



Master Mathématiques et Applications au Calcul Scientifique (MACS)

MEMOIRE DE FIN D'ETUDES

Pour l'obtention du Diplôme de Master Sciences et Techniques
(MST)

Théorie algébrique des graphes

Réalisé par : BENLAKTIT Ikram

Soutenu le 09 Juillet 2021

Devant le jury composé de:

- | | | |
|----------------------|------------------|-----------|
| - Pr. L. OUKHTITE | FST Fès | Encadrant |
| - Pr. A. MAMOUNI | Fac. Sci. Meknès | Examineur |
| - Pr. N. Mahdou | FST Fès | Examineur |
| - Pr. O. Ait Zemzami | EST Agadir | Examineur |

Année Universitaire 2020 / 2021

FACULTE DES SCIENCES ET TECHNIQUES FES – SAISS

☒ B.P. 2202 – Route d'Imouzer – FES

Dédicaces

Je dédie ce mémoire

A mes chers parents ma mère et mon père

A mon époux et mes frères.

Pour leur patience, leur amour, leur soutien et leurs encouragements.

A mes amies et mes camarades.

A toute personnes qui m'a encouragé ou aidé au long de mes études.

*Nous dédions aussi ce travail à tous nos professeurs qui nous ont
enseigné et à tous ceux qui nous sont chers.*

Remerciement

Je voudrais, en premier lieu, exprimer ma profonde reconnaissance à mon encadrant, Professeur Lahcen OUKHTITE, qui, grâce à ses orientations précieuses, ses encouragements valorisants, sa direction compétente, son soutien dans les moments d'incertitude et sa disponibilité inconditionnelle, mon travail a pu voir le jour.

Je tiens à remercier également au Professeur Abdellah MAMOUNI pour le temps qu'elle a consacré à la réalisation de ce travail et pour les précieuses informations qu'elle m'a prodiguées avec intérêt et compréhensions.

toute ma gratitude et tout mon sentiment de reconnaissance aux professeurs Najib MAHDOU et Omar AIT ZEMZAMI pour l'honneur qu'ils me font d'accepter d'être membres de jury de ce mémoire.

Puis, je voulais transmettre mes remerciements à notre collègue Karim BOUCHANNAFA pour ses excellents conseils durant l'accomplissement de notre travail de recherche.

Enfin j'adresse mes sincères remerciements et ma grande reconnaissance à tous mes professeurs du cycle Master Mathématiques et Applications aux calculs scientifiques.

Table des matières

Introduction	5
1 Différentes notions de graphes	7
1.1 Graphes orientés	7
1.2 Graphes non orientés	10
1.3 Chemins et circuits	13
1.4 Sous-graphes	16
1.5 Points d'articulation, Cliques	17
1.6 Isomorphismes de graphes	19
1.7 Arbres	21
1.8 Coloriage	22
2 Graphes et matrices	25
2.1 Matrice d'adjacence	25
2.1.1 Cas non orienté	25
2.1.2 Cas orienté	26
2.1.3 Propriétés	27
2.1.4 Polynôme caractéristique	28
2.2 Matrice d'incidence	31
2.2.1 Cas non orienté	31
2.2.2 Cas orienté	31
2.2.3 Matrice des degrés	32
2.2.4 La relation entre matrice d'incidence et d'adjacence d'un graphe	32
2.3 Matrice Laplacienne	35
3 Théorie spectrale des graphes	37
3.1 Spectre de la matrice d'adjacence	37
3.2 Valeurs propres et vecteurs propres de la matrice d'adjacence de certains graphes fondamentaux	39
3.3 Spectre de la matrice Laplacienne	42
3.4 Valeurs propres et vecteurs propres de la matrice Laplacienne de certains graphes fondamentaux	42

4	Un graphe en respectant les idempotents d'un anneau	45
4.1	Introduction	45
4.2	Notation de base et Propriétés	46
4.3	Caractérisation de certains graphes idempotents	47
5	Espaces vectoriels et graphes	54
5.1	Cas des graphes orientés	54
5.2	Cas des graphes non orientés	60
6	Quelques graphes sur les idéaux premiers d'un anneau commutatif	66
6.1	Introduction	66
6.2	Propriétés de base du graphe de la somme propre	67
6.3	Graphe somme propre du produit direct d'anneaux	72
	Bibliographie	75

Introduction

Ce mémoire traite l'utilisation des techniques algébriques dans l'étude des graphes pour mieux comprendre les propriétés des graphes. Notre objectif est de traduire les propriétés des graphes en propriétés algébriques et alors, en utilisant les résultats et les méthodes de l'algèbre, de déduire des théorèmes sur les graphes. Ces techniques algébriques peuvent provenir de la théorie des matrices, de la théorie des polynômes, des espaces vectoriels ou de la théorie des anneaux.

La théorie spectrale des graphes commence par l'association des matrices aux graphes - notamment, la matrice d'adjacence et la matrice laplacienne. Le thème général est alors, premièrement, de calculer ou d'estimer les valeurs propres de ces matrices, et deuxièmement, de relier les valeurs propres aux propriétés structurelles des graphes.

En théorie des graphes, un espace de cycles est un espace vectoriel défini à partir d'un graphe, les éléments de l'espace de cycles représentent des combinaisons formelles de cycles dans le graphe. Les espaces de cycles permettent d'utiliser les outils de l'algèbre linéaire pour étudier les graphes.

L'étude du lien entre la théorie des anneaux commutatifs et la théorie des graphes a débuté avec le concept du graphe du diviseur de zéro d'un anneau commutatif, initié par I. Beck [9]. De nombreuses propriétés algébriques sont étudiées en utilisant les idéaux des anneaux, il est intéressant d'associer une structure de graphe à l'ensemble des idéaux et d'étudier des propriétés algébriques et des propriétés de la théorie des graphes. Aussi Ashrafi, Meimani, Pournaki and Yassemi dans [6] ont défini un graphe basé sur les éléments et les unités d'un anneau R .

Ce mémoire s'articule autour de six chapitres :

Le premier chapitre est constitué des définitions et orientations de base concernant les graphes, afin de faciliter au lecteur la compréhension et la lecture du contenu de ce travail.

Dans le deuxième chapitre, nous étudions la représentation matricielle des graphes dans le cas orienté et non orienté, aussi on donne une liaison entre les propriétés des

matrices et les propriétés des graphes à travers des théorèmes et propositions.

Le troisième chapitre, est dédié à l'étude des valeurs propres et des vecteurs propres de la matrice d'adjacence et laplacienne associée à plusieurs types des graphes, et de relier ces valeurs propres aux propriétés structurelles des graphes.

Dans le quatrième chapitre, nous traitons le graphe idempotent et quelques propriétés élémentaires de ce graphe. Aussi nous étudions la connexité et certaines propriétés des graphes idempotents telles que le diamètre et la circonférence.

Dans le cinquième chapitre, nous associons aux graphes des espaces vectoriels, à savoir l'espace de cycles d'un graphe est l'espace vectoriel, cela nous a permis d'utiliser l'algèbre linéaire pour étudier les graphes.

Enfin, dans le dernier chapitre, nous introduisons le graphe somme S -propre sur l'ensemble des idéaux premiers d'un anneau commutatif. Ainsi nous étudions quelques propriétés de base du graphe somme S -propre telles que la connexité, la circonférence et le nombre de cliques, en plus nous examinons la relation entre le graphe complémentaire du graphe somme propre et les anneaux produits.

Différentes notions de graphes

1.1 Graphes orientés

Définition 1.1.1. Soient V un ensemble (fini ou infini) et $E \subset V \times V$. Le graphe $G = (V, E)$ est la donnée du couple (V, E) . Les éléments de V sont appelés les sommets (aussi appelés nœuds ou points) du graphe G et Les éléments de E sont appelés les arcs du graphe G .

On parlera de graphe fini si V est fini (et donc aussi l'ensemble d'arcs).

Remarque. Soit I , un ensemble d'indices. Si $v = \{v_i | i \in I\}$ et si l'arc $a = (v_i, v_j)$ avec $i, j \in I$, on pourra alors parler de l'origine v_i et de la destination v_j de a . On dit que a relie v_i à v_j . les sommets v_i et v_j sont appelés extrémités de l'arc a . Un arc de la forme $b = (v_i, v_i)$ est une boucle. En général, les sommets seront représentés par des points et l'arc (v_i, v_j) par une flèche allant de v_i à v_j , c'est ce qu'on appelle la représentation sagittale du graphe. Deux arcs sont dits adjacents (ou voisins) s'ils ont au moins une extrémité en commun.

Exemple 1.

D'après la figure 1.1, l'arc 6 relie les deux sommets a et b et la boucle 5 relie le sommet b à lui même. On dit que la boucle 5 et l'arc 6 sont adjacents.

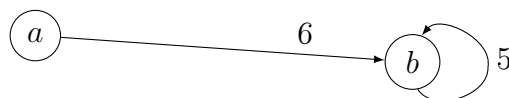


FIGURE 1.1 – Deux arcs adjacents.

Définition 1.1.2. Soit $a = (v_i, v_j) \in E$. On dit que a est un arc sortant de v_i ou bien a est un arc incident à v_i vers l'extérieur (resp. un arc entrant dans v_j ou bien a est un arc incident à v_j vers l'intérieur).

Définition 1.1.3. L'ensemble des arcs sortant de v_i est noté $w^+(v_i)$ et l'ensemble des arcs entrant dans v_j est noté $w^-(v_j)$. L'ensemble des arcs incidents à un sommet v est $w(v) = w^+(v) \cup w^-(v)$.

Définition 1.1.4. On définit le demi-degré sortant (resp. demi-degré entrant) d'un sommet v par

$$d^+(v) = \text{card}(w^+(v)) \text{ (resp. } d^-(v) = \text{card}(w^-(v))).$$

Le degré d'un sommet v est alors la somme des degrés entrant et sortant :

$$\text{deg}(v) = d^+(v) + d^-(v).$$

Si $G = (V, E)$ est un graphe fini, il est clair que :

$$\sum_{v \in V} d^+(v) = \sum_{v \in V} d^-(v).$$

Définition 1.1.5. L'ensemble des successeurs d'un sommet v est l'ensemble $\text{succ}(v) = \{s_1, \dots, s_k\}$ des sommets s_i tels que le couple $(v, s_i) \in w^+(v)$.

Définition 1.1.6. L'ensemble des prédécesseurs d'un sommet v est l'ensemble $\text{pred}(v) = \{s_1, \dots, s_k\}$ des sommets s_i tels que le couple $(s_i, v) \in w^-(v)$.

Définition 1.1.7. On définit l'ensemble des voisins d'un sommet v par :

$$V(v) = \text{pred}(v) \cup \text{succ}(v).$$

On dit que u et v sont des sommets adjacents (ou voisins) si $u \in V(v)$.

Exemple 2.

Soit le graphe $G = (V, E)$, représenté à la figure 1.2, tel que :

$V = \{a, b, c, d, e\}$ et $E = \{(a, b), (a, d), (b, c), (c, d), (d, e), (e, a)\}$.

Par exemple : $w^+(a) = \{(a, b), (a, d)\}$ et $w^-(a) = \{(e, a)\}$. On a aussi $\text{succ}(d) = \{e\}$, $\text{pred}(d) = \{a, c\}$, $V(a) = \{b, d, e\}$ et $\text{deg}^+(b) = 1$. On voit aussi que les arcs (a, b) et (e, a) sont adjacents.

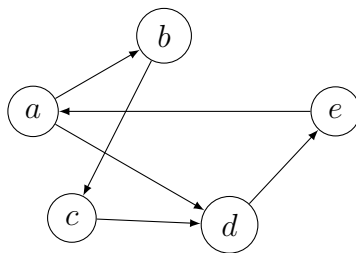


FIGURE 1.2 – Exemple d'un graphe orienté.

Définition 1.1.8. *Un multi-ensemble est un ensemble où chaque élément peut apparaître une ou plusieurs fois.*

On s'intéresse non seulement à savoir si un élément appartient ou non à un multi-ensemble donné, mais également à sa multiplicité. Par exemple, $\{7, 5, 9\}$ et $\{9, 5, 5, 7\}$ représentent des multi-ensembles différents : l'ordre de multiplicité de l'élément 5 est 1 dans le premier cas et 2 dans le second.

Définition 1.1.9. *Un multi-graphe $G = (V, E)$ est un graphe pour lequel l'ensemble E des arcs est un multi-ensemble. Autrement dit, il peut exister plus d'un arc reliant deux sommets donnés.*

On dit que le multi-graphe $G = (V, E)$ est fini si V et E sont finis.

Définition 1.1.10. *Un p -graphe est un multi-graphe $G = (V, E)$ pour lequel tout arc de E est répété au plus p fois.*

Le plus souvent, on étudiera des 1-graphes.

Exemple 3.

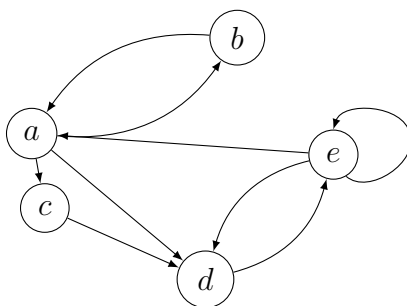


FIGURE 1.3 – Exemple d'un multi-graphe.

Définition 1.1.11. *Un graphe $G = (V, E)$ est dit simple s'il ne s'agit pas d'un multi-graphe et si E est antiréflexive, c'est-à-dire qu'il ne comporte aucune boucle et que deux arêtes ne relient jamais la même paire de sommets.*

Exemple 4.

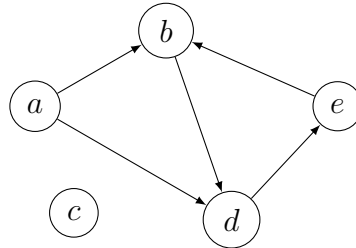


FIGURE 1.4 – Un graphe simple orienté.

Le sommet c est dit un point isolé.

1.2 Graphes non orientés

Définition 1.2.1. *Soit $G = (V, E)$ un graphe (resp. un multi-graphe). Si E est une relation symétrique sur V , on dira que G est un graphe (resp. un multi-graphe) non orienté. C'est-à-dire, G est non orienté si :*

$$\forall v_1, v_2 \in V : (v_1, v_2) \in E \Rightarrow (v_2, v_1) \in E.$$

La paire $\{v_i, v_j\}$ est appelée une arête, on la représente en traçant un segment entre v_i et v_j .

Exemple 5.

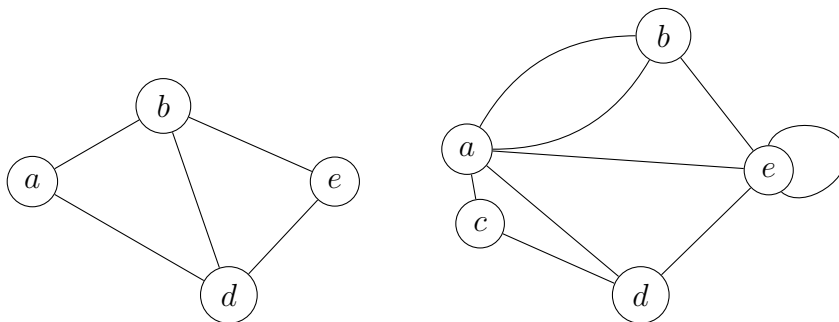


FIGURE 1.5 – Exemple d'un graphe et multi-graphe non orientés.

Définition 1.2.2. Soit $a = \{v_i, v_j\}$ une arête d'un multi-graphe non orienté $G = (V, E)$. On dit que a est incident aux sommets v_i et v_j .

On suppose en outre que les boucles apportent une double contribution au degré d'un sommet.

Définition 1.2.3. On appelle degré de v_i , noté $deg(v_i)$ le nombre d'arêtes incidentes à v_i . L'ensemble des arêtes incidentes à v_i se note $w(v_i)$.

Il est clair que, dans un graphe simple, $deg(v_i) = |w(v_i)|$.

Définition 1.2.4. Deux sommets v_i et $v_j \in V$ sont adjacents (ou voisins) si l'arête $a = \{v_i, v_j\} \in E$. L'ensemble des voisins d'un sommet v se note $V(v)$.

Définition 1.2.5. On dit que deux arêtes sont adjacentes si elles ont au moins une extrémité en commun.

La définition d'un p -graphe est analogue à celle donnée dans le cas orienté.

Remarque (Handshaking lemma). Si $G = (V, E)$ est un multi-graphe non orienté, alors :

$$\sum_{v \in V} deg(v) = 2|E|$$

Définition 1.2.6. Soit $k \geq 1$. Un graphe orienté (resp. non orienté) $G = (V, E)$ est k -régulier si pour tout sommet $v \in V$, $d^+(v) = k$ (resp. $deg(v) = k$).

Exemple 6.

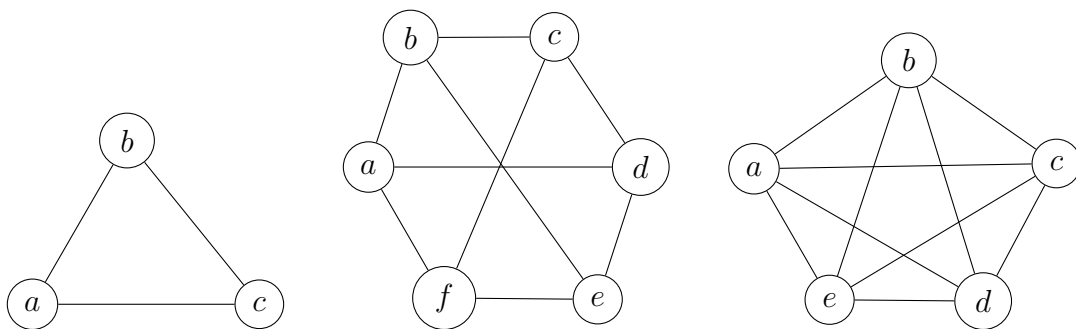


FIGURE 1.6 – Des graphes simples 2, 3 et 4-réguliers.

Définition 1.2.7. On dit qu'un graphe $G = (V, E)$ est complet si l'ensemble $E = V \times V \setminus \{(v, v) | v \in V\}$. En particulier, un graphe complet est symétrique.

On note k_n le graphe simple non orienté complet à n sommets.

Exemple 7.

Les graphes 2 et 4-réguliers représentés dans la figure 1.6 sont aussi des graphes complets.

Définition 1.2.8. Un graphe est biparti s'il existe une partition de son ensemble de sommets en deux sous-ensembles V_1 et V_2 telle que chaque arête ait une extrémité dans V_1 et l'autre dans V_2 .

On peut généraliser cette notion et définir des graphes n -partis, pour $n \geq 2$. Pour ce faire, V doit être partitionné en n sous-ensembles V_1, \dots, V_n de manière telle que : $E \subseteq V_i \times V_j$.

Définition 1.2.9. Si $|V_1| = m$ et $|V_2| = n$ et $E = V_1 \times V_2$, alors on parle du graphe biparti complet et il est noté $K_{m,n}$.

Exemple 8.

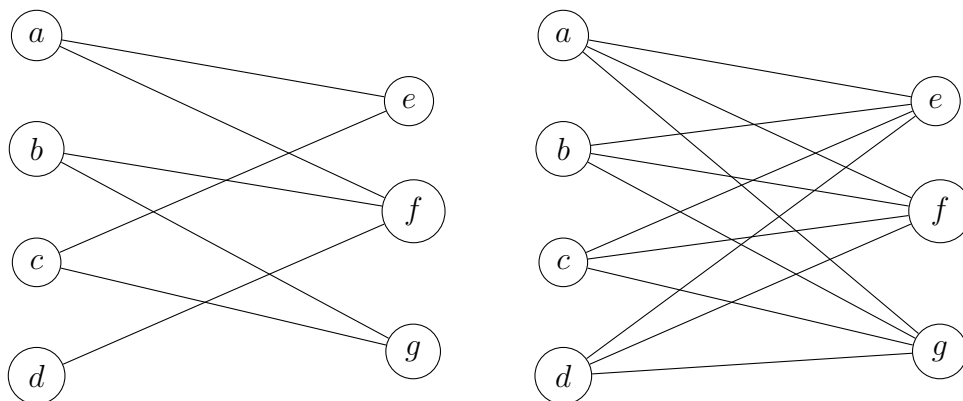


FIGURE 1.7 – Un graphe biparti non complet et un graphe biparti complet.

Le premier graphe de la figure 1.7 est un graphe biparti non complet, son ensemble de sommets est divisé en deux sous-ensembles $V_1 = \{a, b, c, d\}$ et $V_2 = \{e, f, g\}$. Par contre le dernier graphe est un graphe biparti complet.

Remarque. Un graphe est biparti si et seulement s'il ne contient pas de cycles impairs.

1.3 Chemins et circuits

Définition 1.3.1. Soit $G = (V, E)$ un graphe non orienté. Une chaîne de longueur $k \geq 1$ est une suite ordonnée (v_1, \dots, v_k) des k arêtes adjacentes $v_i = \{v_{i,1}, v_{i,2}\}$. On dit que la chaîne (v_1, \dots, v_k) passe par les arêtes v_1, \dots, v_k (resp. par les sommets $v_{1,1}, v_{2,1}, \dots, v_{k,1}$ et $v_{k,2}$).

On supposera qu'une chaîne de longueur 0 (correspondant à la suite vide) joint toujours un sommet à lui-même.

Définition 1.3.2. On parle de cycle, si le premier et le dernier sommet de la chaîne sont identiques, i.e., si $v_{1,1} = v_{k,2}$.

On parle de chaîne ouverte si la chaîne considérée n'est pas un cycle.

Définition 1.3.3. On parle d'une chaîne élémentaire si les arêtes de cette chaîne sont toutes distinctes (cela n'implique pas que les sommets de chaîne soient tous distincts).

Définition 1.3.4. On parle d'une chaîne simple si les arêtes de cette chaîne sont toutes distinctes et si de plus, les sommets sont tous distincts (sauf que le premier et le dernier peuvent être les mêmes dans le cas du cycle).

