كلية العلوم و التقنيات فاس

Faculté des Sciences et Techniques de Fès

جامعة سيدي محمد بن عبد الله

Université Sidi Mohamed Ben Abdellah

DEPARTEMENT DES MATHEMATIQUES

Master Mathématique et Application au Calcul Scientifique

(MACS)

MEMOIRE DE FIN D'ETUDES

Pour l'obtention du Diplôme de Master Sciences et Techniques (MST)

Compacité faible et applications

Réalisé par : BOULAHCINE Zahra

Encadré par : EZZAKI Fatima

Soutenu le jour mois année : 16-07-2021

Devant le jury composé de :

-Pr. AMMOR Ouafae	Présidente
-Pr. EL AYADI Rachid	Examinateur
-Pr. ELHARAMI Mohamed	Examinateur
-Pr. EZZAKI Fatima	Encadrante
-Pr. TAHRI Khalid	Examinateur

Année Universitaire 2020 / 2021

FACULTE DES SCIENCES ET TECHNIQUES FES – SAISS

B.P. 2202 – Route d'Imouzzer – FES

☎ 212 (0)5 35 61 16 86 – Fax : 212 (0)5 35 60 82 14

Dédicaces

Je dédie ce mémoire
A mes parents pour leurs amour inestimable, leurs confiance, leurs soutien, leurs sacrifices et toutes les valeurs qu'ils ont su m'inculquer.

A mes sœurs ainsi qu'à mes beaux frères pour leurs tendresse, leurs complicité.

A mes chers amis, avec eux j'ai partagé des moments inoubliables de souffrance et de joie.

A tous mes professeurs pour leur soutien au cours de toutes mes années d'études.

Remerciements

Au terme de ce travail, je voudrais exprimer mes remerciements et ma profonde reconnaissance à tous ceux qui ont contribué de prêt ou de loin à sa réalisation :

Je remercie avant tout Allah pour la volonté, la santé et la patience qui m'a donné durant toutes les années d'étude et de pouvoir parachever ce travail.

Je voudrais remercier tout particulièrement le Professeur Fatima EZZAKI qui a accepté en toute modestie de m'accompagner tout au long de ce projet, qui a lu mon rapport et m'a aidé à réaliser la version définitive. Elle m'a apporté énormément de connaissances en la théorie de probabilité et d'intégration, elle a été toujours à l'écoute de mes questions, et s'est toujours intéressé à l'avancée de mon travail. Cela qui m'a permis d'enrichir mes connaissances dans ce domaine, et de m'approcher du monde des mathématiques et de la recherche scientifique.

Je tiens également à exprimer toute ma gratitude et tout mon sentiment de reconnaissance aux membres du Jury, Madame le professeur Ouafae AMMOR, Monsieur le professeur Rachid EL AYADI, Monsieur le professeur Mohamed EL-HARMI et Monsieur le professeur Khalid TAHRI pour le temps qu'ils ont réservé à l'évaluation de ce travail.

J'adresse mes sincères remerciements et ma grande reconnaissance à tous mes professeurs de la filière Mathématique et Applications au Calcul Scientifique.

Je n'oublie pas de remercier ma famille, mes amis et surtout mes parents, qui m'ont toujours soutenu durant mes études.

Table des matières

Introduction

La compacité faible joue un rôle important en théorie d'analyse fonctionnelle en générale et en analyse convexe en particulier. C'est une notion qui a trouvé plusieurs applications en optimisation. Il s'applique également dans le cas univoque et multivoque pour identifier la limite de plusieurs processus aléatoires. Différents auteurs ont travaillé sur la compacité faible voir C.Castaing et P.clauzure [5], J.DIESTEL-J.J.UHL,JR [9],J.K BROOKS-N.DINCULEANU [2], et C.CASTAING [4] etc. L'objectif de ce travail est de développer certains théorèmes de compacité faible et leurs applications en minimisation ainsi que leur rôle dans la convergence des martingales à la limite. Ce projet est composé de quatre chapitres :

Dans **le premier chapitre** nous présentons des définitions et notations. Nous rappelons également quelques résultats en analyse fonctionnelle et en théories d'intégration. Puis nous abordons des notions de mesurabilité, d'intégrale, et celle de la convergence faible pour des multifonctions à valeurs dans l'ensemble des parties non vides d'un espace de Banach E. À la fin de ce chapitre nous donnons quelques propriétés des multi-mesures ainsi qu'un théorème d'existence de mesure sélection d'une multi mesure . Quelques propriétés topologiques de l'ensemble de ces sélections sont également données.

Le **deuxième chapitre** présente des méthodes de compacité faible dans L^1_E où E est un espace de Banach séparable. Ces résultats sont des extensions de ceux obtenus dans ([2], [9]), et dans l'espace des multifonctions mesurables et intégralement bornées à valeurs convexes faiblement compactes non vides d'un espace de Banach séparable E.

Dans Le **dernière chapitre** de ce mémoire, après avoir établi des versions univoques et multivoques des résultats présentés dans le chapitre deux, nous prouvons l'existence d'un minimum pour des fonctionnelles intégrales convexes dans le cas univoque et multivoque. Puis nous démontrons l'existence des éléments de meilleure approximation dans L^1_E et $\mathscr{L}^1_{\mathcal{P}_{wkc}(E)}(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. À la fin de ce chapitre nous donnons un rappel de la notion d' espérance conditionnelle et des martingales à la limite. Puis nous appliquons quelques résultats du deuxième chapitre pour montrer la convergence des martingales à la limite.

1

Quelques notions de base

1.1 Analyse fonctionnelle

1.1.1 Quelques résultats autour : Espaces réflexif- Espaces séparable- Topologie faible

Dans cette section, E est un espace de Banach.

La séparabilité

Définition 1.1.1

1. Une partie D d'un espace normé E est dite dense dans E si sa fermeture $\bar{D}$ coïncide avec E $(\bar{D} = E)$.
2. Un espace normé E est dit séparable s'il existe un sous ensemble $F \subset E$ dénombrable et dense dans E.

Exemple : Tout espace normé de dimension finie est séparable.

La réflexivité

Définition 1.1.2

On dit que l'espace de Banach E est réflexif si l'injection canonique :

$$i : \begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & E^{**} \\ x & \longmapsto & \widetilde{x} = i(x) \end{array}$$

est surjective.

Définition 1.1.3

La topologie faible de E est la topologie la moins fine pour laquelle toutes les formes linéaires continues $\varphi \in E^{'}$ restent continues. On la note $\sigma\left(E, E^{'}\right)$, ou plus rapidement w.

Théorème 1.1.1: Théorème de Eberlein-Smulian

Soit A un sous ensemble de E. Les affirmations suivantes sont équivalentes :

(i) *A est relativement faiblement compact ($\bar{A}^{\sigma\left(E,E'\right)}$ est compact).*

(ii) *A est sequentiellement faiblement compact (toute suite d'éléments de A admet une sous-suite $\sigma\left(E,E'\right)$ -convergente).*

Démonstration. [11, voir théorème 18.A. page 145] □

Théorème 1.1.2: Théorème de Dunfor d-Pettis

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ est un espace mesuré fini et $\mathcal{H} \subset \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$ telle que

$$\sup_{f\in\mathcal{H}} \int_\Omega |f(t)| d\mu(t) < \infty.$$

Alors, les affirmations suivantes sont équivalentes :

(i) *$\mathcal{H}$ est relativement faiblement compact dans $\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}$.*

(ii) *$\mathcal{H}$ est uniformément intégrable.*

Démonstration. [1, voir le théorème 4.3 page 115] □

Théorème 1.1.3: théorème d'Egorov

Soient $(\Omega, \mathcal{B}, m)$ un espace mesuré fini et (f_n) une suite de fonctions mesurables définie sur Ω à valeurs réelles telle que $(f_n)_n$ converge simplement vers f. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une partie $A \in \mathcal{B}$ telle que $m(\Omega \backslash A) \leq \varepsilon$ et telle que (f_n) converge uniformément vers f sur A.

Définition 1.1.4

Soit $A \subset X$, l'enveloppe convexe de A noté $\mathrm{co}(A)$, est l'intersection de tous les ensembles convexes contenant A.

Plus explicitement, on peut définir l'enveloppe convexe de l'ensemble A via :

$$\mathrm{co}(A) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i : n \in \mathbb{N}, x_i \in A, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1, \lambda_i > 0 \right\}.$$

On note par $\overline{co}(A)$ l'adhérence de $\mathrm{co}(A)$ et on a le résultat suivant :

Théorème 1.1.4: Théorème de Krein

Si A est faiblement compact de E alors le $\overline{co}(A)$ est faiblement compact de E.

Démonstration. [11, voir le théorème 19.E page 162] □

Un corollaire de ce théorème est :

Corollaire 1.1.1

Si A est sous ensemble de E relativement faiblement compact, alors le $\overline{\text{co}}(A)$ est faiblement compact de E.

Démonstration. En effet, on a $A \subset \bar{A}^{\sigma\left(E,E'\right)}$ donc :

$$\text{co}(A) \subset \text{co}\left(\bar{A}^{\sigma\left(E,E'\right)}\right).$$

Comme $\bar{A}^{\sigma\left(E,E'\right)}$ est compact donc, d'après le théorème de Krein, $\overline{\text{co}}\left(\bar{A}^{\sigma\left(E,E'\right)}\right)$ est faiblement compact, Donc

$$\overline{\text{co}}(A) \subset \overline{\text{co}}\left(\bar{A}^{\sigma\left(E,E'\right)}\right).$$

Comme $\overline{\text{co}}(A)$ est un fermé au sens de la topologie de la norme de E et convexe alors il est fermé pour la topologie faible. D'où la faible compacité de $\overline{\text{co}}(A)$. □

Théorème 1.1.5: Théorème D'aloglu

Soit E un espace normé. Alors la boule unité fermée de E' est compacte pour la topologie faible- (w^*).*

Ce théorème permet d'en déduire une caractérisation des espaces normés réflexifs (égaux à leur bidual). Un tel espace est nécessairement un espace de Banach.

1.1.2 Espaces Polonais et Souslin

Définition 1.1.5

Un espace topologique séparable (E, τ) est un espace Polonais s'il est complètement métrisable, autrement dit s'il existe une métrique d complète induisant la topologie τ.

Corollaire 1.1.2

Tout espace Polonais est un espace homéomorphe à un espace métrique complet qui a un sous-ensemble dense dénombrable.

Exemples :

-Tout espace de Banach séparable est un espace polonais.
-R est un espace polonais.

Définition 1.1.6

*Un espace topologique (E, τ) est un espace de **Suslin** s'il existe un espace polonais Y et une application continue $f : Y \to E$ tel que :*

$$E = f(Y).$$

Exemple :
– Tout espace polonais est un espace de Suslin.

1.2 Théorie d'intégration univoque

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $(E, \|\cdot\|)$ un espace de Banach muni de sa tribu borélienne $\mathcal{B}(E)$. $E_b^{'}$ désigne le dual topologique fort de E et $E_s^{'}$ désigne le dual topologique faible de E, en générale $E^{'}$ désigne le dual topologique de E, étant donné $x^{'} \in E^{'}$ et $x \in E$ nous notons par $\langle x^{'}, x \rangle$ la valeur de $x^{'}$ au point x.

1.2.1 Mesurabilité et μ-mesurabilité

Définition 1.2.1: Rappel

Une fonction $f : (\Omega, \mathcal{A}) \to (E, \mathrm{B}(E))$ est mesurable si pour tout B dans $\mathrm{B}(E)$, $f^{-1}(B)$ est un élément de $\mathcal{A}$.

Mesure à densité

A partir d'une mesure et d'une fonction mesurable positive, on peut définir une autre mesure de la manière suivante :

Définition 1.2.2

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et f une fonction mesurable positive sur Ω alors $\forall A \in \mathcal{A}$ la fonction

$$\gamma : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}_+$$
$$A \mapsto \int_\Omega f\chi_A d\mu$$

*est une mesure sur $\mathcal{A}$ dite **mesure de densité** f par rapport à μ et on écrit $\gamma = f.\mu$.*

Mesure absolument continue

Définition 1.2.3

*Soient μ et γ deux mesures sur un espace mesurable $(\Omega, \mathcal{A})$. On dit que γ est **absolument continue** par rapport à μ, et on note $\gamma \prec\prec \mu$ si*

$$\forall A \in \mathcal{A}, \mu(A) = 0 \Longrightarrow \gamma(A) = 0.$$

Définition 1.2.4

Une fonction $f : (\Omega, \mathcal{A}, \mu) \to E$ *est dite simple si elle est de la forme*

$$f = \sum_{i=1}^{n} x_i 1_{A_i}$$

où les x_i *sont distincts deux à deux dans* E *et* $(A_i)_{i=1}^{n}$ *est une partition mesurable de* Ω.

Remarque 1.2.1. *Lorsque* $\mathrm{E} = \mathbb{R}$, *la notion de fonction simple coïncide avec celle de fonction étagée.*

Définition 1.2.5

Une fonction $f : (\Omega, \mathcal{A}, \mu) \to E$ *est dite* μ ***-mesurable*** *si c'est une limite presque partout de fonctions simples.*

Remarque 1.2.2. *Cette notion est également appelée mesurabilité forte. Nous reprenons le choix de J. Droniou de l'appeler* μ *-mesurabilité pour rappeler que cette notion nécessite la donnée d'une mesure : elle n'est pas liée à la notion d'espace mesurable, mais à celle d'espace mesuré.*

Nous introduisons maintenant une notion de mesurabilité faible.

Définition 1.2.6

Une fonction $f : \Omega \to E$ *est dite faiblement (scalairement) mesurable si pour tout* $x^{'} \in E^{'}$, *l'application :*

$$t \mapsto \left\langle x^{'}, f(t) \right\rangle$$

est mesurable de Ω *dans* $\mathbb{R}$.

1.2.2 Espaces d'Orlicz

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. Les espaces de Lebesgue $L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ sont définis en considérant la fonction puissance $|x|^p$ avec $1 \leq p < \infty$. Ces espaces sont des espaces de Banach et l'essentiel de leurs propriétés topologiques et métriques reposent sur la nature de la fonction puissance $x \mapsto |x|^p$ qui apparait dans leurs définitions. Les espaces d'Orlicz L_ϕ, extension naturelle des espaces de Lebesgue L^p, sont générés par une fonction ϕ dite fonction d'Orlicz ou N - fonction généralisant les fonctions puissances.
Notons $M(\Omega)$ l'ensemble des fonctions μ -mesurables sur Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$ modulo la relation d'équivalence $= \mu - p \cdot p$.

