi \in \mathcal{C}$.

1.3 Équation différentielle à retard linéaire non homogène

Considérons l'équation différentielle à retard linéaire non homogène suivante :

$$\dot{x}(t) = Lx_t + f(t), \quad \text{pour } t > 0 \tag{1.13}$$

où L est un opérateur linéaire borné de $\mathcal{C}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ et f une fonction localement intégrable définie sur $\mathbb{R}^+$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

1.3.1 Formule de variation de la constante

Soit $(T(t))_{t \geq 0}$ le semi groupe solution associé à l'équation linéaire (1.5) et A son générateur infinitésimal.

Définition 1.3.1 — On dit que $X(t)$ est une matrice fondamentale solution de l'équation (1.5), si $X(t)$ est une solution de l'équation (1.13) de condition initiale

$$X_0(\theta) = \begin{cases} \mathcal{I}d_{\mathbb{R}^n} & \text{pour } \theta = 0 \\ 0 & \text{pour } -r \leq \theta < 0. \end{cases}$$

Théorème 1.3.1 ([8]) — Soit $x_t = x(., \phi)$ la solution de l'équation (1.13) issue de ϕ en $t = t_0$. Alors, elle satisfait la formule de variation de la constante suivante :

$$x_t = T(t - t_0)\phi + \int_{t_0}^t T(t - \alpha)X_0 f(\alpha) d\alpha, \quad t \geq t_0. \quad (1.14)$$

1.3.2 Décomposition de la formule de variation de la constante

Le théorème suivant donne la décomposition de la formule de variation de la constante (1.14).

Théorème 1.3.2 ([8]) — Soient pour un certain réel $\beta, \Lambda = \{\lambda \in \sigma(A) : \operatorname{Re} \lambda > \beta\}, \Phi$ une base du sous espace propre généralisé P associé à Λ, Ψ une base du sous espace propre généralisé adjoint formel associé à Λ , telles que $(\Psi, \Phi) = \mathcal{I}d$. Si $\mathcal{C}$ se décompose par Λ comme

$$\mathcal{C} = P \oplus Q,$$

alors la solution $x = x(t_0, \phi)$ de l'équation (1.13) est donnée par :

$$\begin{cases} x_t^P = T(t - t_0)\phi^P + \int_{t_0}^t T(t - s)X_0^P f(s) ds, \\ x_t^Q = T(t - t_0)\phi^Q + \int_{t_0}^t T(t - s)X_0^Q f(s) ds, \end{cases}$$

où $X_0^P = \Phi\Psi(0)$ et $X_0^Q = X_0 - X_0^P$ Si on pose $x_t^P = \Phi y(t), y$ vérifie l'équation différentielle ordinaire :

$$\dot{y}(t) = By(t) + \Psi(0)f(t),$$

avec B est une matrice définie par $A\Phi = \Phi B$.

1.4 Équation différentielle à retard autonome

Considérons l'équation semi-linéaire suivante

$$\dot{x}(t) := F(x_t) = L(x_t) + g(x_t), \quad \text{pour } t > 0 \quad (1.15)$$

où g est une fonction continument différentiable de $\mathcal{C}$ dans $\mathbb{R}$ tel que $g(0) = 0$ et $Dg(0) = 0$. Dans cette section, nous nous intéressons au comportement des solutions de l'équation (1.15) dans un voisinage autour de d'équilibre nul.

Considérons l'équation linéarisée

$$\frac{dx(t)}{dt} = L(x_t). \quad (1.16)$$

Les solutions de cette partie linéaire de l'équation (1.15) sont données par un C_0 -semi-groupe sur $\mathcal{C}$ qu'on note $(T(t))_{t \geq 0}$, et son générateur infinitésimal A .

Soit $x(., \phi)$ la solution de l'équation (1.15) avec la valeur initial ϕ . La formule de variation de la constante associée est donnée par

$$\begin{aligned} x_t &= T(t)\phi + \int_0^t T(t-s)X_0 f(s)ds, \quad t \geq 0 \\ x_0 &= \phi. \end{aligned}$$

1.4.1 Points d'équilibres hyperboliques

Théorème 1.4.1 ([18]) – Le point d'équilibre null est dit hyperbolique si toutes les racines de l'équation caractéristique sont de partie réelle non nulle. On peut alors décomposer l'espace $\mathcal{C}$ en :

$$\mathcal{C} = X_u \oplus X_s,$$

où X_u (sous espace instable) est un sous espace généralisé associé à Λ et X_s (sous espace stable) est un sous espace complémentaire de X_u qui est invariant par $(T(t))_{t \geq 0}$.

Soit $\phi \in \mathcal{C}$ alors

$$\phi = \phi^u + \phi^s, \quad \phi^u \in X_u \text{ et } \phi^s \in X_s,$$

d'après le Théorème (1.2.4) il existe des constantes positive M et α telle que pour $\phi \in \mathcal{C}$

$$\begin{aligned} \|T(t)\phi^u\| &\leq Me^{\alpha t} \|\phi^u\|, \quad t \leq 0 \\ \|T(t)\phi^s\| &\leq Me^{-\alpha t} \|\phi^s\|, \quad t \geq 0 \end{aligned}$$

Pour $\delta > 0$, on définit sur l'espace $\mathcal{C}$, la variété stable $\mathcal{S}_\delta$ par

$$\mathcal{S}_\delta = \left\{ \phi \in \mathcal{C} : \phi^s \in B_{\frac{\delta}{2M}}, x_t(\phi) \in B_\delta, t \geq 0 \right\}$$

avec $B_\delta = \{ \phi \in \mathcal{C} : \|\phi\| \leq \delta \}$ et $x(\phi)$ solution de l'équation (1.15), et on définit la variété instable $\mathcal{U}_\delta$ par

$$\mathcal{U}_\delta = \left\{ \phi \in \mathcal{C} : \phi^u \in B_{\frac{\delta}{2M}}, \text{ il existe une fonction définie et différentiable sur }]-\infty, 0] \right. \\ \left. \text{et satisfait l'équation (1.15) pour } t \leq 0 \text{ tel que, } x_t(\phi) \in B_\delta \right\}.$$

On a le résultat suivante :

Théorème 1.4.2 ([18]) – Il existe une constante positive δ tel que $\|x_t(\phi)\| \leq Me^{-\alpha t}\|\phi\|$, pour chaque $\phi \in \mathcal{S}_\delta$ et $t \geq 0$ $\|x_t(\phi)\| \leq Me^{\alpha t}\|\phi\|$, pour chaque $\phi \in \mathcal{U}_\delta$ et $t \leq 0$. De plus, la variété $\mathcal{S}_\delta$ (resp. $\mathcal{U}_\delta$) est la tangente du sous espace X_s , (resp. X_u) en $0 \in \mathcal{C}$.

Par conséquence du théorème précédent, nous avons le corollaire suivant sur la stabilité asymptotique exponentielle

Corollaire 1.4.1 ([18]) – Si toutes les racines de l'équation caractéristique sont de partie réelle non nulle, alors il existe une constante positive γ tel que

$$\|x_t(\phi)\| \leq Me^{-\gamma t}\|\phi\|, \text{ pour chaque } \phi \in B_\delta \text{ et } t \geq 0.$$

Autrement dit, la solution zéro de l'équation (1.15) est exponentiellement asymptotiquement stable.

1.4.2 Points d'équilibres non hyperboliques

Définition 1.4.1 – Le point d'équilibre zéro est dit non hyperbolique si et seulement s'il existe au moins une racine de l'équation caractéristique de partie réelle nulle.

On peut encore décomposer l'espace $\mathcal{C}$ comme suit

$$\mathcal{C} = X_u \oplus X_c \oplus X_s,$$

avec X_u (sous espace instable) est un sous espace généralisé associée aux valeurs propres de partie réelle positive, X_c (sous espace centré) associée aux valeurs propres de partie réelle nulle, et X_s (sous espace stable) est un sous espace complémentaire de $X_u \oplus X_c$ qui est invariant par $(T(t))_{t \geq 0}$.

On peut écrire $\phi \in \mathcal{C}$ par :

$$\phi = \phi^u + \phi^c + \phi^s, \quad \phi^u \in X_u, \quad \phi^c \in X_c \text{ et } \phi^s \in X_s.$$

Donc d'après le théorème (1.2.4), il existe deux constantes M , α , et pour tout $\varepsilon \geq 0$, il existe une constante $M_\varepsilon \geq 0$ tel que pour tout $\phi \in \mathcal{C}$

$$\begin{aligned} \|T(t)\phi^u\| &\leq M e^{\alpha t} \|\phi^u\|, \quad t \leq 0 \\ \|T(t)\phi^c\| &\leq M_\varepsilon e^{\varepsilon t} \|\phi^c\|, \quad t \in \mathbb{R}, \\ \|T(t)\phi^s\| &\leq M e^{-\alpha t} \|\phi^s\|, \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

1.4.3 Notions de stabilité

La stabilité au point d'équilibre d'un système avec ou sans retard, consiste à observer que son évolution reste proche du point d'équilibre lorsqu'on s'en écarte d'un certain voisinage. La stabilité asymptotique indique que le système reviendra exactement au point d'équilibre, au bout d'un temps infini. La stabilité exponentielle garantit quant à elle non seulement le caractère asymptotique mais aussi la convergence exponentielle rapide.

Définition 1.4.2 — On dit que la solution $x_t(t_0, \phi)$ est stable si, pour tout $\varepsilon > 0$, et pour tout t_0 , il existe $\delta(\varepsilon, t_0)$ tel que

$$\|\phi\| < \delta \text{ a chaque fois que } \|x\| < \varepsilon.$$

La solution $x_t(t_0, \phi)$ est uniformément stable si δ ne dépend pas de t_0 .

La solution $x_t(t_0, \phi)$ est asymptotiquement stable si

- ✓ elle est stable,
- ✓ il existe $b = b(t_0)$ tel que $\|\phi\| < b$ implique que $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$.

La solution $x_t(t_0, \phi)$ est stable asymptotiquement au sens large si

- ✓ elle est stable,
 - ✓ toute solution $x(t)$ satisfait $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$
- La solution $x_t(t_0, \phi)$ est dite exponentiellement stable s'il existe $B > 0$, $\alpha > 0$, et pour tout $\phi, t_0 > 0$, avec $\|\phi\| < \infty$

$$\|x(t)\| \leq B e^{-\alpha(t-t_0)} \|\phi\|.$$

Dans le cadre des équations différentielles linéaires à retard, la stabilité et la stabilité asymptotique peuvent être déterminées grâce à la localisation des racines de l'équation caractéristique associée à l'équation linéarisée.

Proposition 1.4.1 ([18]) – La solution $x = 0$ de l'équation linéaire est asymptotiquement stable si et seulement si toutes les racines de l'équation caractéristique associée sont à parties réelle négatives.

S'il existe une racine de l'équation caractéristique à partie réelle strictement positive, alors la solution $x = 0$ est instable.

Remarque 1.4.1 – Si x_0 est un point d'équilibre non nul de f et si f est continûment différentiable dans un voisinage de x_0 , alors la stabilité du point d'équilibre x_0 est déterminée par la localisation des racines de l'équation caractéristique associée à l'équation linéarisée de (1.15) autour de x_0 .

L'analyse des équations caractéristiques associées aux équations différentielles à retard linéaires donne un résultat local de stabilité.

Définition 1.4.3 ([2])(Solutions bornées) – Une solution $x(\sigma, \phi)$ de (1.2) est dite bornée s'il existe $\zeta = \zeta(\phi)$ tel que

$$x(t) < \zeta(\phi), \quad \text{pour } t \geq t_0 - r.$$

Les solutions de (1.2) sont uniformément bornées s'il existe ζ indépendant de ϕ tel que

$$x(t) < \zeta, \quad \text{pour } t \geq t_0 - r.$$

1.4.4 Variétés centres local pour les équations différentielles à retard

Cette section poursuit l'étude d'une équation différentielle à retard en utilisant une méthode de projection sur les variétés centres de dimension finie.

La théorie des variétés centres est l'un des outils les plus efficaces dans l'étude de la dynamique des systèmes différentiels et notamment dans le cas infiniment dimensionnel. Lorsqu'un point d'équilibre est non-hyperbolique, cette théorie permet de ramener l'étude d'un système proche de ce point à celle d'une équation différentielle ordinaire. L'approche est particulièrement intéressante lorsque le système réduit est de dimension finie.

D'après la définition (1.4.1), on a le résultat suivant.

Définition 1.4.4 — Soit V un voisinage de zéro dans $\mathcal{C}$. Une variété centre local $W_{loc}^c(V)$ associée à l'équation (1.15) est une variété sur l'espace $\mathcal{C}$, régulier, tangente au sous-espace X_c à 0 dans $\mathcal{C}$ et localement invariante sous le semi-flux engendré par l'équation (1.15). En d'autres termes, il existe un voisinage V de zéro dans $\mathbb{R}^d$ et il existe une application h de classe C^1 définie sur V à valeur dans X_s , satisfaisant $h(0) = 0$, $Dh(0) = 0$, telle que

$$W_{loc}^c(V) = \{\Phi\xi + h(\xi) : \xi \in V\}.$$

Si $x_t(\phi)$ est une solution de l'équation (1.15) avec une initialisation $\phi \in W_{loc}^c(V)$ alors $x_t(\phi) \in W_{loc}^c(V)$ tant que $x_t(\phi) \in V$.

Théorème 1.4.3 ([18]) — Si F dans l'équation (1.15) est une fonction de classe C^k , alors il existe un voisinage V de zéro dans $\mathcal{C}$ et une variété centre local de classe C^k associé à l'équation (1.15).

Remarque 1.4.2 ([18]) — Si h est C^k régulier, Alors on dit que la variété centre local $W_{loc}^c(V)$ est C^k régulier.