On peut parler aussi de cycle élémentaire ou simple. Dans la définition d'un cycle simple, on admet que les sommets $v_{1,1}$ de départ et $v_{k,2}$ d'arrivé peuvent être égaux, mais seulement eux.

Exemple 9.

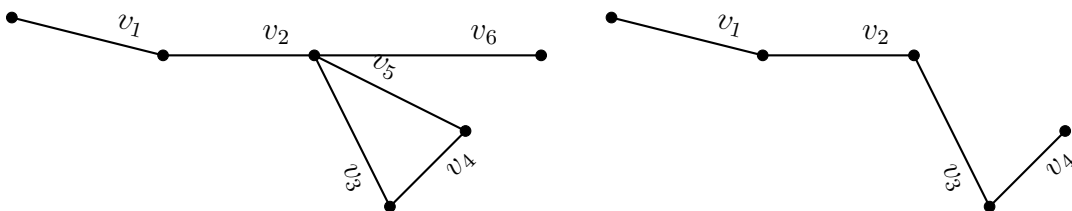


FIGURE 1.8 – Une chaîne élémentaire et Une chaîne simple.

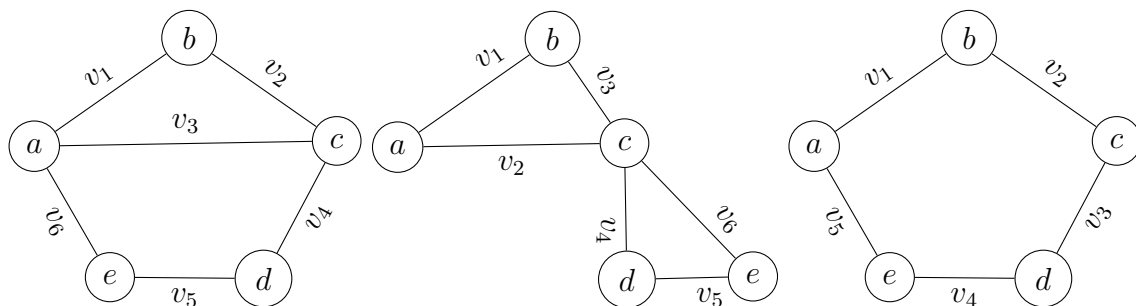


FIGURE 1.9 – Un cycle, un cycle élémentaire et un cycle simple.

Définition 1.3.5. *La longueur d'un cycle élémentaire est le nombre de ses arêtes (ou de ses sommets).*

Définition 1.3.6. *Étant donné un graphe G , la circonférence de G , notée par $gr(G)$, est la longueur d'un cycle le plus court dans G . Si G n'a pas de cycle, nous définissons la circonférence de G comme étant infinie.*

Définition 1.3.7. *On dit que deux sommets a et b sont connectés s'il existe un chemin les joignant, ce que l'on notera $a \sim b$. La relation \sim "être connecté" est une relation d'équivalence sur V . Une classe d'équivalence pour \sim est une composante connexe de graphe G .*

Définition 1.3.8. *Un multi-graphe non orienté est connexe si V/\sim contient une seule classe d'équivalence, c-à-d, G admet une unique composante connexe. Autrement dit, un multi-graphe non orienté est connexe si, pour tout couple de sommets, il existe une chaîne les joignant.*

On supposera de plus que $G = (\{v\}, \emptyset)$ est connexe (ce qui revient à supposer qu'une chaîne de longueur 0 joint toujours un sommet à lui-même).

Définition 1.3.9. *Soit $G = (V, E)$ un multi-graphe non orienté connexe. La distance entre deux sommets a et b est la longueur de la plus courte chaîne entre ces deux sommets, on la note par $d(a, b)$.*

Définition 1.3.10. *Le diamètre de G est défini par :*

$$diam(G) = \max_{a, b \in V} d(a, b).$$

Remarque. Dans un graphe simple qui n'est pas connexe on peut aussi définir la distance entre deux sommets a et b par $d(a, b) = \infty$ s'il n'existe

pas une chaîne reliant a et b .

Les définitions données précédemment s'adaptent aisément au cas d'un graphe orienté. Il suffit de respecter en plus le sens de parcours imposé par les arcs. Donnons quelques précisions.

Définition 1.3.11. Soit $G = (V, E)$ un multi-graphe orienté. Un chemin de longueur $k \geq 1$ est une suite ordonnée (v_1, \dots, v_k) de k arcs $v_i = \{v_{i,1}, v_{i,2}\}$ tels que pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$, $v_{i,2} = v_{i+1,1}$. Ce chemin de longueur k relie les sommets $v_{1,1}$ et $v_{k,2}$.

Définition 1.3.12. S'il existe un chemin joignant deux sommets a et b , on notera $a \rightarrow b$. Si $a \rightarrow b$ et $b \rightarrow a$ on dira que a et b sont fortement connectés et on notera $a \leftrightarrow b$. Si on impose à la relation \leftrightarrow d'être réflexive (c'est à dire on suppose que $a \leftrightarrow a$), on vérifie aisément que la relation \leftrightarrow " être fortement connecté " est une relation d'équivalence sur l'ensemble V .

Définition 1.3.13. Une classe d'équivalence pour \leftrightarrow est une composante fortement connexe de graphe G . On dira que G est fortement connexe si V / \leftrightarrow contient une unique classe d'équivalence.

Définition 1.3.14. Les sommets appartenant à un circuit maximal, i.e., un circuit auquel on ne peut rajouter de nouveaux sommets, constituent une composante fortement connexe. D'une autre manière on dit qu'un multi-graphe orienté G est fortement connexe si et seulement s'il existe un circuit passant par chaque sommet de celui-ci.

Définition 1.3.15. On dira que G est simplement connexe, si en supprimant l'orientation des arcs de graphe G , le multi-graphe non orienté obtenu de cette manière est connexe.

On pourra définir, de manière évidente, les composantes simplement connexes de G .

Remarque. Les notions de distance et de diamètre données dans le cas non orienté s'adaptent facilement au cas d'un multi-graphe orienté fortement connexe.

Exemple 10.

On considère le graphe orienté de la figure 1.10 dont l'ensemble des sommets est $\{a, \dots, e\}$ et l'ensemble des arcs est $\{1, \dots, 7\}$.

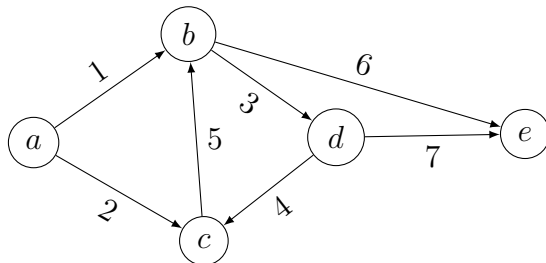


FIGURE 1.10 – Un graphe orienté.

Ce graphe est simplement connexe mais il n'est pas fortement connexe. En effet il n'existe pas un chemin relie les sommets d à a .

L'ensemble $\{b, c, d\}$ est une composante fortement connexe du graphe. Par exemple un chemin est donné par $(1, 3, 7)$, un cycle par $(3, 4, 5)$ et chemin élémentaire par $(1, 3, 4, 5, 6)$.

La distance entre les deux sommets d et c vaut 1. Par contre, la distance entre c et d vaut 2.

1.4 Sous-graphes

Définition 1.4.1. Soit $G = (V, E)$ un graphe (orienté ou non). Un sous-graphe de G est un graphe $G' = (V', E')$ tel que :

- ✓ $V' \subseteq V$,
- ✓ $E' \subseteq E \cap (V' \times V)$.

Définition 1.4.2. G' est un sous-graphe de G s'il est obtenu en enlevant à G certains sommets et/ou certains arcs ou arêtes. En particulier, si on enlève un sommet v de graphe G , il faut nécessairement enlever tous les arcs ou arêtes incidents à v .

Pour construire G' , on peut très bien enlever un arc ou une arête de G sans pour autant enlever le moindre sommet de G .

Définition 1.4.3. Le graphe G' est un sous-graphe propre de G si $E' \subsetneq E$ ou $V' \subsetneq V$.

Exemple 11.

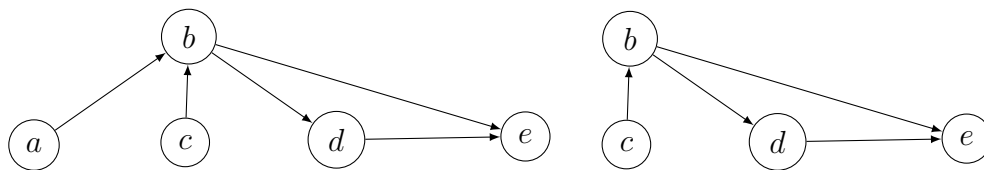


FIGURE 1.11 – Un graphe G et un sous-graphe G_1 de G .

Définition 1.4.4. Soit $G = (V, E)$ un graphe (orienté ou non). Si $e \in E$ on note $G' = G - e$ le sous-graphe de G obtenu en supprimant l'arc (ou l'arête) e . Si $v \in V$ on note $G' = G - v$ le sous-graphe de G obtenu en supprimant le sommet v et les arcs (ou les arêtes) adjacents.

Définition 1.4.5. On notera $G' = G + e$ (resp. $G' = G + v$), le graphe obtenu par adjonction à G' d'une arête ou d'un sommet.

On peut bien évidemment étendre ces notations à un ensemble fini de sommets.

Définition 1.4.6. Soit $W = \{v_1, \dots, v_k\} \subseteq V$ alors $G - W$ est le sous-graphe $G - v_1 - \dots - v_k$. Le sous-graphe de G induit par W est le sous-graphe $G' = (W, E')$ avec $E' = E \cap (W \times W)$.

1.5 Points d'articulation, Cliques

Définition 1.5.1. Soit $G = (V, E)$ un multi-graphe non orienté connexe (ou une composante connexe d'un multi-graphe non orienté). On dit que le sommet v est un point d'articulation, si $G - v$ n'est plus connexe. D'une manière générale, on dit aussi que le sommet v est un point d'articulation d'un multi-graphe G si $G - v$ contient plus de composantes connexes que G .

Remarque. On dit que G est au moins 2 – connexe, si G est connexe et ne contient aucun point d'articulation.

Définition 1.5.2. Un ensemble d'articulation est un ensemble W de sommets du multi-graphe connexe $G = (V, E)$ tel que $G - W$ n'est plus connexe. D'une manière générale, pour un multi-graphe G quelconque, on dit aussi que W est un ensemble d'articulation si $G - W$ contient plus de composantes connexes que G .

Exemple 12.

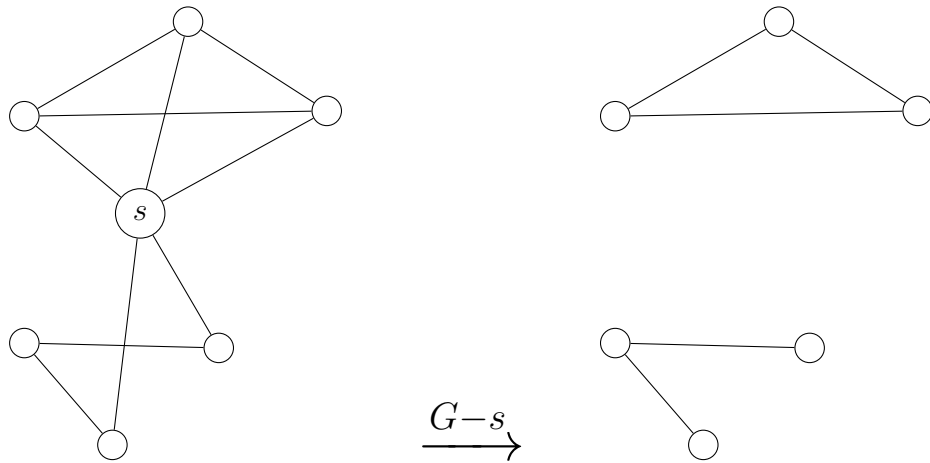


FIGURE 1.12 – $G = (V, E)$ un graphe connexe et $G - s$ n'est pas connexe.

Dans la figure 1.11 le graphe G est connexe, mais après la suppression du sommet s le graphe $G - s$ n'est plus connexe. Alors le sommet s est un point d'articulation.

Définition 1.5.3. Une clique d'un graphe simple non orienté $G = (V, E)$ est un sous-graphe complet de G . C'est-à-dire que deux sommets quelconques de la clique sont toujours adjacents.

Définition 1.5.4. Le nombre de sommets dans la plus grande clique d'un graphe G est appelé le nombre de clique de G et noté $\omega(G)$.

Définition 1.5.5. La taille d'une clique est le nombre de sommets qui la composent.

Exemple 13.

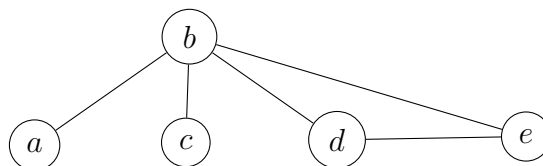


FIGURE 1.13 – Un graphe G admet une 3-clique.

Les trois sommets b, d et e de ce graphe forment une clique de taille 3, ces sommets sont tous adjacents deux-à-deux.

Définition 1.5.6. Une co-clique d'un graphe G est un sous-ensemble S des sommets de G tel deux sommets quelconque ne sont pas adjacents. Une co-clique dans un graphe G est une clique dans son graphe complémentaire G' .

Définition 1.5.7. Un ensemble indépendant d'un graphe G est un sous-ensemble de sommets de G tel que deux sommets du sous-ensemble ne représentent pas une arête de G .

Définition 1.5.8. Le nombre d'indépendance de G , noté $\alpha(G)$, est le cardinal du plus grand ensemble indépendant.

Définition 1.5.9. Un sous-ensemble non vide S de sommets de G est un ensemble dominant si chaque sommet de $V \setminus S$ est adjacent à un sommet de S .

Définition 1.5.10. Le nombre de domination noté $\gamma(G)$ est défini comme étant le nombre de sommets dans le plus petit ensemble dominant dans G .

1.6 Isomorphismes de graphes

Définition 1.6.1. Soient $G_i = (V_i, E_i)$ avec $i = 1, 2$, deux graphes orientés (resp. deux graphes non orientés). Une application $f : V_1 \rightarrow V_2$ est un homomorphisme si :

$$(x, y) \in E_1 \implies (f(x), f(y)) \in E_2$$

$$(resp. \{x, y\} \in E_1 \implies \{f(x), f(y)\} \in E_2).$$

On parlera alors d'homomorphisme de G_1 dans G_2 .

Exemple 14.

Soient G et H , les deux graphes représentés dans la figure 1.14, on voit facilement qu'on a un homomorphisme de G dans H .

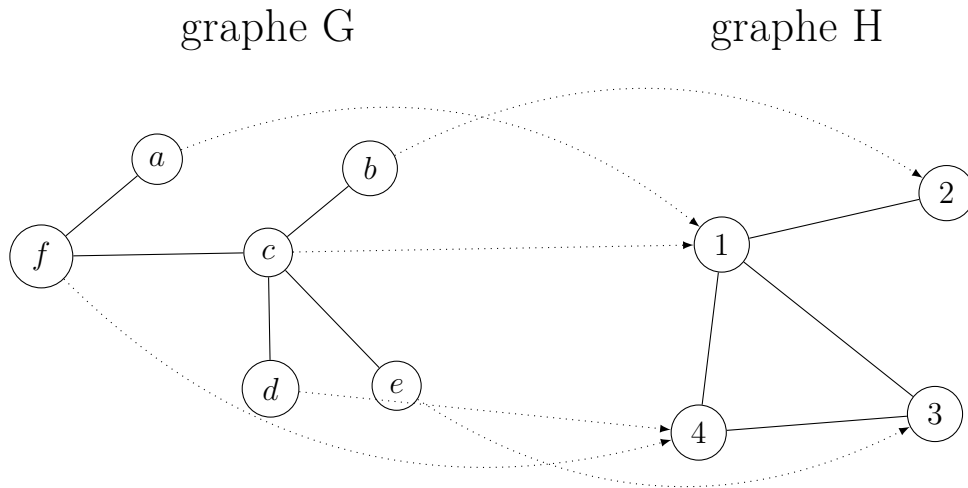


FIGURE 1.14 – Homomorphisme de graphe G dans H .

Définition 1.6.2. Deux graphes orientés (resp. deux graphes non orientés) $G_i = (V_i, E_i)$ avec $i = 1, 2$, sont isomorphes (ce qui signifie avoir la même forme) s'il existe une bijection $f : V_1 \rightarrow V_2$ telle que :

$$(x, y) \in E_1 \iff (f(x), f(y)) \in E_2$$

$$\text{(resp. } \{x, y\} \in E_1 \iff \{f(x), f(y)\} \in E_2 \text{)}.$$

Exemple 15.

Les deux graphes représentés à la figure 1.15 sont isomorphes. On a un isomorphisme donné par :

$$\varphi : a \rightarrow 0, b \rightarrow 1, c \rightarrow 2, d \rightarrow 3, e \rightarrow 4$$

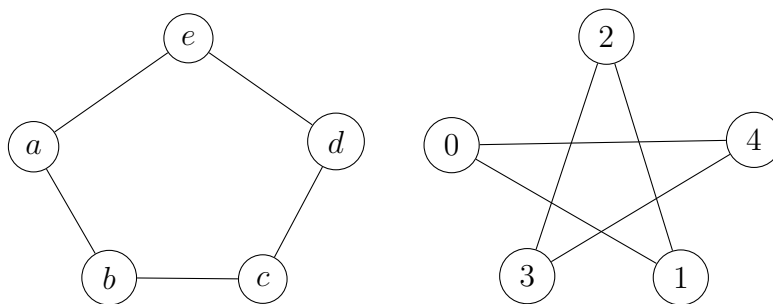


FIGURE 1.15 – Deux graphes isomorphes.

La définition donnée précédemment s'adapte aussi au cas de multigraphes orientés.

Définition 1.6.3. Deux multi-graphes $G_i = (V_i, E_i)$ avec $i = 1, 2$, sont isomorphes s'il existe une bijection $f : V_1 \rightarrow V_2$ telle que (x, y) est un arc de multiplicité k de G_1 si et seulement si $(f(x), f(y))$ est un arc de multiplicité k de G_2 .

1.7 Arbres

Définition 1.7.1. Un graphe simple non orienté $G = (V, E)$ est un arbre s'il est connexe et sans cycle.

Exemple 16.

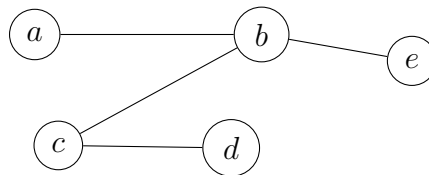


FIGURE 1.16 – Un arbre

Théorème 1.7.1. [12] Soit $G = (V, E)$ un graphe simple. Les assertions suivantes sont équivalentes

- 1) G est un arbre.
- 2) G est connexe et chaque arête est un pont.
- 3) Deux sommets distincts sont connectés par exactement une chaîne élémentaire.
- 4) G est sans cycle et l'ajout d'une nouvelle arête crée exactement un cycle élémentaire.

Si de plus G est d'ordre fini, ces assertions sont aussi équivalentes à chacune des assertions :

- 5) G est sans cycle et $|E| = |V| - 1$.
- 6) G est connexe et $|E| = |V| - 1$.

Définition 1.7.2. Un graphe partiel de G qui est un arbre est appelé arbre de recouvrement de G .

Proposition 1.7.1. Un graphe $G = (V, E)$ d'ordre fini admet un arbre $G' = (V, E')$ comme graphe partiel si et seulement s'il est connexe.

Définition 1.7.3. Le graphe chemin P_n est un arbre avec deux nœuds de degré 1 et les $n - 2$ autres nœuds de degré 2.

Un graphe chemin est donc un graphe qui peut être dessiné de telle sorte que tous ses sommets et arêtes se trouvent sur une seule ligne droite.

Exemple 17.



FIGURE 1.17 – Un graphe chemin

La figure 1.17 représente un graphe chemin de 6 sommets tels que : les sommets a et b sont de degré 1 et les 4 autres sommets sont de degré 2.

Définition 1.7.4. Une forêt est un graphe sans cycle, ainsi les composantes connexes d'une forêt sont des arbres.

1.8 Coloriage

Définition 1.8.1. Une coloration des sommets d'un graphe $G = (V, E)$ simple et sans boucle est une application

$$f : V \rightarrow \mathbb{C}$$

telle que $f(v_i) \neq f(v_j)$ lorsque v_j est adjacent à v_i avec $1 \leq i, j \leq n$.

Définition 1.8.2. On appelle k -coloration une coloration des sommets avec k couleurs : $|f(V)| = k$, c'est pourquoi on prendra $f(V) = \{1, 2, \dots, k\}$.

Exemple 18.

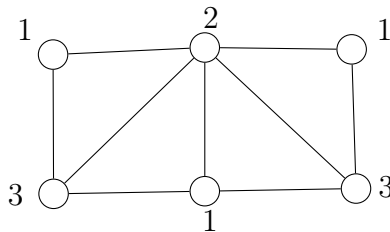


FIGURE 1.18 – Un graphe $G = (V, E)$ admettant une 3-coloration.

La figure 1.18 représente un graphe G 3-colorable tel que

$$\{v_i, v_j\} \in E(G) \implies f(v_i) \neq f(v_j).$$

f est une application qui associe à chaque sommet de G une couleur de l'ensemble $\{1, 2, 3\}$ de façon que les sommets voisins ont des couleurs distinctes.

Définition 1.8.3. Une k -coloration est une coloration propre des sommets telle que chaque paire de couleurs possède des sommets adjacents.

Remarque. Un graphe $G = (V, E)$ est 1-colorable si et seulement si $E = \emptyset$.

Définition 1.8.4. Le nombre chromatique d'un graphe G , noté $\chi(G)$, est le nombre minimum de couleurs nécessaire pour colorier tous les sommets de graphe G .

Exemple 19.