Définition 1.2.7

On appelle fonction d'Orlicz z une fonction $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow [0, \infty]$ *telle que :*

(1) ϕ *est paire, convexe et continue à gauche sur* $[0, \infty[$,

(2) $\phi(0) = 0$ *et* ϕ *n'est pas identiquement nulle.*

Si de plus,

(3) $\phi(x) > 0$ *pour tout* $x > 0$,

(4) $\phi(x) < +\infty$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$ *c'est à dire* ϕ *est à valeurs dans* $[0, \infty[$,

(5) $\lim_{x\to 0} \frac{\phi(x)}{x} = 0$ *et* $\lim_{x\to\infty} \frac{\phi(x)}{x} = \infty$.

la fonction ϕ *est dite* N *-fonction ou fonction de Young.*

Définition 1.2.8

On appelle classe d'Orlicz, l'ensemble des fonctions $f \in M(\Omega)$ *vérifiant*

$$\int_\Omega \phi(f(x))d\mu < \infty.$$

On note $L^0_\phi(\Omega)$ *la classe d'Orlicz. c'est-à-dire :*

$$L^0_\phi(\Omega) = \left\{ f \in M(\Omega) \text{ telle que } \int_\Omega \phi(f(x))d\mu < \infty \right\}.$$

Définition 1.2.9

On définit l'espace d'Orlicz $L_\phi(\Omega)$ *par :*

$$\begin{aligned} L_\phi(\Omega) &= \left\{ f \in M(\Omega) \text{ telle que } \exists\lambda > 0 : \lambda f \in L^0_\phi(\Omega) \right\}, \\ &= \left\{ f \in M(\Omega) \text{ telle que } \int_\Omega \phi(\lambda f(x))d\mu < \infty \text{ pour un certain } \lambda > 0 \right\}. \end{aligned}$$

La condition $-\Delta_2$ est une condition de croissance sur les fonctions d'Orlicz. Elle joue un rôle très important dans l'étude de la géométrie des espaces d'Orlicz.

Définition 1.2.10

Une fonction d'Orlicz ϕ *satisfait la condition* $-\Delta_2$ $(\phi \in \Delta_2)$, *s'il existe* $k > 2$ *tel que,*

$$\phi(2x) \leq k\phi(x) \quad \forall x > 0.$$

1.2.3 Intégrale de Bochner

Définition 1.2.11

Une fonction $f : (\Omega, \mathcal{A}, \mu) \to \mathrm{E}$ *est dite* μ *-intégrable s'il existe une suite* $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de fonctions simples qui converge vers* f μ*-presque partout et telle que* $\int_\Omega \|s_n - f\|_{\mathrm{E}}\, d\mu \to 0$.

Dans la littérature, on emploie également les termes de μ-intégrabilité ou d'intégrabilité au sens de Bochner.

Notation 1.2.1. *L'ensemble de toutes les fonctions intégrables au sens de Bochner de E vers E est noté $\mathcal{L}^1_E$.*
Sur l'espace $\mathcal{L}^1_E$, la semi-norme classique est donné par $\|f\|_1 := \int_\Omega \|f\| d\mu$.

Proposition 1.2.1: Bochner

$f : (\Omega, \mathcal{A}, \mu) \to \mathrm{E}$ *est μ-intégrable si et seulement si f est μ-mesurable et que l'on a*

$$\int_\Omega \|f(x)\|_{\mathrm{E}} d\mu(x) < +\infty.$$

Démonstration. [14, voir proposition II.4 page 9] □

Théorème 1.2.1

Soit f est une fonction μ -Bochner intégrable, alors

- $\lim_{\mu(\Omega)-0} \int_\Omega f d\mu = 0$;
- $\|\int_\Omega f d\mu\| \leqq \int_\Omega \|f\| d\mu$, *pour tout* $\Omega \in \mathcal{A}$;
- *Si* (A_n) *une suite des membres disjoint deux à deux de* $\mathcal{A}$ *et* $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, *alors*

$$\int_\Omega f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} f d\mu,$$

où la somme à droite est absolument convergente.

Démonstration. [7] □

Définition 1.2.12

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré fini et E un espace Banach.
• $L^1_E(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ *représente l'espace de toutes les (classes d'équivalence de) fonctions μ-mesurable et Bochner intégrables de Ω à valeur dans E.*
Sur l'espace L^1_E, la norme classique est donnée par $\| f \|_p = \int_\Omega \| f \| d\mu$.
• $L^\infty_E(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ *signifie l'espace de toutes les (classes d'équivalence de) fonctions Bochner intégrables définies sur Ω à valeur dans E qui sont essentiellement bornées, c'est-à-dire :*

$$\| f \|_\infty = esssup\{\| f(w) \|, w \in \Omega\} < \infty.$$

Définition 1.2.13

Une fonction m définie sur $(\Omega, \mathcal{A})$ à valeurs dans E est une mesure vectorielle, si pour tout suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{A}$ des ensembles deux à deux disjoints, nous avons

$$m(\bigcup_n A_n) = \sum_n m(A_n).$$

Soit $m : \mathcal{A} \to E$ une mesure vectorielle. Pour tout $A \in \mathcal{A}$, nous définissons $|m|(A)$ par :

$$|m|(A) := \sup_{\mathcal{T}_A} \sum_{C \in \mathcal{T}_A} \|m(C)\|_E \qquad \forall A \in \mathcal{A}.$$

avec $\mathcal{T}_A$ parcourant l'ensemble de toutes les partitions finies de A d'ensembles mesurables.
Si $|m|(\Omega)$ est fini, la mesure vectorielle m est dite à variation bornée.
On considère une suite $\{C_n\}$ dans $\mathcal{P}(E) \setminus \{\emptyset\}$, on définie la somme suivante :

$$\sum_n C_n := \{x \in E : x = \sum_n x_n \text{ (convergence inconditionnelle)}, \ x_n \in C_n, \ n \geq 1\}.$$

Remarque 1.2.3. *Si $f : \Omega \to E$ est Bochner intégrable, Alors pour $A \in \mathcal{A}$, $A \longmapsto m(A) = \int_A f d\mu$ est une mesure vectorielle et $|m|(A) = \int_A \| f \|_E \, d\mu$.*

Définition 1.2.14

*Un espace de Banach E possède **la propriété Radon-Nikodym** (RNP en abrégé), si pour chaque espace de mesure fini $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ et chaque mesure vectorielle $m : \mathcal{A} \to E$ à variation bornée telle que $m \ll \mu$, Alors il existe $f \in L^1_E(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ tel que*

$$m(A) = \int_A f d\mu \quad \forall A \in \mathcal{A}.$$

Théorème 1.2.2

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et E un espace de Banach, Alors si $E^{'}$ a PRN, on a :

$$\left(L^1_E(\Omega, \mathcal{A}, \mu)\right)^{'} = L^\infty_{E'}(\Omega, \mathcal{A}, \mu).$$

Démonstration. [10, voir Théorème 1.47 page 14] □

Corollaire 1.2.1

Soit E un espace de Banach, alors les affirmation suivantes sont équivalentes

(a) L'espace E' a la propriété de Radon-Nikodým.

(b) Tout sous-espace séparable de E a un dual séparable.

Définition 1.2.15

Soit une fonction $\varphi : \Omega \times E \to \mathbb{R} \bigcup \{+\infty\}$.

(a) φ est dite intégrande si pour tout $w \in \Omega$, $dom(\varphi(w,.)) = \{x \in E : \varphi(x) < \infty\} \neq \emptyset$, (c'est-à-dire $\varphi(w,.)$ est propre) ;

(b) φ est dite intégrande mesurable si $\varphi(.,.)$ est $B(\mathbb{R}) \times \mathcal{A}$ mesurable ;

(c) φ est dite intégrande normale si φ est un intégrande mesurable et pour tout $w \in \Omega$, $\varphi(w,.)$ est semi-continue inférieurement ;

(d) φ est dite intégrande normale convexe si φ est un intégrande normale et pour tout $w \in \Omega$, $\varphi(w,.)$ est convexe.

0. Soit ν une mesure vectoriel, on dit que ν est μ-absolument continue si $\mu(A) = 0$ implique $\nu(A) = 0$, pour tout $A \in \mathcal{A}$.

Proposition 1.2.2

Si $\varphi : \Omega \times E \to \mathbb{R} \bigcup \{+\infty\}$ un est intégrande mesurable, alors $\varphi^* : \Omega \times E' \to \mathbb{R} \bigcup \{+\infty\}$ est un intégrande normale convexe.

Démonstration. [10, voir Théorème 9.5 page 264] □

Soit $\varphi : \Omega \times E \to \mathbb{R} \bigcup \{+\infty\}$ un intégrande normale. la fonctionnelle intégrale est définie par la formule suivant :

$$I_\varphi(x) = \int_\Omega \varphi(w, x) d\mu(w).$$

Proposition 1.2.3

Soit $\varphi : \Omega \times E \to \mathbb{R} \bigcup \{+\infty\}$ un intégrande normale convexe, si $\alpha(x) \leqslant \varphi(w, x)$ $\mu.p.p$ tel que $\int_\Omega \alpha(w) d\mu(w) > -\infty$, alors $I_\varphi(.)$ est faiblement semi-continue inférieurement sur $L^1_E(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$.

Démonstration. [10, voir Théorème 9.18 page 269]

□

1.3 Théorie d'intégration multivoque

Dans cette section $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ est un espace mesuré de mesure finie et $(E, \|\cdot\|)$ est un espace de Banach séparable sauf mention de contraire. Pour simplifier, la topologie faible sur E (resp. faible étoile sur $E^{'}$) notée par w (resp w^*).

Notation 1.3.1. $\mathcal{P}(E)\left(\text{ ou } 2^E\right)$: *est l'ensemble de toutes les parties de E.*
$\mathcal{P}_f(E)$: *est l'ensemble de les toutes parties non vides et fermés de E.*
$\mathcal{P}_{fc}(E)$: *est l'ensemble de toutes les parties non vides, fermés et convexes de E.*
$\mathcal{P}_k(E)$ *: est l'ensemble de toutes les parties non vides, compactes de E*
$\mathcal{P}_{kc}(E)$: *est l'ensemble de toutes les parties non vides, compactes et convexes de E.*
$\mathcal{P}_{wkc}(E)$: *est l'ensemble de toutes les parties non vides, w -compactes et convexes de E.*
$\mathcal{P}_{fb}(E)$: *est l'ensemble de toutes les parties non vides, fermées et bornées de E.*

1.3.1 La topologie métrique de Hausdorff, la fonction d'appui

Soient A, B deux éléments de $\mathcal{P}_f(E)$, on définie leur distance de Hausdorff par :

$$h(A, B) = \max\left\{\sup_{a\in A} d(a, B), \sup_{b\in B} d(b, A)\right\},$$

où $d(a, B) = \inf_{b\in B} \|a - b\|$ est appelé la fonction distance.

Définition 1.3.1

Soit $C \in \mathcal{P}(E)$, la fonction d'appui $\delta^*(.,C)$ de C est une fonction de $E^{'}$ vers $\overline{\mathbb{R}}$ définie par :

$$\delta^*\left(x^{'}, C\right) := \sup_{x \in C} \left\langle x^{'}, x \right\rangle.$$

Remarque 1.3.1. *Directement à partir de la définition ci-dessus, nous pouvons déduire que $\delta^*(.,C)$ est sous-linéaire, w^*- semi-continue inférieurement.*

Définition 1.3.2

Soit $C \in \mathcal{P}(E)$, le ***rayon*** *de C est :*

$$\|C\| := \sup_{x \in C} \|x\| = h\big(C, \{0\}\big)$$

La fonction d'appui satisfait les propriétés simples suivantes :

$$\begin{array}{ll} \delta^*\left(x^{'}, C\right) = \delta^*\left(x^{'}, \overline{\text{co}}C\right) & C \in \mathcal{P}(E), \\ \delta^*\left(x^{'}, C + C'\right) = \delta^*\left(x^{'}, C\right) + \delta^*\left(x^{'}, C'\right) & x^{'} \in E^{'} \text{ et } C, C' \in \mathcal{P}(E) \backslash \{\emptyset\}. \end{array}$$

Il est sous-linéaire :

$$\begin{array}{ll} \delta^*\left(\alpha x^{'}, C\right) = \alpha s\left(x^{'}, C\right) & \alpha \geq 0, C \in \mathcal{P}(E), \\ \delta^*\left(x^{'} + y^{'}, C\right) \leq \delta^*\left(x^{'}, C\right) + \delta^*\left(y^{'}, C\right) & x^{'}, y^{'} \in E^{'} \text{ et } C \in \mathcal{P}(E). \end{array}$$

En particulier, en prenant $y^{'} = -x^{'}$, on obtient :

$$\delta^*\left(x^{'}, C\right) + \delta^*\left(-x^{'}, C\right) \geq 0 \quad C \in \mathcal{P}(E) \backslash \{\emptyset\}.$$

Pour $x^{'} \in E^{'}$ et $C \in \mathcal{P}(E) \backslash \{\emptyset\}$, on a :

$$\delta^*\left(x^{'}, C\right) \leq \left\|x^{'}\right\|_{E^{'}} \|C\|.$$

Remarque 1.3.2. *Soient $B^{'}$ la boule unité fermé de $E^{'}$ et $C \in \mathcal{P}(E) \backslash \{\emptyset\}$ de $E^{'}$, alors*

$$\|C\| = \sup_{x^{'} \in B^{'}} \delta^*\left(x^{'}, C\right),$$

en effet, il est évident que $\sup_{x^{'} \in B^{'}} \delta^*\left(x^*, C\right) \leq \|C\|$.
Soit $x \in C$, d'après un corollaire de théorème de Hahn Banach [12, voir page 59], il existe $x^{'} \in B^{'}$ avec $\left\|x^{'}\right\| = 1$ tel que $\|x\| = \left\langle x^{'}, x \right\rangle$. Ainsi :

$$\|x\| \leq \delta^*\left(x^{'}, C\right) \leq \sup_{x^{'} \in B^{'}} \delta^*\left(x^{'}, C\right).$$

Théorème 1.3.1

Soit E espace normé et $A, B \in \mathcal{P}_{fcb}(E)$, Alors

$$h(A, B) = \sup_{x' \in E' : \|x'\| \leqslant 1} \left|\delta^*(x', A) - \delta^*(x', B)\right|.$$

Démonstration. [10, voir Théorème 1.13 page 9] □

1.3.2 Mesurabilité et Intégrale d'une multifonction

On note par $\mathcal{E}$, la tribu d'Effros, engendrée sur $\mathcal{P}_f(E)$ par les parties de la forme : $\{C \in \mathcal{P}_f(E) : C \cap U \neq \emptyset\}$, où U parcourt l'ensemble des ouverts de E.
Soit $\Gamma : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathcal{P}_f(E), \mathcal{E})$ une multifonction :

Définition 1.3.3

*(a) Γ est dite **fortement mesurable** si pour tout fermé C de E on a :*

$$\Gamma^{-}(C) = \{w \in \Omega : \Gamma(w) \cap C \neq \emptyset\} \in \mathcal{A}.$$

*(b) Γ est dite **mesurable** si pour tout ouvert U de E on a :*

$$\Gamma^{-}(U) = \{w \in \Omega : \Gamma(w) \cap U \neq \emptyset\} \in \mathcal{A}.$$

*(c) Γ est dite de **graphe mesurable** si :*

$$Gr(\Gamma) = \{(w, x) \in \Omega \times E : x \in \Gamma(w)\} \in \mathcal{A}.$$

*(d) Γ est dite **scalairement mesurable** si et seulement si pour tout $x' \in E'$ on a : la fonction $w \to \delta^*(x', \Gamma(w))$ est mesurable.*

Si $\Gamma(w) \subset \mathcal{P}_{wkc}(E)$ Alors Γ est mesurable si et seulement si Γ est scalairement mesurable (la preuve de cette proposition existe dans [10, page 166].