Le flot sur la variété centre est alors donné par :

$$x_t = \Phi z(t) + h(z(t)),$$

où $z(t)$ est la solution de l'équation différentielle ordinaire :

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = Bz(t) + \Psi(0)g(\Phi z(t) + h(z(t))), \\ z(0) = \xi, \end{cases} \quad \xi \in \mathbb{R}^d$$

avec B est une matrice donnée par $A\Phi = \Phi B$.

1.4.5 Formes normales

Supposons que le théorème des variétés centres a été appliqué au système (1.15) et nous limitons maintenant notre attention à simplifier l'équation suivante :

$$\dot{z} = Bz + H(z), \quad z(0) \in \mathbb{R}^d$$

avec $H(z) = \Psi(0)g(\Phi z + h(z))$. On décompose H en parties homogènes H_i d'ordre i par :

$$\dot{z} = Bz + H_2(z) + H_3(z) + \dots + H_{r-1}(z) + \mathcal{O}(|z|^r).$$

Si on fait le changement de variables $z = y + T_2(y)$ avec $T_2(y)$ est le second ordre en y , on obtient :

$$\begin{aligned} \dot{z} = (\mathcal{I}d + DT_2(y))\dot{y} = & By + BT_2(y) + H_2(y + T_2(y)) \\ & + H_3(y + T_2(y)) + \dots + H_{r-1}(y + T_2(y)) + \mathcal{O}(|y|^r), \end{aligned} \quad (1.17)$$

avec $\mathcal{I}d$ est une matrice identité $d \times d$. Donc le terme suivant :

$$H_k(y + T_2(y)), \quad 2 \leq k \leq r-1$$

peut s'écrire sous la forme

$$H_k(y) + \mathcal{O}(|y|^k) + \dots + \mathcal{O}(|y|^{2k}),$$

de sorte que :

$$\begin{aligned} (\mathcal{I}d + DT_2(y))\dot{y} = & By + BT_2(y) + H_2(y) \\ & + \tilde{H}_3(y) + \dots + \tilde{H}_{r-1}(y) + \mathcal{O}(|y|^r), \end{aligned}$$

tel que le terme $\tilde{H}_k(y)$ est le développement de $\mathcal{O}(|y|^k)$.

Pour y assez petit, la matrice $(\mathcal{I}d + DT_2(y))$ est inversible, et l'inverse satisfait :

$$(\mathcal{I}d + DT_2(y))^{-1} = \mathcal{I}d - DT_2(y) + \mathcal{O}(y^2),$$

donc on trouve

$$\begin{aligned} \dot{y} = & By + BT_2(y) - DT_2(y)By + H_2(y) \\ & + \tilde{H}_3(y) + \dots + \tilde{H}_{r-1}(y) + \mathcal{O}(|y|^r), \end{aligned}$$

$T_2(y)$ a été complètement arbitraire, nous allons choisir un formulaire spécifique de $T_2(y)$, pour simplifier $\mathcal{O}(|y|^2)$.

Donc on choisie $T_2(y)$ de tel sorte que

$$DT_2(y)By - BT_2(y) = H_2(y). \quad (1.18)$$

Alors on simplifier $H_2(y)$ sur la formule de $\dot{y}$.

Soit $V_j(\mathbb{R}^d)$ l'espace des polynômes homogène de degré j définie par :

$$V_j(\mathbb{R}^d) = \left\{ \sum_{|q|=j} c_q x^q; \quad q \in \mathbb{N}_1^d, \quad c_q \in \mathbb{N} \right\},$$

avec $x = (x_1^{q_1}, \dots, x_d^{q_d})$ pour $q = (q_1, \dots, q_d) \in \mathbb{N}_1^d$.

Considère la forme linéaire L_B défini de $V_j(\mathbb{R}^d)$ à lui-même par :

$$L_B(T_k(y)) = -(DT_k(y)By - BT_k(y)).$$

Donc $V_j(\mathbb{R}^d)$ peut être représenté par :

$$V_2(\mathbb{R}^d) = L_B(V_2(\mathbb{R}^d)) \oplus G_2,$$

avec G_2 est un espace complémentaire de $L_B(V_2(\mathbb{R}^d))$, si $H_2(y)$ est dans range de $L_B(\cdot)$, alors tous les termes $\mathcal{O}(|y|^2)$ peut être éliminés de l'équation (1.18).

Théorème 1.4.4 ([18]) – Suite de changement de coordonnées analytique, (1.17) peut être transformé en

$$\dot{y} = By + F_2^r(y) + F_3^r(y) + \dots + F_{r-1}^r(y) + \mathcal{O}(|y|^r), \quad (1.19)$$

avec $F_k^r(y) \in G_k$, $2 \leq k \leq r-1$ et G_k le complémentaire de $L_B(V_k(\mathbb{R}^d))$, l'équation (1.19) est dit forme normale.

1.5 Bifurcation locale

Considérons maintenant un système dynamique qui dépend des paramètres de la forme suivant

$$\dot{x} = f(x(t), \mu), \quad (1.20)$$

où $x \in \mathbb{R}^d$ et $\mu \in \mathbb{R}^p$ représentent respectivement les variables et les paramètres du système.

On dira que nous sommes en présence d'une bifurcation, si un changement qualitatif des propriétés d'un système se produit lorsque l'on fait varier un de ses paramètres. Intuitivement, le changement des propriétés d'un système signifie le changement du nombre de points fixes ou de leur caractère (stabilité, etc). Si au passage d'une valeur du paramètre un tel changement se produit on dit que le système passe par un point de bifurcation.

1.5.1 Bifurcation à un paramètre

Considérons le système dynamique (1.20) avec $p = d = 1$. Soit $x = x_0$ un équilibre hyperbolique dans le système pour $\mu = \mu_0$.

1.5.1.1 Bifurcation de Fold

Supposons le système (1.20), avec f est une fonction régulière qui possède à $\mu = 0$, l'équilibre $x = 0$ en $\lambda = 0$ et $f'_x(0, 0) = 0$.

Définition 1.5.1 ([13]) – Le cas au $\lambda = 0$ la bifurcation associée est appelée bifurcation de Fold.

Remarque 1.5.1 – Cette bifurcation a beaucoup d'autres noms, notamment nœud selle bifurcation, et point de retour.

1.5.1.1.1 Bifurcation transcritique

Considérons toujours l'équation $\dot{x} = f(x, \mu)$, $x \in \mathbb{R}$ et $\mu \in \mathbb{R}$,
supposons que

$$f(0, 0) = 0 \text{ et } \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0,$$

et en ajoute une troisième condition $\frac{\partial f}{\partial \mu}(0, 0) = 0$,

avec

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) \neq 0 \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \mu}(0, 0) \neq 0,$$

par un développement limité au voisinage de $(0, 0)$ on obtient

$$f(x, \mu) = x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) + x\mu \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \mu}(0, 0) + o(|(x, \mu)|^2),$$

posons

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) \neq 0,$$

$$B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \mu}(0, 0) \neq 0,$$

l'équation devient :

$$\dot{x} = Ax^2 + Bx\mu.$$

Effectuons les changements

$$U = \frac{x}{A}, \quad t = \frac{T}{A^2} \text{ et } \lambda = \frac{B\mu}{A^2},$$

alors :

$$\dot{U} = \frac{\dot{x}}{A} = x^2 + \frac{B\mu}{A}x = A^2U^2 + B\mu U,$$

implique que

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial U}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t} = A^2U^2 + B\mu U,$$

c'est-à-dire

$$\frac{\partial U}{\partial T} = U^2 + \lambda U.$$

La dernière équation est dite forme normale de la bifurcation transcritique.

Remarque 1.5.2 – Il y a aussi une autre forme normale de la bifurcation transcritique

$$\frac{dx}{dt} = x^2 - \lambda x.$$

On pose

$$g(x, \lambda) = x^2 - \lambda x,$$

si on a $x^2 - \lambda x = 0$, alors $x(x - \lambda) = 0$.

Donc l'équation $g(x, \lambda) = 0$ admet deux points d'équilibre

$$\begin{cases} x_e = 0, \\ x_e = \lambda. \end{cases}$$

Nous étudions la stabilité de ces points d'équilibre

$$\frac{dg(x, \lambda)}{dx} = 2x - \lambda \quad \text{donc} \quad \left. \frac{dg(x_e, \lambda)}{dx} \right|_{x_e=0} = -\lambda \quad \text{et} \quad \left. \frac{dg(x_e, \lambda)}{dx} \right|_{x_e=\lambda} = \lambda.$$

C'est-à-dire, le point d'équilibre $x_e = 0$ est stable pour $\lambda > 0$, instable pour $\lambda < 0$ et $x_e = \lambda$ est stable pour $\lambda < 0$, instable pour $\lambda > 0$.

Calcul des variétés centres pour les EDFRs associées à la singularité de Fold

L'objectif principal de ce chapitre est de calculer les termes des variétés centres associées à la singularité de Fold pour l'équation différentielle à retard générale suivante :

$$\dot{x}(t) = f(x(t), x(t-r)), \quad t \geq 0. \quad (2.1)$$

2.1 Linéarisation autour d'une solution particulière (équilibre)

Considérons l'équation (2.1), et supposons que l'application $(x, y) \rightarrow f(x, y)$ définie sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ est de classe C^2 pour tout $t \geq 0$. Soit $x^* = (0, 0)$ une solution particulière (point d'équilibre) de (2.1).

Soit $Df(x, y)$ l'opérateur défini, pour tout $\psi \in \mathbb{R}^n$, par

$$Df(x, y)\psi := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x, y + h\psi) - f(x, y)}{h},$$

pour tout $t \geq 0$, l'opérateur $Df(x, y) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est linéaire continue.

Définition 2.1.1 — On appelle équation linéarisée associée à l'équation (2.1) autour de la solution particulière (point d'équilibre) $x^* = (0, 0)$ l'équation

$$\frac{dx}{dt}(t) = D_\phi f(0, 0) x_t. \quad (2.2)$$

On pose $x(t) = x(0)e^{\lambda t}$, donc

$$\frac{dx(t)}{dt} = \lambda x(0)e^{\lambda t},$$

d'après l'équation (2.2) on trouve

$$\lambda x(0)e^{\lambda t} = D_\phi f(0, 0) x(0)e^{\lambda t - \lambda r},$$

ainsi que

$$\lambda \mathcal{I}d_{\mathbb{R}^n} = D_\phi f(0, 0) e^{-\lambda r},$$

alors

$$\lambda \mathcal{I}d_{\mathbb{R}^n} - D_\phi f(0, 0) e^{-\lambda r} = 0.$$

La dernière équation est dite équation caractéristique associée à l'équation (2.2).

La section qui suit consiste à déterminer les coefficients des variétés centres associées à l'équation différentielle à retard.

2.2 Schémas de calcul

Considérons la classe des EDFRs suivant

$$\frac{dx(t)}{dt} = L_0 x(t) + L_1 x(t - r) + F(x(t), x(t - r)), \quad (2.3)$$

où $x \in \mathbb{R}^n$, $F : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^n$ est supposé suffisamment régulier ($F \in C^\infty$) tel que : $F(0, 0) = 0$ et $DF(0, 0) = 0$. L_0 , L_1 sont des matrices carrées d'ordre n , $r > 0$.

On note par $\mathcal{C} := \mathcal{C}([-r, 0], \mathbb{R}^n)$ l'espace des fonctions définies sur $[-r, 0]$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, et pour $\phi \in \mathcal{C}$

$$L\phi := L_0 \phi(0) + L_1 \phi(-r), \quad \text{et} \quad g(\phi) := F(\phi(0), \phi(-r)),$$

où g définie sur $\mathcal{C}$ à valeur dans $\mathbb{R}^n$.

Alors l'équation (2.1) peut s'écrire sous forme

$$\dot{x} = Lx_t + g(x_t). \quad (2.4)$$

Dans la suite de ce chapitre, supposons que l'hypothèse suivante est satisfait

$$(H) \left| \begin{array}{l} \text{L'équation caractéristique} \\ \det \Delta(\lambda) = 0 \text{ où } \Delta(\lambda) = \lambda \mathcal{I}d_{\mathbb{R}^n} - L_0 - L_1 e^{-\lambda r}, \\ \text{a une valeur propre nulle simple, et les autres valeurs propres sont de partie réelle} \\ \text{négative.} \end{array} \right.$$

On note par $(T(t))_{t \geq 0}$ la solution du semi-groupe associée à l'équation linéaire

$$\frac{dx(t)}{dt} = Lx_t,$$

et par A son générateur infinitésimal sur $\mathcal{C}$.

Soit $\Lambda = \{0\}$ et X_c l'espace propre généralisé associé à Λ . De l'hypothèse (H) , nous avons que $\dim X_c = 1$, soit Φ une base du sous-espace généralisé associé à Λ , et Ψ désigne la base du sous-espace dual X_c^* . On considère la décomposition $C = X_c \oplus X_s$. En particulier, nous considérons des bases pour X_c et X_c^* notées respectivement par $\Phi = \phi_1$, $\Psi = \psi_1$, et satisfaisant $\langle \Phi, \Psi \rangle = \mathcal{I}d_{\mathbb{R}^n}$. On note par B la matrice constante carrée de dimension 1×1 telle que $T(t)\Psi = \Psi e^{tB}$.

2.2.1 Calcul des termes d'une variété centre pour les EDFRs

Le résultat suivant donne une caractérisation analytique d'une variété centre associée à l'équation (2.4).