On considère le graphe G de la figure 1.18, le nombre chromatique de G est $\chi(G) = 3$.

Définition 1.8.5. Une coloration des arêtes d'un graphe G s'agit d'attribuer une couleur à chaque arête du graphe de telle sorte qu'aucun sommet ne soit incident à deux arêtes de même couleur.

Définition 1.8.6. Le nombre minimal de couleurs nécessaire pour réaliser la coloration des arêtes d'un graphe G est appelé indice chromatique de G ou bien nombre chromatique des arêtes de graphe G et noté par $\chi'(G)$.

Exemple 20.

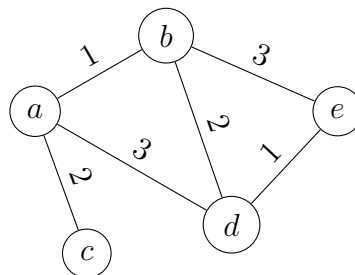


FIGURE 1.19 – Coloration des arêtes.

Dans la figure 1.20, on a besoin de trois couleurs pour colorer les arêtes de sorte que deux arêtes adjacentes ont des couleurs différentes.

Définition 1.8.7. Soit $G = (V, E)$ un graphe simple, $\Delta(G)$ est le degré maximum des sommets.

Théorème 1.8.1. (Vizing, 1964) Soit $G = (V, E)$ un graphe simple. Alors :

$$\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + 1.$$

Ce théorème divise les graphes simples en deux classes :

La classe 1 contient les graphes tels que $\chi'(G) = \Delta$.

La classe 2 contient ceux qui vérifient $\chi'(G) = \Delta + 1$.

Graphes et matrices

Les matrices classiques permettant de représenter un graphe sont : la matrice d'adjacence, à valeurs booléennes, la matrice d'incidence, à valeurs 0, +1 et -1, et la matrice Laplacienne.

La matrice des degrés, introduite ici, a pour objectif de mettre les trois matrices précédentes en relation.

2.1 Matrice d'adjacence

2.1.1 Cas non orienté

Définition 2.1.1. *Soit $G = (V, E)$ un multi-graphe non orienté dont les sommets sont ordonnés par $V = \{v_1, \dots, v_n\}$. La matrice d'adjacence de graphe G est la matrice notée par $A(G)$ dont l'élément $[A(G)]_{i,j}$ est égal au nombre d'arêtes $\{v_i, v_j\} \in E$, $1 \leq i, j \leq n$.*

La matrice d'adjacence est donc symétrique à coefficients entiers naturels.

Exemple 1.

La figure 2.1 représente la matrice d'adjacence d'un multi-graphe non orienté et la figure 2.2 représente la matrice d'adjacence d'un graphe simple. On compare chaque matrice avec son graphe correspondant, on remarque que la somme des éléments de chaque ligne ou colonne est égale au degré du sommet correspondant.

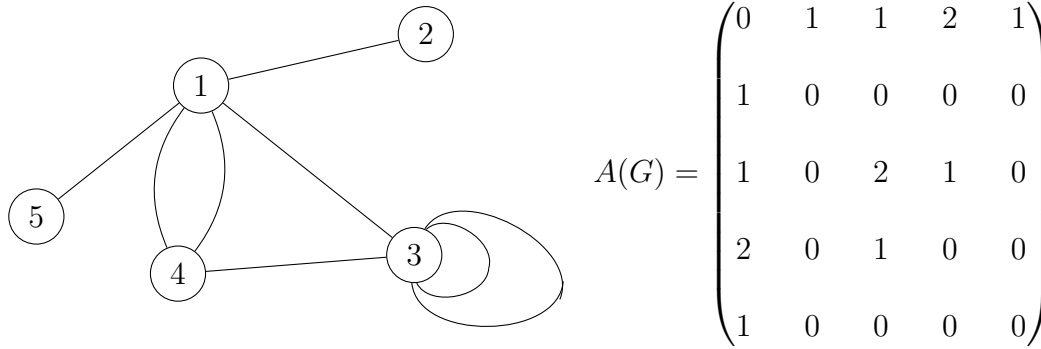


FIGURE 2.1 – Un multi-graphe G et sa matrice d'adjacence.

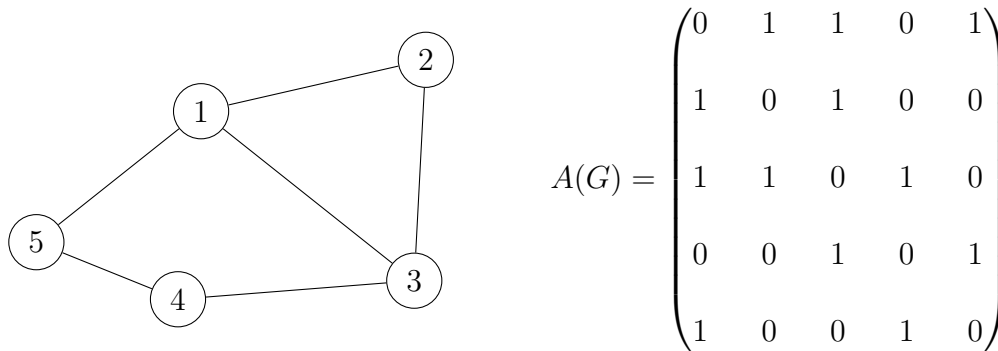


FIGURE 2.2 – Un graphe simple G et sa matrice d'adjacence.

2.1.2 Cas orienté

Définition 2.1.2. Soit $G = (V, E)$ un multi-graphe orienté dont les sommets sont ordonnés par $V = \{v_1, \dots, v_n\}$. La matrice d'adjacence du graphe G est la matrice notée par $A(G)$ dont l'élément $[A(G)]_{i,j}$ est égal au nombre d'arcs $(v_i, v_j) \in E$, $1 \leq i, j \leq n$.

Exemple 2.

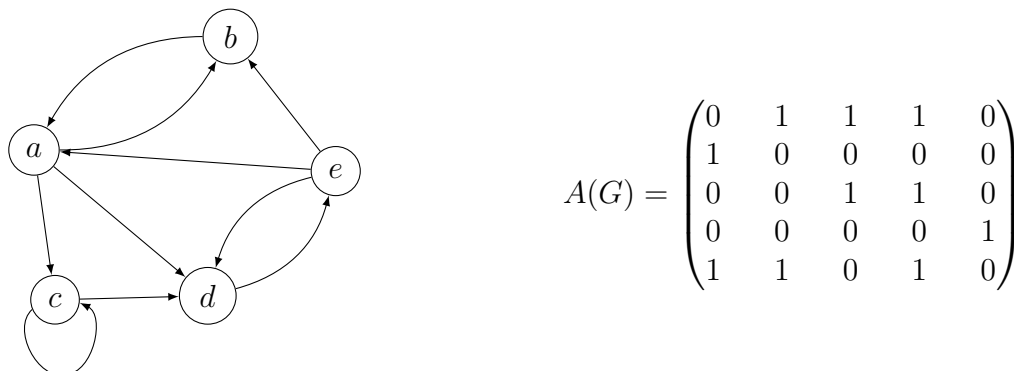


FIGURE 2.3 – Un multi-graphe orienté et sa matrice d'adjacence.

2.1.3 Propriétés

Définition 2.1.3. Une matrice de permutation est une matrice obtenue à partir de la matrice identité en permutant les colonnes.

Proposition 2.1.1. Soit G_1 et G_2 deux graphes sur le même ensemble de sommets. On dit qu'ils sont isomorphes si et seulement s'ils ont, à une permutation près, la même matrice d'adjacence. Autrement dit, il existe une matrice de permutation P telle que :

$$A(G_1) = P^{-1}A(G_2)P$$

Preuve. Pour des graphes isomorphes, l'isomorphisme donne une permutation des sommets, ce qui conduit à une matrice de permutation. De même, la matrice de permutation donne un isomorphisme. \square

Théorème 2.1.1. [28] Soit $G = (V, E)$ un graphe (orienté ou non) tel que $V = \{v_1, \dots, v_k\}$. Pour tous $i, j \in \{1, \dots, k\}$ et pour tout $n > 0$, $[A(G)^n]_{i,j}$ est exactement le nombre de chemins de longueur n joignant v_i à v_j .

Preuve. Raisonnons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.

Si $n = 1$, la propriété est vérifiée, car un chemin/une chaîne de longueur 1 est un arc/arête. On suppose que la propriété est vérifiée à l'ordre n et vérifions-le à l'ordre $n + 1$. On a

$$A(G)^{n+1} = A(G)^n A(G)$$

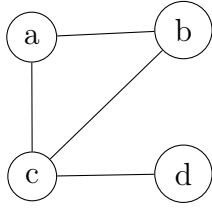
alors

$$[A(G)^{n+1}]_{i,j} = \sum_{s=1}^k [A(G)^n]_{i,s} [A(G)]_{s,j}.$$

si $[A(G)]_{s,j} = r$, alors il y a r arêtes/arc entre v_s et v_j , or par hypothèse de récurrence, $[A(G)^n]_{i,s}$ est le nombre de chemins de longueur n joignant les sommets v_i à v_s . Par conséquent, chaque terme $[A(G)^n]_{i,s} [A(G)]_{s,j}$, $s = 1, \dots, k$, est le nombre de chemins de longueur $n + 1$ reliant v_i à v_j en passant par les sommet v_s . Finalement, en sommant sur tous les $s = 1, \dots, k$, $[A(G)^{n+1}]_{i,j}$ compte bien le nombre total de chemins de longueur n entre les sommets v_i et v_j . D'où la conclusion. \square

Exemple 3.

Soit le graphe G de la figure 2.4 et sa matrice d'adjacence.



$$A(G) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

FIGURE 2.4 – Un graphe simple G et sa matrice d'adjacence.

Le nombre de chemins du sommet b au sommet d de longueur 2 peut être trouvé en mettant au carré la matrice A .

$$A^2(G) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Donc si on observe l'élément $(b, d) =$ l'élément $(d, b) = 1$. Il existe un chemin de b à d de longueur 2. Ce chemin est bcd .

De la même façon

$$A^3(G) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \\ 4 & 4 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Élément $(a, c) =$ l'élément $(c, a) = 4$. Par conséquent, il existe 4 chemins de longueur 3 du sommet a au sommet c . Ces chemins sont : $acac$, $acdc$, $acbc$, $abac$.

2.1.4 Polynôme caractéristique

Définition 2.1.4. Soit $G = (V, E)$ un multi-graphe non orienté. Le polynôme caractéristique du graphe G , noté par $\chi_G(\lambda)$ est le polynôme caractéristique de la matrice d'adjacence $A(G)$ de G .

Remarque. On peut remarquer que la matrice d'adjacence d'un graphe non orienté est toujours diagonalisable par une matrice orthogonale et que ses valeurs propres sont réelles.

Définition 2.1.5. On appelle triangle, tout circuit de longueur trois formé d'arêtes distinctes.

Proposition 2.1.2. *Si le polynôme caractéristique de $G = (V, E)$ est de la forme*

$$\chi_G(\lambda) = \lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + c_2\lambda^{n-2} + \dots + c_n,$$

alors certains coefficients de χ_G sont en relation directe avec G :

✓ *$-c_1$ est le nombre de boucles de G , en particulier, si G est simple,*

$c_1 = 0$.

✓ *Si G est simple, alors $-c_2$ est le nombre d'arêtes de G .*

✓ *Si G est simple, alors $-c_3$ est le double du nombre de triangles de G .*

Preuve. Pour chaque $\{i \in 1, \dots, n\}$ le nombre $(-1)^i c_i$ est la somme des déterminants de sous-matrices de la matrice d'adjacence $A(G)$ qui ont i lignes et colonnes. Le premier point est immédiat, le coefficient $-c_1$ est la somme des éléments diagonaux de $A(G)$, et par définition d'une boucle, le coefficient $-c_1$ est le nombre de boucles de graphe G . Si G est un graphe simple, mis à part les mineurs à coefficients tous nuls, un mineur principal d'ordre 2 contribuant à c_2 est de la forme

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Il existe un tel mineur pour chaque paire de sommets adjacents de G , et chacun a une valeur égale à -1 , d'où il est clair que $c_2 = -|E|$. Pour le dernier point, on raisonne de la même façon, pour les mineurs principal d'ordre 3 avec des coefficients non tous nuls, on a trois possibilités

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Les deux premiers mineurs étant nuls et le troisième, valant 2 et correspondant à trois sommets adjacents deux à deux, autrement dit correspondant à la présence d'un triangle dans le graphe G , on obtient donc $-c_3$ comme le double du nombre de ces triangles. \square

Exemple 4.

On considère le graphe simple $G = (V, E)$ de la figure 2.5 et sa matrice d'adjacence.

Le polynôme caractéristique de graphe G est le polynôme caractéristique de sa matrice d'adjacence A , alors :

$$\chi_G(\lambda) = \lambda^5 - 8\lambda^3 - 10\lambda^2 - \lambda + 2.$$

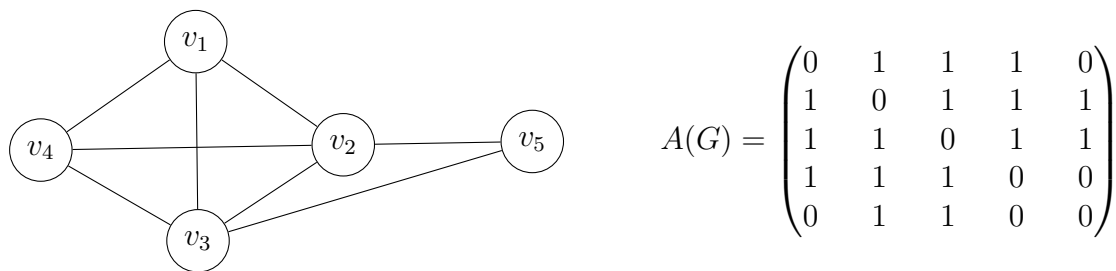


FIGURE 2.5 – Un graphe G et sa matrice d'adjacence.

- Le graphe G est un graphe simple sans boucle, alors le coefficient $c_1 = 0$ est vérifié.
- Le nombre d'arêtes de G vaut 8, alors $-c_2 = 8$ est vérifié.
- Le nombre de triangle dans le graphe G vaut 5, alors $-c_3 = 2 \times 5 = 10$ est vérifié.

Remarque. On voit donc que le polynôme caractéristique de $A(G)$ fournit des renseignements sur le graphe G . Néanmoins deux graphes non isomorphes peuvent avoir le même polynôme caractéristique. On parle alors de graphes cospectraux.

Exemple 5.

La figure 2.6 représente deux graphes non isomorphes ayant le même spectre.

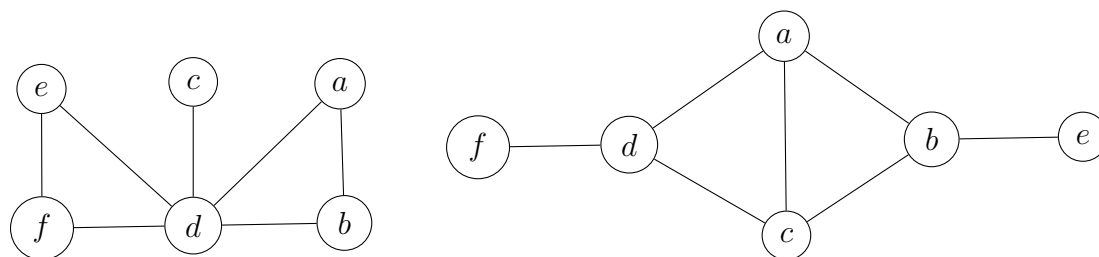


FIGURE 2.6 – Deux graphes cospectraux.

En effet, ils ont tous les deux comme polynôme caractéristique,

$$-1 + 4\lambda + 7\lambda^2 - 4\lambda^3 - 7\lambda^4 + \lambda^6.$$

Remarque. Le polynôme caractéristique est extrêmement important pour la théorie spectrale des graphes, car c'est une construction algébrique qui contient des informations graphiques.

Les racines d'un polynôme caractéristique sont appelées les valeurs propres, qui sont essentielles pour comprendre les propriétés et la structure d'un graphe. Nous les étudierons d'ailleurs au chapitre 3.

2.2 Matrice d'incidence

2.2.1 Cas non orienté

Définition 2.2.1. Si $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ et $E = \{e_1, \dots, e_m\}$, alors la matrice d'incidence associée au graphe non orienté $G = (V, E)$ est une matrice B de dimension $n \times m$ telle que $B_{i,j} = 1$ si et seulement si l'arête e_j incident à v_i .

Exemple 6.

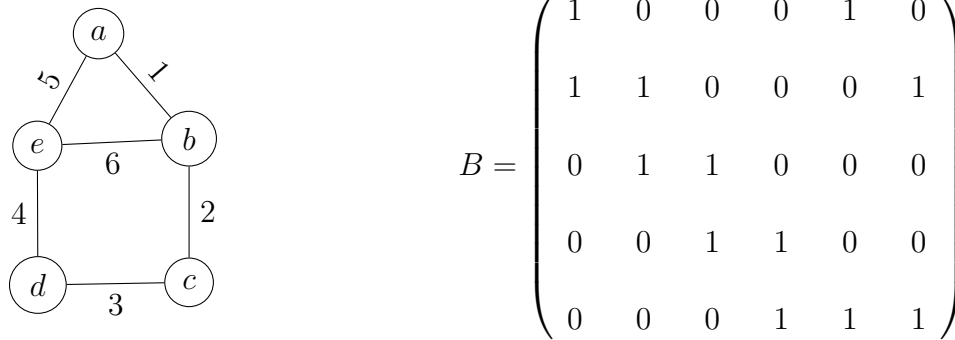


FIGURE 2.7 – Un graphe simple et sa matrice d'incidence.

2.2.2 Cas orienté

Définition 2.2.2. Si $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ et $E = \{e_1, \dots, e_m\}$, alors la matrice d'incidence d'un graphe orienté $G = (V, E)$, noté par $B(G)$, est une matrice de dimension $n \times m$ définie par $B(G) = (b_{i,j})$ avec

$$b_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si le sommet } v_i \text{ et l'arc } e_j \text{ ne sont pas incident} \\ 1 & \text{si l'arc } e_j \text{ entre du sommet } v_i \\ -1 & \text{si l'arc } e_j \text{ sort dans sommet } v_i. \end{cases}$$

Exemple 7.

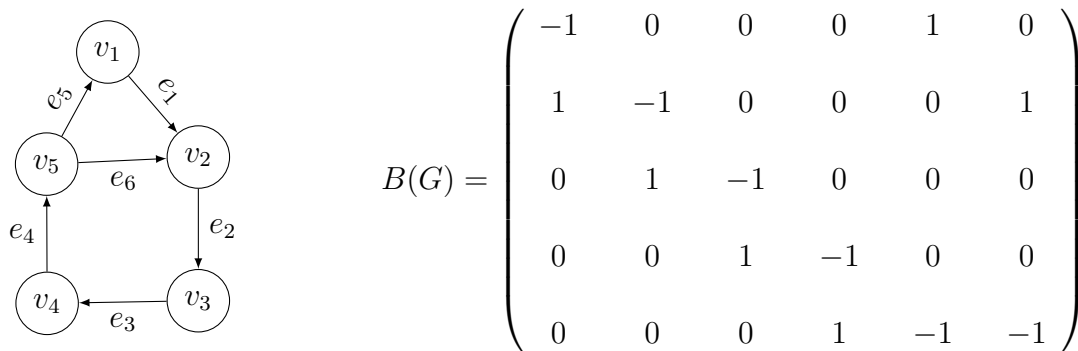


FIGURE 2.8 – Un graphe orienté et sa matrice d’incidence.

2.2.3 Matrice des degrés

Définition 2.2.3. Soit $G = (V, E)$ un graphe (orienté ou non), avec $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ et $E = \{e_1, \dots, e_m\}$. La matrice des degrés du graphe G est la matrice diagonale $D = (d_{i,j}) \in M_n(\mathbb{Z})$ définie par

$$d_{i,j} = \begin{cases} \deg(v_i) & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour un graphe orienté on a $\deg(v_i) = \deg^+(v_i) + \deg^-(v_i)$.

Exemple 8.

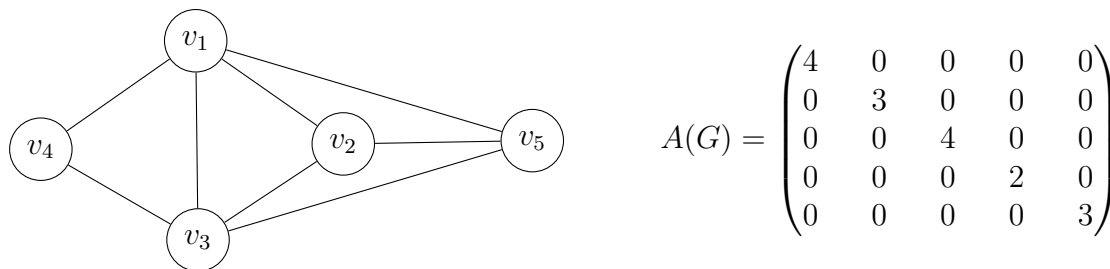


FIGURE 2.9 – Un graphe G non orienté et sa matrice des degrés.

2.2.4 La relation entre matrice d’incidence et d’adjacence d’un graphe

La proposition suivante relie la matrice d’incidence d’un graphe (orienté ou non) à sa matrice d’adjacence.