Si E est un espace métrique séparable et complet et $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ est complet, alors $(a) \Leftrightarrow (b) \Leftrightarrow (c)$.

Proposition 1.3.1

Soit $\Gamma : (\Omega, \mathcal{A}) \to \mathcal{P}_f(E)$ une multifonction.

- *Γ est mesurable si et seulement si $w \to d(x, \Gamma(w))$ est mesurable pour tout $x \in E$.*
- *Si Γ est fortement mesurable alors Γ est mesurable (la réciproque est vraie lorsque $\Gamma(w) \in \mathcal{P}_k(E)$)*

Démonstration. [6, voir page 142 et 143] □

Définition 1.3.4

Une sélection d'une multifonction $\Gamma : (\Omega, \mathcal{A}) \to \mathcal{P}(E)$ est une application $f : (\Omega, \mathcal{A}) \to E$ telle que

$$\forall w \in \Omega : f(w) \in \Gamma(w).$$

Proposition 1.3.2: Théorème de sélection de Kuratowski-Ryll Nardzewski

Soit $\Gamma : (\Omega, \mathcal{A}) \to \mathcal{P}(E)$ une multifonction.
Si Γ est mesurable alors Γ admet au moins une sélection mesurable.

Démonstration. [10, voir théorème 2.1 page 154] □

Théorème 1.3.2

Soit $\Gamma : (\Omega, \mathcal{A}) \to \mathcal{P}_f(E)$, et E est un espace Polonais alors les assertions suivantes sont équivalentes :
(a) Γ est mesurable.
(b) il existe une suite $\{\sigma_n\}$ des sélections mesurables de Γ tel que :

$$\forall t \in \Omega : \Gamma(w) = \overline{\{\sigma_n(w)\}_n}.$$

(Représentation de Castaing de Γ)

Démonstration. [10, voir proposition II.3 page 155] □

Remarque 1.3.3. *Soit $\Gamma : (\Omega, \mathcal{A}) \to \mathcal{P}_f(E)$ est mesurable alors pour tout $x^{'} \in E^{'}$ on a :*

$$\delta^* \left(x^{'}, \Gamma(w)\right) = \sup_n \langle x^*, \sigma_n(w)\rangle .$$

Etant donné une multifonction $\Gamma : (\Omega, \mathcal{A}) \to \mathcal{P}_f(E)$ mesurable, nous définissons l'ensemble

- $S_\Gamma(\mathcal{A}) = \{f \in L^0_E(\Omega, \mathcal{A}, \mu) : f(w) \in \Gamma(w), \mu-$ a.e. $\}$ c'est-à-dire que S_Γ est l'ensemble des sélections mesurables de $\Gamma(.)$ modulo égalité presque partout.
- $S^1_\Gamma(\mathcal{A}) = \{f \in L^1_E(\Omega, \mathcal{A}, \mu) : f(w) \in \Gamma(w), \mu-$ a.e. $\}$; c'est-à-dire que S^1_Γ est l'ensemble des L^1-sélections de $\Gamma(w)$ modulo égalité presque partout, avec L^1_E est l'espace quotient de l'espace $\mathcal{L}^1_E$, par le sous-espace vectoriel des fonctions presque nulles.

Corollaire 1.3.1

Soit $\Gamma : (\Omega, \mathcal{A}) \to \mathcal{P}_f(E) \setminus \varnothing$ une multifonction. Si $S_\Gamma(\mathcal{A}) \neq \varnothing$, alors $S_\Gamma(\mathcal{A})$ est convexe si et seulement si $\Gamma(w)$ est convexe, pour tout $w \in \Omega$ p.p.

Démonstration. [13, voir corollaire 1.6 page 155] □

Définition 1.3.5

Un ensemble $\mathcal{F}$ dans $L^1_E(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ est décomposable si pour tout $A \in \mathcal{A}$, et tous f, g dans $\mathcal{F}$, $1_A f + 1_{\Omega \setminus A} g \in \mathcal{F}$.

Il est évident que si $\mathcal{F}$ est décomposable, il en est de même de sa fermeture $\overline{\mathcal{F}}$ dans $L^1_E(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$.

Lemme 1.3.1

Soit $\mathscr{B}$ une algèbre et soit $\mathcal{A}$ la σ -algèbre engendrée par $\mathscr{B}$. Soit H un ensemble fermé non vide de $L^1_E(\mathcal{A}, \mu)$. Alors H est décomposable si et seulement si pour tout $A \in \mathscr{B}$ et tous f et g dans H, on a $f 1_A + g 1_{A^c} \in H$.

Démonstration. [3, voir lemme 2.4 page 4] □

Théorème 1.3.3

Soit $\mathcal{F}$ un sous-ensemble fermé non vide de L^1_E. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :
(i) Il existe $\Gamma : \Omega \to \mathcal{P}_f(E)$ mesurable telle que $\mathcal{F} = S^1_\Gamma$.
(ii) $\mathcal{F}$ est décomposable $c-\grave{a}-d$ si pour tout $A \in \mathcal{A}$ et $f, g \in \mathcal{F}$ alors $1_A f + 1_{\Omega \setminus A} g \in \mathcal{F}$.

Démonstration. [6, voir théorème III.6 page 65] □

Remarque 1.3.4. *Il est clair que pour toute multifonction Γ, S^1_Γ est un ensemble décomposable.*

Soit $\Gamma : (\Omega, \mathcal{A}) \to \mathcal{P}_f(E)$ une multifonction avec $S^1_\Gamma \neq \emptyset$. Alors Γ est intégrable sur Ω et son intégrale est l'ensemble des intégrales des éléments de S^1_Γ, autrement dit :

Définition 1.3.6

$$\int_\Omega \Gamma(t) d\mu(t) = \left\{ \int_\Omega f(t) d\mu(t) : f \in S^1_\Gamma \right\}.$$

De plus, $\forall A \in \mathcal{A}$, on a : $\int_A \Gamma(t) d\mu(t) = \left\{ \int_A f(t) d\mu(t) : f \in S^1_\Gamma \right\}$.

Soit $\Gamma : (\Omega, \mathcal{A}) \to \mathcal{P}_f(E)$ une multifonction est dite **intégralement bornée** (ou fortement intégrable) s'il existe une fonction $g : \Omega \to \mathbb{R}^+$ intégrable telle que $\mid \Gamma(t) \mid = \sup_{x \in \Gamma(t)} \parallel x \parallel_E \leqslant g(t)$, pour tout $t \in \Omega$.

Remarque 1.3.5. *Soit $\Gamma : (\Omega, \mathcal{A}) \to \mathcal{P}_f(E)$ mesurable.*
Par le théorème de sélection mesurable Kuratowski-Ryll-Nardzewski, Γ admet des sélections mesurables :
- Si Γ est intégralement bornée, toutes les sélections seront intégrables et dominées par une seule fonction intégrable.
- Si Γ est intégrable, au moins une sélection sera intégrable.

Notation 1.3.2. *L'ensemble de toutes les multifonction mesurables intégralement bornées de Ω vers $\mathcal{P}_{wkc}\,(E)$ est noté $\mathcal{L}^1_{\mathcal{P}_{wkc}\,(E)}$.*

Théorème 1.3.4

Si $u : \Omega \times X \to \bar{R} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ est mesurable, $F : \Omega \to 2^X \setminus \{\emptyset\}$ est de graphe mesurable, $J : f \longmapsto \int_\Omega u(\omega, f(\omega)) d\mu(\omega)$, et pour tout $f(\cdot) \in S^1_F$ et il existe au moins un $f_0 \in S^1_F$ tel que $J\left(f_0\right) > -\infty$, alors

$$\sup\left[J(f) : f \in S^1_F\right] = \int_\Omega \sup[u(\omega, x) : x \in F(\omega)] d\mu(\omega).$$

Démonstration. [10, voir Théorème 3.24 page 183] □

Proposition 1.3.3

Soit $\Gamma : (\Omega, \mathcal{A}) \to \mathcal{P}_f(E)$ *une multifonction mesurable avec* $S_\Gamma^1 \neq \emptyset$. *Alors* $\forall x^{'} \in E^{'}$:

$$\delta^* \left(x^{'}, \int_\Omega \Gamma(w) d\mu(w) \right) = \int_\Omega \delta^* \left(x^{'}, \Gamma(w) \right) d\mu(w).$$

Démonstration. D'après la définition ci-dessus, on a :

$$\delta^* \left(x^*, \int_\Omega F(\omega) d\mu(\omega) \right) = \sup \left[\left(x^*, \int_\Omega f(\omega) d\mu(\omega) \right) : f \in S_F^1 \right],$$

$$= \sup \left[\int_\Omega (x^*, f(\omega))\, d\mu(\omega) : f \in S_F^1 \right].$$

Et d'après la théorème 1.3.2, on a

$$\sup \left[\int_\Omega (x^*, f(\omega))\, d\mu(\omega) : f \in S_F^1 \right] = \int_\Omega \sup \left[(x^*, x) : x \in F(\omega) \right] d\mu(\omega),$$
$$= \int_\Omega \delta^* (x^*, F(\omega))\, d\mu(\omega).$$

D'ou

$$\delta^* \left(x^*, \int_\Omega F(\omega) d\mu(\omega) \right) = \int_\Omega \delta^* (x^*, F(\omega))\, d\mu(\omega).$$

□

Théorème 1.3.5

- *Soit* $\Gamma : (\Omega, \mathcal{A}) \to \mathcal{P}_{wkc}(E)$ *une multifonction de graphe mesurable et intégrablement bornée, alors* S_Γ^1 *est non vide, w-compact et convexe.*
- *Inversement, si* E *est séparable,* $\Gamma : (\Omega, \mathcal{A}) \to \mathcal{P}_{wkc}(E)$ *une multifonction de graphe mesurable et intégrablement bornée et* S_Γ^1 *est non vide, w-compact et convexe dans* L_E^1*, alors* $\Gamma(t) \in \mathcal{P}_{wkc}(E)$.

Démonstration. [10, voir Théorème 3.34 page 187] □

Remarque 1.3.6. *Pour* $\Gamma \in \mathcal{L}^1_{\mathcal{P}_{wkc}(E)}$:
- il existe $f \in S_\Gamma^1$ *telle que* $s\left(x^{'}, \Gamma(t)\right) = \left\langle x^{'}, f(t) \right\rangle$ *p.p sur* Ω.

Proposition 1.3.4

Soit E *un espace localement convexe de Suslin,* $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ *un espace mesuré,* Γ *une multifonction de* Ω *vers des sous-ensembles convexes fermés et faiblement localement compacts de* E *qui ne contient pas de droite et* Σ *de* Ω *vers des sous-ensembles convexes fermées de* E*. Si pour tout* $x' \in E'$, $\delta^* (x' \mid \Sigma'(t)) \leq \delta^* (x' \mid \Gamma(t))$, $\mu -$ *presque partout alors* $\Sigma(t) \subset \Gamma(t)$ μ *-presque partout.*

Démonstration. [6, voir théorème III.35 page 83] □

1.3.3 La convergence des multifonctions

Définition 1.3.7

Soit $\{\Gamma_n, \Gamma\}_{n\geqslant 1} \in \mathcal{L}^1_{\mathcal{P}_{wkc}\,(E)}$, *on dit que* Γ_n *est converge faiblement dans* $\mathcal{L}^1_{\mathcal{P}_{wkc}\,(E)}$ *vers* Γ, *noté par* $\Gamma_n \xrightarrow{w} \Gamma$ *dans* $\mathcal{L}^1_{\mathcal{P}_{wkc}\,(E)}$ *si et seulement si pour tout* $u(.) \in L^\infty_{E'_b}(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, *on a* $\int_\Omega \delta^*\left(u(w), \Gamma_n(w)\right) d\mu(w) \underset{n}{\longrightarrow} \int_\Omega \delta^*\left(u(w), \Gamma(w)\right) d\mu(w)$.

Théorème 1.3.6

Si $\Gamma_n, \Gamma : \Omega \to \mathcal{P}_{wkc}(E)$ *sont des multifonctions intégrablement bornées, alors* $\Gamma_n \xrightarrow{w} \Gamma$ *si et seulement si, pour tout* $z' \in E'$, $\delta^*\left(z', \Gamma_n(\cdot)\right) \xrightarrow{w} \delta^*\left(z', \Gamma(\cdot)\right)$ *dans* $L^1(\mathbb{R})$.