Théorème 2.2.1 ([19]) – Étant donné une application h de classe C^1 définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans X_s avec $h(0) = 0$ et $Dh(0) = 0$, une condition nécessaire pour que le graphe de h soit une variété centre local de l'équation (2.4) est qu'il existe un voisinage V de zéro dans $\mathbb{R}$ tel que, pour tout $\xi \in V$,

$$\frac{\partial}{\partial \theta}(h(\xi))(\theta) = \left(\frac{\partial h(\xi)}{\partial \xi}(\theta) \right) [\Psi(0)g(\Phi\xi + h(\xi))] + \Phi(\theta)\Psi(0)g(\Phi\xi + h(\xi)), \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta}(h(\xi))(0) = Lh(\xi) + g(\Phi\xi + h(\xi)). \quad (2.6)$$

Preuve

Si h est un graphe d'une variété centre local de l'équation (2.4), alors il existe un voisinage V de zéro dans $\mathbb{R}$ tel que, pour tout $\xi \in V$, il existe $\delta > 0$ tel que la solution de (2.4) avec la donnée initiale $\Phi\xi + h(\xi)$ existe sur l'intervalle $]-\delta - r, \delta[$ et elle est donnée par

$$x_t = \Phi z(t) + h(z(t)), \text{ pour } t \in]-\delta, \delta[,$$

telle que $z(t)$ est solution de l'équation

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}z(t) = \Psi(0)g(\Phi z(t) + h(z(t))), \\ z(0) = \xi, \quad \xi \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Pour prouver que l'équation (2.5) est vraie, il faut montrer que $h(\xi)$ est dans le domaine de A . Si $\xi \in V$ est petit, il suffit de prouver que

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t)h(\xi) - h(\xi)}{t}$$

existe. D'après les formules données dans le Théorème (1.3.2) on a

$$h(z(t)) = T(t)h(z(t)) + \int_0^t T(t-\sigma)X_0^s g(\Phi z(\sigma) + h(z(\sigma)))d\sigma,$$

ce qui implique

$$\frac{1}{t}[T(t)h(\xi) - h(\xi)] = \frac{1}{t}[h(z(t)) - h(z(0))] - \frac{1}{t} \int_0^t T(t-\sigma)X_0^s g(\Phi z(\sigma) + h(z(\sigma)))d\sigma.$$

Il résulte du fait que h et g sont réguliers et que $T(\cdot)$ est un semi-groupe fortement continu sur l'espace de Banach $\hat{C}$, que $h(\xi)$ est dans le domaine de A , et que

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t}[T(t)h(\xi) - h(\xi)] = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t}[h(z(t)) - h(z(0))] - \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t} \int_0^t T(t-\sigma)X_0^s g(\Phi z(\sigma) + h(z(\sigma)))d\sigma,$$

c'est-à-dire

$$Ah(\xi) = \left(\frac{\partial h(\xi)}{\partial \xi} \right) [\Psi(0)g(\Phi \xi + h(\xi))] - X_0^s g(\Phi \xi + h(\xi)).$$

Par conséquent, l'équation (2.5) est obtenue en évaluant l'équation ci-dessus à $\theta \neq 0$. Afin de prouver la relation (2.6), on utilisons le fait que la donnée initiale d'une solution x de l'équation (2.4) sur une variété centre, satisfait les conditions $\phi = \Phi \xi + h(\xi)$ et $\dot{\phi}(0) = L\phi + g(\phi)$.

Il en résulte que $\dot{\Phi}(0)\xi + \dot{h}(\xi)(0) = L(\Phi \xi) + L(h(\xi)) + g(\Phi \xi + h(\xi))$. Par conséquent, la condition (2.6) est obtenue par le fait que $\dot{\Phi}(0)\xi = L(\Phi \xi) = \Phi(0)B\xi = 0$. ■

On s'intéresse dans cette section sur les parties homogènes de degré 2 pour les termes de la variété centre. Rappelons que h a la même régularité que g . Compte tenu de la régularité supposée sur g , on peut écrire

$$h(\xi) = h_2(\xi) + \chi(\xi) \text{ pour } \xi \in V,$$

où h_2 est la partie homogène de degré 2 de la fonction h et $\chi(\xi) = o(|\xi|^2)$.

On sait que

$$\begin{aligned} \Phi(\theta) &= \Phi(0)e^{\lambda\theta} & \Psi(s) &= \Psi(0)e^{-\lambda s} \\ &\text{et} & & \\ &= \phi_1(0) & & = \psi_1(0), \end{aligned}$$

comme on a $\lambda = 0$, est une valeur propre simple (de multiplicité égale 1), alors d'après (1.9) on a

$$\Phi(\theta) = \gamma e^{\lambda\theta}.$$

Donc $\phi_1(0) = \gamma$, avec γ est la solution du système

$$\Delta(0)\gamma = 0,$$

c'est-à-dire $L\gamma = 0$, car $\Delta(0) = -L(\cdot)$,

et on a d'après (1.12)

$$\Psi(s) = \beta e^{-\lambda s},$$

alors $\psi_1(0) = \beta$, avec β est la solution du système

$$\beta L(\cdot) = 0.$$

Autrement dit, γ et β peut être calculent explicitement si L est connue.

Les parties homogènes de degré 2 des équations (2.5) et (2.6) sont respectivement données par

$$\frac{\partial h_2(\xi)}{\partial \theta} = \frac{\partial h_2(\xi)}{\partial \xi} B\xi + \mathcal{F}^1(\xi),$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} (h_2(\xi)) (0) = Lh_2(\xi) + H_2(\xi),$$

où

$$\mathcal{F}^1(\xi) = \Phi\Psi(0)H_2(\xi),$$

et H_2 est la partie homogène de degré 2 de $H(\xi) = g(\Phi\xi + h(\xi))$.

On a g est régulière, et $x = 0$ une solution particulière (point d'équilibre).

Développez g comme une série de Taylor par rapport à x en $x = 0$ jusqu'à l'ordre 3

$$g(x) = g(0) + g_1(0)x + g_2(0)x^2 + g_3(0)x^3 + \mathcal{O}(x^3),$$

avec $g_1(0) = g'(0)$, $g_2(0) = \frac{1}{2}g''(0)$, et $g_3(0) = \frac{1}{3!}g^{(3)}(0)$. Alors, si on a

$$h_2(\xi) = a_2\xi^2,$$

avec a_2 est le coefficient de la partie homogène de degré 2 de la variété centre.

On pose $x = \Phi\xi + h(\xi)$, donc

$$\begin{aligned} H(\xi) &= g(\Phi\xi + h(\xi)) \\ &= g(0) + D_\xi g(0)(\Phi\xi + h_2(\xi)) \\ &\quad + \frac{1}{2}(\Phi\xi + h_2(\xi))^\top D_{\xi\xi}^2 g(0)(\Phi\xi + h_2(\xi)) \\ &\quad + \frac{1}{3!}[(\Phi\xi + h_2(\xi))^\top D_\xi^3 g(0)(\Phi\xi + h_2(\xi))](\Phi\xi + h_2(\xi)) \\ &\quad + o(\xi^3), \end{aligned}$$

où $D_{\xi\xi}^2$ est la matrice hessienne ; D_ξ^3 est la dérivée d'ordre 3 par rapport à ξ .

Alors

$$\mathcal{F}^1(\xi) = \frac{1}{2}\Phi\Psi(0)\Phi^\top D_{\xi\xi}^2 g(0)\Phi\xi^2,$$

et

$$H_2(\xi) = \frac{1}{2}\Phi^\top D_{\xi\xi}^2 g(0)\Phi\xi^2.$$

Alors si on a

$$\mathcal{F}^1(\xi)(\theta) = F^1(\theta)\xi^2 \quad \text{pour } F^1 \in X_s, \quad (2.7)$$

et

$$H_2(\xi) = M^1\xi^2, \quad \text{pour } M^1 \in \mathbb{R}^n, \quad (2.8)$$

où

$$F^1(\theta) = \frac{1}{2}\Phi(\theta)\Psi(0)\Phi(\theta)^\top D_{\xi\xi}^2 g(0)\Phi(\theta), \quad \text{et } M^1(\theta) = \frac{1}{2}\Phi(\theta)^\top D_{\xi\xi}^2 g(0)\Phi(\theta).$$

On obtient

$$\begin{cases} \frac{d}{d\theta}a_2(\theta) = F^1(\theta) \\ \frac{\partial}{\partial\theta}a_2(0) = La_2 + M^1, \end{cases} \quad (2.9)$$

ce qui est équivalent en remplaçant l'expression de $a_2(\theta)$ donnée par la première équation de (2.9) dans la seconde, au système

$$\begin{cases} a_2(\theta) = a_2(0) + S^1(\theta), \quad \text{pour } \theta \in [-r, 0], \\ \Delta(0)a_2(0) = E^1, \end{cases}$$

où

$$S^1(\theta) = \int_0^\theta F^1(s)ds \quad \text{et} \quad E^1 = M^1 - F^1(0) + L_0S^1(0) + L_1S^1(-r).$$

Remarque 2.2.1 – On obtient un schéma récursif de la forme

$$\begin{cases} \frac{dX(\theta)}{d\theta} = F^1(\theta), \text{ pour } \theta \in [-r, 0], \\ BX(0) = E^1 \end{cases}$$

où $X = a_2$ et $B = \Delta(0) = -L(\cdot)$.

Théorème 2.2.2 ([18]) – Supposons que (H) est vrai. Puis le vecteur de coefficient de la partie homogène de degré 2 d'une variété centre locale associée à l'équation (2.3) est donnée de manière unique par la formule suivante

$$a_2(\theta) = a_2(0) + S^1(\theta), \text{ pour } \theta \in [-r, 0]$$

et le vecteur $a_0(0)$ est donnée par

$$\begin{pmatrix} a_2(0) \\ 0 \end{pmatrix} = K^{-1} \begin{pmatrix} M^1 - F^1(0) + L_0 S^1(0) + L_1 S^1(-r) \\ N^1 \end{pmatrix},$$

où M^1, F^1 sont donnés par (2.7) et (2.8),

$$S^1(\theta) = \frac{1}{2} \phi_1(0) \psi_1(0) \phi_1(0)^\top D_{\xi\xi}^2 g(0) \phi_1(0) \theta,$$

et

$$N^1 = \int_{-r}^0 \Psi(\xi + r) L_1 S^1(\xi) d\xi.$$

Preuve

On sait que $\det \Delta(0) = 0$ car 0 est une valeur propre simple, et comme le vecteur de coefficient de la partie homogène de degré 2 est satisfait

$$\begin{cases} a_2(\theta) = a_2(0) + S^1(\theta), \text{ pour } \theta \in [-r, 0], \\ \Delta(0)a_2(0) = E^1. \end{cases}$$

D'autre part, on a a_2 appartient à X_s , donc $\langle \psi_1, a_2 \rangle = 0$, alors

$$\langle \psi_1, a_2 \rangle = \langle \psi_1, a_2(0) \rangle + \langle \psi_1, S^1 \rangle = 0,$$

ce qui donne le système suivant

$$\begin{cases} \langle \psi_1, \mathcal{I}d_{\mathbb{R}^n} \rangle a_2(0) = N^1, \\ \Delta(0)a_2(0) = E^1 \end{cases} \quad (2.10)$$

avec

$$N^1 = -\langle \psi_1, S^1 \rangle = \int_{-r}^0 \Psi(\xi + r) L_1 S^1(\xi) d\xi.$$

Alors il résulte du système (2.10) que $a^2(0)$ peut être obtenu en résoudre le système de dimension $n + 1$ suivant

$$K \begin{pmatrix} a_2(0) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E^1 \\ N^1 \end{pmatrix},$$

où K est une matrice de dimension $(n + 1) \times (n + 1)$ définie par

$$K = \begin{pmatrix} \Delta(0) & \psi_1^\top(0) \\ \langle \psi_1, \mathcal{I}d_{\mathbb{R}^n} \rangle & 0 \end{pmatrix},$$

$$E^1 = M^1 - F^1(0) + L_0 S^1(0) + L_1 S^1(-r)$$

et

$$N^1 = \int_{-r}^0 \Psi(\xi + r) L_1 S^1(\xi) d\xi.$$

L'unicité de $a_2(0)$ est une conséquence du lemme suivant :

■ **Lemme 2.2.1** ([18]) – La matrice K de dimension $(n + 1) \times (n + 1)$ est inversible.

Preuve

Soit $x \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que

$$K \begin{pmatrix} x \\ \alpha \end{pmatrix} = 0,$$

donc

$$\begin{cases} \Delta(0)x + \alpha \psi_1^\top = 0 \\ \langle \psi_1, \mathcal{I}d_{\mathbb{R}^n} \rangle x = 0, \end{cases}$$

comme $\psi_1(0)\Delta(0) = -\psi_1(0)L(\cdot) = 0$, on trouve que $\alpha = 0$, et le système ci-dessus devient

$$\begin{cases} \Delta(0)x = 0, \\ \langle \psi_1, \mathcal{I}d_{\mathbb{R}^n} \rangle x = 0. \end{cases}$$

Puisque on a $\Delta(0)\phi_1(0) = 0$, alors la première équation implique que $x \in \text{span}\{\phi_1(0)\}$, donc il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $x = c\phi_1(0)$, et de la deuxième équation on a $\langle \psi_1, c\phi_1 \rangle = 0$ ce qui donne $c = 0$

et finalement on a $x = 0$. Par conséquent, K est inversible. ■

C'est à dire

$$\begin{pmatrix} a_2(0) \\ 0 \end{pmatrix} = K^{-1} \begin{pmatrix} E^1 \\ N^1 \end{pmatrix}. \quad (2.11)$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} S^1(\theta) &= \int_0^\theta F^1(s) ds \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\theta \Phi(s) \Psi(0) \Phi(s)^\top D_{\xi\xi}^2 g(0) \Phi(s) ds \\ &= \frac{1}{2} \phi_1(0) \psi_1(0) \phi_1(0)^\top D_{\xi\xi}^2 g(0) \phi_1(0) \theta. \end{aligned} \quad \blacksquare$$

Finalement, on obtient une équation différentielle ordinaire sous la forme

$$\frac{d}{d\theta} a_2(\theta) = \frac{1}{2} \Phi(\theta) \Psi(0) \Phi(\theta)^\top D_{\xi\xi}^2 g(0) \Phi(\theta).$$

Variétés centres pour les EDFRs paramétrées associées à la singularité de Fold

Suite à la méthode de calcul des variétés centres que nous avons développée dans le chapitre 2 pour les EDFRs associées à la singularité de Fold sans paramètre, l'attention de ce chapitre sera focalisée sur le développement d'une méthodologie pour le calcul des variétés centres et des formes normales associée à la singularité de Fold pour l'équation différentielle à retard avec paramètre suivante

$$\dot{x}(t) = f(x(t), x(t-r), \mu), \quad \mu \in \mathbb{R} \quad (3.1)$$

selon la structure de l'équation linéarisée d'un système à retard évalué à l'équilibre, le cas considéré dans ce chapitre correspond à une valeur propre nulle simple (Fold).