Proposition 2.2.1. Soit $G = (V, E)$ un graphe (orienté ou non) sans boucle, A sa matrice d'adjacence, B sa matrice d'incidence et D sa matrice des degrés. Alors $B {}^tB \in M_n(\mathbb{Z})$ (tB désigne la transposée de B) et

$$B {}^tB = \begin{cases} A + D & \text{si } G \text{ est un graphe non orienté,} \\ -A + D & \text{si } G \text{ est un graphe orienté.} \end{cases}$$

Preuve. On distingue deux cas :

1) Cas non orienté : si $B = (b_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}}$, on a : $B {}^tB = (\beta_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$, avec

$$\beta_{i,j} = \sum_{k=1}^m b_{i,k} b_{k,j}, \quad 1 \leq i, j \leq n.$$

- $\beta_{i,i} = \sum_{k=1}^m b_{i,k}^2$ est le nombre d'arêtes incidentes à v_i , c'est donc le degré de sommet v_i . Or $\text{deg}(v_i) = d_{i,i} = a_{i,i} + d_{i,i}$ car $a_{i,i} = 0$, le graphe étant sans boucle.

- Pour $i \neq j$, on a $d_{i,j} = 0$, on distingue deux cas :

* si v_i n'est pas adjacent à v_j , alors : $a_{i,j} = 0$ et pour tout $1 \leq k \leq m$ on a : soit $b_{i,k} = 0$, soit $b_{k,j} = 0$ (car sinon v_i et v_j seraient incidents à l'arête e_k et seraient donc adjacents). Donc $\beta_{i,j} = 0 = a_{i,j} + d_{i,j}$.

* si v_i est adjacent à v_j , alors :

$$b_{i,k} b_{k,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } e_k \text{ est incidente à } v_i \text{ et } v_j \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

donc $\beta_{i,j}$ est bien le nombre d'arêtes incidentes à v_i et v_j , qui vaut $a_{i,j} = a_{i,j} + d_{i,j}$.

2) Cas orienté : la même procédure de cas précédent la seule différence est lorsque le sommet v_i est adjacent à v_j :

- si e_k est orientée de v_i à v_j , on a $b_{i,k} b_{k,j} = -1$.

- si e_k est orientée de v_j à v_i , on a $b_{i,k} b_{k,j} = 1$.

donc $\beta_{i,j}$ est l'opposé du nombre d'arêtes incidentes à v_i et v_j , i.e.

$\beta_{i,j} = -a_{i,j} = -a_{i,j} + d_{i,j}$, d'où le résultat. \square

Exemple 9.

1) Cas non orienté : on considère le graphe non orienté représenté dans

la figure 2.6. Soit $A(G)$ la matrice d'adjacence, $D(G)$ la matrice des degrés et B la matrice d'incidence de ce graphe :

$$\begin{aligned}
 A(G) + D(G) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B \times {}^t B &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Alors $B {}^t B = A + D$

2) Cas orienté : on considère le graphe orienté représenté dans la figure 2.7. Soit $A(G)$ la matrice d'adjacence, $D(G)$ la matrice des degrés de ce graphe mais sans orientation et $B(G)$ la matrice d'incidence de ce graphe avec orientation :

$$-A(G) + D(G) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$B \times {}^t B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Alors $B {}^t B = -A + D$

2.3 Matrice Laplacienne

Définition 2.3.1. Soit $G = (V, E)$ un graphe avec $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ et $E = \{e_1, \dots, e_m\}$. La matrice Laplacienne de G , notée $L(G)$, est la matrice carrée d'ordre n définie par $L(G) = (a_{i,j})$ avec

$$a_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \text{ et les sommets } v_i \text{ et } v_j \text{ ne sont pas adjacents.} \\ -1 & \text{si } i \neq j \text{ et les sommets } v_i \text{ et } v_j \text{ sont adjacents.} \\ \text{deg}(v_i) & \text{si } i = j. \end{cases}$$

Exemple 10.

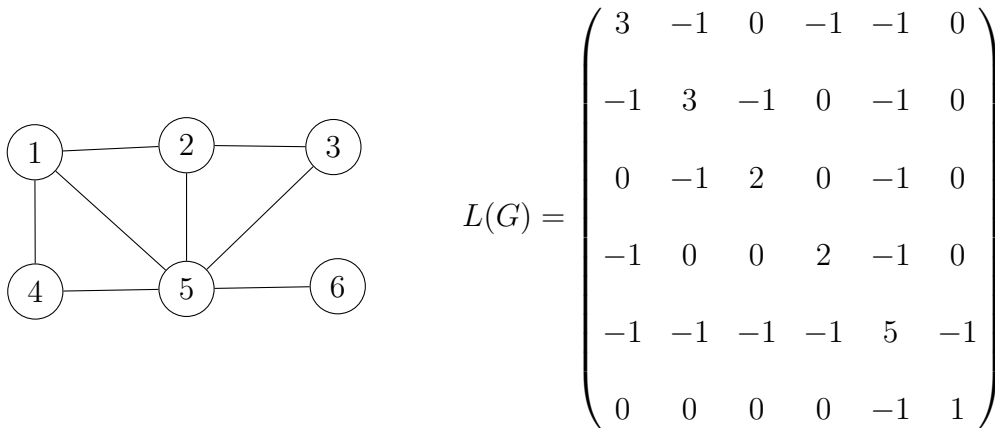


FIGURE 2.10 – Un graphe et sa matrice Laplacienne.

Définition 2.3.2. Soit $D(G)$ la matrice diagonale des degrés des sommets. Si $A(G)$ est la matrice d'adjacence de G , alors

$$L(G) = D(G) - A(G).$$

Il découle de cette définition que pour tout graphe, la somme des éléments dans chaque ligne de la matrice Laplacienne est zéro.

Définition 2.3.3. Soit G° le graphe orienté obtenu en associant une orientation arbitraire aux arêtes $E(G)$ du graphe G , et soit B la matrice d'incidence du graphe G° , la matrice Laplacienne du graphe G peut être définie de façon alternative comme suit :

$$L(G) = B(G^\circ) {}^tB(G^\circ).$$

Cette définition révèle que $L(G)$ est une :

- Matrice symétrique (c'est-à-dire, $L(G) = {}^tL(G)$)
- Matrice semi-définie positive (c'est-à-dire, ${}^txL(G)x \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$).

Remarque. Les deux définitions que nous avons donné sont équivalentes et du moment que la notion d'orientation n'est pas nécessaire dans la première, la matrice laplacienne est indépendante de l'orientation.

Théorie spectrale des graphes

Le but de la théorie spectrale des graphes est d'étudier les propriétés des graphes via les valeurs propres et les vecteurs propres de leurs matrices associées. On s'intéresse en général à la matrice d'adjacence et à la matrice Laplacienne et ses variantes. Ces deux matrices ont été extrêmement bien étudiées d'un point de vue algébrique.

3.1 Spectre de la matrice d'adjacence

Définition 3.1.1. *Soit A la matrice d'adjacence d'un graphe non orienté G avec n sommets. Alors A possède n valeurs propres réelles, notées $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$. Ces valeurs propres associées à leurs multiplicités composent le spectre de G .*

Voici quelques informations de base sur le spectre d'un graphe.

Lemme 3.1.1. *Soit G un graphe simple non orienté avec n sommets. Alors*

- 1) $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 0$.
- 2) $\sum_{i=1}^n \lambda_i^2 = \sum_{i=1}^n \deg(v_i)$.
- 3) Si $\lambda_1 = \dots = \lambda_n$, alors $E(G) = \emptyset$.

Preuve. 1) Puisque G n'a pas de boucles, tous les éléments diagonaux de A sont nuls. Par définition de la trace, on a

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i = \text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n A_{i,i} = 0.$$

2) Parmi les propriétés de la trace de la matrice, nous avons

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i^2 = \text{tr}(A^2) = \sum_{i=1}^n A_{i,i}^2.$$

Puisque $A_{i,i}^2$ est le nombre de chemins fermés de v_i de longueur $k = 2$. Un chemin fermé de longueur $k = 2$ représente une arête. Par conséquent, $A_{i,i}^2$ est le degré du sommet v_i , alors $\text{tr}(A^2)$ est égal à la somme des degrés de chaque sommet dans G .

3) En combinant $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 0$ avec $\lambda_1 = \dots = \lambda_n$ nous avons $\lambda_i = 0$ pour chaque sommet v_i . Par le point(2) du lemme, on a $\text{deg}(v_i) = 0$ pour tout sommet v_i . Donc $E(G) = \emptyset$.

Exemple 1.

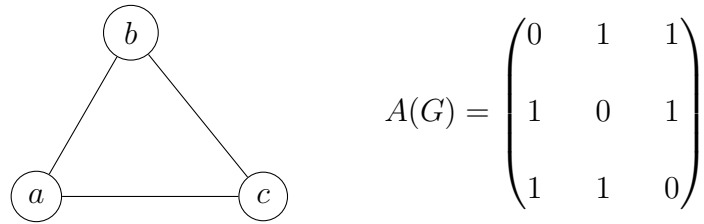


FIGURE 3.1 – Un graphe simple et sa matrice d’adjacence.

Soit G un graphe simple tel que $\text{deg}(a) = \text{deg}(b) = \text{deg}(c) = 2$. Les valeurs propres de la matrice d’adjacence $A(G)$ sont $\{2, -1, -1\}$.

Alors :

- 1) $\sum_{i=1}^3 \lambda_i = 0$.
- 2) $\sum_{i=1}^3 \lambda_i^2 = \text{deg}(a) + \text{deg}(b) + \text{deg}(c) = 6$.

Théorème 3.1.1. [2] Soit A la matrice d’adjacence d’un graphe G . Si λ est une valeur propre de A alors $|\lambda| \leq \Delta(G)$.

Preuve. Soit $x = (x_1, \dots, x_n)^t$ un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ . Alors $Ax = \lambda x$. Soit i tel que $|x_i| = \max_{1 \leq j \leq n} |x_j|$.

Donc en utilisant l'inégalité triangulaire on obtient

$$\begin{aligned}
|\lambda||x_i| &= \left| \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \right| \leq \sum_{j=1}^n |a_{ij}||x_j| \\
&= |x_i| \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \\
&= |x_i| \deg(v_i) \\
&\leq |x_i| \Delta(G).
\end{aligned}$$

D'où $|\lambda| \leq \Delta(G)$. □

3.2 Valeurs propres et vecteurs propres de la matrice d'adjacence de certains graphes fondamentaux

Proposition 3.2.1. *Soit $G = (V, E)$ un graphe biparti. Si λ est la valeur propre de graphe G , alors $-\lambda$ l'est aussi. Autrement dit, le spectre d'un graphe biparti est symétrique par rapport à 0.*

Preuve. Le graphe G est biparti, alors l'ensemble des sommets V se partitionne en deux sous-ensembles V_1 et V_2 de manière telle que toute arête de graphe G est de la forme $\{u, v\}$ avec $u \in V_1$ et $v \in V_2$. Si on ordonne les sommets de l'ensemble V de manière à considérer tout d'abord les sommets de V_1 , alors $A(G)$ est de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & B \\ \tilde{B} & 0 \end{pmatrix}$$

avec B est une matrice de dimension $|V_1| \times |V_2|$. Soit x un vecteur propre non nul de la matrice $A(G)$ de valeur propre λ . On appelle x_1 (resp. x_2) le vecteur obtenu en considérant les $|V_1|$ premières (resp. les $|V_2|$ dernières) composantes du vecteur x . Ainsi,

$$\begin{pmatrix} 0 & B \\ \tilde{B} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Bx_2 \\ \tilde{B}x_1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Maintenant, nous pouvons facilement montrer un vecteur propre non nul de valeur propre $-\lambda$

$$\begin{pmatrix} 0 & B \\ \tilde{B} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -Bx_2 \\ \tilde{B}x_1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = -\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix}. \square$$

Exemple 2.

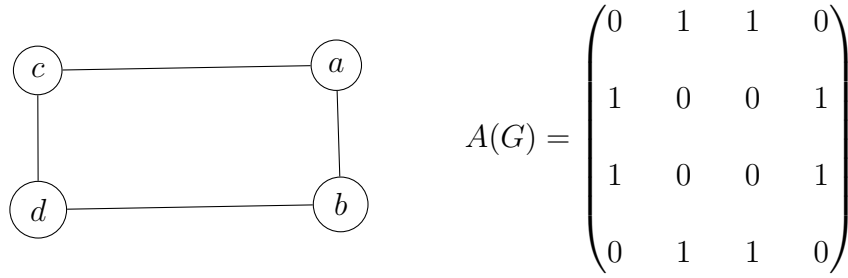


FIGURE 3.2 – Un graphe biparti et sa matrice d’adjacence.

Le graphe $G = (V, E)$ de la figure 3.1 est un graphe biparti. Les sous-ensembles de sommets sont $V_1 = \{a, d\}$, $V_2 = \{b, c\}$. Son polynôme caractéristique est $\lambda^4 - 4\lambda^2$ et ses valeurs propres sont $\{-2, 0, 0, 2\}$.

Rappelons que dans le chapitre 2, la forme générale d’un polynôme caractéristique est

$$\chi_G(\lambda) = (\lambda)^n + c_1(\lambda)^{n-1} + c_2(\lambda)^{n-2} + \dots + c_n$$

Proposition 3.2.2. *Si G est un graphe biparti alors $c_{2k-1} = 0$ pour $n \geq 1$.*

Preuve. D’après le chapitre 1 on sait que si G est biparti alors il n’y a pas de cycles impairs dans G . D’où $c_{2k-1} = 0$ pour $n \geq 1$.

Exemple 3.

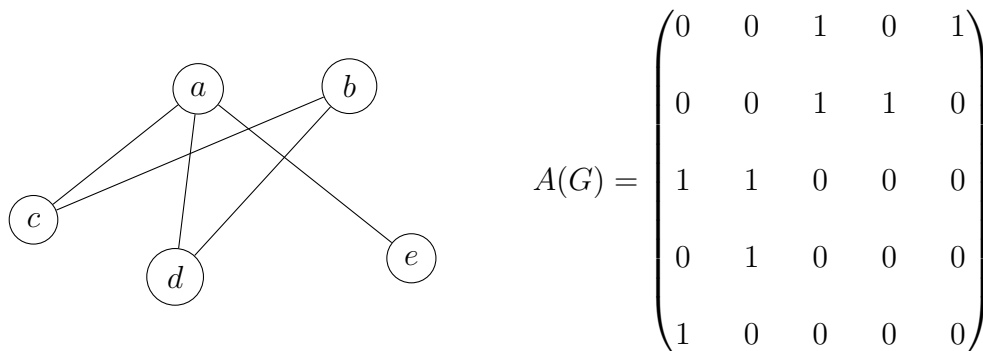


FIGURE 3.3 – Un graphe biparti et sa matrice d’adjacence.

Le graphe $G = (V, E)$ de la figure 3.2 est un graphe biparti. Les sous-ensembles de sommets sont $V_1 = \{a, b\}$, $V_2 = \{c, d, e\}$. Son

polynôme caractéristique est $\lambda^5 - 4\lambda^3 + 3\lambda$ et ses valeurs propres sont $\{-\sqrt{3}, -1, 0, 1, \sqrt{3}\}$. Si on observe le polynôme caractéristique, c_1 et c_3 sont nuls comme indiqué dans la propriété 3.2.2.

Proposition 3.2.3. *Un graphe G est k -régulier si et seulement si $e = (1, 1, \dots, 1)$ est un vecteur propre de G avec une valeur propre $\lambda = k$.*

Preuve. Rappelons que

$$Ae = (\deg(v_1), \deg(v_2), \dots, \deg(v_n)).$$

Si G est k -régulier alors $\deg(v_i) = k$ pour tout v_i et donc

$$Ae = (k, k, \dots, k) = ke.$$

D'où k est une valeur propre de A avec le vecteur propre correspondant e .

inversement si e est un vecteur propre de G avec une valeur propre k , alors

$$Ae = ke = (k, k, \dots, k).$$

D'où $\deg(v_i) = k$ pour tout v_i et donc G est k -régulier. □

Exemple 4.

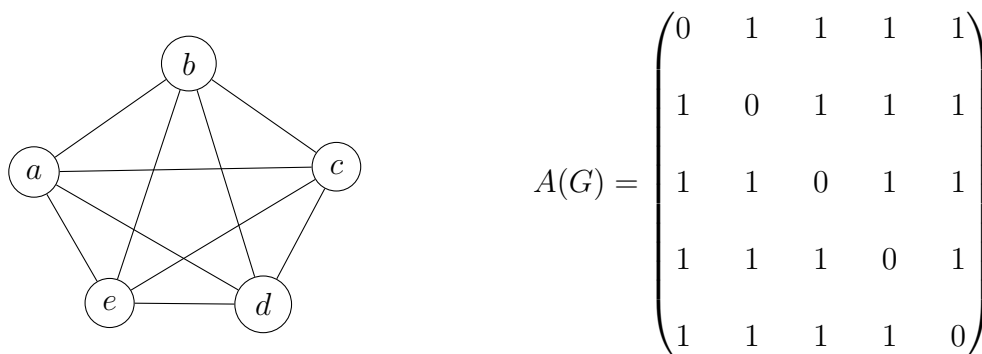


FIGURE 3.4 – Un graphe simple 4-régulier et sa matrice d'adjacence.

Soit le graphe simple représenté dans la figure 3.3 et sa matrice d'adjacence A , le degré de chaque sommet dans G est 4. Les valeurs propres du G sont $\{4, -1, -1, -1, -1\}$. Alors on remarque que la valeur propre λ_1 de G est égale à k , autrement dit $\lambda_1 = k = 4$.

3.3 Spectre de la matrice Laplacienne

Théorème 3.3.1. [24] *Pour un graphe G , chaque valeur propre de $L(G)$ est non-négative.*

Preuve. Supposons que λ est une valeur propre et que $x \in \mathbb{R}^n$ est un vecteur propre non nul de λ . Alors

$$\begin{aligned} {}^t x L(G)x &= {}^t x \lambda x \\ &= \lambda {}^t x x. \end{aligned}$$

Puisque ${}^t x L(G)x \geq 0$ et ${}^t x x > 0$, on a $\lambda \geq 0$. □

Proposition 3.3.1. *La plus petite valeur propre de matrice laplacienne $L(G)$ est 0 et le vecteur propre associé est 1.*

Preuve. Par définition de $L(G)$, on voit que 1 est un vecteur propre, associé à la valeur propre 0, puisque $\sum_{i=1}^n a_{i,j} = \text{deg}(v_i)$. En effet :
On considère le vecteur $e = (1, 1, \dots, 1)$, alors

$$L(G)e = De - Ae = \begin{pmatrix} \text{deg}(v_1) \\ \text{deg}(v_2) \\ \vdots \\ \text{deg}(v_n) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \text{deg}(v_1) \\ \text{deg}(v_2) \\ \vdots \\ \text{deg}(v_n) \end{pmatrix} = 0$$

Par conséquent, $\lambda = 0$ est une valeur propre de $L(G)$ avec un vecteur propre correspondant e . □

3.4 Valeurs propres et vecteurs propres de la matrice Laplacienne de certains graphes fondamentaux

Lemme 3.4.1. *Pour tout graphe G , $\lambda_1 = 0$ pour $L(G)$. Si $G = (V, E)$ est un graphe connexe où $V = \{1, 2, \dots, n\}$, alors $\lambda_2 > 0$.*

Preuve. Nous montrons d'abord que $\lambda_2 = 0$ si G est non connexe. Si G est non connexe, alors il peut être considéré comme étant l'union de deux graphes, G_1 et G_2 . Après avoir convenablement re-numéroté les sommets, nous pouvons écrire

$$L(G) = \begin{pmatrix} L(G_1) & 0 \\ 0 & L(G_2) \end{pmatrix}$$

Donc, $L(G)$ a au moins deux vecteurs propres orthogonaux de valeur propre zéro :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

où nous avons partitionné les vecteurs comme nous l'avons fait pour la matrice $L(G)$.

Inversement, on suppose que G est connexe et que x est un vecteur propre de $L(G)$ de valeur propre 0. D'après la définition

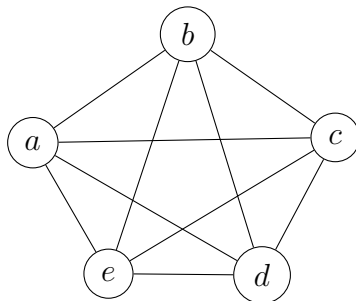
$L(G) = D(G) - A(G)$, on voit immédiatement que si toutes les entrées de x sont les mêmes, alors $L(G)x = 0$ et ${}^t x L(G)x = 0$ et comme chaque paire de sommets u et v de graphe G sont reliés par un chemin, nous concluons que l'espace propre de la valeur propre 0 est de dimension 1.

□

Quelques exemples permettent de comprendre ce que les valeurs propres de la matrice $L(G)$ nous apportent sur un graphe.

Exemples .

1) Soient le graphe complet $G = K_4$ et sa matrice $L(G)$.



$$L(G) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

FIGURE 3.5 – Un graphe simple 4-régulier et sa matrice $L(G)$.

Nous pouvons remarquer que $v_1 = (1, 1, 1, 1)$ est un vecteur propre de $L(G)$ correspondant à la valeur propre 0, puisque les sommes des éléments de chaque ligne de $L(G)$ sont toutes égales à zéro, mais nous ne connaissons pas la multiplicité de la valeur propre zéro.

Les valeurs propres de $L(G)$ sont $\text{spec}L(G) = \{0, 4, 4, 4\}$.

Notez que la somme des valeurs propres est 12, ce qui correspond à la trace de $L(G)$.

En général le spectre de $L(K_n)$

$$\text{spec}L(K_n) = \{0, n, \dots, n\}$$

Pour les graphes complets, toutes les valeurs propres non nulles coïncident.

2) Cycles

Soit C_4 le cycle de longueur 4.

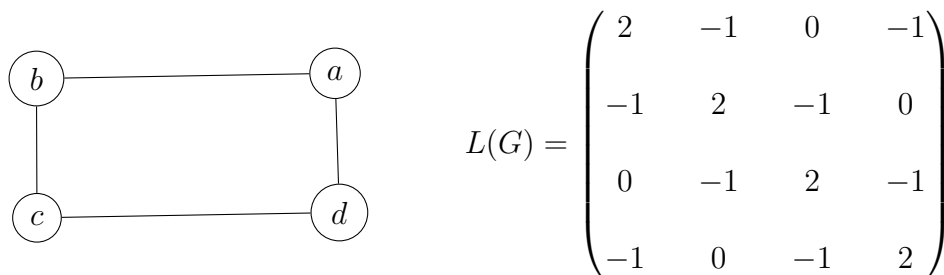


FIGURE 3.6 – Un cycle C_4 et sa matrice $L(G)$.