Démonstration. $\Longrightarrow$ Notons d'abord que Γ_n, Γ sont mesurables, donc on peut trouver des fonctions mesurables $\{f_n^m\}_{m\geq 1}$ et $\{f^m\}''_{m\geq 1}$ de Ω dans E telle que $\Gamma_n(\omega) = \left\{\overline{f_n^m(\omega)}\right\}_{m\geq 1}$ et $\Gamma(\omega) = \left\{\overline{f^m(\omega)}\right\}_{m\geq 1}$ (d'après la représentation de Castaing 1.3.2). Donc

$$\omega \longmapsto \delta^*\left(z', \Gamma_n(\omega)\right) = \sup_{m\geq 1}\left(z', f_n^m(\omega)\right) \quad \text{et} \quad \omega \longmapsto \delta^*\left(z', \Gamma(\omega)\right) = \sup_{m\geq 1}\left(z', f^m(\omega)\right)$$

sont mesurables et intégrables car Γ_n, Γ sont mesurables et intégrablement bornées.
Soit $x'(\cdot) = \chi_A(\cdot)z'$ avec $A \in \mathcal{A}$. On a alors

$$\int_A \delta^*\left(z', \Gamma_n(\omega)\right) d\mu(\omega) = \int_\Omega \delta^*\left(x'(w), \Gamma_n(\omega)()\, d\mu(\omega)\right.$$

et

$$\int_\Omega \delta^*\left(x'(w), \Gamma_n(\omega)()\, d\mu(\omega)\right. \to \int_\Omega \delta^*\left(x'(w), \Gamma(\omega)()\, d\mu(\omega)\right.$$

et

$$\int_\Omega \delta^*\left(x'(w), \Gamma(\omega)()\, d\mu(\omega\right. = \int_A \delta^*\left(z', \Gamma_n(\omega)()\, d\mu(\omega)\right.$$

D'ou

$$\int_A \delta^*\left(z', \Gamma_n(\omega)\right) d\mu(\omega) \to \int_A \delta^*\left(z', \Gamma(\omega)()\, d\mu(\omega)\right.,$$

ce qui implique $\delta^*\left(z', \Gamma_n(\cdot)\right) \xrightarrow{w} \delta^*\left(z', \Gamma(\cdot)\right)$ dans L^1.
$\Longleftarrow$ Soit $x'(\cdot) \in L^\infty_{E'}$ une fonction simple, c'est-à-dire

$$x'(\omega) = \sum_{k=1}^n z'_k \chi_{A_k}(\omega),$$

avec $z'_k \in E'$ et $A_k \in \mathcal{A}$. Alors on a

$$\begin{aligned}
\delta^*\left(x', S^1_{\Gamma_n}\right) &= \int_\Omega \delta^*\left(x^*(\omega), \Gamma_n(\omega)\right) d\mu(\omega), \\
&= \sum_{k=1}^{n} \int_{A_k} \delta^*\left(z^*_k, \Gamma(\omega)\right) d\mu(\omega), \\
&\to \sum_{k=1}^{n} \int_{A} \delta^*\left(z'_k, \Gamma(\omega)\right) d\mu(\omega), \\
&= \int_\Omega \delta^*\left(x'(\omega), \Gamma(\omega)\right) d\mu(\omega) = \delta^*\left(x', S^1_\Gamma\right).
\end{aligned}$$

Rappelons que tout $x^*(\cdot) \in L^\infty(E'_s)$ peut être approximé dans la topologie de Mackey $m\left(L^\infty_{E'_s}, L^1_E\right)$ par des fonctions simples.
Notons que $S^1_{\Gamma_n}, S^1_\Gamma \in \mathcal{P}_textwkc(L^1_E)$ (d'après la théorème 1.3.5) car on a $\Gamma_n, \Gamma \in \mathcal{P}_textwkc$, donc $\delta^*\left((\cdot), S^1_{\Gamma_n}\right)$ et $\delta^*\left((\cdot), S^1_\Gamma\right)$ sont m -continus. Donc

$$\delta^*\left((\cdot), S^1_{\Gamma_n}\right) \to \delta^*\left((\cdot), S^1_\Gamma\right),$$

pour tout $x'(\cdot) \in L^\infty_{E'_s}$.
D'ou

$$\Gamma_n \xrightarrow{w} \Gamma.$$

□

1.3.4 Topologie de Mackey

Soit E un espace de Hausdorff localement convexe. Nous savons déjà que E' a une topologie localement convexe, w^*.
Nous voulons d'abord définir la plus grande topologie localement convexe $m(E', E)$ sur E' qui produit E comme dual topologique, cette topologie est appelée **la topologie de Mackey**.
Cette topologie est telle que : pour toute topologie localement convexe τ sur E' on a :

$$w^* \subset \tau \subset m(E', E).$$

Définition 1.3.8

La topologie de Mackey sur E', est la topologie de la convergence uniforme sur tous les ensembles absolument convexes w -compacts de E; c'est-à-dire :

$$x'_n \xrightarrow{m\left(E',E\right)} x' \iff \forall C \in \mathcal{P}_{wkc}(E) : \sup_{x\in C}\left|\left\langle x'_n - x', x\right\rangle\right| \underset{n}{\longrightarrow} 0.$$

Théorème 1.3.7

Soient E un espace de Banach et $C \subset E$. Alors les deux assertions suivantes sont équivalentes :
(1) $C \in \mathcal{P}_{wkc}(E)$.
(2) *La fonction $x' \longmapsto \delta^*(x', C)$ est $m(E', E)$- continue.*

Démonstration. [8, voir le théorème 2.5 page 271] □

Remarque 1.3.7. *Soient E un espace de Banach et $C \subset E$. Alors les deux assertions suivantes sont équivalentes :*
(1) $\overline{co}(C) \in \mathcal{P}_{wkc}(E)$.
(2) *La fonction* $x^{'} \longmapsto \delta^{*}(x^{'}, C)$ *est* $m(E^{'}, E)$*- continue.*

Démonstration. [10, voir remarque 2.43 page 168] □

$\mathcal{R}(E)$-tendue

On note $\mathcal{R}(E)$ l'ensemble des convexes fermés non vides de E dont l'intersection avec toute boule fermé $\overline{B}(x, \rho)$ est faiblement compacte.

Définition 1.3.9

Soit H une partie de $\mathcal{L}^1_E$. On dit que H est $\mathcal{R}(E)$-tendue si pour tout $\epsilon > 0$, il existe une multifonction mesurable, Γ_ϵ, à valeurs dans $\mathcal{R}(E)$ telle que :

$$\forall f \in H : \mu\big(\{t \in \Omega : f(t) \notin \Gamma_\epsilon(t)\}\big) \leq \epsilon$$

1.3.5 Multimesures

Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace mesurable et E un espace de Banach. Pour la suite sur $\mathcal{P}(E)$, nous considérons l'addition de Minkowski, notée " $\dot{+}$ " définie par :

$$A \dot{+} B = \overline{A + B}.$$

Définition 1.3.10

On dit qu'une multifonction $M : \mathcal{A} \to \mathcal{P}(E)$ est additive si :
$\forall A, B \in \mathcal{A}$ tels que $A \cap B = \emptyset$ on a : $M\big(A \cup B\big) = \overline{M(A) + M(B)}$.

Quand les valeurs de M sont w-compacts, l'opération de fermeture n'est plus nécessaire. Cette définition peut être étendue à une famille disjointe deux-à-deux de membres de $\mathcal{A}$.

Définition 1.3.11

- *On dit qu'une multifonction $M : \mathcal{A} \to \mathcal{P}(E) \setminus \{\emptyset\}$ est une multimesure forte si $M(\emptyset) = \{0\}$ et pour toute suite $\{A_n\} \subset \mathcal{A}$ deux-à-deux disjoints on a :*

$$M\Big(\bigcup_n A_n\Big) = \overline{\sum_n M(A_n)}.$$

- *On dit qu'une multifonction $M : \mathcal{A} \to \mathcal{P}_{cf}(E) \setminus \{\emptyset\}$ est une multimesure faible si M est additive et pour toute $x^{'} \in E^{'}$, la fonction $A \to s\big(x^{'}, M(A)\big)$ est une mesure réel.*

Exemple Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré finie, E est un espace de Banach séparable et $\Gamma : \Omega \to \mathcal{P}(E) \setminus \{\emptyset\}$ une multifonction de graphe mesurable avec $S^1_\Gamma \neq \emptyset$, Alors $M : \mathcal{A} \to \mathcal{P}_{\{}(E)$ définie par :

$$M(A) = \int_A \Gamma(t) d\mu(t),$$

est multimesure.

Soit $M : \mathcal{A} \to \mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\}$ une multimesure forte. Pour tout $A \in \mathcal{A}$, nous définissons $V_M(A)$ par :

$$V_M(A) := \sup_{\mathcal{T}_A} \sum_{C \in \mathcal{T}_A} \|M(C)\| \qquad \forall A \in \mathcal{A},$$

avec $\mathcal{T}_A$ parcourant l'ensemble de toutes les partitions finies de A en ensembles mesurables.
Si $V_M(\Omega)$ est fini, la multimesure M est dite à variation bornée.
La multimesure M est dite μ-absolument continue si $\mu(A) = 0$ implique $M(A) = 0$, pour tout $A \in \mathcal{A}$.

Définition 1.3.12

*Soit une multifonction $M : \mathcal{A} \to \mathcal{P}(E)$. Une application $m : \mathcal{A} \to E$ est dite une **sélection** de M si pour tout $A \in \mathcal{A}, m(A) \in M(A)$.*

L'ensemble de toutes les sélections de mesures M est désigné par S_M.

Corollaire 1.3.2

Si $M : \mathcal{A} \to \mathcal{P}_{wk}(E)$ est une multimesure, Alors $S_M \neq \varnothing$.

Sur S_M on peut définir la topologie τ de la convergence faible simple (c'est-à-dire $m_\alpha \xrightarrow{\tau} m$ si et seulement si, pour tous $A \in \mathcal{A}$,$m_\alpha(A) \xrightarrow{\omega} m(A)$).
Soient S l'espace de toutes les fonctions simples à valeurs dans $\mathbb{R}$ et $ca(E)$ l'espace de toutes les mesures vectorielles à valeurs dans E. Considérons le produit tensoriel $S \otimes E'$. C'est l'espace de toutes les fonctions simples $\mathcal{A}$-mesurables à valeurs dans $E^{'}$. Donc si $u \in S \otimes E^{'}$, $u(\omega) = \sum_{k=1}^m \chi_{A_k}(\omega) x'_k$ avec $\{A_k\}_{k=1}^n$ $\mathcal{A}$ partition de Ω et $x^{'}_k \in E^{'}$. Alors $S \otimes X^{'}$ et $ca(X)$ peuvent être mis en dualité via la forme bilinéaire

$$\langle m, u\rangle = \left\langle m, \sum_{k=1}^n x_{A_k} x^{'}_k \right\rangle = \sum_{k=1}^n \left(x^{'}_k, m\left(A_k\right)\right),$$

où $\{A_k\}_{k=1}^n$ est une $\mathcal{A}$-partition finie de Ω et $x^{'}_k \in E^{'}, k = 1, 2, \ldots, n$. Alors il est facile de voir que la topologie de convergence faible simple sur $ca(E)$ n'est rien d'autre que la topologie faible $w\left(ca(E), S \otimes E^{'}\right)$. Dans ce qui suit, nous désignons cette topologie par $\hat{\omega}$.

Théorème 1.3.8

Soit $M : \mathcal{A} \to \mathcal{P}_{wk}(E)$ est une multimesure non vide, alors

(a) S_M est $\hat{\omega}$-compact,

(b) si en plus, M est à valeur dans $\mathcal{P}_{wkc}(E)$, Alors, pour tout $A \in \mathcal{A}$,

$$M(A) = \{m(A) / m \in S_M\}.$$

Démonstration. [10, voir Théorème 4.14 page 854] □

Notez que l'ensemble des sélections de mesure S_M a la propriété de décomposabilité suivante : si $m_1, m_2 \in S_M$ et $A \in \mathcal{A}$, Alors $\chi_A m_1 + \chi_{A^c} m_2 \in S_M$, ici $\chi_A m_1$ est la mesure vectorielle $C \longrightarrow m(A+C)$.
On désigne par $ca(E)$ l'espace de toutes les mesures vectorielles à valeur dans E sur $\mathcal{A}$.

Définition 1.3.13

Soit $K \in ca(E)$ est dite ***décomposable*** *si pour tout $m_1, m_2 \in K$ et tout $A \in \mathcal{A}$, on a $\chi_A m_1 + \chi_{A^c} m_2 \in K$.*

2

Les méthodes de Compacité faible

2.1 Compacité faible dans L_E^1

Il existe une variété de résultats intéressants sur la compacité faible dans l'espace L_E^1. Le but de ce chapitre dû à CHARLES.CASTAING - PAULETTE CLAUZURE. [4].
Dans toute la suite, nous considérons $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ est un espace mesuré avec μ finie et $\mathcal{A}$ μ-complète, E est espace de Banach séparable.

Proposition 2.1.1

Soit $l : L^\infty_{E'_b}(\Omega, \mathcal{A}, \mu) \rightarrow \mathbb{R}$ une application sous-linéaire continue sur $L^\infty_{E'_b}(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ et additive au sens suivant : pour tout couple (f_1, f_2) dans $L^\infty_{E'_b}(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ de supports disjoints, on a $l(f_1 + f_2) = l(f_1) + l(f_2)$ et vérifiant les propriétés suivantes :

(i) Pour tout A fixé dans $\mathcal{A}, x' \mapsto l(\chi_A x')$ est $m(E', E)$ continue (i.e., continus pour la topologie de Mackey) ;

*(ii) Pour toute suite croissante (A_n) dans $\mathcal{A}$, de réunion A, pour tout x' fixé dans E', on a $\lim_{n\rightarrow\infty} l(\chi_{A_n} x') = l(\chi_A x')$. Alors la multimesure M de $\mathcal{A}$ à valeurs convexes faiblement compactes non vides de E, définie par la formule $\delta^*(x', M(A)) = l(\chi_A x')$, pour tout $(A, x') \in A \times E'$, est à **variation bornée** , et de façon précise $M(A) \subset v(A)B$ pour tout $A \in \mathcal{A}$, où B est la boule unité de E et v une mesure positive finie sur $\mathcal{A}$ absolument continue par rapport a μ.*

Démonstration. Pour tout $A \in \mathcal{A}$, désignons par $\mathscr{S}_A$ l'ensemble de toutes les $\mathcal{A}$ -partitions dénombrables de A et notons B' la boule unité de E' et posons

$$v(A) = \sup\left\{\sum_{i=0}^{\infty} l(\chi_{A_i} x'_i) : (A_i)_{i\in N} \subset \mathscr{S}_A, (x'_i)_{i\in N} \subset B'\right\}.$$

Montrons que v est une mesure positive finie sur $\mathcal{A}$:
En raison de sa définition ν est une fonction d'ensembles positive. Reste à vérifier la σ -additivité de v.
Soit $A \in A$ et $(A_j)_{j\in N}$ une A-partition de $\mathcal{A}$. Montrons d'abord l'inégalité suivante :

$$\sum_{j=0}^{\infty} v(A_j) \leqslant v(A).$$

Soit $\varepsilon > 0$. En raison de la définition de v, il existe pour chaque entier j, une suite $(A_{ji}) \in \mathscr{S}_A$ et une suite $\left(x'_{ji}\right) \subset B'$ telles que

$$v\left(A_j\right) \leqslant \frac{\varepsilon}{2^{s+1}} + \sum_{i=0}^{\infty} l\left(\chi_{A_{jt}} x'_{ji}\right).$$

De là on déduit

$$\sum_{j=0}^{\infty} v\left(A_j\right) \leqslant \varepsilon + \sum_{j=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{\infty} l\left(\chi_{A_{ji}} x'_{ji}\right)\right).$$