On utilise ici la notation $\mathcal{C}_m = \mathcal{C}([-r, 0], \mathbb{R}^m)$, $r \geq 0$ puisque nous devons travailler dans des espaces de réalisation de dimensions différentes. Le chapitre est organisé comme suit :

un théorème de caractérisation d'une variété centre pour les EDFRs avec paramètre et sa preuve sont donnés dans la section 3.1, par conséquence, un schéma de calcul d'une variété centre et des formes normales associées à la singularité de Fold sont présentés dans la même section.

3.1 Schémas de calcul

Dans cette section, nous présentons nos principaux résultats concernant le calcul des termes des variétés centres pour la classe des EDFRs suivant

$$\frac{d}{dt}x(t) = L_0(\mu)x(t) + L_1(\mu)x(t-r) + g(x(t), x(t-r), \mu), \quad (3.2)$$

où $\mu \in \mathbb{R}$, $\alpha \mapsto L_j(\alpha)$, $j = 0, 1$ sont des fonctions de C^∞ à valeurs dans l'espace des matrices carrées d'ordre n , $g : \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ est supposé suffisamment régulier ($g \in C^\infty$) tel que : $g(0, 0, \mu) = 0$ et $Dg(0, 0, \mu) = 0$ pour tout $\mu \in \mathbb{R}$, et $r > 0$.

On note par $\mathcal{C} := \mathcal{C}([-r, 0], \mathbb{R}^n)$ l'espace des fonctions continues de $[-r, 0]$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, et pour $\phi \in \mathcal{C}$

$$L(\mu)\phi := L_0(\mu)\phi(0) + L_1(\mu)\phi(-r),$$

$$F(\phi, \mu) := g(\phi(0), \phi(-r), \mu),$$

où F définie sur $\mathcal{C} \times \mathbb{R}$ à valeur dans $\mathbb{R}^n$.

Alors l'équation (3.1) s'écrit sous la forme

$$\dot{x}(t) = L(\mu)x_t + F(x_t, \mu).$$

On note par $L^0 = L(0)$.

Dans la suite de ce chapitre, on suppose que l'hypothèse suivante est satisfaite :

$$(H) \left\{ \begin{array}{l} \text{L'équation linéaire} \\ \dot{x}(t) = L^0 x_t, \\ \text{admet une valeur propre nulle simple } (\lambda = 0) \text{ comme valeurs caractéristiques et les} \\ \text{autres valeurs propres sont de partie réelle négative.} \end{array} \right.$$

Une façon de considérer les variétés centres pour une équation différentielle avec paramètre est de ramener la situation au cas des équations différentielles sans paramètre en considérant le système

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= L^0 x_t + [L(\mu) - L^0] x_t + F(x_t, \mu), \\ \dot{\mu}(t) &= 0. \end{aligned}$$

Les solutions de ce système sont de la forme $\tilde{x}(t) := (x(t), \mu(t)) \in \mathbb{R}^{n+1}$, l'espace de phase est $\tilde{\mathcal{C}} := \mathcal{C}_{n+1}$, et le système peut s'écrire sous la forme

$$\dot{\tilde{x}}(t) = \tilde{L}\tilde{x}_t + \tilde{F}(\tilde{x}_t), \tag{3.3}$$

où

$$\tilde{L}(u, v) := (L^0 u, 0)$$

et

$$\tilde{F}(u, v) := ([L(v(0)) - L^0] u + F(u, v(0)), 0),$$

avec $u \in \mathcal{C}_n$, $v \in \mathcal{C}_1$.

Maintenant il est possible d'appliquer à (3.3) la théorie bien connue du variété centre. Soit A et $\tilde{A}$ les générateurs infinitésimaux associés aux équations $\dot{x}(t) = L^0 x_t$, et $\dot{x}(t) = \tilde{L} x_t$, respectivement. L'équation $\dot{\mu}(t) = 0$, a une valeur caractéristique unique $\lambda = 0$ simple dans $\mathcal{C}_1$, et l'espace propre généralisé associé est constitué des éléments de $\mathcal{C}_1$ qui sont des fonctions constantes, et il est noté ici également par $\mathbb{R}$. On considère la décomposition $\mathcal{C} = X_c \oplus X_s$. En particulier, nous considérons des bases pour X_c et X_c^* notées respectivement $\Phi = \phi_1$, $\Psi = \psi_1$, et satisfaisant $(\Psi, \Phi) = \mathcal{I}d_{\mathbb{R}^n}$. définissons $\tilde{\Lambda} = \Lambda \vee \{0\}$, $\tilde{X}_c = X_c \times \mathbb{R}$, $\tilde{X}_s = X_s \times R$ où $R = \{v \in \mathcal{C}_1 : v(0) = 0\}$, et on considère pour bases de $\tilde{X}_c$ et $\tilde{X}_c^*$, respectivement, les colonnes de la matrice $\tilde{\Phi}$ et les lignes de la matrice $\tilde{\Psi}$,

$$\tilde{\Phi} = \begin{pmatrix} \Phi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\Psi} = \begin{pmatrix} \Psi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

qui satisfait à $\langle \tilde{\Psi}, \tilde{\Phi} \rangle = \mathcal{I}d_{\mathbb{R}^{n+1}}$, où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est la forme bilinéaire dans $\tilde{\mathcal{C}}^* \times \tilde{\mathcal{C}}$ définie comme dans le chapitre 1, et $\dot{\tilde{\Phi}} = \tilde{\Phi} \tilde{B}$ avec

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On a alors la décomposition $\tilde{\mathcal{C}} = \tilde{X}_c \oplus \tilde{X}_s$, où $\tilde{X}_c$ est l'espace invariant de $\tilde{A}$ associé à $\tilde{\Lambda}$. Dans la suite, nous rappelons la définition d'une variété centre local associé à l'équation (3.3). Soit $\tilde{h}$ une fonction de C^1 définie sur $\mathbb{R}^2$ à valeur dans $\tilde{X}_s$ telle que le $\text{Gr}(\tilde{h})$ est une variété centre local associée à l'équation (3.3). Alors il existe un voisinage V de zéro dans $\mathbb{R}^2$ tel que, pour tout $\tilde{\xi} \in V$, il existe $\delta = \delta(\tilde{\xi}) > 0$ et une fonction $\tilde{x}$ définie sur $] -\delta - r, \delta[$ telle que $\tilde{x}_0 = \tilde{\Phi} \tilde{\xi} + \tilde{h}(\tilde{\xi})$ et $\tilde{x}$ vérifie l'équation (3.3) sur $] -\delta, \delta[$ et satisfait l'identité

$$\tilde{x}_t = \tilde{\Phi} \tilde{z}(t) + \tilde{h}(\tilde{z}(t)), \text{ for } t \in [0, \delta[$$

où $\tilde{z}(t)$ est la solution unique de l'équation différentielle ordinaire

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \tilde{z}(t) = \tilde{\Psi}(0) \tilde{F}(\tilde{\Phi} \tilde{z}(t) + \tilde{h}(\tilde{z}(t))) \\ \tilde{z}(0) = \tilde{\xi}, \quad \tilde{\xi} \in \mathbb{R}^2. \end{cases} \quad (3.4)$$

Remarque 3.1.1 — Si on écrit $\tilde{h}(\xi, \mu) = (h(\xi, \mu), h_0(\xi, \mu))$ pour $\xi \in \mathbb{R}$ et $\mu \in \mathbb{R}$, alors l'équation (3.4) est équivalente à

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} z(t) \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Psi(0) [(L(\mu(0) + h_0(z(t), \mu)(0)) - L^0)(\Phi z(t) + h(z(t), \mu)) + F(\Phi z(t) + h(z(t), \mu), \mu(0) + h_0(z(t), \mu)(0))] \\ 0 \end{pmatrix}$$

avec $z(0) = \xi \in \mathbb{R}$.

En notant que $h_0(z(t), \mu)(0) = 0$, parce que $h_0(z(t), \mu) \in R$, et en abandonnant les équations auxiliaires introduites pour manipuler le paramètre, on obtient l'équation réduite sur la variété centre représentée comme un graphe sur les variables ξ et μ de $h(\xi, \mu)$ pour ξ et μ suffisamment petits associée à l'équation paramétrée (3.2) comme suit

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}z(t) = \Psi(0) [(L(\mu) - L^0) (\Phi z(t) + h(z(t), \mu)) + F(\Phi z(t) + h(z(t), \mu), \mu)] \\ z(0) = \xi, \quad \xi \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

3.1.1 Caractérisation d'une variété centre local avec paramètre

Dans ce qui suite, nous donnons une caractérisation analytique d'une variété centre associé à l'équation (3.2).

Théorème 3.1.1 ([20]) – Étant donné une application h de classe C^1 définie sur $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans X_s avec $h(0) = 0$ et $Dh(0) = 0$, une condition nécessaire pour que le graphe de h soit une variété centre local de l'équation (3.2) est qu'il existe un voisinage V de zéro dans $\mathbb{R}^2$ tel que, pour tout $(\xi, \mu) \in V$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \theta}(h(\xi, \mu))(\theta) &= \frac{\partial h(\xi, \mu)}{\partial \xi}(\theta) \Psi(0) [(L(\mu) - L(0))(\Phi \xi + h(\xi, \mu)) + F(\Phi \xi + h(\xi, \mu), \mu)] \\ &\quad + \Phi(\theta) \Psi(0) [(L(\mu) - L(0))(\Phi \xi + h(\xi, \mu)) + F(\Phi \xi + h(\xi, \mu), \mu)], \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta}(h(\xi, \mu))(0) = L^0 h(\xi, \mu) + (L(\mu) - L^0) (\Phi \xi + h(\xi, \mu)) + F(\Phi \xi + h(\xi, \mu), \mu). \quad (3.6)$$

Preuve

C'est essentiellement la même idée que la preuve du Théorème (2.2.1), juste dans ce cas on l'ajoute le paramètre de la bifurcation μ . ■

3.1.2 Calcul des variétés centres

On s'intéresse dans cette section sur les parties homogènes de degré 2 pour les termes de la variété centre. Rappelons que h à la même régularité que F , et compte tenu de la régularité

supposée sur F , on peut écrire

$$h(\xi, \mu) = h_2(\xi, \mu) + \chi(\xi, \mu) \quad \text{pour } (\xi, \mu) \in V,$$

où h_2 est la partie homogène de degré 2 de h et $\chi(\xi, \mu) = o(|(\xi, \mu)|^2)$.

Les parties homogènes de degré 2 des équations (3.5) et (3.6) sont respectivement données par

$$\frac{\partial h_2(\xi, \mu)}{\partial \theta} = \mathcal{N}^1(\xi, \mu) \quad (3.7)$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} (h_2(\xi, \mu)) (0) = L^0 h_2(\xi, \mu) + R^1(\xi, \mu), \quad (3.8)$$

où

$$\mathcal{N}^1(\xi, \mu) = \Phi \Psi(0) R^1(\xi, \mu),$$

avec R^1 est la partie homogène de degré 2 de $(L(\mu) - L^0) (\Phi \xi + h(\xi, \mu)) + F(\Phi \xi + h(\xi, \mu), \mu)$ qui est indépendante des termes des variétés centres.

Si $\xi \in \mathbb{R}$, $(q, l) \in \mathbb{N}^2$ et $\mu \in \mathbb{R}$, alors on peut écrire

$$\begin{aligned} h_2(\xi, \mu) &= \sum_{(q,l) \in D_2} h_{(q,l)}^2 \xi^q \mu^l, \quad \text{pour certains } h_{(q,l)}^2 \in X_s, \\ \mathcal{N}^1(\xi, \mu)(\theta) &= \sum_{(q,l) \in D_2} N_{(q,l)}^1(\theta) \xi^q \mu^l, \quad \text{pour certains } N_{(q,l)}^1 \in X_s \end{aligned} \quad (3.9)$$

et

$$R^1(\xi, \mu) = \sum_{(q,l) \in D_2} R_{(q,l)}^1 \xi^q \mu^l, \quad \text{pour certains } R_{(q,l)}^1 \in \mathbb{R}^n, \quad (3.10)$$

où $D_2 = \{(q, l) \in \mathbb{N}^2 : |(q, l)| = 2\}$.

On pose

$$f(\xi, \mu) = (L(\mu) - L^0) (\Phi \xi + h(\xi, \mu)) + F(\Phi \xi + h(\xi, \mu), \mu),$$

on a f est régulière, et $x = (0, 0)$ une solution particulière (point d'équilibre).