Un vecteur propre de $L(G)$ correspondant à une valeur propre non nulle. λ est un vecteur non nul dont la somme des entrées est égale à zéro.

Les valeurs propres de $L(G)$ sont

$$\text{spec}L(G) = \{0, 2, 2, 4\}$$

Les vecteurs propres associés à ses valeurs propres sont

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La plus grande valeur propre est 4 (égale à l'ordre du graphe) et la valeur propre la moins positive est 2. En général, le spectre de $L(C_n)$

$$\left\{ 2 - 2 \cos\left(\frac{2\pi k}{n}\right), k = 0, \dots, n - 1 \right\}$$

Toutes les valeurs propres sont comprises entre 0 et 4, et la valeur propre la moins positive s'approche de 0 lorsque n est plus grand, et sa multiplicité égale à 2. La plus grande valeur propre est 4 exactement si n est pair. Les vecteurs propres associés aux valeurs propre de $L(C_n)$ sont de la forme

$$x_i(k) = \sin\left(\frac{2\pi ki}{n}\right)$$

$$y_i(k) = \cos\left(\frac{2\pi ki}{n}\right)$$

Où $x_i(k)$ désigne la i -ème composante du vecteur propre pour la k -ième valeur propre et $k \leq \frac{n}{2}$.

Un graphe en respectant les idempotents d'un anneau

Somayyeh Razzaghi, Shervin Sahebi, *A Graph with respect to Idempotents of a Ring*, Journal of Algebra and its Applications, 2020.

4.1 Introduction

Tout au long de ce chapitre, tous les anneaux sont associatifs avec $1 \neq 0$. Soit R un anneau. Nous notons l'ensemble des éléments idempotents et unitaires de R , par $Id(R)$ et $U(R)$, respectivement.

Trouver la relation entre la structure algébrique en utilisant les propriétés des graphes est devenu un sujet intéressant ces dernières années, voir par exemple, [14],[19],[20],[31]. L'un des plus courants est le graphe total. Dans [?], Anderson et Badawi ont introduit le graphe total dont l'ensemble des sommets est R et deux sommets x et y sont adjacents si et seulement si $x + y$ est un diviseur nul de R . Dans [6], Ashrafi, Meimani, Pournaki et Yassemi ont défini un graphe basé sur les éléments et les unités de R . Les auteurs ont considéré le graphe unitaire de R , comme un graphe simple avec tous les éléments de R comme sommets, et deux sommets distincts x et y sont adjacents si et seulement si $x + y \in U(R)$.

Dans ce chapitre, nous considérons le graphe idempotent de R , noté $G_{Id}(R)$, comme un graphe simple tel que tous les éléments de R sont les sommets de $G_{Id}(R)$ et les sommets distincts $x, y \in R$ sont adjacents si et seulement si $x+y \in Id(R)$. L'étude de $G_{Id}(R)$ se décompose en deux cas, selon que R a ou non des idempotents non triviaux. Dans la section 2,

nous donnons la définition de $G_{Id}(R)$ et quelques propriétés élémentaires de ce graphe. Dans la section 3, nous étudions la connexité des graphes idempotents. Enfin, nous nous concentrons sur certaines propriétés des graphes idempotents comme le diamètre et le circonférence.

4.2 Notation de base et Propriétés

Définition 4.2.1. Soient R est un anneau et $Id(R)$ l'ensemble des éléments idempotents de R . Le graphe idempotent de R , noté $G_{Id}(R)$, est un graphe obtenu en fixant tous les éléments de R comme sommets et en définissant les sommets distincts x et y comme adjacents si et seulement si $x + y \in Id(R)$.

Proposition 4.2.1. Soient R est un anneau, $x \in R$ et $Id(R)$ soient finis. Alors les affirmations suivantes sont vérifiées pour $G_{Id}(R)$:

- a) Si $2x \in Id(R)$, on a $deg(x) = |Id(R)| - 1$,
- b) Si $2x \notin Id(R)$, alors $deg(x) = |Id(R)|$.

Preuve. Supposons que $x \in R$ et $f : Id(R) \rightarrow R$ donnée par $f(e) = e - x$. Il est clair que f est injective et $x + y \in Id(R)$ si et seulement si $y \in Im(f)$. Si $2x \in Id(R)$, alors $x \in Im(f)$, et on sait que x et y sont adjacents si et seulement si $x + y \in Id(R)$, donc $Im(f) = V_{G_{Id}(R)}(x)$, et par conséquent $deg(x) = |Id(R)| - 1$ car $G_{Id}(R)$ est un graphe simple. Si $2x \notin Id(R)$, alors $x \notin Im(f)$, d'où $Im(f) = V_{G_{Id}(R)}(x)$, et par conséquent $deg(x) = |Id(R)|$. \square

Remarque. Notons que si pour tout $x \in R$, $2x \in Id(R)$, alors $G_{Id}(R)$ est un graphe $|Id(R)| - 1$ -régulier.

Corollaire 4.2.1. Soient R un anneau sans aucun idempotent non trivial et $x \in R$. Alors les Les affirmations suivantes sont vraies pour $G_{Id}(R)$:

- a) Si $2x \notin Id(R)$, on a $deg(x) = 2$,
- b) Si $2x \in Id(R)$, alors $deg(x) = 1$.

Remarque. Il est facile de voir que, pour des anneaux donnés R et S , si R et S sont isomorphe comme anneaux, alors $G_{Id}(R)$ et $G_{Id}(S)$ sont isomorphe en tant que graphes. Par contre $G_{Id}(R)$ et $G_{Id}(S)$ sont isomorphe n'implique pas que R et S le sont.

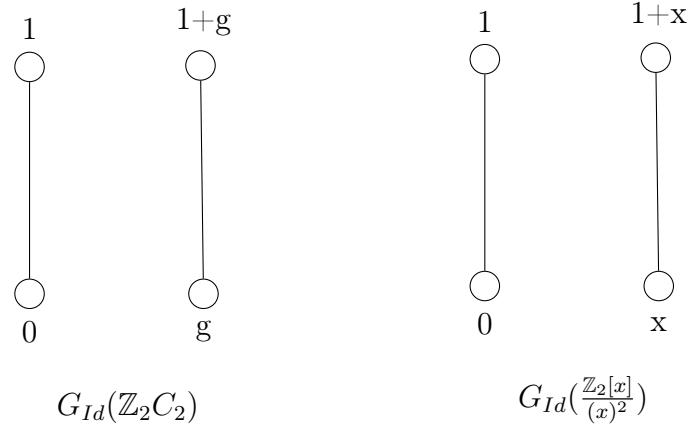


FIGURE 4.1 – deux graphes idempotents isomorphes.

Exemple 1.

Soit $R = \mathbb{Z}_2$ et $G = C_2$. Alors, pour un anneau de groupe $\mathbb{Z}_2 C_2$ on a $G_{Id}(\mathbb{Z}_2 C_2) \cong G_{Id}(\frac{\mathbb{Z}_2[x]}{(x)^2})$ mais $\mathbb{Z}_2 C_2 \not\cong \frac{\mathbb{Z}_2[x]}{(x)^2}$. Ce point est illustré dans la figure 4.1.

4.3 Caractérisation de certains graphes idempotents

Dans cette section, nous étudions la connexité du graphe idempotent $G_{Id}(R)$. En particulier, nous donnons une condition nécessaire et suffisante pour que $G_{Id}(R)$ soit connexe. Aussi, nous énonçons quelques théorèmes qui caractérisent le graphe idempotent biparti des anneaux. De plus, certains résultats de caractérisation concernant l'indice chromatique, le diamètre et la circonférence de $G_{Id}(R)$ sont donnés.

Théorème 4.3.1. *Soit R un anneau. Alors $G_{Id}(R)$ est connexe si et seulement si $(R, +) = \langle Id(R) \rangle$ (R est généré additivement par ses idempotents).*

Preuve. Soit $G_{Id}(R)$ un graphe connexe. Pour $a \in R$ et $e \in Id(R)$, il existe un chemin de e vers a dans $G_{Id}(R)$.

$$e \rightarrow x_1 \rightarrow \dots \rightarrow x_n \rightarrow a.$$

Par conséquent, les éléments $e + x_1, x_1 + x_2, \dots, x_n + a$ sont dans $Id(R)$. Si n est impair alors

$$a = e - (e + x_1) + (x_1 + x_2) - \dots + (x_n + a).$$

Et si n est pair alors

$$a = -e + (e + x_1) - (x_1 + x_2) + \dots + (x_n + a).$$

Par conséquent, a peut être écrit comme la somme des éléments de $Id(R)$, comme souhaité.

Inversement, supposons que $(R, +) = \langle Id(R) \rangle$. Il suffit de trouver un chemin de 0 à x dans $G_{Id}(R)$ pour chaque $0 \neq x \in R$. Par hypothèse, il existe certains éléments e_1, e_2, \dots, e_n de $Id(R)$ avec $x = e_1 + e_2 + \dots + e_n$. Ainsi

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow e_1 \rightarrow 1 - e_1 - e_2 \rightarrow e_1 + e_2 \rightarrow 1 - e_3 - e_2 - e_1 \rightarrow e_1 + e_2 + e_3 \rightarrow \dots \\ \rightarrow e_1 + e_2 + \dots + e_n = x. \end{aligned}$$

est un chemin prévu de 0 à x dans $G_{Id}(R)$. □

Nous donnerons ci-après quelques exemples de graphes idempotents connexes et non connexes.

Exemples.

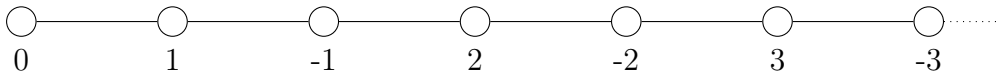


FIGURE 4.2 – $G_{Id}(\mathbb{Z}_n)$

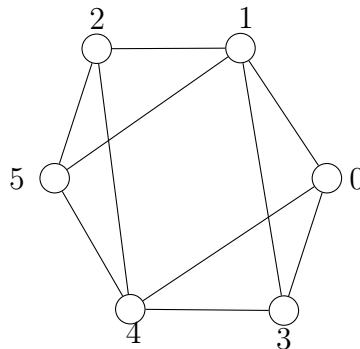


FIGURE 4.3 – $G_{Id}(\mathbb{Z}_6)$

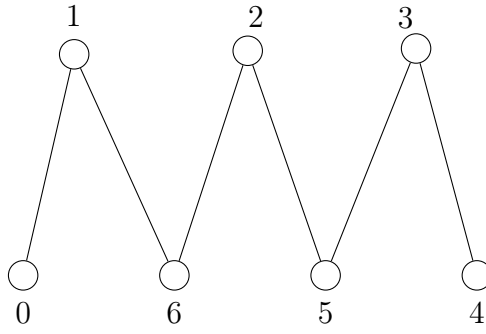


FIGURE 4.4 – $G_{Id}(\mathbb{Z}_7)$

Pour un anneau abélien R (un anneau dont chaque idempotent est central), $Id(R) = Id(R[x]) = Id(R[[x]])$ par [[19], Lemma 1] alors $R[x]$ et $R[[x]]$ ne sont pas générés additivement par leurs idempotents. Cela signifie que $G_{Id}(R[x])$ et $G_{Id}(R[[x]])$ sont non connexe. Hartwing et Putcha [18] ont montré que la matrice A de taille $n \times n$ sur un champ de caractéristique zéro est une somme d'idempotents si et seulement si $tr(A)$ est un entier au moins aussi grand que le rang de A et donc dans ce cas, $G_{Id}(M_n(F))$ est connexe si et seulement si pour chaque $A \in M_n(F)$, $tr(A)$ est un entier au moins aussi grand que le rang de A . En particulier, si $tr(A) = n$, alors $G_{Id}(M_n(F))$ est connexe. Pazzis dans [26] a montré qu'une matrice A de taille $n \times n$ sur le champ F de caractéristique $p \neq 0$ et $n \geq 2$ est somme d'idempotents si et seulement si $tr(A) \in F_p$, et donc dans ce cas, $G_{Id}(M_n(F))$ est connexe si et seulement si pour chaque $A \in M_n(F_p)$, $tr(A) \in F_p$. En particulier, $G_{Id}(M_n(F_p))$ est connexe.

Théorème 4.3.2. *Soit R un anneau. Alors $G_{Id}(R)$ est un graphe biparti si et seulement si R n'a aucun idempotent non trivial.*

Preuve. Soit $Id(R) = \{0, 1\}$. Il suffit de montrer que $G_{Id}(R)$ n'a pas de cycle impair.

Soit $x = x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow \dots \rightarrow x_{n-1} \rightarrow x_n = x$ un cycle impair dans $G_{Id}(R)$. Puisque R n'a pas d'idempotent non trivial et x_i et x_{i+1} sont adjacents, alors $x_i + x_{i+1} \in \{0, 1\}$ pour chaque $1 \leq i \leq n - 1$. Autrement dit, $x_i = 1 - x_{i+1}$ ou bien $x_i = -x_{i+1}$ pour $1 \leq i \leq n - 1$. Si $x_i = -x_{i+1}$, alors $x_{i+1} = 1 - x_{i+2}$ (car sinon $x_i = x_{i+2}$) et si $x_i = 1 - x_{i+1}$, alors $x_{i+1} = -x_{i+2}$ (car sinon $x_i = x_{i+2}$) pour $1 \leq i \leq n - 1$. Par conséquent, $x = -x_2$ ou bien $x = 1 - x_2$.

Si $x = -x_2$, alors $x = 1 - x_{n-1}$. Puisque le cycle est impair, $x = -x_{n-1}$.

Ainsi $x = 1 - x_{n-1} = -x_{n-1}$, contradiction.

Si $x = 1 - x_2$, alors $x = -x_{n-1}$. Puisque le cycle est impair, $x = 1 - x_{n-1}$ et donc $x = 1 - x_{n-1} = x_{n-1}$, contradiction.

inversement, supposons que $G_{Id}(R)$ est un graphe biparti. Soient V_1 et V_2 deux parties de $G_{Id}(R)$ et $0 \in V_1$. Au contraire, nous supposons que R a un idempotent e non trivial. Puisque e est adjacent à 0 , $e \in V_2$. D'autre part $1 - e$ est adjacent à e et donc $1 - e \in V_1$. Mais 0 est adjacent à $1 - e$, contradiction. \square

Corollaire 4.3.1. *Soit R un anneau. Alors $(R, +) = \langle Id(R) \rangle$ et R n'a pas d'idempotents non triviaux si et seulement si le graphe idempotent $G_{Id}(R)$ est un graphe chemin.*

Théorème 4.3.3. *Soit R un anneau sans aucun idempotent non trivial. Alors $diam(G_{Id}(R)) \in \{|R| - 1, \infty\}$.*

Preuve. Si $(R, +) \neq \langle Id(R) \rangle$, alors $G_{Id}(R)$ est non connexe d'après le théorème 4.3.1 et donc $diam(G_{Id}(R)) = \infty$. Si $(R, +) = \langle Id(R) \rangle$ donc $G_{Id}(R)$ est connexe et c'est un graphe chemin d'après le corollaire 4.3.1. Donc $diam(G_{Id}(R)) = |R| - 1$.

Corollaire 4.3.2. *Soient R un anneau et $R = R_1 \times R_2 \times \dots \times R_n$ où chaque R_i n'a pas d'idempotents non triviaux pour $1 \leq i \leq n$. Alors $diam(G_{Id}(R)) \in \{\max |R_i| - 1, \infty\}$.*

Théorème 4.3.4. *Soit R un anneau. Alors le graphe idempotent $G_{Id}(R)$ est de classe 1.*

Preuve. Nous colorons l'arête $v_i v_j$ par la couleur $v_i + v_j$. Par cette coloration, chaque fois que deux arêtes distinctes $v_i v_j$ et $v_i v_k$ ont des couleurs différentes et $C = \{v_i + v_j | v_i v_j \text{ est une arête de } G\}$ est l'ensemble des couleurs. Par conséquent, $G_{Id}(R)$ a un $|C|$ -coloration arête et donc $\chi'(G_{Id}(R)) \leq |C|$. Mais clairement, $C \subset Id(R)$ et donc $\chi'(G_{Id}(R)) \leq |C| \leq |Id(R)|$. D'autre part, la proposition 4.2.1 implique que $\Delta = |Id(R)|$ et donc par le théorème de Vizings nous avons $\chi'(G_{Id}(R)) \geq \Delta = |Id(R)|$. Par conséquent, $\chi'(G_{Id}(R)) = |Id(R)| = \Delta$ et donc $G_{Id}(R)$ est de classe 1. \square

Nous caractérisons maintenant certaines propriétés du graphe idempotent non connexe d'un anneau.

Théorème 4.3.5. *Soit R un anneau sans idempotents non triviaux. Si $G_{Id}(R)$ est non connexe, alors il existe un sous-anneau S de R tel que $G_{Id}(S)$ est un graphe chemin. On définit $A = \{x + S | x \in R \setminus S \text{ et } 2x = 0\}$ et $B = \{x + S | x \in R \text{ et } 2x \neq 0\}$. Alors $G_{Id}(R)$ est l'union disjointe de $|A| + 1$ fois $G_{Id}(S)$ et $|B|/2$ fois le sous-graphe biparti de $G_{Id}(R)$. En particulier, si $2x \notin Id(R)$, alors $G_{Id}(R)$ est l'union disjointe de $|A| + 1$ fois $G_{Id}(S)$ et $|B|/2$ fois 2-régulier biparti régulier de $G_{Id}(R)$.*

Preuve. Puisque $(R, +) \neq \langle Id(R) \rangle$, il existe un sous anneau S de R tel que $(S, +) = \langle Id(R) \rangle$ et le corollaire 4.3.1 montre que le sous-graphe induit de $G_{Id}(R)$ sur les sommets S est un graphe chemin et il est donc disjoint des autres sommets. Soit $0 = s_1 \rightarrow 1 = s_2 \rightarrow \dots \rightarrow s_n$ est un graphe chemin $G_{Id}(S)$ de $G_{Id}(R)$. Si $2x \in Id(R)$, alors nous avons deux cas :

Cas 1 : Supposons que $2x = 0$. Si deux sommets s_i, s_j sont adjacents dans $G_{Id}(S)$, alors deux sommets $s_i + x$ sont adjacents à $s_j + x$ dans $G_{Id}(R)$. Cela signifie que correspondant à chaque élément x de A , nous avons un graphe chemin qui est isomorphe à $G_{Id}(S)$ et donc il est disjoint des autres sommets.

Cas 2 : Maintenant, si $2x = 1$, alors $deg(x) = 1$ selon le corollaire 4.2.1. Puisque $G_{Id}(S)$ est connexe, $x + S \cup -x + S$ est connexe et donc chaque sommet de $x + S \cup -x + S$ sauf deux sommets ont un degré 2.

Si $2x \notin Id(R)$, puisque $G_{Id}(S)$ est connexe, $x + S \cup -x + S$ est connexe. Aussi, $deg(x) = 2$ et donc chaque sommet de $x + S \cup -x + S$ est de degré 2. Donc $x + S$ également $-x + S$ forme une co-clique et donc $x + S \cup -x + S$ est un sous-graphe biparti de $G_{Id}(R)$. Il suffit de montrer que $x + S \cup -x + S$ est disjoint des autres sommets. Si les éléments $x + s_1$ et $y + s_2$ de co-ensemble distincts sont adjacents dans $G_{Id}(R)$, alors $x + y \in S$ et donc $y + S = -x + S$, contradiction. \square

Corollaire 4.3.3. *Soit R un anneau sans idempotents non triviaux. Si $G_{Id}(R)$ n'est pas connexe, alors il existe un sous-anneau S de R tel que $G_{Id}(S)$ est un graphe chemin. Soit $I \subseteq R \setminus S$ un idéal de R . Alors*

a) *Si $2x = 0$ pour chaque $x \in I$, alors $G_{Id}(R)$ est l'union de $|A| + 1$ graphe chemin disjoints P_n dont $n = |S|$.*

b) *Si $2x \neq 0$ pour chaque $x \in I$, alors $G_{Id}(R)$ est l'union du graphe chemin P_n dont $n = |S|$ avec $|B|/2$ disjoint 2-graphe biparti régulier.*

Il existe quelques exemples qui montrent que même si I n'est pas un idéal, alors $G_{Id}(R)$ est une union disjointe de $G_{Id}(S)$ et d'un graphe biparti 2-régulier.

Exemple 2.

Soit $R = \frac{\mathbb{Z}_3[x]}{(x)^2+1}$. Puisque R n'a pas d'idéal non trivial ni d'idempotents non triviaux, $G_{Id}(R)$ est une union disjointe de $G_{Id}(\mathbb{Z}_3)$ et d'un graphe biparti 2-régulier. Ceci est illustré dans la figure suivante.

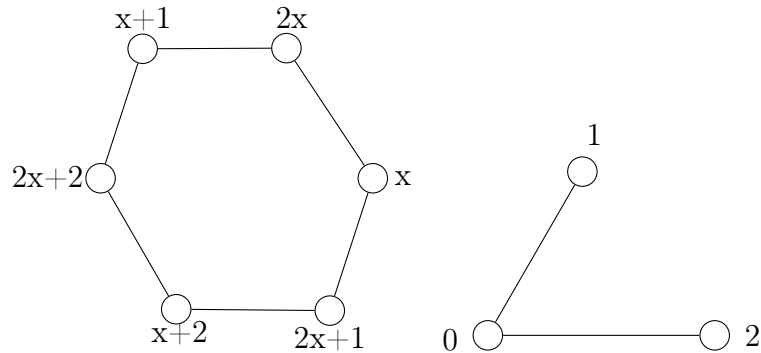


FIGURE 4.5 – $G_{Id}(\mathbb{Z}_3)$ et graphe biparti 2-régulier.