Or la suite $\left(l\left(\chi_{A_{ji}} x'_{ji}\right)\right)_{(j,i)\in N^2}$ est absolument sommable car pour toute suite finie disjointe $(D_k)_{k\in N}$ dans $\mathcal{A}$ et toute suite finie $(x'_k)_{k\in N}$ dans B', on a, en raison des propriétés de l,

$$\sum_{k\in N}\left|l\left(\chi_{D_k} x'_k\right)\right| \leqslant \sum_{k\in N} l\left(\chi_{D_k} a_k x'_k\right) \quad \text{où } a_k = \pm 1,$$

ce qui implique $\sum_{k\in N}\left|l\left(\chi_{D_k} x'_k\right)\right| \leqslant \alpha$. En effet :
Comme l est une forme sous-linéaire additive continue sur $L^{\infty}_{E'_b}(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, alors il existe une constante $\alpha \in \boldsymbol{R}^*_+$ telle que $|l(f)| \leqslant \alpha \|f\|_{\infty}$, pour tout $f \in L^{\infty}_{E'_0}$. Ainsi on a :

$$\begin{aligned}
|\sum_{i=1}^{n} l\left(\chi_{A_i} x'_i\right)| &= \left|l\left(\sum_{i=1}^{n} x'_i \chi_{A_i}\right)\right|, \\
&\leqslant \|l\| \left|\sum_{i=1}^{n} x'_i \chi_{A_i}\right|_{\infty}, \\
&\leqslant \|l\| \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) \text{ car } \|x_i\| \leqq 1, \\
&\leqslant \|l\| \mu(\Omega),
\end{aligned}$$

par suite

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} l\left(\chi_{A_i} x'_i\right) \leqslant \lim_{n\to\infty} \|l\| \mu(\Omega),$$

ainsi

$$\sup_{(A_i)_{i\in N} \subset \mathscr{S}_A, \left(x'_i\right)_{i\in N} \subset B'} \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} l\left(\chi_{A_i} x'_i\right) \leqslant \lim_{n\to\infty} \|l\| \mu(\Omega),$$

ce qui implique $v(A) \leqslant \alpha$, pour tout $A \in \mathcal{A}$.
Puisque $(A_{ji})_{(j,i)\in N^2} \in \mathscr{S}_A$, on a $\sum_{j=0}^{\infty} v\left(A_j\right) \leqslant \varepsilon + v(A)$. Comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, on a

$$\sum_{j=0}^{\infty} v\left(A_j\right) \leqslant v(A).$$

L'inégalité inverse se démontre de la même façon

Soit $\varepsilon > 0$. En raison de la définition de v, il existe $(C_k)_{k\in N} \in \mathbb{S}_A$ et $(x'_k) \subset B'$ telles que

$$\nu(A) \leqslant \varepsilon + \sum_{k=0}^{\infty} l\left(\chi_{C_k} x'_k\right).$$

Compte tenu de (ii) et de l'additivité de l, on a, pour tout $k \in N$

$$\begin{aligned} l\left(\chi_{C_k} x'_k\right) &= \lim_{p\to\infty} l\left(\chi_{\bigcup_{j=0}^{p}(C_k\cap A_j)} x'_k\right), \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} l\left(\chi_{(C_k\cap A_j)} x'_k\right). \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} v(A) &\leqslant \varepsilon + \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} l\left(\chi_{A_j\cap C_k} x'_k\right), \\ &= \varepsilon + \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} l\left(\chi_{C_k\cap A_j} x'_k\right), \end{aligned}$$

ainsi

$$v(A) \leqslant \varepsilon + \int \sum_{j=0}^{\infty} \nu\left(A_j\right).$$

Comme ε est arbitraire, on a $v(A) \leqslant \sum_{j=0}^{\infty} v\left(A_j\right)$, ce qui établit la σ -additivité de ν.
En raison de la définition de ν, on a

$$\left|\delta^*\left(x', M(A)\right)\right| = \left|l\left(\chi_A x'\right)\right| \leqslant v(A)\left\|x'\right\|,$$

pour tout $(A, x') \in \mathcal{A} \times E'$. Donc M est à variation bornée et l'on a $M(A) \subset \nu(A)B$, pour tout $A \in \mathcal{A}$, avec v absolument continue par rapport à μ. $\square$

Proposition 2.1.2

Soit l une forme sous-linéaire, additive continue sur $L^{\infty}_{E'_b}(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ et vérifiant la condition suivante :
$(*)$ Pour toute suite croissante (A_n) dans $\mathcal{A}$ de réunion A et pour tout $u \in L^{\infty}_{E'_b}(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, on a :

$$\lim_{n \to \infty} l\left(\chi_{A_n} u\right) = l\left(\chi_A u\right),$$

Soit $\varphi : \Omega \times E'_b \to \mathbb{R}$ un intégrande $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}\left(E'_b\right)$ -mesurable tel que :
(i) Pour tout w fixé dans $\Omega, \varphi(\omega, .)$ est sous-linéaire continue sur E'_b ;
(ii) Il existe $k \in \mathcal{L}^1_+(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ telle que

$$\left|\varphi\left(\omega, x'\right) - \varphi\left(\omega, y'\right)\right| \leqslant k(\omega)\left\|x' - y'\right\|,$$

pour tout $(\omega, x', y') \in \Omega \times E'_b \times E'_b$.
Supposons que l'on ait pour tout $(A, x') \in A \times E'_b$,

$$l\left(\chi_A x'\right) = \int_{\Omega} \varphi\left(\omega, \chi_A x'\right) \mu(d\omega),$$

alors, on a, pour tout $u \in L^{\infty}_{E'_b}(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$,

$$l(u) = \int_{\Omega} \varphi(\omega, u(\omega)) \mu(d\omega).$$

Démonstration. Soit $u \in L^{\infty}_{E'_b}(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. Il existe une suite (u_n) de fonctions $\mathcal{A}$-étagées de Ω à valeurs dans E'_b qui convergent simplement vers u. En vertu du théorème d'Egorov 1.1.3, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $A_{\varepsilon} \in \mathcal{A}$ tel que $\mu\left(\Omega \backslash A_{\varepsilon}\right) \leqslant \varepsilon$ et tel que $\left(\chi_{A_{\varepsilon}} u_n\right)$ converge uniformément vers $\chi_{A_{\varepsilon}} u$.
D'où

$$\lim_{n \to +\infty} l\left(\chi_{A_{\varepsilon}} u_n\right) = l\left(\chi_{A_{\varepsilon}} u\right) \quad \text{car } l \text{ est continue.}$$

En vertu de l'hypothèse, on a, pour tout entier n,

$$l\left(\chi_{A_{\varepsilon}} u_n\right) = \int_{\Omega} \varphi\left(\omega, \chi_{A_{\varepsilon}}(\omega) u_n(\omega)\right) \mu(d\omega).$$

Il résulte de (ii), qu'on a

$$\lim_{n \to \infty} \int_{\Omega} \varphi\left(\omega, \chi_{A_{\varepsilon}}(\omega) u_n(\omega)\right) \mu(d\omega) = \int_{\Omega} \varphi\left(\omega, \chi_{A_{\varepsilon}}(\omega) u(\omega)\right) \mu(d\omega).$$

D'où

$$l\left(\chi_{A_{\varepsilon}} u\right) = \int_{\Omega} \varphi\left(\omega, \chi_{A_{\varepsilon}}(\omega) u(\omega)\right) \mu(d\omega).$$

Par récurrence, il existe une suite croissante (A_n) dans $\mathcal{A}$ telle que

$$\begin{aligned} &\forall n, \quad \mu\left(\Omega \backslash A_n\right) \leqslant 2^{-n}, \\ &\forall n, \quad l\left(\chi_{A_n} u\right) = \textstyle\int_{A_n} \varphi(\omega, u(\omega)) \mu(d\omega), \end{aligned}$$

Compte tenu de la condition $(*)$, on a

$$\lim_{n\to\infty} l\left(\chi_{A_n} u\right) = l\left(\chi_{\bigcup_{n=0}^{\infty}(A_n)} u\right).$$

Comme $\mu\left(\Omega \setminus \bigcup_{n=0}^{\infty}(A_n)\right) = 0$, on en déduit que

$$l(u) = l\left(\chi_{\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n} u\right) = \lim_{n\to\infty} \int_{A_n} \varphi(\omega, u(\omega))\mu(d\omega) = \int_{\Omega} \varphi(\omega, u(\omega))\mu(d\omega).$$

□

Théorème 2.1.1

Soit E un espace de Banach, soit $\varphi : \Omega \times E \to [0, +\infty]$ un intégrande $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(E)-$ mesurable tel que pour tout $(\omega, x) \in \Omega \times E$, on ait $\varphi(\omega, x) \geqslant \|x \mid -\alpha(\omega)$ où α est une fonction positive μ -intégrable sur Ω.
Soit H une partie non vide de $L^1_E(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ satisfaisant aux conditions suivantes :

i) $\{\varphi(\cdot, u(\cdot)) : u \in H\}$ est uniformément intégrable dans $L^1_R(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$,

ii) Pour tout $A \in \mathcal{A}$, l'ensemble $H_A = \left\{\int_A u d\mu : u \in H\right\}$ est relativement $\sigma\left(E, E'\right)$,

iii) Toute mesure vectorielle $m : A \to E$, à variation bornée pour laquelle on a $m(A) \in \overline{co}\left(H_A\right)$, pour tout $A \in \mathcal{A}$, admet une densité Bochner μ -intégrable.

Alors

(a) H est uniformément intégrable dans $L^1_E(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$.

(b) Tout élément l appartenant à l'adhérence de H dans le bidual faible de $L^1_E(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ noté $\overline{H}^{w^*}$ admet pour représentation intégrale,

$$l\left(\chi_A x'\right) = \int_A \left\langle x', f(\omega)\right\rangle \mu(d\omega),$$

où $f \in L^1_E(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, pour tout $(A, x') \in \mathcal{A} \times E'$.

(c) Si l'on suppose de plus que $L^1_E(\Omega, \mathcal{A}, \mu)' = L^\infty_{E'_b}(\Omega, A, \mu)$, alors H est relativement $\sigma\left(L^1_E, L^\infty_{E'_b}\right)$ compact.

Démonstration. • Montrons (a) :

on a

$$\|u(\omega)\| \leqslant \varphi(\omega, u(\omega)) + \alpha(\omega),$$

pour tout $\omega \in \Omega$ et tout $u \in H$. Alors pour tout $A \in \mathcal{A}$ on a :

$$\int_A \|u(\omega)\|\mu(d\omega) \leqslant \int_A \varphi(\omega, u(\omega)) + \alpha(\omega)\mu(d\omega),$$

ainsi

$$\lim_{\mu(A)\to 0} \sup_{u\in H} \int_A \|u(\omega)\|\mu(d\omega) \leqslant \lim_{\mu(A)\to 0} \sup_{u\in H} \int_A \varphi(\omega, u(\omega)) + \alpha(\omega)\mu(d\omega),$$

compte tenu de la condition (i), le point (a) est vérifie.

- Montrons (b) :

Soit $l \in \overline{H}^{w^*}$, où $\overline{H}^{w^*}$ est l'adhérence de H dans le bidual faible de $L^1_E(\Omega, A, \mu)$. Comme H est borné pour la norme de $L^1_E(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, alors par théorème D'aloglue 1.1.5 $\overline{H}^{w^*}$ est compact.
De plus, pour tout $A \in \mathcal{A}$ et tout $x' \in E'$, on a

$$l\left(\chi_A x'\right) \leqslant \delta^*\left(x', H_A\right).$$

Donc d'après la remarque 1.3.7, l'application $x' \mapsto l\left(\chi_A x'\right)$ est continue sur E pour la topologie de Mackey $m\left(E', E\right)$, pour tout A fixé dans $\mathcal{A}$, car H_A est relativement faiblement compact d'après la condition (ii).

Compte tenu de l'hypothèse faite sur φ, pour tout $u \in H$ et tout $x' \in E'$ de norme $\leqslant 1$, on a

$$\langle u(\omega), x'\rangle \leqslant \varphi(\omega, u(\omega)) + \alpha(\omega),$$

pour tout $\omega \in \Omega$. Par suite, pour tout $A \in \mathcal{A}$, tout $x' \in E'$ avec $\|x'\| \leqslant 1$ et tout $u \in H$, on a

$$\langle u, \chi_A x'\rangle = \int_A \langle u(\omega), x'\rangle\, \mu(d\omega) \leqslant \int_A [\varphi(\omega, u(\omega)) + \alpha(\omega)]\mu(d\omega).$$

Ainsi

$$\sup_{u\in H} \langle u, \chi_A x'\rangle = \sup_{u\in H} \int_A \langle u(\omega), x'\rangle\, \mu(d\omega) \leqslant \sup_{u\in H} \int_A [\varphi(\omega, u(\omega)) + \alpha(\omega)]\mu(d\omega).$$

D'où

$$l\left(\chi_A x'\right) \leqslant \sup_{u\in H} \int_A \varphi(\omega, u(\omega))\mu(d\omega) + \int_A \alpha(\omega)\mu(d\omega).$$

Posons $\langle m(A), x'\rangle = l\left(\chi_A x'\right)$ pour tout $(A, x') \in \mathcal{A} \times E'$.
En vertu de ce qui précède et de la proposition 2.1.1, la mesure vectorielle $m : \mathcal{A} \mapsto E$ ainsi définie est à variation bornée et absolument continue par rapport à la mesure μ. Comme $m(A) \in \in \overline{\text{co}}\left(H_A\right)$ pour tout $A \in A$, la condition (iii) implique que m admet une densité Bochner μ -intégrable f. Soit

$$l\left(\chi_A x'\right) = \langle m(A), x'\rangle = \int_A \langle f(\omega), x'\rangle\, \mu(d\omega),$$

pour tout $(A, x') \in A \times E'$, ce qui établit le point b) de l'énoncé.

- Montrons (c) :
Pour démontrer le point c , il suffit de vérifier que, pour tout $v \in L^\infty_{E'_b}(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, on a

$$l(v) = \int_\Omega \langle f(\omega), v(\omega)\rangle \mu(d\omega),$$

0. Rappelons qu'un sous-ensemble H de L^1_E est uniformément intégrable si $\lim_{\mu(A)\to 0} \sup_{f\in H} \int_A \|f\| d\mu = 0$, avec $A \in \mathcal{A}$

0. Un sous ensemble A d'un espace vectoriel topologique X muni de la topologie faible, est relativement faiblement compact, si pour tout suite de A il existe une sous suite converge faiblement vers un élément de X.

vu l'hypothèse portant sur l'intégrande φ, on a, pour tout $v \in L^{\infty}_{E'_0}(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, tout $u \in H$ et tout $A \in A$

$$\langle \chi_A v, u \rangle \leqslant \|v\|_\infty \sup_{u \in H} \left[\int_A \varphi(\omega, u(\omega))\mu(d\omega) + \int_A \alpha(\omega)\mu(d\omega) \right].$$

Soit (A_n) une suite croissante dans $\mathcal{A}$ de réunion A, on a, pour tout entier n, $|l(\chi_A v) - l(\chi_{A_n} v)| = \left| l\left(\chi_{A \backslash A_n} v\right) \right|$. D'où

$$|l(\chi_A v) - l(\chi_{A_n} v)| \leqslant \|v\|_\infty \left[\sup_{u \in H} \int_A \varphi(\omega, u(\omega))\mu(d\omega) + \int_{A \backslash A_n} \alpha(\omega)\mu(d\omega) \right].$$

Donc $\lim_{n \to \infty} l(\chi_{A_n} v) = l(\chi_A v)$ car $\lim_{n \to \infty} \mu(A \backslash A_n) = 0$. Il résulte de la proposition 2.1.2, qu'on a

$$l(v) = \int_\Omega \langle f(\omega), v(\omega) \rangle \mu(d\omega),$$

pour tout $v \in L^{\infty}_{E'_b}(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$.