Le développement limité d'ordre 3, de la fonction f au voisinage de point d'équilibre $(0, 0)$ s'écrit :

$$f(\xi, \mu) = f_1(\xi, \mu) + f_2(\xi, \mu) + f_3(\xi, \mu) + o(|(\xi, \mu)|^3),$$

on peut également récrire les termes $f_1(\xi, \mu)$, $f_2(\xi, \mu)$ et $f_3(\xi, \mu)$ par :

$$\begin{aligned} f_1(\xi, \mu) &= \frac{\partial f}{\partial \xi}(0, 0) \xi + \frac{\partial f}{\partial \mu}(0, 0) \mu, \\ f_2(\xi, \mu) &= \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2}(0, 0) \xi^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial \xi \partial \mu}(0, 0) \xi \mu + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial \mu^2}(0, 0) \mu^2 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} f_3(\xi, \mu) &= \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 f}{\partial \xi^3}(0, 0) \xi^3 + \frac{1}{2} \frac{\partial^3 f}{\partial \xi^2 \partial \mu}(0, 0) \xi^2 \mu \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{\partial^3 f}{\partial \xi \partial \mu^2}(0, 0) \xi \mu^2 + \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 f}{\partial \mu^3}(0, 0) \mu^3. \end{aligned}$$

Comme L est une fonction de μ , le développement limité d'ordre 3 de L au voisinage de zéro est

$$L(\mu) = L^0 + L'(0)\mu + \frac{1}{2}L''(0)\mu^2 + \frac{1}{3!}L^{(3)}(0)\mu^3 + o(\mu^3),$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} (L(\mu) - L^0)(\Phi\xi + h(\xi, \mu)) &= (L'(0)\mu + \frac{1}{2}L''(0)\mu^2 + \frac{1}{3!}L^{(3)}(0)\mu^3 + o(\mu^3))(\Phi\xi + h_2(\xi, \mu) + o(|(\xi, \mu)|^2)) \\ &= L'(0)\Phi\mu\xi + L'(0)h_2(\xi, \mu)\mu + \frac{1}{2}L''(0)\Phi\mu^2\xi + o(|(\xi, \mu)|^3), \end{aligned}$$

d'autre part, on a

$$\begin{aligned} F(\Phi\xi + h(\xi, \mu), \mu) &= D_\xi F(0, 0)(\Phi\xi + h_2(\xi, \mu)) + D_\mu F(0, 0)\mu \\ &\quad + \frac{1}{2}(\Phi\xi + h_2(\xi, \mu))^\top D_{\xi\xi}^2 F(0, 0)(\Phi\xi + h_2(\xi, \mu)) \\ &\quad + D_{\xi\mu}^2 F(0, 0)(\Phi\xi + h_2(\xi, \mu))\mu + \frac{1}{2}D_{\mu\mu}^2 F(0, 0)\mu^2 \\ &\quad + \frac{1}{6}[(\Phi\xi + h_2(\xi, \mu))^\top D_\xi^3 F(0, 0)(\Phi\xi + h_2(\xi, \mu))](\Phi\xi + h_2(\xi, \mu)) \\ &\quad + \frac{1}{2}[(\Phi\xi + h_2(\xi, \mu))^\top D_{\xi\xi\mu}^3 F(0, 0)(\Phi\xi + h_2(\xi, \mu))]\mu \\ &\quad + \frac{1}{2}D_{\xi\mu\mu}^3 F(0, 0)(\Phi\xi + h_2(\xi, \mu))\mu^2 + \frac{1}{6}D_\mu^3 F(0, 0)\mu^3 + o(|(\xi, \mu)|^3), \end{aligned}$$

où $D_{\xi\xi}^2$ est la matrice hessienne ; D_ξ^3 est la dérivée d'ordre 3 par rapport à ξ et D_μ^3 est la dérivée d'ordre 3 par rapport à μ . En utilisant

$$D_\xi F(0, \mu)\Phi = 0,$$

alors

$$\begin{aligned} f(\xi, \mu) &= D_\mu F(0, 0)\mu + \frac{1}{2}\Phi^\top D_{\xi\xi}^2 F(0, 0)\Phi\xi^2 + [L'(0) + D_{x\mu}^2 F(0, 0)]\Phi\xi\mu \\ &\quad + \frac{1}{2}D_{\mu\mu}^2 F(0, 0)\mu^2 + \frac{1}{2}\Phi^\top D_{\xi\xi}^2 F(0, 0)\xi h_2(\xi, \mu) \\ &\quad + \frac{1}{2}h_2(\xi, \mu)^\top D_{\xi\xi}^2 F(0, 0)\Phi\xi + [L'(0) + D_{\xi\mu}^2 F(0, 0)]\mu h_2(\xi, \mu) \\ &\quad + \frac{1}{6}[\Phi^\top D_\xi^3 F(0, 0)\Phi]\Phi\xi^3 + \frac{1}{2}[\Phi^\top D_{\xi\xi\mu}^3 F(0, 0)\Phi]\xi^2\mu \\ &\quad + \frac{1}{2}[L''(0) + D_{\xi\mu\mu}^3 F(0, 0)]\Phi\xi\mu^2 + \frac{1}{6}D_\mu^3 F(0, 0)\mu^3 + o(|(\xi, \mu)|^3), \end{aligned}$$

puisque la partie homogène de degré 2 de $(L(\mu) - L^0)(\Phi\xi + h(\xi, \mu)) + F(\Phi\xi + h(\xi, \mu), \mu)$ est

$$\frac{1}{2}\Phi^\top D_{\xi\xi}^2 F(0, 0)\Phi\xi^2 + [L'(0) + D_{\xi\mu}^2 F(0, 0)]\Phi\xi\mu + \frac{1}{2}D_{\mu\mu}^2 F(0, 0)\mu^2,$$

alors

$$\begin{aligned}\mathcal{N}^1(\xi, \mu) &= \Phi\Psi(0)R_{(q,l)}^1(\xi, \mu) \\ &= \Phi\Psi(0)\left[\frac{1}{2}\Phi^\top D_{\xi\xi}^2 F(0,0)\Phi\xi^2 + [L'(0) + D_{\xi\mu}^2 F(0,0)]\Phi\xi\mu + \frac{1}{2}D_{\mu\mu}^2 F(0,0)\mu^2\right] \\ &= \sum_{(q,l) \in D_2} N_{(q,l)}^1 \xi^q \mu^l,\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}N_{(2,0)}^1 &= \frac{1}{2}\Phi\Psi(0)\Phi^\top D_{\xi\xi}^2 F(0,0)\Phi, \\ N_{(1,1)}^1 &= \Phi\Psi(0)[L'(0) + D_{\xi\mu}^2 F(0,0)]\Phi\end{aligned}$$

et

$$N_{(0,2)}^1 = \frac{1}{2}\Phi\Psi(0)D_{\mu\mu}^2 F(0,0).$$

Par suite, on trouve le système suivant

$$\begin{cases} \frac{d}{d\theta} h_{(q,l)}^2(\theta) = N_{(q,l)}^1(\theta) \\ \frac{\partial}{\partial \theta} h_{(q,l)}^2(0) = L^0 h_{(q,l)}^2 + R_{(q,l)}^1, \end{cases} \quad (3.11)$$

ce qui est équivalent en remplaçant l'expression de $h_{(q,l)}^2(\theta)$ donnée par la première équation de (3.11) dans la seconde, au système

$$\begin{cases} h_{(q,l)}^2(\theta) = h_{(q,l)}^2(0) + S_{(q,l)}^1(\theta), \text{ pour } \theta \in [-r, 0], \\ \Delta(0)h_{(q,l)}^2(0) = E_{(q,l)}^1 \end{cases}$$

où

$$S_{(q,l)}^1(\theta) = \int_0^\theta N_{(q,l)}^1(s)ds$$

et

$$E_{(q,l)}^1 = L^0(S_{(q,l)}^1) - N_{(q,l)}^1(0) + R_{(q,l)}^1.$$

Ainsi que

$$\begin{aligned}S_{(2,0)}^1(\theta) &= \frac{1}{2}\Phi(0)\Psi(0)\Phi(0)^\top D_{\xi\xi}^2 F(0,0)\Phi(0)\theta, \\ S_{(1,1)}^1(\theta) &= \Phi(0)\Psi(0)\left[L'(0) + D_{\xi\mu}^2 F(0,0)\right]\Phi(0)\theta\end{aligned}$$

et

$$S_{(0,2)}^1(\theta) = \frac{1}{2}\Phi(0)\Psi(0)D_{\mu\mu}^2 F(0,0)\theta.$$

Remarque 3.1.2 – On obtient un schéma de la forme

$$\begin{cases} \frac{dX_{(q,l)}(\theta)}{d\theta} = N_{(q,l)}^1(\theta), \text{ pour } \theta \in [-r, 0], \\ BX_{(q,l)}(0) = E_{(q,l)}^1, \end{cases}$$

où $X_{(q,l)} = h_{(q,l)}^2$ et $B = \Delta(0) = -L(\cdot)$.

Théorème 3.1.2 ([20]) – Supposons que (H) est vrai. Puis le vecteur de coefficient de la partie homogène de degré 2 d'une variété centre locale associée à l'équation (3.2) est donnée de manière unique par la formule suivante

$$h_{(q,l)}^2(\theta) = h_{(q,l)}^2(0) + S_{(q,l)}^1(\theta), \text{ pour } \theta \in [-r, 0],$$

et le vecteur $h_{(q,l)}^2(0)$ est donnée en résoudre le système suivant.

$$M \begin{pmatrix} h_{(q,l)}^2(0) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L^0(S_{(q,l)}^1) - N_{(q,l)}^1(0) + R_{(q,l)}^1 \\ \nu_{(q,l)}^1 \end{pmatrix},$$

où M est la matrice de dimension $(n+1) \times (n+1)$ définie par

$$M = \begin{pmatrix} \Delta(0) & \psi_1^\top(0) \\ \langle \psi_1, \mathcal{I}d_{\mathbb{R}^n} \rangle & 0 \end{pmatrix},$$

$N_{(q,l)}^1$ et $R_{(q,l)}^1$ sont donnés par (3.9) et (3.10),

$$S_{(q,l)}^1(\theta) = \int_0^\theta N_{(q,l)}^1(s) ds$$

et

$$\nu_{(q,l)}^1 = - \left\langle \psi_1, \int_0^\cdot N_{(q,l)}^1(s) ds \right\rangle.$$

Preuve

Soit $(q, l) \in D_2$, à partir de la relation (3.7) on a

$$\frac{d}{d\theta} h_{(q,l)}^2(\theta) = N_{(q,l)}^1(\theta), \quad (3.12)$$

ce qui est équivalent

$$h_{(q,l)}^2(\theta) = h_{(q,l)}^2(0) + \int_0^\theta N_{(q,l)}^1(s) ds, \quad (3.13)$$

on pose

$$S_{(q,l)}^1(\theta) = \int_0^\theta N_{(q,l)}^1(s) ds, \text{ pour } \theta \in [-r, 0],$$

alors on trouve

$$h_{(q,l)}^2(\theta) = h_{(q,l)}^2(0) + S_{(q,l)}^1(\theta), \text{ pour } \theta \in [-r, 0].$$

La relation (3.8) équivaut à

$$\frac{\partial}{\partial \theta} h_{(q,l)}^2(0) = L^0 h_{(q,l)}^2 + R_{(q,l)}^1,$$

qui donnent en évaluant la relation (3.12) à $\theta = 0$

$$N_{(q,l)}^1(0) = L^0(h_{(q,l)}^2(0)) + L^0 S_{(q,l)}^1 + R_{(q,l)}^1,$$

d'où

$$\Delta(0)h_{(q,l)}^2(0) = E_{(q,l)}^1,$$

avec

$$E_{(q,l)}^1 = L^0 S_{(q,l)}^1 - N_{(q,l)}^1(0) + R_{(q,l)}^1.$$

On utilise également le fait que toutes les variétés centres ont un rang dans le sous-espace X_s , ce qui implique que $\langle \psi_1, h_{(q,l)}^2 \rangle = 0$ pour tout $(q, l) \in D_2$. Par conséquent, on obtient de la relation (3.13) que

$$\left\langle \psi_1, h_{(q,l)}^2(0) + \int_0^\cdot N_{(q,l)}^1(s)ds \right\rangle = 0,$$

c'est-à-dire

$$\langle \psi_1, \mathcal{I}d_{\mathbb{R}^n} \rangle h_{(q,l)}^2(0) = \nu_{(q,l)}^1, \text{ pour } (q, l) \in D_2,$$

ce qui donne le système suivant

$$\begin{cases} \langle \psi_1, \mathcal{I}d_{\mathbb{R}^n} \rangle h_{(q,l)}^2(0) = \nu_{(q,l)}^1, \\ \Delta(0)h_{(q,l)}^2(0) = E_{(q,l)}^1 \end{cases} \quad (3.14)$$

avec

$$\begin{aligned} \nu_{(q,l)}^1 &= -\langle \psi_1, S_{(q,l)}^1 \rangle \\ &= -\left\langle \psi_1, \int_0^\cdot N_{(q,l)}^1(s)ds \right\rangle. \end{aligned}$$

Alors il résulte du système (3.14) que $h_{(q,l)}^2(0)$ peut être obtenu en résoudre le système de dimension $n + 1$ suivant

$$\begin{pmatrix} \Delta(0) & \psi^\top(0) \\ \langle \psi_1, \mathcal{I}d_{\mathbb{R}^n} \rangle & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_{(q,l)}^2(0) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_{(q,l)}^1 \\ \nu_{(q,l)}^1 \end{pmatrix},$$

c'est-à-dire

$$M \begin{pmatrix} h_{(q,l)}^2(0) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_{(q,l)}^1 \\ \nu_{(q,l)}^1 \end{pmatrix},$$

où M est une matrice de dimension $(n+1) \times (n+1)$ définie par

$$M = \begin{pmatrix} \Delta(0) & \psi^\top(0) \\ \langle \psi_1, \mathcal{I}d_{\mathbb{R}^n} \rangle & 0 \end{pmatrix}.$$

L'unicité de $h_{(q,l)}^2(0)$ est une conséquence du lemme suivant :

■ **Lemme 3.1.1** ([18]) – La matrice M de dimension $(n+1) \times (n+1)$ est inversible.

Preuve

Voir la preuve du Lemme (2.2.1).