Théorème 4.3.6. *Soit R un anneau sans idempotent non trivial. Alors $gr(G_{Id}(R)) = \{2 \mid \langle Id(R) \rangle, \infty\}$.*

Preuve. Si $G_{Id}(R)$ est un graphe connexe, alors il est un graphe chemin d'après le corollaire 4.3.1 et donc $gr(G_{Id}(R)) = \infty$. Si $G_{Id}(R)$ est un graphe non connexe, alors il existe un graphe chemin $G_{Id}(S)$ de $G_{Id}(R)$ tel que $(S, +) = \langle Id(R) \rangle$ par le théorème 4.3.5. Si $2x \in Id(R)$, alors $gr(G_{Id}(R)) = \infty$ selon la preuve du théorème. Si $2x \notin Id(R)$, alors chaque sommet $x + S \cup -x + S$ a un degré 2, d'après la preuve du théorème 4.3.5 et donc $x + S \cup -x + S$ est régulier. Comme il n'y a pas de coupe d'arête dans un graphe biparti régulier, $x + S \cup -x + S$ est un cycle. Nous affirmons que $|x + S| = |-x + S| = |S|$. Il suffit de montrer que $x + S \cap -x + S = \emptyset$. Au contraire, on suppose que $x + s_i = -x + s_j$, alors $x + x \in S$ et puisque $G_{Id}(R)$ est un graphe chemin, il existe $s_h \in S$ tel que $x + x + s_h \in \{0, 1\}$ et donc x est adjacent à $x + s_h$ dans $x + S \cup -x + S$. D'un autre côté, puisque $2x \notin Id(R)$, x est adjacent à $-x + s_1$ et $-x + s_2$ tels que $s_1 = 0$ et $s_2 = 1$, et donc $deg(x) = 3$, en contradiction avec le corollaire 2.3. Donc, $x + S \cup -x + S$ est un cycle de longueur $2|S|$. Alors $gr(G_{Id}(R)) = 2 \mid \langle Id(R) \rangle \mid$. \square

Théorème 4.3.7. *Soit R un anneau. Alors R a des idempotents non triviaux si et seulement si $gr(G_{Id}(R)) = 3$.*

Preuve. Soit e un idempotent non trivial de R . Alors $1 - e \in Id(R)$. Par conséquent, e et $1 - e$ sont adjacents. De plus, pour chaque $e \in Id(R)$, e est adjacent à 0 . On a donc un cycle $0 \rightarrow e \rightarrow 1 - e \rightarrow 0$ dans $G_{Id}(R)$. Ainsi $gr(G_{Id}(R)) = 3$.

Réciproquement, si $gr(G_{Id}(R)) = 3$, alors $G_{Id}(R)$ n'est pas biparti et donc R a des idempotents non trivial d'après le Théorème 4.3.2.

Corollaire 4.3.4. *Soit R un anneau. Alors $gr(G_{Id}(R)) = \{3, 2 | \langle Id(R) \rangle |, \infty\}$.*

Espaces vectoriels et graphes

Alain Bretto, Alain Faisant, François Hennecart, *Éléments de théorie des graphes*, Springer-Verlag France, 2012, 192-198.

Dans ce chapitre nous allons associer aux graphes des espaces vectoriels. Cela nous permettra de réintroduire des propriétés des graphes sous une forme algébrique. On suppose les graphes (orientés ou non) d'ordre fini et sans boucle.

5.1 Cas des graphes orientés

Définition 5.1.1. On définit δ_{ij} le symbole de Kronecker par

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

Définition 5.1.2. Soit $G = (V, E)$ un graphe orienté avec $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, on représente chaque sommet v_i par le vecteur $\xi_i = (\delta_{ij})_{1 \leq j \leq n} \in \mathbb{C}^n$ de telle sorte que $\beta_n = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$ est la base canonique de \mathbb{C}^n .

Observons que changer la numérotation des sommets revient à permuter les éléments de la base β_n .

Exemple 1.

Soit le graphe orienté $G = (V, E)$ avec $V = \{v_1, v_2, v_3\}$.

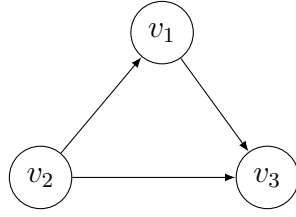


FIGURE 5.1 – Un graphe orienté $G = (V, E)$.

On représente les sommets v_1 , v_2 et v_3 par les vecteurs ξ_1 , ξ_2 et ξ_3 respectivement, tel que

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \xi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \xi_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Alors la base canonique

$$\beta_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Définition 5.1.3. On note $C_0(G)$ l'espace vectoriel \mathbb{C}^n muni de la base β_n , on l'appelle espace des sommets du graphe orienté.

Définition 5.1.4. Soit $G = (V, E)$ un graphe orienté avec $E = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ une numérotation de l'ensemble des arcs, on représente chaque arc e_i par $\varepsilon_i = (\delta_{ij})_{1 \leq j \leq m} \in \mathbb{C}^m$ de telle sorte que $\beta'_m = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n\}$ est la base canonique de \mathbb{C}^m .

Il est commode d'identifier les arcs e_i aux vecteurs ε_i .

Définition 5.1.5. Soit $C_1(G)$ l'espace vectoriel \mathbb{C}^m muni de la base β'_m , on l'appelle espace des arcs du graphe orienté.

Remarque. Dans le langage des graphes, la base β_n de $C_0(G)$ est appelée base standard de l'espace des sommets du graphe orienté et la base β'_m de $C_1(G)$ est appelée base standard de l'espace des arcs du graphe orienté.

Définition 5.1.6. Soit $G' = (V, E')$ le graphe sous-jacent (sans orientation) à $G = (V, E)$ avec $E' = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ et notons $a_i \in E'$ arête sous-jacente à l'arc $e_i \in E$. Soit C un cycle de graphe G'

$$C = (v_0, a_0, v_1, a_1, \dots, v_n, a_n, v_0).$$

Ce cycle possède une "orientation propre" obtenue en considérant l'orientation "cyclique" selon l'ordonnancement v_0, v_1, \dots, v_n un tel cycle sera appelé cycle orienté.

Il a évidemment deux orientations possibles. Nous verrons dans la suite que la distinction entre ces deux orientations ne sera pas essentielle, bien qu'il soit indispensable d'en fixer une.

Définition 5.1.7. On peut associer à chaque cycle C un vecteur $\mu_C = (c_1, c_2, \dots, c_m) \in C_1(G)$ défini par

$$c_i = \begin{cases} 0 & \text{si } e_i \notin C, \\ 1 & \text{si } e_i \in C, \text{ et est orienté comme dans } C, \\ -1 & \text{si } e_i \in C, \text{ et est orienté dans le sens opposé à celui de } C. \end{cases}$$

Exemple 2.

Soit le graphe orienté représenté en figure 5.2.

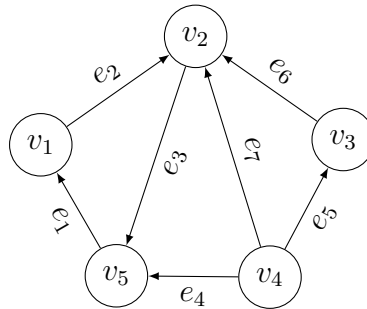


FIGURE 5.2 – Un graphe orienté G admet un cycle.

Soit le cycle C du graphe sous-jacent à G

$$C = (v_5, e_1, v_1, e_2, v_2, e_6, v_3, e_5, v_4, e_4, v_5).$$

Le vecteur μ_C associé au cycle C

$$\mu_C = (1, 1, 0, 1, -1, -1, 0) \in C_1(G).$$

On considère un autre cycle C' et son vecteur associé $\mu_{C'}$

$$C' = (v_1, e_2, v_2, e_7, v_4, e_4, v_5, e_1, v_1).$$

$$\mu_{C'} = (1, 1, 0, 1, 0, 0, -1) \in C_1(G).$$

On peut donc assimiler un cycle à un vecteur, il est clair que deux cycles distincts sont associés à deux vecteurs distincts. On peut définir la somme (vectorielle) de 2 ou plusieurs cycles, par exemple le cycle C' est la somme de 2 cycle $C_1 = \{v_1, e_2, v_2, e_3, v_5, e_1, v_1\}$ et $C_2 = \{v_2, e_7, v_4, e_4, v_5, e_3, v_2\}$, ces vecteurs associés sont respectivement $\mu_{C_1} = \{1, 1, 1, 0, 0, 0, 0\}$ et $\mu_{C_2} = \{0, 0, -1, 1, 0, 0, -1\}$, on peut remarquer que $\mu_{C'} = \mu_{C_1} + \mu_{C_2}$.

Définition 5.1.8. On appellera espace des cycles le sous-espace vectoriel de $C_1(G)$ engendré par l'ensemble $\{\mu_C, C \text{ cycle élémentaire de } G'\}$, qu'on notera par \mathcal{C} .

Définition 5.1.9. Soit (V_1, V_2) une partition des sommets du graphe G supposé connexe. l'ensemble $C^\circ = C^\circ(V_1, V_2)$ des arcs entre V_1 et V_2 ou bien entre V_2 et V_1 est appelé un cocycle.

Définition 5.1.10. On peut associer à un cocycle C° un vecteur $\mu_{C^\circ} = (\mu_{C^\circ}(e_1), \mu_{C^\circ}(e_2), \dots, \mu_{C^\circ}(e_m))$ de $C_1(G)$ défini par

$$(\mu_{C^\circ}(e_i)) = \begin{cases} 0 & \text{si } e_i \notin C^\circ, \\ 1 & \text{si } e_i \text{ est orienté de } V_1 \text{ à } V_2 \\ -1 & \text{si } e_i \text{ est orienté de } V_2 \text{ à } V_1. \end{cases}$$

Exemple 3.

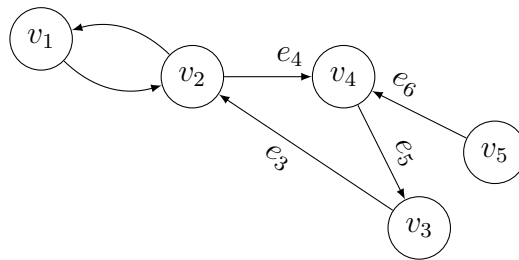


FIGURE 5.3 – Un graphe orienté $G = (V, E)$ admet un cocycle.

Soit le cocycle $C^\circ = C^\circ(V_1, V_2) = (e_4, e_5)$, avec $V_1 = \{v_1, v_2, v_3\}$ et $V_2 = \{v_4, v_5\}$. Le vecteur associé à $C^\circ(V_1, V_2)$ est

$$\mu_{C^\circ} = (0, 0, 0, 1, -1, 0).$$

Définition 5.1.11. On appellera espace des cocycles le sous-espace vectoriel de $C_1(G)$ engendré par l'ensemble $\{\mu_{C^\circ}, C^\circ \text{ cocycle de } G\}$, noté \mathcal{C}° .

Définition 5.1.12. Soit $G = (V, E)$ un graphe orienté connexe tel que $|V| = n$, $|E| = m$ et soit A un arbre de recouvrement du graphe sous-jacent $G' = (V, E')$. Notons

$$R = \{e_i \in E(1 \leq i \leq m) : a_i \notin A\}$$

Alors pour chaque $e \in R$ l'ajout de l'arête a (correspondant à l'arc e) à l'arbre A crée exactement un cycle élémentaire appelé cycle fondamental, on le note par C_e et son vecteur associé par μ_{C_e} .

Définition 5.1.13. Si on retire l'arête a de l'arbre de recouvrement A , on obtient deux composantes connexes, qui fournissent une partition (V_1, V_2) de V , donc un cocycle C_e° , (e est l'arc de G correspondant à a) appelé cocycle fondamental.

Remarque. Puisque $|V| = n$ et $|E| = m$, alors A a $n - 1$ arêtes et si $R = \emptyset$ donc G est un arbre sinon $|R| = m - (n - 1)$ c'est exactement le nombre cycles fondamentaux attachés à l'arbre de recouvrement A . Cela donne ainsi $n - 1$ cocycles fondamentaux attachés à l'arbre de recouvrement A .

Exemple 4.

Dans le graphe orienté de la figure 5.4, l'arbre de recouvrement A correspond aux arcs en gras.

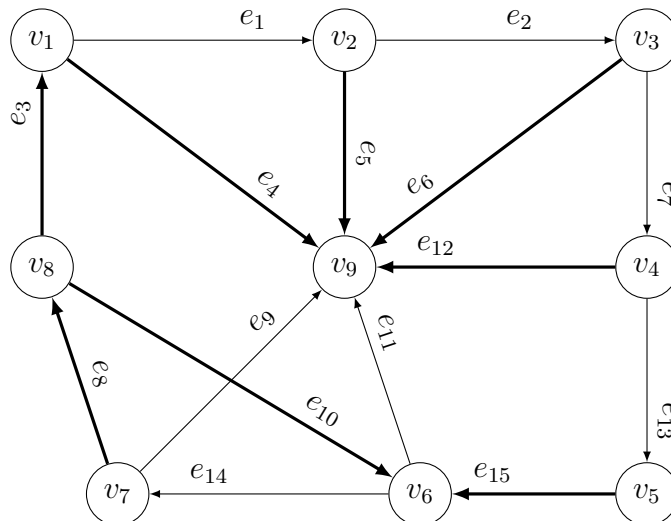


FIGURE 5.4 – Un graphe orienté $G = (V, E)$ admet un arbre de recouvrement.

Si on ajoute l'arête a_{11} (correspond à l'arc à e_{11}) à l'arbre de recouvrement A , alors on aura le cycle élémentaire

$$C_{e_{11}} = (v_6, e_{11}, v_9, e_4, v_1, e_3, v_8, e_{10}, v_6)$$

Son vecteur associé

$$\mu_{C_{e_{11}}} = (0, 0, -1, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0).$$

Si on retire l'arête a_4 (correspond à l'arc à e_4) de A , on obtient 2 composantes connexe $\{e_5, e_6, e_{12}\}$ et $\{e_3, e_8, e_{10}, e_{15}\}$, soit $V_1 = (v_9, v_2, v_3, v_4)$ et $V_2 = (v_1, v_8, v_7, v_6, v_5)$, alors le cocycle associé à l'arc e_4

$$C_{e_4}^\circ(V_1, V_2) = (e_1, e_4, e_9, e_{11}, e_{13})$$

son vecteur

$$\mu_{C_{e_4}^\circ} = (-1, 0, 0, -1, 0, 0, 0, 0, -1, 0, -1, 0, 1).$$

Théorème 5.1.1. *Soit $G = (V, E)$ un graphe orienté connexe sans boucle et A un arbre de recouvrement du graphe sous-jacent G' :*

i) *L'ensemble des $m - n + 1$ cycles fondamentaux $\{\mu_{C_e}\}$ attachés à l'arbre A forme une base de l'espace des cycles et*

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{C} = m - (n - 1)$$

ii) *L'ensemble des $n - 1$ cocycles fondamentaux $\{\mu_{C_e^\circ}\}$ attachés à A forme une base de l'espace des cocycles et*

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{C}^\circ = n - 1$$

iii) *Les \mathbb{C} -sous-espaces \mathcal{C} et \mathcal{C}° sont supplémentaires orthogonaux (pour le produit scalaire canonique de \mathbb{C}^n) dans $C_1(G)$.*

Preuve. Soient $(C_i)_{n \leq i \leq m}$ les cycles fondamentaux associés à l'arbre de recouvrement A , et soit $R = \{e_n, \dots, e_m\} = \{e \in E, e \notin A\}$, tel que chaque arête qui n'appartient pas à l'arbre de recouvrement A crée un cycle.

Pour tout $e \in R$, $A + e$ contient un cycle unique μ_{C_e} . Ceci nous permet de construire un ensemble de $|R| = m - n + 1$ cycles indépendants, car ils ont tous une arête qui les distingue de tous les autres. Donc $\dim \mathcal{C} \geq m - n + 1$.

Soient $(C_i^\circ)_{n \leq i \leq m}$ les cocycles fondamentaux associés à A , tel que pour

chaque arête appartient à l'arbre A crée un cocycle. Pour tout $e \in A$, $A - e$ admet deux composantes connexes, et il existe donc un cocycle unique de G , noté μ_{C_e} . On peut ainsi construire $|A| = n - 1$ cocycles indépendants. Donc $\dim \mathcal{C} \geq n - 1$.

Montrons maintenant que \mathcal{C} et \mathcal{C}° sont orthogonaux. Soient C un cycle et $C^\circ = C^\circ(V_1, V_2)$ un cocycle. Notons

$$\mu_C = (\mu_C(e_1), \mu_C(e_2), \dots, \mu_C(e_m)) \in \mathbb{C}^m$$

$$\mu_{C^\circ} = (\mu_{C^\circ}(e_1), \mu_{C^\circ}(e_2), \dots, \mu_{C^\circ}(e_m)) \in \mathbb{C}^m$$

Alors le produit scalaire $\langle \mu_C, \mu_{C^\circ} \rangle = \sum_{i=1}^m \mu_C(e_i) \cdot \mu_{C^\circ}(e_i)$.

Si $\mu_C(e_i) \cdot \mu_{C^\circ}(e_i) \neq 0$, alors on a $e_i \in C \cap C^\circ$ et ce nombre vaut 1 ou -1 selon que l'arc e_i va de V_1 à V_2 ou bien de V_2 à V_1 . Ainsi le nombre d'arcs appartenant à $C \cap C^\circ$ est pair (C étant un cycle, chaque fois qu'on passe de V_1 à V_2 il faut passer de V_2 à V_1), par conséquent $\langle \mu_C, \mu_{C^\circ} \rangle$ est simplement le nombre d'arcs dans C passant de V_1 à V_2 moins le nombre d'arcs passant de V_2 à V_1 , d'où $\langle \mu_C, \mu_{C^\circ} \rangle = 0$. Comme μ_C et μ_{C° sont orthogonaux, alors

$$\dim \mathcal{C} + \dim \mathcal{C}^\circ \leq m = m - n + 1 + n - 1.$$

D'où, $\dim \mathcal{C} = m - n + 1$ et $\dim \mathcal{C}^\circ = n - 1$. On en déduit que $\{\mu_{C_e}, e \in A\}$ forme une base de l'espace des cycles et que $\{\mu_{C_e^\circ}, e \in A\}$ forme une base de l'espace des cocycles. \square

Corollaire 5.1.1. *Soit $G = (V, E)$ un graphe orienté sans boucle ayant k composantes connexes. Alors*

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{C} = \mu(G) = m - n + k$$

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{C}^\circ = \rho(G) = n - k$$

5.2 Cas des graphes non orientés

On peut développer une théorie analogue pour les graphes non orientés il suffit de supprimer les signes, mais comme les coefficients 1 et -1 ne se compensent plus, on remplace le corps \mathbb{C} par le corps à deux éléments $\mathbb{F}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Définition 5.2.1. Soit $G = (V, E)$ un graphe sans boucle avec $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, on représente chaque sommet v_i par $\xi_i = (\delta_{ij})_{0 \leq j \leq n} \in \mathbb{F}_2^n$ de telle sorte que $\beta_n = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$ est la base canonique de \mathbb{F}_2^n .

Observons que changer la numérotation des sommets revient à permuter les éléments de la base β_n .

Exemple 5.

Soit le graphe $G = (V, E)$ avec $V = \{v_1, v_2, v_3\}$.

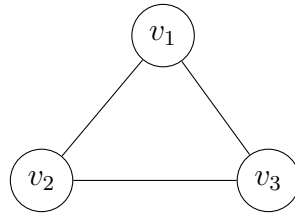


FIGURE 5.5 – Un graphe non orienté $G = (V, E)$.

On représente les sommets v_1, v_2 et v_3 par les vecteurs ξ_1, ξ_2 et ξ_3 respectivement, tel que

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \xi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \xi_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Alors la base canonique

$$\beta_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Définition 5.2.2. On note $C_0(G)$ ce \mathbb{F}_2 -espace vectoriel \mathbb{F}_2^n , on l'appelle espace des sommets du graphe.

Définition 5.2.3. Soit $G = (V, E)$ un graphe avec $E = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ une numérotation de l'ensemble des arêtes, on représente chaque arête a_i par $\varepsilon_i = (\delta_{ij})_{0 \leq j \leq m} \in \mathbb{F}_2^m$ de telle sorte que $\beta'_m = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_m\}$ est la base canonique de \mathbb{F}_2^m .

Il est commode d'identifier les arcs a_i aux vecteurs ε_i .

Définition 5.2.4. On appelle espace des arêtes du graphe le \mathbb{F}_2 -espace vectoriel noté par $C_1(G)$.

Définition 5.2.5. Le vecteur $\mu_C = (c_1, c_2, \dots, c_m) \in C_1(G)$ associé au cycle $C = (v_0, a_0, v_1, a_1, \dots, v_n, a_n, v_0)$ est défini par

$$c_i = \begin{cases} 1 & \text{si } a_i \in C, \\ 0 & \text{si } a_i \notin C. \end{cases}$$

Exemple 6.

Soit le graphe représenté dans la figure 5.2.

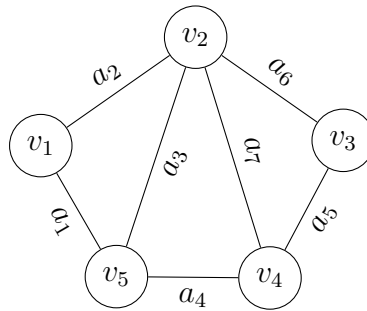


FIGURE 5.6 – Un graphe non orienté G admet un cycle.