□

Lemme 2.1.1: Grothendieck

Soit A un bornée d'un espace de Banach E qui possède les propriété suivant :
il existe $\varepsilon \geqslant 0$ et un sous ensemble H de E faiblement compact tel que $A \subset H + \varepsilon B$ (avec B une boule unité fermé de E), alors A est est relativement faiblement compact.

Démonstration. Soit $\overline{A}$ l'adhérence de A dans le bidual de E. Comme A est bornée pour la norme de E, alors d'après le théorème 1.1.5 $\overline{A}$ est compact dans ce bidual faible. Soit B'' la boule unité du bidual de E, ainsi $H + \varepsilon B''$ est $\sigma(E'', E')$ fermé car, on a, B'' et H sont $\sigma(E'', E')$ compact. En vertu de l'hypothèse $A \subset H + \varepsilon B$, alors $\overline{A} \subset H + \varepsilon B''$, par suite $\overline{A} \subset E + \varepsilon B''$. Posons ε un nombre arbitraire positive, et E est fermé dans E'' au sens de la topologie forte, donc $\overline{A} \subset E$. □

Théorème 2.1.2

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré avec μ σ-finie, $\mathcal{A}$ μ-complet, et $(u_n)_{n \geqslant 1}$ une suite bornée dans $L^1_E(\mathcal{A})$ qui vérifie la condition d'approximation suivante. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une multifonction $\mathcal{A}$-mesurable et intégralement bornée L_ε de Ω dans $P_{wkc}(E)$ avec $0 \in L_\varepsilon(\omega), \forall \omega \in \Omega$ et une suite $(\Omega^n_\varepsilon)_{n \geqslant 1}$ dans $\mathcal{A}$ telle que

$$\begin{cases} \forall n \geqslant 1, \quad \forall \omega \in \Omega, \quad 1_{\Omega \backslash \Omega^n_\varepsilon}(\omega) u_n(\omega) \in L_k(\omega) \\ \forall n \geqslant 1, \quad \int \left| u_n - 1_{\Omega^n_\varepsilon} u_n \right| d\mu \leqslant \varepsilon \end{cases}$$

Alors $(u_n)_{n \geqslant 1}$ est relativement faiblement compacte dans $L^1_E(\mathcal{A})$, et il existe une sous suite $(u_{n_k})_{k \geqslant 1}$ de $(u_n)_{n \geqslant 1}$ et u_∞ dans $L^1_E(\mathcal{A})$, telle que

$$\begin{cases} u_{n_k} \to u_\infty \quad \text{pour } \sigma\left(L^1_E(\mathcal{A}), L^\infty_{E'}(\mathcal{A})\right) \\ u_\infty(\omega) \in \overline{\text{co}} Ls \{u_n(\omega)\} \ \text{ p.s.} \end{cases}$$

où $\mathrm{Ls}\{u_n(\omega)\} = \bigcap_{k=1}^\infty \overline{\left\{ u_m(\omega) : m \geqslant k \right\}}^\sigma$ et σ désigne l'adhérence pour la topologie faible $\sigma(E, E')$.

Démonstration. Soit L_ε et Ω_ε^n qui satisfont aux conditions de l'énoncé. Pour tout $n \geqslant 1$, on a

$$u_n = 1_{\Omega_\varepsilon^n} u_n + 1_{\Omega \setminus \Omega_\varepsilon^n} u_n$$

De sorte que la suite $\left(1_{\Omega_\varepsilon^n} u_n\right)_{n \geq 1}$ demeure dans l'ensemble $S^1_{L_\varepsilon}$ des sélections intégrables de L_ε, qui est $\sigma\left(L^1_E(\mathcal{A}), L^\infty_{E'}(\mathcal{A})\right)$ compact (d'après le théorème 1.3.5). Comme on a

$$\left|u_n - 1_{\Omega_\varepsilon^n} u_n\right| \leqslant \varepsilon$$

Donc

$$\{u_n / n \geqslant 1\} \subset S^1_{L_\varepsilon} + \varepsilon B_{L^1_E}.$$

Alors d'après le théorème 2.1.1 on conclut que $(u_n)_{n \geqslant 1}$ est relativement faiblement compacte dans $L^1_E(\mathcal{A})$. □

Corollaire 2.1.1

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré avec μ σ-finie et E un espace de Banach séparable, $(u_n)_{n \geqslant 1}$ une suite uniformément intégrable dans $L^1_E(\mathcal{A})$, h une fonction strictement positive μ -intégrable sur Ω. On suppose que la suite $(u_n)_{n \geqslant 1}$ admette la propriété d'approximation suivante. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une multifonction $\mathcal{A}$-mesurable L_ε de Ω à valeurs dans $\mathcal{R}(E)$ avec $0 \in L_\varepsilon(\omega), \forall \omega \in \Omega$ et une suite $(\Omega_\varepsilon^n)_{n \geqslant 1}$ dans $\mathcal{A}$ telles que

$$\begin{cases} \forall n \geqslant 1, & \int_{\Omega \setminus \Omega_\varepsilon^n} h d\mu \leqslant \varepsilon \\ \forall n \geqslant 1, & \forall \omega \in \Omega, \quad 1_{\Omega_\varepsilon^n}(\omega) u_n(\omega) \in L_\varepsilon(\omega) \end{cases}$$

Alors la suite $(u_n)_{n \geqslant 1}$ est relativement $\sigma\left(L^1_E(\mathcal{A}), L^\infty_{E'}(\mathcal{A})\right)$ compacte.

Démonstration. Soit h une fonction strictement positive et μ-intégrable sur Ω. Comme $(u_n)_{n \geqslant 1}$ est uniformément intégrable dans $L^1_E(\mathcal{A}, \mu)$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ et $\eta > 0$ tels que

$$\begin{cases} \int_A h d\mu < \delta \Rightarrow \sup_{n \geqslant 1} \int_A |u_n| \, d\mu < \frac{\varepsilon}{2} \\ \sup_{n \geqslant 1} \int_{[|u_n| > \eta h]} |u_n| \, d\mu < \frac{\varepsilon}{2} \end{cases}$$

En vertu de l'hypothèse, il existe une multifonction $\mathcal{A}$ -mesurable L_ε à valeurs dans $\mathcal{R}(E)$ avec $0 \in L_\varepsilon(\omega)$, $\forall \omega \in \Omega$, et $(\Omega_\varepsilon^n)_{n \geqslant 1}$ dans $\mathcal{A}$ tel que $\int_{\Omega \setminus \Omega_\varepsilon^n} h d\mu \leqslant \delta, \forall n \geqslant 1$ et tel que $u_n(\omega) \in L_\varepsilon(\omega)$ pour tout $\omega \in \Omega_\varepsilon^n$. Pour tout $n \geqslant 1$, on a

$$u_n = 1_{\Omega_\varepsilon^n \cap [|u_n| \leqslant \eta h]} u_n + 1_{(\Omega_\varepsilon^n)^c \cap [|u_n| \leqslant \eta h]} u_n + 1_{[|u_n| > \eta h]} u_n$$

de sorte que la suite

$$\left(1_{\Omega_\varepsilon^n \cap (|u_n| \leqslant \eta h]} u_n\right)_{n \geqslant 1}$$

demeure dans l'ensemble $S^1_{\Phi_\varepsilon}$ des sections intégrables de la multifonction $\mathcal{A}$-mesurable intégrablement bornée Φ_ε de Ω à valeurs dans $\mathcal{P}_textwkc(E)$ définie par

$$\Phi_\varepsilon(\omega) = L_\varepsilon(\omega) \cap \eta h(\omega) B, \quad \forall \omega \in \Omega$$

où B est la boule unité de E. Vu le choix de δ et η, on a, pour tout $n \geqslant 1$

$$\left|u_n - 1_{\Omega_\varepsilon^n \cap [|u_n| \leqslant \eta h]} u_n\right|_{L^1} < \varepsilon$$

de sorte que $(u_n)_{n \geqslant 1}$ est relativement $\sigma\left(L^1_E(\mathcal{A}), L^\infty_{E'}(\mathcal{A})\right)$ compacte. □

Lemme 2.1.2

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé, et $(\Gamma_n)_{n\geqslant 1}$ une suite bornée dans $\mathcal{L}^1_{\mathcal{P}wkc(E)}(\mathcal{A})$. Alors il existe une suite extraite $(\Gamma_{n_k})_{k\geqslant 1}$ de $(\Gamma_n)_{n\geqslant 1}$, une suite $(B_k)_{k\geqslant 1}$ dans $\mathcal{A}$ telles que :
1. $\lim_{k\to\infty} P(B_k) = 1$.
2. $(1_{B_k}\Gamma_{n_k})_{k\geqslant 1}$ *est uniformément intégrable.*
3. $(1_{B_k}\Gamma_{n_k})_{k\geqslant 1}$ *converge vers 0 en mesure, c'est-à-dire, pour tout $\varepsilon > 0$, $\lim_{k\to\infty} P\left\{1_{B_k^c}|\Gamma_{n_k}| > \varepsilon\right\} = 0$.*

Démonstration. [4, voir le lemme 2.4 page 4] □

Voici un corollaire de ce lemme

Corollaire 2.1.2

Sous les hypothèses et notations du Lemme 2.1.2, il existe une suite croissante $(A_m)_{m\geqslant 1}$ dans $\mathcal{A}$ et une sous suite $\left(\Gamma_{n_{k_m}}\right)_{m\geqslant 1}$ de $(\Gamma_{n_k})_{k\geqslant 1}$ telle que
1. $P(Am) = 1$.
2. *La suite $\left(1_{A_m}X_{m_{k_m}}\right)_{m\geqslant 1}$ soit uniformément intégrable.*
3. *Pour tout entier $p \geqslant 1$, la restriction de $\left(\Gamma_{n_{k_m}}\right)_{m\geqslant 1}$ à A_p est uniformément intégrable.*

Démonstration. • Montrons (1) et (2) :
En vertu du lemme 2.1.2 il existe une suite extraite $(\Gamma_{n_k})_{k\geqslant 1}$ de $(\Gamma_n)_{n\geqslant 1}$, une suite $(B_k)_{k\geqslant 1}$ dans $\mathcal{A}$ telles que : $\lim_{k\to\infty} P(B_k) = 1$. Alors puisqu'on a $\lim_{k\to\infty} P(B_k) = 1$, il existe une sous suite $(B_{k_9})_{q\geqslant 1}$ de $(B_k)_{k\geqslant 1}$ telle que

$$P(B_{k_4}) \geqslant 1 - 2^{-q}, \quad \forall q \in \mathbb{N}^*$$

Pour tout entier $m \geqslant 1$, posons

$$A_m = \bigcap_{q=m}^{\infty} B_{k_q}$$

Alors $(A_m)_{m\geqslant 1}$ est croissante avec $A_m \subset B_{k_m}$ pour tout $m \geqslant 1$. On a

$$P(A_m^c) = P\left(\bigcup_{q=m}^{\infty} B_{k_v}^c\right) \leqslant \sum_{q=m}^{\infty} P\left(B_{k_q}^c\right) \leqslant \sum_{q=m}^{\infty} \frac{1}{2^q}$$

D'où, $\lim_{m\to\infty} P(A_m) = 1$. En vertu du Lemme 2.1.2, la suite $(\Gamma_{n_m})_{m\geqslant 1}$ répond à l'énoncé car la suite $\left(1_{B_{k_m}}\Gamma_{n_{k_m}}\right)_{m\geqslant 1}$ est uniformément intégrable, donc $(1_{A_m}\Gamma_{n_m})_{m\geqslant 1}$ l'est aussi.
- Montrons (3) :
Soit p un entier $\geqslant 1$ fixé. Soit $t > 0$. On a

$$\sup_{m\geqslant 1} \int_{A_m \cap [|\Gamma_{nk_m}| > t]} |\Gamma_{nk_m}| \leqslant \sup_{1\leqslant m\leqslant p-1} \int_{A_p \cap [|\Gamma_{nk_m}| > t]} \left|\Gamma_{n_{k_m}}\right| + \sup_{p\leqslant m} \int_{A_p \cap \left[\left|\Gamma_{n_{k_m}}\right| > t\right]} \left|\Gamma_{n_{k_m}}\right|$$

comme le premier terme tend vers 0 lorsque $t \to +\infty$, le second terme est majoré par $\sup_{1\leqslant m} \int_{A_m \cap [|\Gamma_{n_{k_m}}|>t]} |\Gamma_{n_{k_m}}|$ qui tend vers 0 lorsque $t \to \infty$ car $\left(1_{A_m}\Gamma_{n_{k_m}}\right)_{m\geqslant 1}$ est uniformément intégrable.

□

Pour terminer ce paragraphe, on a le résultat suivant qui illustre les techniques de compacité dans le Théorème 2.1.2 et dans son Corollaire 2.1.1

Théorème 2.1.3

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré avec μ est finie et $\mathcal{A}$ μ-complète, E un espace de Banach séparable, $\varphi : \Omega \times E \to [0, +\infty]$ un intégrande, $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(E)-$mesurable tel que $\varphi(\omega, 0) = 0, \forall \omega \in \Omega$ et tel que pour tout $\omega \in \Omega$, pour tout $r \in \mathbb{R}^+$, l'ensemble

$$\{x \in E : \varphi(\omega, x) \leqslant r\}$$

appartient à $\mathcal{R}(E)$. Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite bornée dans L^1_E telle que $\sup_{n\geq 1} \int \varphi(\omega, u_n(\omega))\, \mu(d\omega) < +\infty$. Alors il existe une suite $(B_k)_{k\geqslant 1}$ dans $\mathcal{A}$ et une sous suite $(u_{n_k})_{n\geqslant 1}$ telle que $(1_{B_k} u_{n_k})_{k\geqslant 1}$ est relativement $\sigma\left(L^1_E(\mathcal{A}), L^\infty_{E'_s}(\mathcal{A})\right)$ compacte et telle que $\left(1_{B_k^c} u_{n_k}\right)_{k\geqslant 1}$ converge vers 0 μ-p.p.

Démonstration. Soit h une fonction strictement positive et μ -intégrable. Soit $\nu = h\mu$. Il est clair que la suite $((1/h)\,|u_n|)_{n\geqslant 1}$ est bornée dans $L^1_{\mathbb{R}}(\mathcal{A}, \nu)$. En vertu du lemme 2.1.2, il existe une suite $(B_k)_k \geqslant 1$ dans $\mathcal{A}$ avec $\lim \nu(B_k) = \nu(\Omega)$ et une sous suite $(u_n)_k$ telle que

$\left(1_{B_\varepsilon} h^{-1}\,|u_{n_k}|_{k\geqslant 1}\right.$ est uniformément intégrable dans $L^1_{\mathbb{R}}(\mathcal{A}, v)$. On peut supposer que $\left(1_{B_\xi}\,|u_{n_k}|\right)_{k\geqslant 1}$ converges vers 0μ -p.p. Mainenant on va montrer que $(1_{B_z} u_{n_k})_{k\geqslant 1}$ est relativement $\sigma\left(L^1, L^\infty\right)$ compacte dans $L^1_E(\mathcal{A}, \mu)$.