D'où

$$\begin{pmatrix} h_{(q,l)}^2(0) \\ 0 \end{pmatrix} = M^{-1} \begin{pmatrix} E_{(q,l)}^1 \\ \nu_{(q,l)}^1 \end{pmatrix}. \quad \blacksquare$$

Finalement, l'équation différentielle ordinaire réduite sur la variété centre jusqu'à l'ordre 3 est

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}z = \Psi(0) & \left\{ D_\mu F(0,0)\mu + \frac{1}{2}\Phi^\top D_{zz}^2 F(0,0)\Phi z^2 \right. \\ & + [L'(0) + D_{z\mu}^2 F(0,0)]\Phi z\mu + \frac{1}{2}D_{\mu\mu}^2 F(0,0)\mu^2 + \frac{1}{2}\Phi^\top D_{zz}^2 F(0,0)zh_2(z,\mu) \\ & + \frac{1}{2}h_2(z,\mu)^\top D_{zz}^2 F(0,0)\Phi z + [L'(0) + D_{z\mu}^2 F(0,0)]\mu h_2(z,\mu) \\ & + \frac{1}{6}[\Phi^\top D_z^3 F(0,0)\Phi]\Phi z^3 + \frac{1}{2}[\Phi^\top D_{zz\mu}^3 F(0,0)\Phi]z^2\mu \\ & \left. + \frac{1}{2}[L''(0) + D_{z\mu\mu}^3 F(0,0)]\Phi z\mu^2 + \frac{1}{6}D_\mu^3 F(0,0)\mu^3 + o(|(z,\mu)|^3) \right\}, \end{aligned}$$

on sait que $h_2(z,\mu) = h_{(0,2)}^2\mu^2 + h_{(1,1)}^2z\mu + h_{(2,0)}^2z^2$ alors l'équation devient

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}z = \Psi(0) & D_\mu F(0,0)\mu + \frac{1}{2}\Psi(0)\Phi^\top D_{zz}^2 F(0,0)\Phi z^2 + \Psi(0)[L'(0) + D_{z\mu}^2 F(0,0)]\Phi z\mu \\ & + \frac{1}{2}\Psi(0)D_{\mu\mu}^2 F(0,0)\mu^2 + \Psi(0)\left[\frac{1}{2}\Phi^\top D_{zz}^2 F(0,0)h_{(2,0)}^2 \right. \\ & + \frac{1}{2}(h_{(2,0)}^2)^\top D_{zz}^2 F(0,0)\Phi + \frac{1}{6}[\Phi^\top D_z^3 F(0,0)\Phi]\Phi \left. \right]z^3 \\ & + \Psi(0)\left[\frac{1}{2}\Phi^\top D_{zz}^2 F(0,0)h_{(1,1)}^2 + \frac{1}{2}(h_{(1,1)}^2)^\top D_{zz}^2 F(0,0)\Phi \right. \\ & + [L'(0) + D_{z\mu}^2 F(0,0)]h_{(2,0)}^2 + \frac{1}{2}[\Phi^\top D_{zz\mu}^3 F(0,0)\Phi] \left. \right]z^2\mu \\ & + \Psi(0)\left[\frac{1}{2}\Phi^\top D_{zz}^2 F(0,0)h_{(0,2)}^2 + \frac{1}{2}(h_{(0,2)}^2)^\top D_{zz}^2 F(0,0)\Phi \right. \\ & + [L'(0) + D_{z\mu}^2 F(0,0)]h_{(1,1)}^2 + \frac{1}{2}[L''(0) + D_{z\mu\mu}^3 F(0,0)]\Phi \left. \right]z\mu^2 \\ & + \Psi(0)\left[[L'(0) + D_{z\mu}^2 F(0,0)]h_{(0,2)}^2 + \frac{1}{6}D_\mu^3 F(0,0)\right]\mu^3 + o(|(z,\mu)|^3). \end{aligned}$$

3.1.3 Calcul des formes normales

Après avoir calculé les variétés centres de l'équation (3.2), nous obtenons l'équation réduite associée comme suite :

$$\frac{d}{dt}z(t) = H(z(t), \mu), \quad (3.15)$$

où $z \in \mathbb{R}$, $\mu \in \mathbb{R}$ et

$$\begin{aligned} H(z, \mu) := & \Psi(0)D_\mu F(0, 0)\mu + \frac{1}{2}\Psi(0)\Phi^\top D_{zz}^2 F(0, 0)\Phi z^2 + \Psi(0)[L'(0) + D_{z\mu}^2 F(0, 0)]\Phi z\mu \\ & + \frac{1}{2}\Psi(0)D_{\mu\mu}^2 F(0, 0)\mu^2 + \Psi(0)\left[\frac{1}{2}\Phi^\top D_{zz}^2 F(0, 0)h_{(2,0)}^2\right. \\ & + \frac{1}{2}(h_{(2,0)}^2)^\top D_{zz}^2 F(0, 0)\Phi + \frac{1}{6}[\Phi^\top D_z^3 F(0, 0)\Phi]\Phi\Big]z^3 \\ & + \Psi(0)\left[\frac{1}{2}\Phi^\top D_{zz}^2 F(0, 0)h_{(1,1)}^2 + \frac{1}{2}(h_{(1,1)}^2)^\top D_{zz}^2 F(0, 0)\Phi\right. \\ & + [L'(0) + D_{z\mu}^2 F(0, 0)]h_{(2,0)}^2 + \frac{1}{2}[\Phi^\top D_{zz\mu}^3 F(0, 0)\Phi]\Big]z^2\mu \\ & + \Psi(0)\left[\frac{1}{2}\Phi^\top D_{zz}^2 F(0, 0)h_{(0,2)}^2 + \frac{1}{2}(h_{(0,2)}^2)^\top D_{zz}^2 F(0, 0)\Phi\right. \\ & + [L'(0) + D_{z\mu}^2 F(0, 0)]h_{(1,1)}^2 + \frac{1}{2}[L''(0) + D_{z\mu\mu}^3 F(0, 0)]\Phi\Big]z\mu^2 \\ & + \Psi(0)\left[[L'(0) + D_{z\mu}^2 F(0, 0)]h_{(0,2)}^2 + \frac{1}{6}D_\mu^3 F(0, 0)\right]\mu^3 + o(|(z, \mu)|^3). \end{aligned}$$

Il est facile maintenant de calculer sa forme normale jusqu'à l'ordre 3. L'idée de base de la théorie des formes normales consiste à employer des transformations non linéaires successives, proches de l'identité, pour éliminer les termes non linéaires qui ne peuvent pas être éliminés restent dans des formes normales.

Généralement la forme normale peut s'écrire sous la forme suivante

$$\dot{y} = N_2(y) + N_3(y) + \dots + N_r(y) + o(|y|^r), \quad \text{pour } r \geq 2,$$

si $N_2 = 0$ on passe à calculer N_3 , pour cela on a besoin de calculer h_2 .

Supposons que par une transformation non linéaire

$$z = v + T(v, \mu), \quad v \in \mathbb{R}, \quad \mu \in \mathbb{R} \quad (3.16)$$

donc

$$\frac{d}{dt}z(t) = (\mathcal{I}d + D_v T(v(t), \mu))\frac{d}{dt}v(t).$$

D'après l'équation (3.15) on a

$$(\mathcal{I}d + D_v T(v(t), \mu))\frac{d}{dt}v(t) = H(v(t) + T(v(t), \mu)), \quad (3.17)$$

pour v assez petit, la matrice $(\mathcal{I}d + D_v T(v, \mu))$ est inversible, et l'inverse satisfait :

$$(\mathcal{I}d + D_v T(v, \mu))^{-1} = \mathcal{I}d - D_v T(v, \mu) + \mathcal{O}(|(v, \mu)|^2),$$

donc

$$\frac{d}{dt}v = (\mathcal{I}d - D_v T(v, \mu))H(v + T(v, \mu), \mu) + o(|(v, \mu)|^3). \quad (3.18)$$

c'est-à-dire

$$\frac{d}{dt}v(t) = N(v(t), \mu), \quad (3.19)$$

où

$$N(v(t), \mu) = (\mathcal{I}d - D_v T(v(t), \mu))H(v(t) + T(v(t), \mu), \mu) + o(|(v, \mu)|^3),$$

avec

$$\begin{aligned} H(v + T(v, \mu), \mu) &:= \Psi(0)D_\mu F(0, 0)\mu + \frac{1}{2}\Psi(0)\Phi^\top D_{vv}^2 F(0, 0)\Phi(v^2 + 2vT(v, \mu)) \\ &+ \Psi(0)[L'(0) + D_{v\mu}^2 F(0, 0)]\Phi(v + T(v, \mu))\mu + \frac{1}{2}\Psi(0)D_{\mu\mu}^2 F(0, 0)\mu^2 \\ &+ \Psi(0)\left[\frac{1}{2}\Phi^\top D_{vv}^2 F(0, 0)h_{(2,0)}^2 + \frac{1}{2}(h_{(2,0)}^2)^\top D_{vv}^2 F(0, 0)\Phi + \frac{1}{6}[\Phi^\top D_v^3 F(0, 0)\Phi]\Phi\right]v^3 \\ &+ \Psi(0)\left[\frac{1}{2}\Phi^\top D_{vv}^2 F(0, 0)h_{(1,1)}^2 + \frac{1}{2}(h_{(1,1)}^2)^\top D_{vv}^2 F(0, 0)\Phi\right. \\ &+ [L'(0) + D_{v\mu}^2 F(0, 0)]h_{(2,0)}^2 + \left.\frac{1}{2}[\Phi^\top D_{vv\mu}^3 F(0, 0)\Phi]\right]v^2\mu \\ &+ \Psi(0)\left[\frac{1}{2}\Phi^\top D_{vv}^2 F(0, 0)h_{(0,2)}^2 + \frac{1}{2}(h_{(0,2)}^2)^\top D_{vv}^2 F(0, 0)\Phi\right. \\ &+ [L'(0) + D_{v\mu}^2 F(0, 0)]h_{(1,1)}^2 + \left.\frac{1}{2}[L''(0) + D_{v\mu\mu}^3 F(0, 0)]\Phi\right]v\mu^2 \\ &+ \Psi(0)\left[[L'(0) + D_{v\mu}^2 F(0, 0)]h_{(0,2)}^2 + \frac{1}{6}D_\mu^3 F(0, 0)\right]\mu^3 \\ &+ o(|(v, \mu)|^3), \end{aligned}$$

d'après (3.17) et (3.19), on obtient la formule suivante

$$H(v + T(v, \mu), \mu) - D_v T(v, \mu)N(v, \mu) - N(v, \mu) = 0.$$

Soit

$$T(v, \mu) = T_2(v, \mu) + o(|(v, \mu)|^2),$$

où T_2 c'est la partie homogène d'ordre 2 de la fonction T qui peut s'écrire sous la forme

$$T_2(v, \mu) = \sum_{(q,l) \in D_2} T_{(q,l)}^2 v^q \mu^l.$$

Alors si on remplaçant $T_2(v, \mu) = T_{(2,0)}^2 v^2 + T_{(1,1)}^2 v\mu + T_{(0,2)}^2 \mu^2$ dans l'expression de $H(v + T(v, \mu), \mu)$, on obtient

$$\begin{aligned}
H(v + T(v, \mu), \mu) := & \Psi(0)D_\mu F(0, 0)\mu + \frac{1}{2}\Psi(0)\Phi^\top D_{vv}^2 F(0, 0)\Phi v^2 \\
& + \Psi(0)[L'(0) + D_{v\mu}^2 F(0, 0)]\Phi v\mu + \frac{1}{2}\Psi(0)D_{\mu\mu}^2 F(0, 0)\mu^2 \\
& + \Psi(0)\left[\frac{1}{2}\Phi^\top D_{vv}^2 F(0, 0)h_{(2,0)}^2 + \frac{1}{2}(h_{(2,0)}^2)^\top D_{vv}^2 F(0, 0)\Phi\right. \\
& + \frac{1}{6}[\Phi^\top D_v^3 F(0, 0)\Phi]\Phi + \Phi^\top D_{vv}^2 F(0, 0)\Phi T_{(2,0)}^2\left.]v^3\right. \\
& + \Psi(0)\left[\frac{1}{2}\Phi^\top D_{vv}^2 F(0, 0)h_{(1,1)}^2 + \frac{1}{2}(h_{(1,1)}^2)^\top D_{vv}^2 F(0, 0)\Phi\right. \\
& + [L'(0) + D_{v\mu}^2 F(0, 0)]h_{(2,0)}^2 + \frac{1}{2}[\Phi^\top D_{vv\mu}^3 F(0, 0)\Phi] \\
& + \Phi^\top D_{vv}^2 F(0, 0)\Phi T_{(1,1)}^2 + [L'(0) + D_{v\mu}^2 F(0, 0)]\Phi T_{(2,0)}^2\left.]v^2\mu\right. \\
& + \Psi(0)\left[\frac{1}{2}\Phi^\top D_{vv}^2 F(0, 0)h_{(0,2)}^2 + \frac{1}{2}(h_{(0,2)}^2)^\top D_{vv}^2 F(0, 0)\Phi\right. \\
& + [L'(0) + D_{v\mu}^2 F(0, 0)]h_{(1,1)}^2 + \frac{1}{2}[L''(0) + D_{v\mu\mu}^3 F(0, 0)]\Phi \\
& + \Phi^\top D_{vv}^2 F(0, 0)\Phi T_{(0,2)}^2 + [L'(0) + D_{v\mu}^2 F(0, 0)]\Phi T_{(1,1)}^2\left.]v\mu^2\right. \\
& + \Psi(0)\left[[L'(0) + D_{v\mu}^2 F(0, 0)]h_{(0,2)}^2 + \frac{1}{6}D_\mu^3 F(0, 0)\right. \\
& + [L'(0) + D_{v\mu}^2 F(0, 0)]\Phi T_{(0,2)}^2\left.]\mu^3 + o(|(v, \mu)|^3),
\end{aligned}$$