Soit le cycle C du graphe G

$$C = (v_5, a_1, v_1, a_2, v_2, a_6, v_3, a_5, v_4, a_4, v_5).$$

Le vecteur μ_C associé au cycle C

$$\mu_C = (1, 1, 0, 1, 1, 1, 0) \in C_1(G).$$

On considère un autre cycle C' et son vecteur associé $\mu_{C'}$

$$C' = (v_1, a_2, v_2, a_7, v_4, a_4, v_5, a_1, v_1).$$

$$\mu_{C'} = (1, 1, 0, 1, 0, 0, 1) \in C_1(G).$$

On peut donc assimiler un cycle à un vecteur, il est clair que deux cycles distincts sont associés à deux vecteurs distincts. On peut définir la somme (vectorielle) de 2 ou plusieurs cycles, par exemple le cycle C' est la somme de 2 cycle $C_1 = \{v_1, a_2, v_2, a_3, v_5, a_1, v_1\}$ et $C_2 = \{v_2, a_7, v_4, a_4, v_5, a_3, v_2\}$, ces vecteurs associés sont respectivement $\mu_{C_1} = \{1, 1, 1, 0, 0, 0, 0\}$ et $\mu_{C_2} = \{0, 0, 1, 1, 0, 0, 1\}$, on peut remarquer que $\mu_{C'} = \mu_{C_1} + \mu_{C_2}$.

Définition 5.2.6. On appelle espace des cycles le \mathbb{F}_2 -sous-espace vectoriel de $C_1(G)$ engendré par l'ensemble $\{\mu_C, C \text{ cycle de } G\}$. On le note par \mathcal{C} .

Définition 5.2.7. On appelle cycle algébrique un élément μ de $C_1(G)$.

Définition 5.2.8. Si (V_1, V_2) est une partition des sommets d'un graphe G connexe, l'ensemble $C^\circ = C^\circ(V_1, V_2)$ des arêtes entre V_1 et V_2 est appelé un cocycle, auquel on associe un vecteur μ_{C° de $C_1(G)$ défini par

$$\mu_{C^\circ}(a_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } a_i \in C^\circ, \\ 0 & \text{si } a_i \notin C^\circ. \end{cases}$$

Exemple 7.

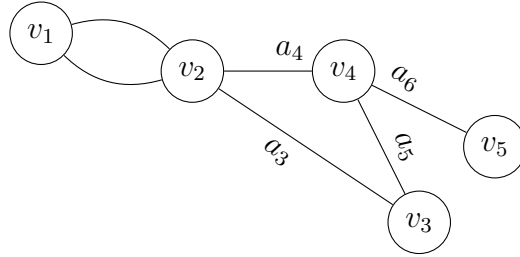


FIGURE 5.7 – Un graphe non orienté $G = (V, E)$ admet un cocycle.

Soit le cocycle $C^\circ = C^\circ(V_1, V_2) = (a_4, a_5)$, avec $V_1 = \{v_1, v_2, v_3\}$ et $V_2 = \{v_4, v_5\}$. Le vecteur associé à $C^\circ(V_1, V_2)$ est

$$\mu_{C^\circ} = (0, 0, 0, 1, 1, 0).$$

Définition 5.2.9. On appelle espace des cocycles et on le note par \mathcal{C}° , le \mathbb{F}_2 -sous-espace vectoriel de $C_1(G)$ engendré par les vecteurs μ_{C° , avec C° cocycle de G .

Soit A un arbre de recouvrement de G , on peut définir de la même manière que pour les graphes orientés des cycles et des cocycles fondamentaux attachés à cet arbre.

Définition 5.2.10. Soit C_a l'ensemble des arêtes a qui ne sont pas sur l'arbre A , C_a est l'unique cycle induit en ajoutant l'arête a à l'arbre A .

Définition 5.2.11. Soit C_a° l'ensemble des arêtes a qui sont sur l'arbre A , C_a° est le cocycle relatif à la partition de $A \setminus a$ en deux composantes connexes obtenues en retirant de l'arbre A l'arête a .

Exemple 8.

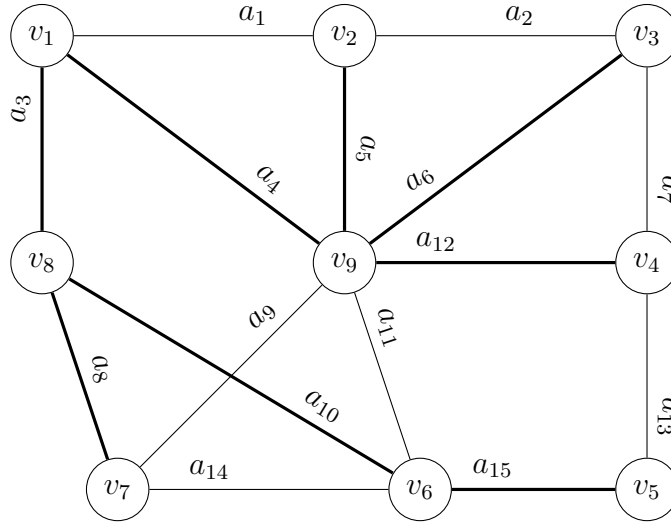


FIGURE 5.8 – Un graphe non orienté $G = (V, E)$ admet un arbre de recouvrement.

Si on ajoute l'arête a_{11} à l'arbre de recouvrement A , alors on aura le cycle élémentaire

$$C_{a_{11}} = (v_6, a_{11}, v_9, a_4, v_1, a_3, v_8, a_{10}, v_6).$$

Son vecteur associé

$$\mu_{C_{a_{11}}} = (0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0).$$

Si on retire l'arête a_4 de A , on obtient 2 composantes connexe $\{a_5, a_6, a_{12}\}$ et $\{a_3, a_8, a_{10}, a_{15}\}$, soient $V_1 = (v_9, v_2, v_3, v_4)$ et $V_2 = (v_1, v_8, v_7, v_6, v_5)$, alors le cocycle associé à l'arc a_4

$$C_{a_4}^\circ(V_1, V_2) = (a_1, a_4, a_9, a_{11}, a_{13})$$

a pour vecteur

$$\mu_{C_{a_4}^\circ} = (1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1).$$

Théorème 5.2.1. Soient $G = (V, E)$ un graphe connexe sans boucle et A un arbre de recouvrement du G :

- i) L'ensemble $\{\mu_{C_a}, a \in E \setminus A\}$ forme une base du \mathbb{F}_2 -espace vectoriel des cycles et

$$\dim_{\mathbb{F}_2} \mathcal{C} = m - (n - 1)$$

ii) L'ensemble $\{\mu_{C_a^\circ}, a \in A\}$ forme une base du \mathbb{F}_2 -espace vectoriel des cocycles et

$$\dim_{\mathbb{F}_2} \mathcal{C}^\circ = n - 1$$

iii) Les \mathcal{C} et \mathcal{C}° sont supplémentaires dans \mathbb{F}_2 -espace vectoriel $C_1(G)$ et orthogonaux pour le produit scalaire canonique.

Preuve. Soient $(C_i)_{n \leq i \leq m}$ les cycles fondamentaux associés à l'arbre de recouvrement A , et soit $R = \{e_n, \dots, e_m\} = \{e \in E, e \notin A\}$, tel que chaque arête qui n'appartient pas à l'arbre de recouvrement A crée un cycle.

Pour tout $e \in R$, $A + e$ contient un cycle unique μ_{C_e} . Ceci nous permet de construire un ensemble de $|R| = m - n + 1$ cycles indépendants, car ils ont tous une arête qui les distingue de tous les autres. Donc $\dim \mathcal{C} \geq m - n + 1$.

Soient $(C_i^\circ)_{n \leq i \leq m}$ les cocycles fondamentaux associés à A , tel que pour chaque arête appartient à l'arbre A crée un cocycle. Pour $e \in A$, $A - e$ admet deux composantes connexes et il existe donc un cocycle unique de G , noté $\mu_{C_e^\circ}$. On peut ainsi construire $|A| = n - 1$ cocycles indépendants. Donc $\dim \mathcal{C}^\circ \geq n - 1$.

Montrons maintenant que \mathcal{C} et \mathcal{C}° sont orthogonaux. Soient C un cycle et $C^\circ = C^\circ(V_1, V_2)$ un cocycle. Notons

$$\mu_C = (\mu_C(e_1), \mu_C(e_2), \dots, \mu_C(e_m)) \in \mathbb{F}_2^m$$

$$\mu_{C^\circ} = (\mu_{C^\circ}(e_1), \mu_{C^\circ}(e_2), \dots, \mu_{C^\circ}(e_m)) \in \mathbb{F}_2^m$$

Alors le produit scalaire $\langle \mu_C, \mu_{C^\circ} \rangle = \sum_{i=1}^m \mu_C(e_i) \cdot \mu_{C^\circ}(e_i)$.

Si $\mu_C(e_i) \cdot \mu_{C^\circ}(e_i) \neq 0$, alors on a $e_i \in C \cap C^\circ$ et ce nombre vaut 1, ainsi le nombre d'arête appartenant à $C \cap C^\circ$ est pair (C étant un cycle, chaque fois qu'on passe de V_1 à V_2 il faut passer de V_2 à V_1). Par conséquent $\langle \mu_C, \mu_{C^\circ} \rangle$ est simplement le nombre d'arête dans C passant de V_1 à V_2 moins le nombre d'arête passant de V_2 à V_1 , d'où $\langle \mu_C, \mu_{C^\circ} \rangle = 0$. Comme μ_C et μ_{C° sont orthogonaux, alors

$$\dim \mathcal{C} + \dim \mathcal{C}^\circ \leq m = m - n + 1 + n - 1.$$

D'où, $\dim \mathcal{C} = m - n + 1$ et $\dim \mathcal{C}^\circ = n - 1$. On en déduit que $\{\mu_{C_e}, e \in A\}$ forme une base de l'espace des cycles et que $\{\mu_{C_e^\circ}, e \in A\}$ forme une base de l'espace des cocycles. \square

Remarque. Le nombre $m - (n - 1)$ est par définition le nombre cyclomatique du graphe G , noté $\nu(G)$.

Quelques graphes sur les idéaux premiers d'un anneau commutatif

6.1 Introduction

Récemment, l'étude des graphes associés à des structures algébriques est un domaine de recherche en développement. En 1988, Istvan Beck a proposé d'étudier les anneaux commutatifs en les représentant par des graphes[9]. Il a défini le graphe du diviseur nul d'un anneau comme étant le graphe constitué d'un sommet pour chaque élément de l'anneau, et d'une arête entre deux sommets v et w si vw est égal à zéro. Ces graphes à diviseur nul ont marqué le début d'une approche de l'étude des anneaux commutatifs avec des graphes. Le graphe du zéro-diviseur a été étudié en détail par de nombreux auteurs (voir[1],[4],[3],[11],[22],[32],[33]). Plusieurs autres classes de graphes associés à des structures algébriques ont également été activement étudiées par de nombreux chercheurs (voir[5],[16],[17],[23]).

De nombreuses propriétés algébriques sont étudiées en termes d'idéaux des anneaux, il est intéressant d'associer une structure de graphe à l'ensemble des idéaux et d'étudier les propriétés algébriques et les propriétés de la théorie des graphes. Pour voir quelques exemples de ces graphes, nous nous référons à [13],[25],[34]. Dans [30], Sharma et Bhatwadekar ont proposé une nouvelle approche qui a permis de construire un autre graphe pour l'anneau commutatif R , appelé graphe comaximal : les sommets sont toujours des éléments de l'anneau, et il existe une arête entre deux sommets x et y dans R si $xR + yR = R$. Dans [35], Ye et Wu ont défini les graphes comaximaux sur l'ensemble des idéaux qui ne sont

pas inclus dans le radical de Jacobson de l'anneau. Deux idéaux sont adjacents si et seulement s'ils sont co-maximaux.

Dans ce chapitre, nous définissons un graphe somme S-propre sur l'ensemble des idéaux premiers d'un anneau commutatif. Soit R un anneau commutatif avec identité. Par $Spec(R)$ et $Max(R)$, nous notons l'ensemble de tous les idéaux premiers, et l'ensemble de tous les idéaux maximaux de R , respectivement. Soit S un sous-ensemble non vide de $Max(R)$. Nous définissons le graphe somme S-propre sur l'ensemble des idéaux premiers de R , noté $\Gamma_S(Spec(R), S)$, comme un graphe non orienté dont l'ensemble des sommets est l'ensemble de tous les idéaux premiers et, pour deux sommets distincts P et Q , il existe un arc de P à Q , noté $P \sim Q$, chaque fois que $P + Q \subseteq \mathcal{M}$, pour un certain idéal maximal \mathcal{M} dans S . Dans le cas où $S = Max(R)$, nous notons le graphe somme S-propre $\Gamma_S(Spec(R), S)$ par $\Gamma(Spec(R), S)$ et nous l'appelons simplement le graphe somme propre.

Dans la section 2, nous étudions quelques propriétés de base du graphe $\Gamma_S(Spec(R), S)$ tels que la connexité, la circonférence et le nombre de cliques. Dans la section 3, nous étudions le graphe somme propre des anneaux produits et nous examinons la relation entre le graphe complémentaire du graphe somme propre et les anneaux produits. Tout au long de ce chapitre, tous les anneaux sont supposés être commutatifs avec une identité non nulle. Par $Spec(R)$ et $Max(R)$, nous désignons l'ensemble de tous les idéaux premiers et l'ensemble de tous les idéaux maximaux de R , respectivement. De plus, $V(I)$ est l'ensemble de tous les idéaux premiers de R contenant l'idéal I . Nous nous référons à la terminologie standard de l'algèbre commutative selon [7].

6.2 Propriétés de base du graphe de la somme propre

Tout au long de ce chapitre, R est un anneau commutatif avec une identité non nulle et S est un sous-ensemble de $Max(R)$. Dans cette section, nous étudions quelques propriétés de base des graphes $\Gamma(Spec(R), S)$. Nous commençons cette section par la définition suivante.

Définition 6.2.1. *On dit que l'ensemble S est minimal par rapport à*

l'intersection et on le note m.r.i., si pour deux $m_1, m_2 \in S$ quelconques, l'intersection $m_1 \cap m_2$ ne contient aucun idéal premier non trivial.

Exemple 1.

Soit $R = \mathbb{Z}$, alors $\text{Spec}(R) = \{(0), (p), \text{où } p \text{ est premier}\}$. Soit $S = \text{Max}(R)$. Alors clairement S est minimal par rapport à l'intersection.

Exemple 2.

Soit R un domaine idéal principal quelconque qui n'est pas un champ et soit $S = \text{Max}(R)$. Alors S est minimal par rapport à l'intersection.

Remarque. Si R est un anneau commutatif à identité non nulle, alors $\text{Max}(R) \neq \emptyset$. De plus, pour tout idéal propre I non nul, il existe un idéal maximal \mathcal{M} tel que $I \subseteq \mathcal{M}$.

Proposition 6.2.1. *Si le graphe somme S -propre $\Gamma_S(\text{Spec}(R), S)$ est connexe et S est m.r.i., alors R est un domaine ou un anneau local.*

Preuve. Si (0) est un idéal premier, alors clairement R est un domaine intégral. Si (0) n'est pas idéal premier, on montre que R est un anneau local. Soit $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ deux idéaux maximaux quelconques de R , nous montrons que $\mathcal{M}_1 = \mathcal{M}_2$. Puisque le graphe $\Gamma_S(\text{Spec}(R), S)$ est connexe, nous avons un chemin joignant \mathcal{M}_1 et \mathcal{M}_2 , soit $\mathcal{M}_1 \sim P_1 \sim \dots \sim P_n \sim \mathcal{M}_2$. Notons que tous les idéaux premiers P_i sont non triviaux, pour $1 \leq i \leq n$. Puisque \mathcal{M}_1 est adjacent à P_1 , et que P_1 est adjacent à P_2 , il existe un idéal $\mathcal{M} \in S$ tel que $P_1 + P_2 \subseteq \mathcal{M}$. Clairement, $\mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}$ contient un idéal premier P_1 . Puisque S est minimal par rapport à l'intersection, nous avons $P_1 = (0)$ ou $\mathcal{M}_1 = \mathcal{M}$. Par des arguments similaires, nous avons $\mathcal{M}_1 = \mathcal{M}_2$. Donc R est un anneau local. □

Proposition 6.2.2. *Si R est un domaine ou un anneau local, alors le graphe somme propre $\Gamma(\text{Spec}(R), S)$ est connexe.*

Preuve. Si R est un domaine, alors (0) est un idéal premier. Par conséquent, pour deux idéaux premiers non triviaux quelconques P et Q , on a un chemin joignant P à Q est donné par $P \sim (0) \sim Q$. Si R est un anneau local avec un idéal maximal \mathcal{M} , alors pour deux idéaux premiers quelconques P et Q , $P + Q \subseteq \mathcal{M}$. Donc $P \sim Q$. Donc le graphe somme propre $\Gamma(\text{Spec}(R), S)$ est connexe. □

Corollaire 6.2.1. *Si R est un domaine ou un anneau local, alors $\text{diam}(\Gamma(\text{Spec}(R), S)) \leq 2$.*

Théorème 6.2.1. *Le graphe somme propre $\Gamma(\text{Spec}(R), S)$ est complet si et seulement si R est un anneau local.*

Preuve. Supposons que R n'est pas un anneau local. Soient \mathcal{M}_1 et \mathcal{M}_2 deux idéaux maximaux distincts de R . Puisque $\Gamma(\text{Spec}(R), S)$ est complet, nous avons $\mathcal{M}_1 \sim \mathcal{M}_2$. C'est une contradiction, car $\mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2 = R$, donc notre hypothèse est fautive, R est un anneau local.

Réciproquement, puisque R est un anneau local à idéal maximal \mathcal{M} , pour deux idéaux premiers quelconques P et Q , $P + Q \subset \mathcal{M}$. Par conséquent, $P \sim Q$, donc le graphe est complet. \square

Théorème 6.2.2. *Si R est un domaine d'idéal principal, alors $\Gamma(\text{Spec}(R), S)$ est un graphe étoile. L'inverse est vrai si R est un domaine de factorisation unique.*

Preuve. Puisque R est un domaine, (0) est un idéal premier. Comme R est un domaine à idéal premier, tous les idéaux premiers non triviaux sont maximaux. Par conséquent, nous avons $(0) \sim P$ pour tout idéal premier non trivial P . De même, deux idéaux premiers non triviaux sont co-maximaux, donc ils ne sont pas adjacents. Par conséquent, $\Gamma(\text{Spec}(R), S)$ est un graphe étoile.

Supposons maintenant que $\Gamma(\text{Spec}(R), S)$ est un graphe étoile et que R est un domaine de factorisation unique. Puisque le graphe $\Gamma(\text{Spec}(R), S)$ est un graphe étoile, tous les idéaux premiers non triviaux sont maximaux. Il suffit de montrer que tout idéal premier non nul est généré par un élément. Supposons qu'un idéal premier P soit généré de façon minimale par deux éléments x et y . Puisque R est un domaine de factorisation unique, on peut supposer que x et y sont des éléments irréductibles. Clairement, (x) est un idéal premier non nul de R et donc il existe une chaîne $(0) \sim (x) \sim (x, y) \sim (0) \in \Gamma(\text{Spec}(R), S)$. Contradiction en tant que $\Gamma(\text{Spec}(R), S)$ est un graphe étoile et donc tout idéal premier non nul généré par un élément. \square

Théorème 6.2.3. *Soit R un anneau non local. Si le graphe somme propre $\Gamma_S(\text{Spec}(R), S)$ est un graphe étoile, avec S est m.r.i., alors R est un domaine de dimension ≤ 1 .*

Preuve. Soit P un sommet d'un graphe tel que $P \sim Q$ pour tout $Q \in \text{Spec}(R)$.

Tout d'abord, nous montrons que (0) est un idéal premier. Soient $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ deux idéaux maximaux tels que $P \sim \mathcal{M}_1$ et $P \sim \mathcal{M}_2$. Comme $P + \mathcal{M}_1 = \mathcal{M}_1$ et $P + \mathcal{M}_2 = \mathcal{M}_2$, nous avons $P \subseteq \mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2$. Puisque S est minimal par rapport à l'intersection, $P = (0)$. Par conséquent, (0) est un idéal premier et donc R est un domaine. Supposons que $\dim R \geq 2$. Il existe une chaîne d'idéaux premiers de longueur au moins égale à deux comme suit :

$$P_0 \subsetneq P_1 \subsetneq P_2.$$

Il est clair que $P_0 = (0)$. Puisque $\Gamma_S(\text{Spec}(R), S)$ est un graphe étoile, $P_0 \sim P_1$, c'est-à-dire qu'il existe un idéal maximal \mathcal{M} tel que $P_0 + P_1 \subseteq \mathcal{M}$. Si $P_1 \neq \mathcal{M}$, alors nous avons un cycle $P_0 \sim P_1 \sim \mathcal{M} \sim \dots \sim P_0$, ce qui est une contradiction puisque $\Gamma_S(\text{Spec}(R), S)$ est un graphe étoile. Supposons que $P_1 = \mathcal{M}$. Puisque \mathcal{M} est un idéal maximal, $P_1 \subsetneq P_2$ n'est pas possible. Donc il n'existe pas de chaînes d'idéaux premiers de longueur deux ou plus. Par conséquent, $\dim R \leq 1$. \square

Proposition 6.2.3. *Si le graphe somme propre $\Gamma_S(\text{Spec}(R), S)$ est un graphe étoile, alors $S = \text{Max}(R)$.*

Preuve. Soit P un sommet fixe tel que $P \sim Q$ pour tout sommet Q . Soit \mathcal{M} un idéal maximal quelconque de R . Puisque $P \sim \mathcal{M}$, nous avons $\mathcal{M} \in S$. \square

Proposition 6.2.4. *Si R est un anneau de dimension ≥ 2 , alors $gr(\Gamma(\text{Spec}(R), S)) = 3$.*

Preuve. Puisque $\dim R \geq 2$, il existe une chaîne d'idéaux premiers telle que $P_0 \subsetneq P_1 \subsetneq P_2$. Puisque R est un anneau commutatif avec identité, il existe un idéal maximal \mathcal{M} tel que $P_2 \subseteq \mathcal{M}$. Par conséquent, on a le cycle $P_0 \sim P_1 \sim \mathcal{M} \sim P_0$. \square

Proposition 6.2.5. *Si $\dim R = 1$ et que le graphe somme propre $\Gamma(\text{Spec}(R), S)$ possède un cycle, alors R n'est pas un domaine intégral.*

Preuve. Nous montrons que (0) n'est pas un idéal premier. Par contradiction, supposons que (0) est un idéal premier. Soit $P_0 \sim P_1 \sim P_2 \sim P_0$ un cycle dans $\Gamma(\text{Spec}(R), S)$. Il existe un idéal maximal $\mathcal{M} \in S$ tel que $P_0 + P_1 \subseteq \mathcal{M}$. Soit P_0 , ou bien P_1 un idéal premier non trivial, on dit que

P_0 est non trivial. Puisque (0) est un idéal premier et que $\dim R = 1$, P_1 est un idéal maximal. Comme P_0 et P_1 sont adjacents, $P_0 + P_1 \subseteq \mathcal{M}$ et donc $P_1 = \mathcal{M}$. Puisque $\dim R = 1$ et que P_2 est un idéal premier non trivial, P_2 est également un idéal maximal. Donc P_1 et P_2 sont co-maximaux, ce qui n'est pas possible puisque $P_1 \sim P_2$. Par conséquent, (0) n'est pas un idéal premier et R n'est pas un domaine intégral. \square

Proposition 6.2.6. *Soit R un anneau tel que $|\text{Min}(R)| \leq \infty$. Alors les affirmations suivantes sont vraies :*

(a) *Le $\text{Spec}(R)$ est connexe si et seulement si $\Gamma(\text{Spec}(R), S)$ est connexe et $\text{diam}(\Gamma(\text{Spec}(R), S)) \leq 2|\text{Min}(R)|$.*

(b) $\gamma(\Gamma(\text{Spec}(R), S)) \leq |\text{Min}(R)|$.