Posons $v_k = 1_{B_k} u_{n_k}, \forall k \geqslant 1$. Alors $(h^{-1}\,|v_k|)_{k\geqslant 1}$ est uniformément intégrable dans $L^1_{\mathbb{R}}(\mathcal{A}, \nu)$ ce qui équivaut à l'uniforme intégrabilité de $(|v_k|)$ dans $L^1_{\mathbb{R}}(\mathcal{A}, \mu)$. Soit $\varepsilon > 0$

il existe η et $\lambda > 0$ tels que

$$\begin{aligned} &\nu\left([p(v_k) > \eta h]\right) < \tfrac{\varepsilon}{2}, \quad \forall k \geqslant 1, \\ &\nu\left([|v_k| > \lambda h]\right) < \tfrac{\varepsilon}{2}, \quad \forall k \geqslant 1 \end{aligned}$$

car $(h^{-1}\varphi(v_k))_{k\geqslant 1}$ et $(h^{-1}\,|v_k|)_{k\geqslant 1}$ sont bornées dans $L^1_{\mathbb{R}}(\mathcal{A}, \nu)$. Pour tout $k \geqslant 1$ on a Soit B la boule unité dans E. Considérons la multifonction

$$\Phi(\omega) = \{x \in \lambda h(\omega) B : \varphi(\omega, x) \leqslant \eta h(\omega)\}$$

pour $\omega \in \Omega$. En vertu de l'hypothèse, $\Phi(\omega)$ est convexe $\sigma(E, E')$ compact et la multifonction Φ est $\mathcal{A}$ -mesurable intégrablement bornée avec $0 \in \Phi(\omega), \forall \omega \in \Omega$. Par construction, on a pour tout $k \geqslant 1$, pour tout $\omega \in \Omega$

$$\Omega^k_\varepsilon = [|v_k| \leqslant \lambda h] \cap [\varphi(v_k) \leqslant \eta h].$$

Alors

$$1_{\Omega^k_\varepsilon}(\omega) v_k(\omega) \in \Phi(\omega), \forall k \geqslant 1, \forall \omega \in \Omega$$

et

$$\nu\left(\Omega \backslash \Omega^k_\varepsilon\right) \leqslant \nu\{[\varphi(v_k) > \eta h]\} + \nu\{|v_k| > \lambda h\} < \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \quad \forall k \geqslant 1.$$

□

2.2 Compacité faible dans l'espace des multifonction intégralement bornées

Dans ce paragraphe E est un espace de Banach séparable ayant la propriété de Radon-Nikodym et tel que son dual fort E'_b soit séparable. Soit $\mathcal{P}_textwkc(E)$ l'ensemble des convexes faiblement compactes non vides de E, muni de la distance de Hausdorff, H, cette distance induit sur l'espace $\mathcal{L}^1_{\mathcal{P}_{\mathrm{wkc}}(E)}(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ des multifonctions $\mathcal{A}$-mesurable et intégralement bornées de Ω à valeurs dans $\mathcal{P}_textwkc(E)$, la distance H est définie par :

$$H(\Gamma, \Delta) = \int_\Omega H(\Gamma(\omega), \Delta(\omega))\mu(d\omega),$$

où Γ et Δ dans $\mathcal{L}^1_{\mathcal{P}_{\mathrm{wkc}}(E)}(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$.

Proposition 2.2.1

Soit E un espace de Banach séparable. On suppose que E' est séparable et que E ait la propriété de Radon Nikodym. Soit $v : \mathcal{A} \to [0, +\infty[$ une mesure positive absolument continue par rapport à μ et soit $M : A \to E$ une multimesure à valeurs convexes faiblement compactes non vides de E telle que $M(A) \subset v(A)B$, pour tout $A \in \mathcal{A}$. Alors il existe une multifonction mesurable Γ à valeurs convexes faiblement compactes non vides de E, intégralement bornée telle que

$$M(A) = \int_A \Gamma(\omega)\mu(d\omega), \quad \forall A \in \mathcal{A}, \tag{2.1}$$

Γ est unique μ -p.p.

Démonstration. • Montrons l'existence de Γ qui vérifier 2.1 :

Soit S_M l'ensemble des mesures vectorielles m définies sur $\mathcal{A}$ à valeurs dans E telles que $m(A) \in M(A), \forall A \in \mathcal{A}$, S_M est non vide et puisque on a M est une multimesure à valeur convexe faiblement compact non vide, Alors d'après théorème 1.3.8 on a

$$\forall A \in A, \quad M(A) = \{m(A) : m \in S_M\}.$$

Soit $m \in S_M$ et $|m|$ sa variation.
Comme la multimesure M vérifie la condition : $M(A) \subset v(A)B$, pour tout $A \in \mathcal{A}$, on a $|m|(A) \leqslant v(A)$ pour tout $A \in \mathcal{A}$. Donc m est à variation bornée et absolument continue par rapport à μ puisque v est absolument continue par rapport à μ.
Comme E a la propriété de Radon-Nikodym, m admet une densité f_m Bochner intégrable par rapport à μ, c'est-à-dire $m(A) = \int_A f_m d\mu \leqslant v(A), \forall A \in \mathcal{A}$, ainsi $|m|(A) = \int_A |f_m| \, d\mu \leqslant v(A), \forall A \in \mathcal{A}$. De façon évidente, l'ensemble

$$H = \{f_m : m \in S_M\}$$

est une partie uniformément intégrable dans $L^1_E(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ car

$$\lim_{\mu(A) \to 0} \sup_{m \in S_M} \int_A |f_m| \, d\mu \leqslant \lim_{\mu(A) \to 0} v(A).$$

Il est clair que $\left\{\int_A f_m d\mu : m \in S_M\right\} = H_A$ est convexe faiblement compact dans E pour tout $A \in A$.
Par ailleurs H est décomposable au sens : pour tout $(A, B) \in \mathcal{A} \times \mathcal{A}$, avec $A \cap B = \emptyset$ et tout $(h_1, h_2) \in H \times H$, la fonction $\chi_A h_1 + \chi_B h_2 \in H \quad$ si $0 \in M(A)$, $\forall A \in A$.
En effet :
Supposons d'abord $0 \in M(A), \forall A \in \mathcal{A}$. Alors chacune des mesures $A \mapsto \delta^* (x', M(A))\ (x' \in E')$ est positive, ce qui implique que M est monotone c'est-à-dire $M(A) \subset M(B)$ si $A \subset B$.
Alors
Soient $(A, B) \in \mathcal{A} \times \mathcal{A}$ et $A \cap B = \emptyset, (m_1, m_2) \in S_M \times S_M$. Pour tout $C \in \mathcal{A}$, on a

$$\int_\Omega (\chi_A f_{m_1} + \chi_B f_{m_2})\, d\mu = m_1(A \cap C) + m_2(B \cap C),$$

avec

$$m_1(A \cap C) + m_2(B \cap C) \in M(A \cap C) + M(B \cap C) = M(C \cap (A \cup B)). \subset M(C)$$

Par suite $\chi_A f_{m_1} + \chi_B f_{m_2} \in H$.
De plus, on a H est relativement faiblement compact dans $L^1_E(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ car on a E et $E^{'}$ ont PRN, et H est uniformément intégrable et bornée, et H_A est relativement faiblement compact dans E, pour tout $A \in \mathcal{A}$ (d'après la théorème [9, voir Théorème 1 page 101]) . Nous allons maintenant montrer que H est w -fermée dans $L^1_E(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. Alors soit $f_m \xrightarrow{w} f$ dans $L^1_E(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ et puisque, on a M est une multimesure à valeurs faiblement compactes et convexes d'après la théorème 1.3.8, nous pouvons supposer que $m_\alpha \xrightarrow{w} m \in S_M$. Alors pour tout $[A, x'] \in \mathcal{A} \times E'$ on a :

$$\int_\Omega (\chi_A(\omega) x', f_{m_\alpha}(\omega))\, d\mu(\omega) \to \int_\Omega (\chi_A(\omega) x^*, f(\omega))\, d\mu(\omega)$$

et

$$(x', m_\alpha(A)) \to (x', m(A))\,,$$

avec $(x', m_\alpha(A)) = \int_\Omega (\chi_A(\omega) x', f_{m_\alpha}(\omega))\, d\mu(\omega)$. Alors

$$(x', m(A)) = \int_A (x', f(\omega))\, d\mu(\omega),$$

donc

$$\int_A (x', f_m(\omega))\, d\mu(\omega) = \int_A (x', f(\omega))\, d\mu(\omega).$$

Soit $\{x'_n\}_{n \geq 1}$ faiblement* dense dans E', puisque E' est séparable, alors un tel ensemble dénombrable existe. Alors on a

$$(x'_n, f_m(\omega)) = (x'_n, f(\omega))\,, \quad \text{pour tout} \;\; \omega \in \Omega \backslash N, \;\; \mu(N) = 0 \;\; \text{et tout} \;\; n \geq 1.$$

Alors par la densité w^* de x'_n dans E', on obtient que

$$(x', f_m(\omega)) = (x', f(\omega))\,, \quad \text{pour tout} \;\; \omega \in \Omega \backslash N \;\; \text{et tout} \;\; x' \in E',$$

on déduit

$$f_m(\omega) = f(\omega) \mu - p.p.$$

Donc H est faiblement fermée. D'ou H est faiblement compacte et H est décomposable, alors d'après le théorème 1.3.3 il existe Γ qui vérifie $H = S_\Gamma$ avec

$$S_\Gamma = \left\{ u \in L^1_E(\Omega, \mathcal{A}, \mu) : u(\omega) \in \Gamma(\omega)\mu - p.p. \right\}$$

. D'où

$$M(A) = \int_A \Gamma(\omega)\mu(d\omega) \overset{\text{def}}{=} \left\{ \int_A u(\omega)\mu(d\omega) : u \in S_\Gamma \right\}.$$

- Montrons l'unicité de Γ : Supposons qu'il existe Γ_1 et Γ_2 telle que

$$M(A) = \int_A \Gamma_1(\omega)\mu(d\omega) \;\text{ et }\; M(A) = \int_A \Gamma_2(\omega)\mu(d\omega)$$

Alors

$$\int_A \Gamma_1(\omega)\mu(d\omega) = \int_A \Gamma_2(\omega)\mu(d\omega) \text{pour tout } A \in \mathcal{A}$$

Ainsi

$$\delta^*\left(x', \int_A \Gamma_1(\omega)\mu(d\omega)\right) = \delta^*\left(x', \int_A \Gamma_2(\omega)\mu(d\omega)\right) \;\text{ pour tout }\; x' \in E' \text{et tout } A \in \mathcal{A},$$

par suite d'après la proposition 1.3.3, on a

$$\int_A \delta^*\left(x', \Gamma_1(\omega)\right)\mu(d\omega) = \int_A \delta^*\left(x', \Gamma_2(\omega)\right)\mu(d\omega) \;\text{ pour tout }\; x' \in E' \text{et tout } A \in \mathcal{A},$$

donc

$$\delta^*\left(x', \Gamma_1(\omega)\right) = \delta^*\left(x', \Gamma_2(\omega)\right) \;\text{ pour tout }\; x' \in E' \;\text{ et tout } \omega \in \Omega \setminus N \;\text{ avec } \mu(N) = 0,$$

alors d'après la proposition 1.3.4, on a

$$\Gamma_1(\omega) = \Gamma_2(\omega) \;\text{ pour tout }\; \omega \in \Omega \setminus N \;\text{ avec } \mu(N) = 0.$$

D'ou l'unicité.

□

Théorème 2.2.1

Soit $\mathscr{H}$ un ensemble dans $\mathcal{L}^1_{\mathcal{P}_{wkc}(E)}(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ qui vérifie les conditions suivantes :

(i) L'ensemble $\{|\Gamma| : \Gamma \in \mathscr{H}\}$ est uniformément intégrable dans $L^1_R(\Omega,\mathcal{A},\mu)$.

(ii) Pour tout $A \in \mathcal{A}$, l'ensemble

$$\mathscr{H}_A = \bigcup_{\Gamma\in\mathscr{H}} \left\{ \int_A \Gamma d\mu \right\}$$

est relativement faiblement compact dans E.

Alors, pour toute suite généralisée $(\Gamma_\alpha)_{\alpha\in D}$ dans $\mathscr{H}$, il existe une sous suite généralisée $(\Gamma_i)_{i\in I}$ et $\Delta \in \mathcal{L}^1_{\mathcal{P}_{wkc}(E)}(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ telle que, pour tout $u \in L^\infty_{E'_b}(\Omega,\mathcal{A},\mu)$, on ait

$$\lim_i \int_\Omega \delta^*\left(u(\omega),\Gamma_i(\omega)\right)\mu(d\omega) = \int_\Omega \delta^*(u(\omega),\Delta(\omega))\mu(d\omega). \tag{2.2}$$

Par suite, pour tout $X \in \mathcal{L}^1_{\mathcal{P}_{wkc}(E)}(\Omega,\mathcal{A},\mu)$, on a

$$\liminf_i \int_0 h\left(\Gamma_i(\omega),X(\omega)\right)\mu(d\omega) \geqslant \int_0 h(\Delta(\omega),X(\omega))\mu(d\omega). \tag{2.3}$$

Démonstration. • Montrons 2.2 :

Observons d'abord que, pour tout $\Gamma \in \mathcal{L}^1_{\mathcal{P}_{\text{wkc}}(E)}(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ application.

$$l_\Gamma : u \mapsto \int_\Omega \delta^*(u(\omega),\Gamma(\omega))\mu(d\omega)$$

de $L^\infty_{E'_b}(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ dans $\mathbb{R}$ est sous-linéaire, continue pour la norme $\|\cdot\|_\infty$, additive et l'on a trivialement

$$\left|\int_\Omega \delta^*(u(\omega),\Gamma(\omega))\mu(d\omega)\right| \leqslant \|u\|_\infty \int_\Omega |\Gamma|(\omega)\mu(d\omega).$$

Comme l'ensemble $\{|\Gamma| : \Gamma \in \mathscr{H}\}$ est uniformément intégrable, on en déduit que l'ensemble $\{l_\Gamma : \Gamma \in \mathscr{H}\}$ est relativement compact dans l'espace des applications continues de $L^\infty_{E'_b}(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ dans $\mathbb{R}$ muni de la convergence simple. Par suite, si $(\Gamma_\alpha)_{\alpha\in D}$ est une suite généralisée dans $\mathscr{H}$, il existe une sous suite généralisée $(\Gamma_i)_{i\in I}$ et un élément $l : L^\infty_{E'_b}(\Omega,\mathcal{A},\mu) \to \mathbb{R}$ tels que

$$\lim_i l_{\Gamma_i}(u) = l(u) \quad \text{pour tout } u \text{ fixé dans} \quad L^\infty_{E'_b}(\Omega,\mathcal{A},\mu).$$