puisque on a $D_v T(v, \mu) = 2T_{(2,0)}^2 v + T_{(1,1)}^2 \mu$, donc on trouve que

$$\begin{aligned}
 N(v, \mu) = & \Psi(0) D_\mu F(0, 0) \mu + \frac{1}{2} \Psi(0) \Phi^\top D_{vv}^2 F(0, 0) \Phi v^2 + \Psi(0) \left[[L'(0) + D_{v\mu}^2 F(0, 0)] \Phi \right. \\
 & \left. - 2T_{(2,0)}^2 D_\mu F(0, 0) \right] v \mu + \Psi(0) \left[\frac{1}{2} D_{\mu\mu}^2 F(0, 0) - T_{(1,1)}^2 D_\mu F(0, 0) \right] \mu^2 \\
 & + \Psi(0) \left[\frac{1}{2} \Phi^\top D_{vv}^2 F(0, 0) h_{(2,0)}^2 + \frac{1}{2} (h_{(2,0)}^2)^\top D_{vv}^2 F(0, 0) \Phi + \frac{1}{6} [\Phi^\top D_v^3 F(0, 0) \Phi] \Phi \right] v^3 \\
 & + \Psi(0) \left[\frac{1}{2} \Phi^\top D_{vv}^2 F(0, 0) h_{(1,1)}^2 + \frac{1}{2} (h_{(1,1)}^2)^\top D_{vv}^2 F(0, 0) \Phi \right. \\
 & + [L'(0) + D_{v\mu}^2 F(0, 0)] h_{(2,0)}^2 + \frac{1}{2} [\Phi^\top D_{vv\mu}^3 F(0, 0) \Phi] - T_{(2,0)}^2 [L'(0) + D_{v\mu}^2 F(0, 0)] \Phi \\
 & \left. + \frac{1}{2} T_{(1,1)}^2 \Phi^\top D_{vv}^2 F(0, 0) \Phi \right] v^2 \mu \\
 & + \Psi(0) \left[\frac{1}{2} \Phi^\top D_{vv}^2 F(0, 0) h_{(0,2)}^2 + \frac{1}{2} (h_{(0,2)}^2)^\top D_{vv}^2 F(0, 0) \Phi \right. \\
 & + [L'(0) + D_{v\mu}^2 F(0, 0)] h_{(1,1)}^2 + \frac{1}{2} [L''(0) + D_{v\mu\mu}^3 F(0, 0)] \Phi + \Phi^\top D_{vv}^2 F(0, 0) \Phi T_{(0,2)}^2 \\
 & \left. - T_{(2,0)}^2 D_{\mu\mu}^2 F(0, 0) \right] v \mu^2 \\
 & + \Psi(0) \left[[L'(0) + D_{v\mu}^2 F(0, 0)] h_{(0,2)}^2 + \frac{1}{6} D_\mu^3 F(0, 0) + [L'(0) + D_{v\mu}^2 F(0, 0)] \Phi T_{(0,2)}^2 \right. \\
 & \left. - \frac{1}{2} T_{(1,1)}^2 D_{\mu\mu}^2 F(0, 0) \right] \mu^3 \\
 & + o(|(v, \mu)|^3),
 \end{aligned}$$

d'après (3.18) on a

$$Q_1 = Q_2 + Q_3,$$

où

$$Q_1 = H(v + T(v, \mu), \mu), \quad Q_2 = D_v T(v, \mu) H(v + T(v, \mu), \mu) \quad \text{et} \quad Q_3 = N(v, \mu).$$

Par conséquent

$$Q_1^2 = Q_2^2 + Q_3^2,$$

où Q_1^2 , Q_2^2 et Q_3^2 sont des parties homogènes de degré 2.

D'après le développement de Taylor autour de zéro on a

$$H(v + T(v, \mu), \mu) = H(v, \mu) + DH(v, \mu) T(v, \mu) + o(|(v, \mu)|^3),$$

donc $Q_2^2 = 0$ car le degré minimal de $H(v + T(v, \mu), \mu)$ est 2.

Par conséquent

$$H_2(v + T(v, \mu), \mu) = N_2(v, \mu),$$

avec N_2 la partie homogène de degré 2 de N , pour cela on obtient

$$-2T_{(2,0)}^2 D_\mu F(0,0)v\mu - T_{(1,1)}^2 D_\mu F(0,0)\mu^2 = 0.$$

Par suite, pour simplifier l'expression de $N(v, \mu)$, on peut choisir $T(v, \mu)$ de telle sorte que

$$\Phi T_{(0,2)}^2 = -\frac{1}{2}h_{(0,2)}^2, \quad \Phi T_{(1,1)}^2 = -h_{(1,1)}^2 \quad \text{et} \quad \Phi T_{(2,0)}^2 = h_{(2,0)}^2.$$

Finalement, la forme normale associée à l'équation réduite sur la variété centre jusqu'à l'ordre 3 est

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} = & \Psi(0)D_\mu F(0,0)\mu + \frac{1}{2}\Psi(0)\Phi^\top D_{vv}^2 F(0,0)\Phi v^2 + \Psi(0)[L'(0) + D_{v\mu}^2 F(0,0)]\Phi v\mu \\ & + \frac{1}{2}\Psi(0)D_{\mu\mu}^2 F(0,0)\mu^2 + \Psi(0)\left\{\frac{1}{2}\Phi^\top D_{vv}^2 F(0,0)h_{(2,0)}^2 + \frac{1}{2}(h_{(2,0)}^2)^\top D_{vv}^2 F(0,0)\Phi\right. \\ & + \left.\frac{1}{6}[\Phi^\top D_v^3 F(0,0)\Phi]\Phi\right\}v^3 \\ & + \Psi(0)\left\{\frac{1}{2}(h_{(1,1)}^2)^\top D_{vv}^2 F(0,0)\Phi + \frac{1}{2}[\Phi^\top D_{vv\mu}^3 F(0,0)\Phi]\right\}v^2\mu \\ & + \Psi(0)\left\{\frac{1}{2}(h_{(0,2)}^2)^\top D_{vv}^2 F(0,0)\Phi + [L'(0) + D_{v\mu}^2 F(0,0)]h_{(1,1)}^2\right. \\ & + \left.\frac{1}{2}[L''(0) + D_{v\mu\mu}^3 F(0,0)]\Phi\right\}v\mu^2 + \Psi(0)\left\{\frac{1}{6}D_\mu^3 F(0,0) + \frac{1}{2}[L'(0) + D_{v\mu}^2 F(0,0)]h_{(0,2)}^2\right\}\mu^3 \\ & + o(|(v, \mu)|^3), \end{aligned}$$

il y a une équivalence topologique entre l'équation différentielle à retard et sa forme normale, pour cela on s'intéresse sur l'étude de la forme normale.

Exemple d'application

L'épidémiologie est la science qui étudie les facteurs susceptibles d'influer sur une maladie, sa propagation dans une société.

Les modèles compartimentaux font partie des premiers modèles mathématiques à avoir été utilisés en épidémiologie. L'idée est de diviser une population en plusieurs groupes d'individus : les individus qui sont susceptibles d'être infectés, ceux qui sont infectieux ou encore ceux qui ont acquis une immunité à la suite de la guérison. Cette approche est utilisée pour modéliser de très nombreuses maladies et continue d'être un sujet de recherche actif. Un modèle épidémiologique se définit par des compartiments (en combien de groupes est divisée la population et sur quel critère) et des règles (quels échanges se produisent entre ces groupes). Les modèles correspondants, à cette étude sont connus sous le nom du modèle SIR, on distingue les compartiments :

- S , dans lequel se trouvent les individus sains et susceptibles d'être infectés ;
- I , pour les individus infectés et infectieux ;
- R , pour les individus retirés du modèle, non susceptibles d'être infectés, car guéris et immunisés ou décédés.

Le modèle épidémiologique SIR qu'on va étudier est donné par le système d'équations différentielles à retard suivant :

$$(\mathcal{S}) \begin{cases} \dot{x}(t) = \pi - \beta x(t)y(t) - dx(t), \\ \dot{y}(t) = \beta x(t - \tau)y(t - \tau) - \mu y(t), \end{cases} \quad (4.1)$$

où π , β , d et μ sont des paramètres positives, τ est le retard, on pose $R_0 = \frac{\beta\pi}{\mu d} = 1$.
 $x(t)$ représente les personnes saines au temps t , $y(t)$ les personnes infectées.

Les dérivées permettent de connaître la variation de x et y en fonction du temps t , afin d'en

d'écrire l'évolution au cours du temps. Le terme $x(t)y(t)$ représente le nombre de contacts entre des personnes saines et des personnes infectées.

Maintenant, Supposons que (x^*, y^*) est l'équilibre du système $(\mathcal{S})$ donc

$$\begin{cases} \pi - \beta x^* y^* - dx^* = 0, \\ \beta x^* y^* - \mu y^* = 0, \end{cases}$$

ainsi que

$$\pi - dx^* - \mu y^* = 0,$$

c'est-à-dire $y^* = \frac{\pi - dx^*}{\mu}$, car $\mu > 0$, on remplace y^* dans la première équation de (4.1), on trouve

$$\pi - \beta x^* \left(\frac{\pi - dx^*}{\mu} \right) - dx^* = 0,$$

on obtient l'équation de seconde ordre suivante

$$\frac{\beta d}{\mu} (x^*)^2 - \left(d + \frac{\beta \pi}{\mu} \right) x^* + \pi = 0 \quad (4.2)$$

discriminant de cette équation est

$$\begin{aligned} \Delta &= \left(d + \frac{\beta \pi}{\mu} \right)^2 - 4 \frac{\beta d}{\mu} \pi \\ &= \left(d - \frac{\beta \pi}{\mu} \right)^2 = 0, \end{aligned}$$

donc l'équation (4.2) admet une solution double dans $\mathbb{R}$

$$x^* = \frac{d + \frac{\beta \pi}{\mu}}{2 \frac{\beta d}{\mu}} = \frac{\pi}{d},$$

comme on a $y^* = \frac{\pi - dx^*}{\mu}$, alors $y^* = 0$.

D'où le système $\mathcal{S}$ admet $(x^*, y^*) = \left(\frac{\pi}{d}, 0 \right)$ comme le point d'équilibre car

$$\begin{cases} \dot{x}^* = 0 \\ \dot{y}^* = 0. \end{cases}$$

Par suite, pour transformer le système $\mathcal{S}$ en un autre qui a $(0, 0)$ comme l'équilibre, on pose

$$\begin{cases} X(t) = x(t) - x^*, \text{ pour } t > 0 \\ Y(t) = y(t) - y^*, \text{ pour } t > 0, \end{cases}$$

donc $\dot{X}(t) = \dot{x}(t)$ et $\dot{Y}(t) = \dot{y}(t)$.

Le système devient

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = \pi - \beta(X(t) + x^*)(Y(t) + y^*) - d(X(t) + x^*) \\ \dot{Y}(t) = \beta(X(t - \tau) + x^*)(Y(t - \tau) + y^*) - \mu(Y(t) + y^*), \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = \pi - \beta X(t)Y(t) - \beta X(t)y^* - \beta Y(t)x^* - \beta x^*y^* - dX(t) - dx^* \\ \dot{Y}(t) = \beta X(t-\tau)Y(t-\tau) + \beta X(t-\tau)y^* + \beta Y(t-\tau)x^* + \beta x^*y^* - \mu Y(t) - \mu y^*. \end{cases}$$

On sait que

$$\begin{cases} \pi - \beta x^*y^* - dx^* = 0 \\ \beta x^*y^* - \mu y^* = 0, \end{cases}$$

pour que $(x^*, y^*) = (\frac{\pi}{d}, 0)$, on trouve

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = -\beta X(t)Y(t) - \frac{\beta\pi}{d}Y(t) - dX(t) \\ \dot{Y}(t) = \beta X(t-\tau)Y(t-\tau) + \frac{\beta\pi}{d}Y(t-\tau) - \mu Y(t), \end{cases} \quad (4.3)$$

alors si on prend $(X, Y) = (0, 0)$, on obtient

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = 0 \\ \dot{Y}(t) = 0, \end{cases}$$

par conséquent, $(0, 0)$ est un équilibre pour le système obtenu.

On pose

$$v(t) = \begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \end{pmatrix},$$

alors le système (4.3) peut s'écrire sous la forme

$$\dot{v}(t) = f(v(t), v(t-\tau)),$$

où

$$f(\phi(0), \phi(-\tau)) = \begin{pmatrix} -\beta\phi_1(0)\phi_2(0) - \frac{\beta\pi}{d}\phi_2(0) - d\phi_1(0) \\ \beta\phi_1(-\tau)\phi_2(-\tau) + \frac{\beta\pi}{d}\phi_2(-\tau) - \mu\phi_2(0) \end{pmatrix},$$

définie sur $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ à valeur dans $\mathbb{R}^2$.

On note par $\mathcal{C} := \mathcal{C}([-\tau, 0], \mathbb{R}^2)$ l'espace des fonctions continus de $[-\tau, 0]$ à valeurs dans $\mathbb{R}^2$.

Il est clair que, les composantes de f sont des fonctions polynomiales alors ils sont continues, donc la fonction f est continue sur tout ouvert U dans le domaine de définition $(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2)$, cela implique que le problème admet au moins une solution.