Preuve. (a) Par contradiction, supposons que $\text{Spec}(R)$ n'est pas connexe. Il existe deux ensembles non vides non vides $V(I)$ et $V(J)$ tels que $V(I) \cup V(J) = \text{Spec}(R)$ et $V(I) \cap V(J) = \emptyset$ pour certains idéaux I et J . Soit $P \in V(I)$ et $Q \in V(J)$. Puisque $\Gamma(\text{Spec}(R), S)$ est connexe, il existe un chemin comme suit :

$$P \sim P_1 \sim P_2 \sim \dots P_n \sim Q.$$

Puisque $P \sim P_1$, il existe un idéal maximal \mathcal{M} tel que $P + P_1 \subseteq \mathcal{M}$. Puisque $P \in V(I)$, $\mathcal{M} \in V(I)$ et donc $P_1 \in V(I)$. En appliquant les arguments similaires, on peut montrer que $P_n \in V(I)$. Puisque $P_n \sim Q$ il existe un idéal maximal \mathcal{N} tel que $P_n + Q \subseteq \mathcal{N}$. Puisque $P_n \in V(I)$, $\mathcal{N} \in V(I)$ aussi comme $Q \in V(J)$, $\mathcal{N} \in V(J)$, contradiction car $V(I) \cap V(J) = \emptyset$.

Soit $\text{Min}(R) = \{P_1, P_2, \dots, P_r\}$. Supposons d'abord $r = 2$. Soit P et Q deux idéaux premiers quelconques de R . Nous montrons qu'il existe un chemin de longueur au plus quatre reliant P à Q . Il existe des idéaux premiers minimaux P_1 et Q_1 tels que $P_1 \subseteq P$ et $Q_1 \subseteq Q$. Comme $\text{Spec}(R)$ est connexe, on a $V(P_1) \cap V(Q_1) \neq \emptyset$. Il existe un idéal premier $P_2 \in V(P_1) \cap V(Q_1)$. Comme R est un anneau commutatif avec identité, on a un chemin $P \sim P_1 \sim P_2 \sim Q_1 \sim Q$. Supposons maintenant que $r > 2$. Soit $1 \leq i \leq l_1$ tel que $P \in V(P_i)$, pour $l_1 < i \leq l_2$ tel que $Q \in V(P_i)$ et $l_2 < i \leq r$ tel que $P, Q \notin V(P_i)$. Puisque $\text{Spec}(R)$ est connexe, il existe $1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_k \leq r$ tels que $V(P_{i_1}) \cap V(P_{i_2}) \neq \emptyset$

pour $1 \leq l \leq k$ et $(\bigcup_{i=1}^{l_1} P_i) \cap V(P_{i_1}) \neq \emptyset$, $(\bigcup_{i=1+1}^{l_2} P_i) \cap V(P_{i_k}) \neq \emptyset$. Par conséquent, il est facile de voir qu'il existe un chemin entre P et Q de longueur au plus $2|Min(R)|$.

(b) Soit $S = \{P_1, P_2, \dots, P_n\}$ soit un ensemble dominant dans $\Gamma(Spec(R), S)$. Par conséquent, pour tout $Q \in Spec(R) \setminus S$, il existe un $P_i \in S$ tel que $Q \in P_i$ pour quelque $1 \leq i \leq n$. Soient Q_1, Q_2, \dots, Q_r les idéaux premiers minimaux distincts de R tels que chaque idéal premier P_i contient au moins un Q_j pour $1 \leq j \leq r$. Donc $r \leq n$. Nous montrons que $T = \{Q_1, Q_2, \dots, Q_r\}$ est aussi un ensemble dominant. Soit P' un idéal premier quelconque qui n'est pas dans T . Supposons que $P' \notin S$. Puisque S est un ensemble dominant, il existe un idéal premier $P_i \in S$ tel que $P' \sim P_i$. Il existe un idéal maximal \mathcal{M} tel que $P' + P_i \subseteq \mathcal{M}$. Par construction de l'ensemble T , il existe un $Q_j \in T$ tel que $Q_j \subseteq P_i$ pour quelque $1 \leq j \leq r$. Donc $P' + Q_j \subseteq \mathcal{M}$, et donc $P' \sim Q_j$. Par conséquent, T est un ensemble dominant. Supposons maintenant que $P' \in S$. Il existe $Q_j \in T$ tel que $Q_j \subseteq P'$. Puisque R est un anneau commutatif avec unité, il existe un idéal maximal \mathcal{M}_1 tel que $P' \subseteq \mathcal{M}_1$. Par conséquent, $P' \sim Q_j$, donc T est un ensemble dominant. \square

6.3 Graphe somme propre du produit direct d'anneaux

Dans cette section, nous étudions le graphe somme propre de produit d'anneaux R_i pour $1 \leq i \leq n$. Nous mettons en relation le nombre de cliques, le nombre indépendant et le nombre dominant de $\Gamma(Spec(R), S)$ et celui de $\Gamma(Spec(R_i), S_i)$ pour $1 \leq i \leq n$.

Théorème 6.3.1. *Soient R_1, R_2, \dots, R_n sont des anneaux commutatifs avec des identités et $R = R_1 \times R_2 \times \dots \times R_n$. Alors $\Gamma(Spec(R), S) = \bigcup_{i=1}^n \Gamma(Spec(R_i), S_i)$, où $S_i = Max(R_i)$ pour $1 \leq i \leq n$, où \bigcup désigne l'union disjointe des ensembles.*

Preuve. Tout idéal premier P de R est de la forme $R_1 \times R_2 \times \dots \times R_{i-1} \times P_i \times R_{i+1} \times \dots \times R_n$, où P_i est un idéal premier dans R_i et tout idéal maximal de R est de la forme $R_1 \times R_2 \times \dots \times R_{i-1} \times \mathcal{M}_i \times R_{i+1} \times \dots \times R_n$ pour un certain idéal maximal \mathcal{M}_i de R_i . Par conséquent, nous pouvons associer chaque idéal premier P_i de R_i à l'idéal premier $R_1 \times R_2 \times \dots \times R_{i-1} \times P_i \times R_{i+1} \times \dots \times R_n$ de R . Clairement, si P_i et Q_i sont adjacents

dans $\Gamma(\text{Spec}(R_i), S_i)$, alors nous avons $R_1 \times R_2 \times \dots \times R_{i-1} \times P_i \times R_{i+1} \times \dots \times R_n$ et $R_1 \times R_2 \times \dots \times R_{i-1} \times Q_i \times R_{i+1} \times \dots \times R_n$ sont adjacents dans $\Gamma(\text{Spec}(R), S)$ et vice-versa. \square

Corollaire 6.3.1. *Si R est un anneau Artinien, alors le graphe somme propre $\Gamma(\text{Spec}(R), S)$ est non connexe ou est un sommet isolé.*

Corollaire 6.3.2. *Si R est un anneau Artinien non local, alors le graphe complémentaire du graphe somme propre $\Gamma(\text{Spec}(R), S)$ est un graphe complet.*

Corollaire 6.3.3. *Soient R_1, R_2, \dots, R_n sont des anneaux commutatifs avec des identités et $R = R_1 \times R_2 \times \dots \times R_n$. Les affirmations suivantes sont vraies :*

$$(a) \gamma(\Gamma(\text{Spec}(R), S)) \leq |\text{Min}(R_1)| + |\text{Min}(R_2)| + \dots + |\text{Min}(R_n)|.$$

$$(b) \alpha(\Gamma(\text{Spec}(R), S)) = |\text{Max}(R_1)| + \dots + |\text{Max}(R_n)|.$$

$$(c) \omega(\Gamma(\text{Spec}(R), S)) = \text{Max}\{\omega(\Gamma(\text{Spec}(R_1), S_1)), \dots, \omega(\Gamma(\text{Spec}(R_n), S_n))\}.$$

Théorème 6.3.2. *Supposons que R est un anneau noethérien réduit. Le graphe complémentaire du graphe somme propre $\Gamma(\text{Spec}(R), S)$ est multi-partis complet si et seulement si R est un produit direct d'anneaux locaux.*

Preuve. Supposons que le graphe complémentaire de $\Gamma(\text{Spec}(R), S)$ soit multi-partis complet avec les ensembles de sommets V_1, V_2, \dots, V_n . Clairement, l'ensemble des sommets de V_i forme un sous-graphe complet de $\Gamma(\text{Spec}(R), S)$ pour $1 \leq i \leq n$. Puisque le sous-graphe sur V_i est complet, V_i a un idéal maximal. Il est également facile de voir que V_i a un idéal maximal unique, dit \mathcal{M} . Maintenant, considérons un ensemble A , constitué de tous les idéaux premiers de R qui est contenu dans \mathcal{M} . Nous montrons maintenant que $A = V_i$. Soit P tout idéal premier de R tel que $P \subseteq \mathcal{M}$. Il est clair que $P \sim \mathcal{M}$. Par conséquent, dans le graphe complémentaire, P et \mathcal{M} ne sont pas adjacents. Supposons que $P \in V_j$ pour un certain $i \neq j$. Puisque le graphe complémentaire de $\Gamma(\text{Spec}(R), S)$ est multi-partis complet, $P \sim \mathcal{M}$ dans le graphe complémentaire. Puisque $P \sim \mathcal{M}$ dans $\Gamma(\text{Spec}(R), S)$, contradiction. Donc $A = V_i$. Puisque R est un anneau noethérien, R a un nombre fini d'idéaux premiers minimaux.

Soient P_1, P_2, \dots, P_m les idéaux premiers minimaux de R . Clairement, pour chaque i , il existe au moins un j tel que $P_j \in V_i$. Soit P_{i_1}, \dots, P_{i_r} sont des idéaux premiers minimaux tels que $P_{i_1}, \dots, P_{i_r} \in V_i$. Puisque $V(P_{i_1}) \cup V(P_{i_2}) \cup \dots \cup V(P_{i_r}) = V(P_{i_1} \cap P_{i_2} \cap \dots \cap P_{i_r})$, on peut montrer que $V(P_{i_1} \cap P_{i_2} \cap \dots \cap P_{i_r}) = V_i$. Soit P un idéal premier quelconque de R tel que $P \in V_i$ c'est-à-dire $P \subseteq \mathcal{M}$. Si P est un idéal premier minimal de R , alors clairement $P \in V(P_{i_1} \cap P_{i_2} \cap \dots \cap P_{i_r})$. Supposons que P n'est pas un idéal minimal premier de R . Puisque P n'est pas un idéal minimal premier, il existe un idéal minimal premier de R , noté Q tel que $Q \subsetneq P$. Si $Q \in \{P_{i_1}, \dots, P_{i_r}\}$, alors clairement $P \in V(P_{i_1} \cap P_{i_2} \cap \dots \cap P_{i_r})$. Supposons que $Q \notin \{P_{i_1}, \dots, P_{i_r}\}$. Comme $Q \subseteq \mathcal{M}$ et que Q est minimal, donc $Q = P_{i_k}$ pour quelque $1 \leq k \leq r$ ce qui est une contradiction. Par conséquent, $P \in V(P_{i_1} \cap P_{i_2} \cap \dots \cap P_{i_r})$. Soit P un idéal premier quelconque contenant P_{i_k} pour un certain $1 \leq k \leq r$. On montre que $P \subseteq \mathcal{M}$ c'est-à-dire que $P \sim \mathcal{M}$ dans le graphe $\Gamma(\text{Spec}(R), S)$. Supposons que P n'est pas adjacent à \mathcal{M} dans $\Gamma(\text{Spec}(R), S)$. Puisque R est un anneau commutatif avec unité, il existe un idéal maximal \mathcal{M}_1 de R tel que $P_{i_r} \subseteq P \subseteq \mathcal{M}_1$. Puisque $P \subseteq \mathcal{M}_1$, il existe un chemin $\mathcal{M}_1 \sim P_{i_k} \sim \mathcal{M}_1$ dans $\Gamma(\text{Spec}(R), S)$. Comme le graphe complémentaire de $\Gamma(\text{Spec}(R), S)$ est multi-partis complet, \mathcal{M} , \mathcal{M}_1 et P_{i_k} appartiennent au même ensemble de sommets V_i . Puisque V_i a un unique idéal maximal \mathcal{M} , il y a contradiction. Donc $V(P_{i_1} \cap P_{i_2} \cap \dots \cap P_{i_r}) = V_i$. Soit $I_i = P_{i_1} \cap P_{i_2} \cap \dots \cap P_{i_r}$ pour $1 \leq i \leq n$. Alors il est clair que $\text{Spec}(R)$ est une union disjointe de sous-ensembles fermés en nombre fini. Il est facile de voir que chacun des I_i est un idéal co-maximal de R . Puisque R est un anneau réduct, on a $R \cong R/I_1 \times \dots \times R/I_n$. Clairement, R/I_i est un anneau local.

Or inversement, d'après le théorème 6.3.1, le graphe $\Gamma(\text{Spec}(R), S)$ est une union disjointe de sous-graphes $\Gamma(\text{Spec}(R_i), S_i)$ pour $1 \leq i \leq n$. Puisque chaque R_i est un anneau local, par le théorème 6.2.1, chaque $\Gamma(\text{Spec}(R_i), S_i)$ est un graphe complet. Par conséquent, le graphe complémentaire de $\Gamma_S(\text{Spec}(R), S)$ est multi-partis complet. \square

Corollaire 6.3.4. *Le graphe complémentaire du graphe somme propre $\Gamma(\text{Spec}(R), S)$ est complet si et seulement si R est un anneau Artinien.*

Conclusion

En somme, la théorie algébrique des graphes sont un ensemble de notions fondamentales qui permettent de traiter et modéliser des problèmes multiples tels que le plan de métro, la carte de lignes ferroviaires ou aériennes, le plan électrique ou le circuit électronique etc. Ainsi, tout le monde sait plus ou moins intuitivement ce qu'est un graphe; toutefois, entre la vague notion d'un schéma incluant des « points » et des « trajets », il y a une longue élaboration des concepts, et en particulier le choix d'une terminologie bien précise.

En fait, l'étude de la théorie algébrique des graphes requiert de passer en revue plusieurs formes algébriques. D'abord, nous avons basé sur les matrices correspondantes a fin d'associer leurs propriétés avec celles des graphes, pour ensuite exploiter les valeurs propres comme étant un indicateur de certains types fondamentaux de graphes, puis , nous nous sommes servi de l'espace vectoriel en le mettant en corrélation avec les cycles et les co-cycles d'un graphe puisqu'ils partagent en commun les mêmes caractéristiques. Enfin, nous avons défini des graphes a partir des éléments d'un anneau pour conclure la relation qui les unissent.

Cette étude peut s'élargir a d'autres champs algébriques pouvant aussi nous apporter une idée sur la propriété d'un graphe a savoir le polynôme minimal.

Bibliographie

- [1] S. Akbari and A. Mohammadian, *On the zero-divisor graph of a commutative ring*, J. Algebra 274 (2004), no. 2, 847-855.
- [2] O. Amini et F. Havet, *Introduction aux expandeurs*, Journée Combinatoire et Algorithmes du Littoral Méditerranéen, Octobre (2006), 3-20.
- [3] D. F. Anderson and P. S. Livingston, *The zero-divisor graph of a commutative ring*, J. Algebra 217 (1999), no. 2, 434-447.
- [4] D. F. Anderson and A. Badawi, *On the zero-divisor graph of a ring*, Commun. Algebra 36 (2008), no. 8, 3073-3092.
- [5] D. F. Anderson and A. Badawi, *The total graph of a commutative ring*, J. Algebra 320 (2008), no. 7, 2706-2719.
- [6] N. Ashrafi, H. R. Maimani, M. R. Pournaki and S. Yassemi, *Unit graphs associated with rings*, Commun. Algebra 38 (2010), no. 8, 2851-2871.
- [7] M. F. Atiyah and I. G. MacDonald, *Introduction to Commutative Algebra*, Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.-London-Don Mills, Ont., 1969.
- [8] R.B. Bapat, *Graphs and Matrices*, Springer-Verlag, New York, 2010, 90-150.
- [9] I. Beck, *Coloring of commutative rings*, J. Algebra 116 (1988), no. 1, 208-226.
- [10] N. Biggs, *Algebraic Graph Theory*, Second edition, Cambridge University Press, Cambridge, 1993, 40-220.
- [11] N. Bloomfield and C. Wickham, *Local rings with genus two zero divisor graph*, Commun. Algebra 38 (2010), no. 8, 2965-2980.

- [12] A. Bretto, A. Faisant, F. Hennecart, *Éléments de théorie des graphes*, Springer-Verlag France, 2012, 192-198.
- [13] I. Chakrabarty, S. Ghosh, T. K. Mukherjee and M. K. Sen, *Intersection graphs of ideals of rings*, Discrete Math. 309 (2009), no. 17, 5381-5392.
- [14] K. Cvetko-Vah, D. Dolzan, *Indecomposability graphs of rings*, Bull. Aust. Math. soc 77 2008, no. 1, 151-159.
- [15] M. Dhorajia, *Some graph on prime ideals of a commutative ring*, Int. Electron. J. Algebra 23 (2018), 157-166.
- [16] A. M. Dhorajia, *Total graph of the ring $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m$* , Discrete Math. Algorithms Appl.7 (2015), no. 1, 155-200.
- [17] A. M. Dhorajia and J. M. Morzaria, *Domination in total graphs of small rings*, Discrete Math. Algorithms Appl. 8 (2016), no. 4, 165-210.
- [18] J. Han and W. K. Nicholson, *Extensions of clean rings*, Commun. Algebra 29 (2001), no. 6, 2589-2595.
- [19] R.E. Hartwig, M.S. Putcha, *When is a matrix a difference of two idempotents ?*, Linear and Multilinear Algebra 26 (1990), no. 4, 267-277.
- [20] S. M. Hegde, Kumudakshi, *Contraction of graceful digraphs using algebraic structures*, J. Discrete Mathematical Sciences and Cryptography 25, (2016), 103-116.
- [21] C. Godsil and G. Royle, *Algebraic Graph Theory*, Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 2001, 163-171.
- [22] H. R. Maimani, M. R. Pournaki and S. Yassemi, *Zero-divisor graph with respect to an ideal*, Commun. Algebra 34 (2006), no. 3, 923-929.
- [23] H. R. Maimani, C. Wickham and S. Yassemi, *Rings whose total graphs have genus at most one*, Rocky Mountain J. Math. 42 (2012), no. 5, 1551-1560..
- [24] J. Miller, *An Introduction to spectral graph theory*, Math 336 , (June 8 2020), 30-70.
- [25] M. J. Nikmehr and F. Shaveisi, *The regular digraph of ideals of a commutative ring*, Acta Math. Hungar. 134 (2012), no. 4, 516-528.
- [26] C.Pazzis, *On sums of idempotent Matrices over a field of positive characteristic*, Linear Algebra Appl. 433 (2010), no. 4, 856-866.

- [27] S. Razzaghi, S. Sahebi, *A Graph with respect to Idempotents of a Ring*, J. Algebra Appl. 20 (2021), no. 6, 215-260.
- [28] M. Rigo, *Théorie des graphes*, université de liège Faculté des sciences Département de mathématiques Année académique (2009–2010), 5-73.
- [29] L. Rittenhouse, *Properties and Recent Applications in Spectral Graph Theory*, Virginia Commonwealth University (2008).
- [30] P. K. Sharma and S. M. Bhatwadekar, *A note on graphical representation of rings*, J. Algebra 176 (1995), no. 1, 124-127.
- [31] M. P. Shayma, V. Anil Kumar, *On the roots of Hosoya polynomial*, J. Discrete Math. Sci. Cryptogr. 19 (2016), no. 1, 199-219.
- [32] S. Spiroff and C. Wickham, *A zero divisor graph determined by equivalence classes of zero divisors*, Comm. Algebra 39 (2011), no. 7, 2338-2348.
- [33] C. Wickham, *Classification of rings with genus one zero-divisor graphs*, Commun. Algebra 36 (2008), no. 2, 325-345.
- [34] M. Ye, T. Wu, Q. Liu and J. Guo, *Graph properties of co-maximal ideal graphs of commutative rings*, J. Algebra Appl. 14 (2015), no. 3, 155-207.
- [35] M. Ye and T. Wu, *Co-maximal ideal graphs of commutative rings*, J. Algebra Appl. 11 (2012), no. 6, 125-187.