Soient $x, y \in K$, et K un compact de U , on pose

$$f_1(x, y) = -\beta xy - \frac{\beta\pi}{d}y - dx \quad \text{et} \quad f_2(x, y) = \beta xy + \frac{\beta\pi}{d}y - \mu y,$$

puisque on a

$$|f_1(x, y_1) - f_1(x, y_2)| \leq (|\beta x| + \frac{\beta\pi}{d})|y_1 - y_2|, \quad \text{pour } y_1, y_2 \in K,$$

et

$$|f_1(x_1, y) - f_1(x_2, y)| \leq (|\beta y| + d)|x_1 - x_2|, \quad \text{pour } x_1, x_2 \in K,$$

alors f_1 est lipschitzienne en (x, y) dans les compacts de U ,

d'autre part f_2 est lipschitzienne en (x, y) dans les compacts de U , en effet

$$|f_2(x, y_1) - f_2(x, y_2)| \leq (|\beta x| + |\frac{\beta\pi}{d} - \mu|)|y_1 - y_2|, \quad \text{pour } y_1, y_2 \in K,$$

et

$$|f_2(x_1, y) - f_2(x_2, y)| \leq |\beta y||x_1 - x_2|, \quad \text{pour } x_1, x_2 \in K.$$

D'où f est lipschitzienne en (x, y) dans les compacts de U , par suite le problème admet une solution unique.

Le système linéaire associée au système (4.3) autour de $(0, 0)$ est

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = -\frac{\beta\pi}{d}Y(t) - dX(t), \\ \dot{Y}(t) = \frac{\beta\pi}{d}Y(t - \tau) - \mu Y(t) \end{cases}$$

on pose

$$\Delta(\lambda) = \lambda \mathcal{I}d_{\mathbb{R}^2} - D_\phi f(0, 0)e^{-\lambda\tau},$$

ce qui donne

$$\Delta(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda + de^{-\lambda\tau} & \frac{\beta\pi}{d}e^{-\lambda\tau} \\ 0 & \lambda - (\frac{\beta\pi}{d} - \mu)e^{-\lambda\tau} \end{pmatrix},$$

ainsi $\det \Delta(\lambda) = 0$, implique que

$$\begin{vmatrix} \lambda + de^{-\lambda\tau} & \frac{\beta\pi}{d}e^{-\lambda\tau} \\ 0 & \lambda - (\frac{\beta\pi}{d} - \mu)e^{-\lambda\tau} \end{vmatrix} = 0,$$

donc l'équation caractéristique associée au système (4.3) est

$$\lambda^2 + (d - (\frac{\beta\pi}{d} - \mu))\lambda e^{-\lambda\tau} - (\beta\pi - \mu d)e^{-\lambda\tau} = 0,$$

puisque $R_0 = \frac{\beta\pi}{\mu d} = 1$,

alors l'équation caractéristique devient

$$\lambda^2 + d\lambda e^{-\lambda\tau} = 0, \quad (4.4)$$

dans ce cas on a 0 est la racine de (4.4), alors $\lambda = 0$ est une valeur propre de l'équation caractéristique.

On sait que

$$\det \Delta(\lambda) = \lambda^2 + d\lambda e^{-\lambda\tau},$$

sa dérivée par rapport à λ en $\lambda = 0$ égale à $d \neq 0$ car $d > 0$,

autrement dit, $\lambda = 0$ est une valeur propre simple de l'équation caractéristique (4.4).

Considérons la décomposition $\mathcal{C} = X_c \oplus X_s$. En particulier, nous considérons des bases pour X_c et X_c^* notées respectivement $\Phi = \phi_1$, $\Psi = \psi_1$.

Comme on a $\lambda = 0$ est une valeur propre simple, et $\Phi(\theta) = \gamma_1 e^{\lambda\theta} = \phi_1(0) e^{\lambda\theta}$, donc $\phi_1(0) = \gamma_1 = (a, b)$ avec γ_1 une solution de système

$$\Delta(0)\gamma_1 = 0,$$

c'est-à-dire $ad + \frac{\beta\pi}{d}b = 0$ et $-(\frac{\beta\pi}{d} - \mu)b = 0$, mais puisque $\frac{\beta\pi}{\mu d} = 1$ implique que

$$\phi_1(0) = \begin{pmatrix} -\frac{\mu}{d} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

D'autre part, on a

$$\Psi(\theta) = \gamma_2 e^{-\lambda\theta} = \psi_1(0) e^{-\lambda\theta},$$

donc $\psi_1(0) = \gamma_2 = (a', b')$ avec γ_2 une solution de système

$$\gamma_2 \Delta(0) = 0,$$

ainsi que

$$\begin{cases} a'd = 0 \\ a'\frac{\beta\pi}{d} - b'(\frac{\beta\pi}{d} - \mu) = 0, \end{cases}$$

c'est-à-dire $\psi_1(0) = (0, 1)$.

Maintenant considérons le système obtenu (4.3), si on pose

$$v(t) = \begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \end{pmatrix},$$

et $\tilde{\beta} = \beta - \frac{\mu d}{\pi}$ comme paramètre de la bifurcation, alors le système devient

$$\frac{d}{dt}v(t) = L_0(\tilde{\beta})v(t) + L_1(\tilde{\beta})v(t-r) + g(v(t), v(t-r), \tilde{\beta}), \quad (4.5)$$

où $v \in \mathbb{R}^2$, et $g : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par

$$g(\phi(0), \phi(-\tau), \tilde{\beta}) = \begin{pmatrix} -(\tilde{\beta} + \frac{\mu d}{\pi})\phi_1(0)\phi_2(0) \\ (\tilde{\beta} + \frac{\mu d}{\pi})\phi_1(-\tau)\phi_2(-\tau) \end{pmatrix},$$

est suffisamment régulier ($g \in C^\infty$). On a $g(0, 0, \tilde{\beta}) = 0$ et $Dg(0, 0, \tilde{\beta}) = 0$ pour tout $\tilde{\beta} \in \mathbb{R}$, $\tau > 0$ et

$$L_0(\tilde{\beta}) = \begin{pmatrix} -d & -(\tilde{\beta} + \frac{\mu d}{\pi})\frac{\pi}{d} \\ 0 & -\mu \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad L_1(\tilde{\beta}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & (\tilde{\beta} + \frac{\mu d}{\pi})\frac{\pi}{d} \end{pmatrix}$$

pour $\phi \in \mathcal{C}$ on note par

$$L(\tilde{\beta})\phi := L_0(\tilde{\beta})\phi(0) + L_1(\tilde{\beta})\phi(-\tau),$$

$$F(\phi, \tilde{\beta}) := g(\phi(0), \phi(-\tau), \tilde{\beta})$$

alors le système (4.5) devient

$$\dot{v}(t) = L(\tilde{\beta})v_t + F(v_t, \tilde{\beta}).$$

D'après les notations de chapitre 3, on a

$$D_{\tilde{\beta}}F(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad D_{\tilde{\beta}\tilde{\beta}}^2F(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad D_{\phi\tilde{\beta}}^2F(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\text{et} \quad L'(\tilde{\beta}) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\pi}{d} \\ 0 & \frac{\pi}{d} \end{pmatrix},$$

soit $\psi = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, on sait que $D_\phi F(., \tilde{\beta})$ définie sur $\mathbb{R}^2$ à valeur dans l'ensemble des matrices d'ordre 2, c'est-à-dire $D_\phi F(\phi, \tilde{\beta})\psi \in \mathbb{R}^2$ avec

$$D_\phi F(\phi, \tilde{\beta})\psi = \begin{pmatrix} -(\tilde{\beta} + \frac{\mu d}{\pi})\phi_2(0)a - (\tilde{\beta} + \frac{\mu d}{\pi})\phi_1(0)b \\ (\tilde{\beta} + \frac{\mu d}{\pi})\phi_2(-\tau)a + (\tilde{\beta} + \frac{\mu d}{\pi})\phi_1(-\tau)b \end{pmatrix},$$

par suite

$$D_\phi^2 F(\phi, \tilde{\beta})\psi = D_\phi D_\phi F(\phi, \tilde{\beta})\psi = \begin{pmatrix} -(\tilde{\beta} + \frac{\mu d}{\pi})b & -(\tilde{\beta} + \frac{\mu d}{\pi})a \\ (\tilde{\beta} + \frac{\mu d}{\pi})b & (\tilde{\beta} + \frac{\mu d}{\pi})a \end{pmatrix}.$$

Finalement, la forme normale associée à l'équation réduite sur la variété centre jusqu'à l'ordre 2 est

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{\mu\beta}{2d}\left(\frac{\mu}{d} + 1\right)v^2 + \frac{\pi\tilde{\beta}}{d}v.$$

Alors les points stationnaires possibles sont $v_\pm^* = k_\pm$, où

$$k_\pm = \frac{-\frac{\pi\tilde{\beta}}{d} \pm \frac{\pi\tilde{\beta}}{d}}{-\frac{\mu\beta}{d}\left(\frac{\mu}{d} + 1\right)},$$

c'est-à-dire $k_+ = 0$ et $k_- = \frac{2\pi\tilde{\beta}}{\mu\beta(\frac{\mu}{d} + 1)}$.

Il y a deux branches de solutions qui se croisent au point $(0, 0)$. Il s'agit d'une bifurcation transcritique.

On pose

$$g(v, \tilde{\beta}) = -\frac{\mu\beta}{2d}\left(\frac{\mu}{d} + 1\right)v^2 + \frac{\pi\tilde{\beta}}{d}v,$$

ainsi que

$$\left.\frac{\partial}{\partial v}g(v, \tilde{\beta})\right|_{v=v_\pm^*} = -\frac{\mu\beta}{d}\left(\frac{\mu}{d} + 1\right)k_\pm + \frac{\pi\tilde{\beta}}{d},$$

donc

$$\left.\frac{\partial}{\partial v}g(v, \tilde{\beta})\right|_{v=v_+^*} = \frac{\pi\tilde{\beta}}{d} \quad \text{et} \quad \left.\frac{\partial}{\partial v}g(v, \tilde{\beta})\right|_{v=v_-^*} = -\frac{\pi\tilde{\beta}}{d},$$

alors le point fixe v_+^* est stable si $\tilde{\beta} < 0$ et instable si $\tilde{\beta} > 0$; v_-^* possède la propriété de stabilité opposée.

Conclusion

Les phénomènes de retard apparaissent naturellement et souvent dans les processus biologiques et physiques. Parmi les principales sources induisant des retards, on cite le temps d'incubation, les temps de transmissions des informations, les temps de transferts des matières ou encore les temps de mesures. Alors dans le but de se rapprocher du processus réel, une meilleure modélisation consiste à concevoir "les systèmes à retard", où interviennent des équations différentielles dont l'évolution, contrairement aux systèmes ordinaires, dépend non seulement de la valeur courante de leurs variables d'état à l'instant présent, mais aussi d'une partie de leurs valeurs passées. Cependant, l'analyse mathématique de cette catégorie de systèmes deviennent plus difficiles.

Dans ce modeste travail, on a essayé de réduire la complexité d'un système d'équations différentielles à retard en se basant sur deux approches principales. A savoir, les variétés centres et les formes normales.

Bibliographie

- [1] E. Ait Dads, Delay differential equations, study of a linear case in finite dimension, Université Cadi Ayyad, 2002.
- [2] S. Atmani, Analyse mathématique d'un modèle de population cellulaire à retard distribué, encadré par A. Chekroun, Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen, 2019.
- [3] R. BELLMAN et Cooke, Differential-Difference Equations, Academic Press, (1963).
- [4] J. CARR, Applications of centre manifold theory, Springer-Verlag, 1981.
- [5] O.DIEKMAN , S.A .Van Gils, S.M.Verduyn Lunel et H.O.Wather Delay Equation : Functional , complex , and Nonlinear Analysis, Springer-Verlag , New York (1995).
- [6] L. E. ELSGOLts et S.B.NORKIN, Introduction to the Theory and Application of Differential Equations with deviating Arguments, Mathematics in science and Engineering, Vol .105, Academic press, (1973) .
- [7] J. K. Hale, Theory of Functional Differential Equations, Springer-Verlag, New York, (1977).
- [8] J. K. Hale et S. M. Verduyn Lunel, Introduction to functional Differential equations. Springer-Verlag, New-York, (1993).
- [9] W. Jianhong et G. shangjiang, Bifurcation Theory of Functional Differential Equation, New-York, 2013.
- [10] M. I. Koné, Contrôle optimal et calcul des variations en présence de retard sur l'état. Rapport de thèse. Université de Paris 1 Panthéon-Sorbonne, 2016.
- [11] H. P. Krishnan, Existence of unstable manifolds for a certain class of delay differential equation, Elector J. Differential equation, (2002).

- [12] Y. Kuang, Delay Differential Equations : With Applications in Population Dynamics. Academic Press, 1993.
- [13] Yuri A. Kuznetsov, Elements of Applied Bifurcation Theory, 1995.
- [14] Yuri A. Kuznetsov, Elements of Applied Bifurcation Theory, second Edition 1997.
- [15] M. Lakrib, Stroboscopie et Moyennisation dans les Équations Différentielles Fonctionnelles à Retard, Rapport de thèse. Université de Haute Alsace, 2004.
- [16] G. Morin, Calcul Mulien et Théorie des Formes Normales Classiques, Thèse de doctorat. Ecole Doctorate Astronomie et Astrophysique D'Île-de-France, 2010.
- [17] A. Pazy, Semigroups of Linears Operators and Applications to Partial Differntial Equations. Springer-Verlag New-York, 1983.
- [18] R. Qesmi, Center Manifolds and Elements of Bifurcation For Functional Differential Equations With Delay : Algorithms and Analysis, Rapport de thèse. Université Cadi Ayyad Faculté des Sciences Semlalia-Marrakech, 2007.
- [19] R. Qesmi, M. AitBabram et M. L. Hbid, Center manifolds and normal forms for a class of retarded functional differential equations with parameter associated with Fold-Hopf singularity, Journal of Applied Mathematics and Computation, vol. 181, 2006.
- [20] R. Qesmi, M. AitBabram et M. L. Hbid, Symbolic computation for center manifolds and normal forms of Bogdanov bifurcation in retarded functional differential equations, Journal Nonlinear Analysis : Theory, Methods and Applications, vol. 66, 2007.
- [21] L. Volterra, Sur la Théorie Mathématiques des phénomènes héréditaires, J. de Mathématiques 7(1928), 249-298.