Il est clair que l est sous-linéaire, additive et vérifie

$$l\left(\chi_A u\right) \leqslant \|u\|_\infty \sup_{i\in\mathbb{N}} \int_A \left|\Gamma_i\right|(\omega)\mu(d\omega),$$

pour tout $A \in \mathcal{A}$ et tout $u \in L^\infty_{E'_b}(\Omega,\mathcal{A},\mu)$. De la condition (i), on déduit que, pour tout u fixé dans $L^\infty_{E'_b}(\Omega,A,\mu)$ et pour toute suite croissante (A_n) dans $\mathcal{A}$, de réunion A, on a

$$\lim_{n\to\infty} l\left(\chi_{A_n} u\right) = l\left(\chi_A u\right).$$

On a, pour tout $A \in \mathcal{A}$ et tout $x' \in E'$,

$$l\left(\chi_A x'\right) \leqslant \delta^*\left(x', \mathscr{H}_A\right).$$

Donc l'application $x' \mapsto l\left(\chi_A x'\right)$ est continue sur E' pour la topologie de Mackey $m-(E', E)$, pour tout A fixé dans $\mathcal{A}$, car $\mathscr{H}_A$ est relativement faiblement compact (d'après la remarque 1.3.7). Donc l vérifie les conditions d'application de la proposition 2.1.1. Alors la multimesure M de A à valeurs convexes faiblement compactes non vides de E, définie par la formule $\delta^*\left(x', M(A)\right) = l\left(\chi_A x'\right)$, pour tout $(A, x') \in \mathcal{A} \times E'$ est à variation bornée et de façon précise $M(A) \subset v(A)B$, pour tout $A \in \mathcal{A}$, où B est la boule unité de E et v est une mesure positive sur $\mathcal{A}$ absolument continue par rapport à μ. Ainsi les conditions de la proposition 2.2.1 sont vérifies, Alors il existe $\Delta \in \mathcal{L}^1_{\mathcal{P}_{\mathrm{wkc}(E)}}(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ unique μ -p.p. Donc

$$M(A) = \int_A \Delta(\omega)\mu(d\omega)$$

par suite

$$l\left(\chi_A x'\right) = \delta^*\left(x', M(A)\right) = \int_A \delta^*\left(x', \Delta(\omega)\right)\mu(d\omega), \quad \text{pour tout} \quad (A, x') \in \mathcal{A} \times E'.$$

Posons $\varphi\left(\omega, x'\right) = \delta^*\left(x', \Delta(\omega)\right)$, pour $(\omega, x') \in \Omega \times E'_b$. Il est clair que φ vérifie les conditions d'application de la proposition 2.1.2. Par suite, on a

$$l(u) = \int_\Omega \delta^*(u(\omega), \Delta(\omega))\mu(d\omega),$$

pour tout $u \in L^\infty_{E'_b}(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, ce qui achève la démonstration du première point de l'énoncé,

$$\forall u \subset L^\infty_{E'_b}, \quad \lim_i l_{\Gamma_i}(u) = \lim_i \int_\Omega \delta^*\left(u(\omega), \Gamma_i(\omega)\right)\mu(d\omega) = \int_\Omega \delta^*(u(\omega), \Delta(\omega))\mu(d\omega).$$

- Montrons 2.3 :
  En vertu de ce qui précède, pour tout $u \in L^\infty_{E'_b}(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, la suite généralisée $\left(\delta^*\left(u(\cdot), \Gamma_i(\cdot)\right)\right)_{i\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers $\left(\delta^*\left(u(\cdot), \Delta(\cdot)\right)\right)_{i\in\mathbb{N}}$ dans $L^1_R(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ car pour tout $A \in \mathcal{A}$, tout $u \in L^\infty_{E'_b}(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, on a d'après le théorème 1.3.6 $\chi_A u \in L^\infty_{E'_0}(\Omega, A, \mu)$ et par suite

$$\lim_i \int_A \delta^*\left(u(\omega), \Gamma_i(\omega)\right)\mu(d\omega) = \int_A \delta^*(u(\omega), \Delta(\omega))\mu(d\omega).$$

D'où,

$$\begin{aligned}&\liminf_i \textstyle\int \left|\delta^*\left(u(\omega), \Gamma_i(\omega)\right) - \delta^*(u(\omega), X(\omega))\right|\mu(d\omega)\\ &\geqslant \textstyle\int_\Omega \left|\delta^*(u(\omega), \Delta(\omega)) - \delta^*(u(\omega), X(\omega))\right|\mu(d\omega),\end{aligned}$$

car l'application $f \mapsto \int_\Omega |f| d\mu$ de $L^1_R(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ dans $\mathbb{R}$ est faiblement semi-continue inférieurement. Or, pour tout $u \in L^\infty_{E'_b}(\Omega, \mathcal{A}, p)$, avec $\|u\|_\infty \leqslant 1$, on a

$$\forall i \in \mathbb{N}, \quad \int_\Omega h\left(\Gamma_i(\omega), X(\omega)\right)\mu(d\omega) \geqslant \int_\Omega \left|\delta^*\left(u(\omega), \Gamma_i(\omega)\right) - \delta^*(u(\omega), X(\omega))\right|\mu(d\omega).$$

D'où

$$\liminf_i h\left(\Gamma_i, X\right) \geqslant \int_\Omega \left|\delta^*(u(\omega), \Delta(\omega)) - \delta^*(u(\omega), X(\omega))\right|\mu(d\omega),$$

pour tout $u \in L^{\infty}_{E'_b}(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ avec $\|u\|_{\infty} \leqslant 1$. D'où

$$\liminf h\left(\Gamma_i, X\right) \geqslant h(\Delta, X).$$

□

En utilisant le Corollaire 2.1.2, le Théorème 2.2.1 , on a l'énoncé suivant.

Théorème 2.2.2

On suppose E'_b séparable et E ayant la propriété de Ra don-Nykodym. Soit $(\Gamma_n)_{n\geqslant 1}$ une suite bornée dans $\mathcal{L}^1_{\mathcal{P}_{wkc}(E)}(\mathcal{A})$ telle que $\bigcup_{n=1}^{\infty} \int_A \Gamma_n$ soit relativement $\sigma(E, E')$ compacte. Alors il existe une suite croissante $(A_m)_{m\geqslant 1}$ telle que $\lim_{m\to\infty} P(A_m) = 1$, une suite $\left(\Gamma_{\alpha(m)}\right)_{n\geqslant 1}$ extraite de $(\Gamma_n)_{n\geqslant 1}$ telle que $\left(1_{A_m}\Gamma_{\alpha(m)}\right)_{m\geqslant 1}$ soit uniformément intégrable, une suite $\left(\Gamma_{\beta\alpha(n)}\right)_{n\geqslant 1}$ extraite de $\left(\Gamma_{\alpha(n)}\right)_{n\geqslant 1}, \Gamma_{\infty}$ appartenant à $\mathcal{L}^1_{\mathcal{P}_{wkc}(E)}(\mathcal{A})$ telles que, pour tout $p \geqslant 1$ fixé, tout $A \in A_p \cap \mathcal{A}$, tout $x' \in E'$, on ait

$$\lim_{n\to\infty} \int_A \delta^*\left(x', \Gamma_{\beta\alpha(n)}\right) = \int_A \delta^*\left(x', \Gamma_{\infty}\right)$$

Démonstration. [4, voir le théorème 2.6 page 2.5] □

Voici d'abord une application du théorème 2.2.2 qui intervient dans l'étude de la convergence des martingales à la limite.

Théorème 2.2.3

On suppose E'_b séparable et E ayant la propriété de Radon-Nikodym. Soit $(\Gamma_n)_{n\geqslant 1}$ une suite bornée dans $\mathcal{L}^1_{\mathcal{P}_{wkc}(E)}(\mathcal{A})$ telle que

1. *Pour tout $\omega \in \Omega, \sup_{n\geqslant 1} |\Gamma_n(\omega)| < +\infty$.*
2. *Pour tout $A \in \mathcal{A}, \bigcup_{n=1}^{\infty} \int_A \Gamma_n$ est relativement $\sigma(E, E')$ compacte.*
3. *Pour tout $x' \in D'$, où D' est une suite dans E', dense pour la topologie de la norme de E'_b, la suite $\left(\delta^*\left(x', \Gamma_n\right)\right)_{n\geqslant 1}$ converge p.p. vers une fonction intégrable $\varphi_{x'}$.*

Alors il existe $\Gamma_{\infty} \in \mathcal{L}^1_{\mathcal{P}_{wkc}(E)}(\mathcal{A})$ et un négligeable $N \in \mathcal{A}$ tel que pour tout $(\omega, x') \in \Omega \backslash N \times E'$, on ait

$$\lim_{n\to\infty} \delta^*\left(x', \Gamma_n(\omega)\right) = \delta^*\left(x', \Gamma_{\infty}(\omega)\right)$$

Démonstration. En vertu du théorème 2.2.2 , il existe une suite croissante $(A_m)_{m\geqslant 1}$ dans $\mathcal{A}$ avec $\lim_{n\to\infty} P(A_m) = 1$, et une suite $\left(\Gamma_{\gamma(n)}\right)_{n\geqslant 1}$ extraite de $(\Gamma_n)_{n\geqslant 1}$ telle que $\left(1_A\Gamma_{\gamma(n)}\right)_{n\geqslant 1}$ est uniformément intégrable, et $\Gamma_{\infty} \in \mathcal{L}^1_{\mathcal{P}_{\mathrm{wkc}}(E)}(\mathcal{A})$ telle que

$$\lim_{n\to\infty} \int_A \delta^*\left(x', \Gamma_{\gamma(n)}(\omega)\right) P(d\omega) = \int_A \delta^*\left(x', \Gamma_{\infty}(\omega)\right) P(d\omega)$$

pour tout $p \geqslant 1$, tout $A \in A_p \cap \mathcal{A}$ et tout $x' \in E'$.
Comme $\lim_{n\to\infty} \delta^*\left(x', \Gamma_n(\omega)\right) = \varphi_{x'}(\omega)$ p.p et comme la restriction de $\left(\Gamma_{\gamma(n)}\right)_{n\geqslant 1}$ à chacun des $A_p(p \geqslant 1)$ est uniformément intégrable, on en déduit que

$$\int_A \delta^*\left(x', \Gamma_{\infty}(\omega)\right) P(d\omega) = \lim_{n\to\infty} \int_A \delta^*\left(x', \Gamma_{\gamma(n)}(\omega)\right) P(d\omega) = \int_A \varphi_{x'}(\omega) P(d\omega)$$

pour tout $p \geqslant 1$, tout $A \in A_p \cap \mathcal{A}$, tout $x' \in D'$. Par suite, pour tout $p \geqslant 1$, tout x' fixé dans D',

$$\delta^*\left(x', \Gamma_\infty(\omega)\right) = \varphi_{x'}(\omega) = \lim_{n\to\infty} \delta^*\left(x', \Gamma_n(\omega)\right)$$

excepté sur un négligeable $N_{p,x'}$ dans $A_p \cap \mathcal{A}$. Soit

$$N_p = \bigcup_{x'\in D'} N_{p,x'}$$

Alors N_p est un négligeable dans $A_p \cap \mathcal{A}$ et on a

$$\lim_{n\to\infty} \delta^*\left(x', \Gamma_n(\omega)\right) = \delta^*\left(x', \Gamma_\infty(\omega)\right)$$

pour $(\omega, x') \in (A_p \backslash N_p) \times D'$. En vertu de la condition 1, on obtient,

$$\lim_{n\to\infty} \delta^*\left(x', \Gamma_n(\omega)\right) = \delta^*\left(x', \Gamma_\infty(\omega)\right)$$

pour $(\omega, x') \in (A_p \backslash N_p) \times E'$ car on a, pour tout $x' \in E'$ et tout $e' \in D'$, tout $\omega \in \Omega$, tout $n \geqslant 1$, $\left|\delta^*\left(x', \Gamma_n(\omega)\right) - \delta^*\left(e', \Gamma_\infty(\omega)\right)\right| \leqslant$

$$\leqslant \|x' - e'\| \sup_{n\geqslant 1} |\Gamma_n(\omega)| + \left|\delta^*\left(e', \Gamma_n(\omega)\right) - \delta^*\left(e', \Gamma_\infty(\omega)\right)\right| + \|x' - e'\| \left|\Gamma_\infty(\omega)\right|.$$

Comme l'égalité $\lim_{n\to\infty} \delta^*\left(x', \Gamma_n(\omega)\right) = \delta^*\left(x', \Gamma_\infty\right)$ est vraie p.p. sur chaque $A_p (p \geqslant 1)$, on obtient finalement

$$\lim_{n\to\infty} \delta^*\left(x', \Gamma_n(\omega)\right) = \delta^*\left(x', \Gamma_\infty(\omega)\right)$$

pour $(\omega, x') \in \left(\Omega \backslash \bigcup_{p=1}^{\infty} N_p\right) \times E'$. $\square$

3 Applications

3.0.1 Application de théorème 2.1.1

Ce paragraphe est consacré à l'existence d'un minimum pour des fonctionnelles intégrales convexes et à l'existence des éléments de meilleure approximation dans L^1_E. Soit $\mathcal{B}$ une sous tribu μ complète de $\mathcal{A}$ et C un ensemble d'applications de l'espace $(\Omega, \mathcal{B})$ dans un espace mesurable (S, S), C est décomposable si pour tout $B \in \mathcal{B}$, tout $(u, v) \in C \times C$, l'application qui coincide avec u sur B et avec v sur $\Omega \backslash B$ appartient à C.

Voici un lemme facile qui est crucial dans l'existence d'un minimum pour les fonctionnelles intégrales que nous avons en vue.

Lemme 3.0.1

Avec les notations précédentes, soit C un ensemble décomposable d'applications $(\mathcal{B}, \mathsf{S})$-mesurables de Ω dans S, $\varphi : \Omega \times S \to [0, +\infty]$ un intégrande qui vérifie les conditions suivantes :

(i) $\forall u \in C, \varphi(\cdot, u(\cdot))$ est $\mathcal{A}$-mesurable.

(ii) Il existe une suite $(u_n)_{n>1}$ dans C telle que $J(u_n)$ soit fini pour tout $n \in N^*$, et telle que $\lim_{n\to+\infty} J(u_n) = \inf_{u\in C} J(u)$, J étant l'application de C dans $[0, +\infty]$ définie par

$$J(u) = \int_\Omega \varphi(\omega, u(\omega))\mu(d\omega), \qquad \textit{pour tout } u \in C.$$

Alors pour toute suite $(B_n)_n$ dans B telle que $\lim_{n\to+\infty} \mu(B_n) = 0$, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{B_n} \varphi(\omega, u_n(\omega))\, \mu(dw) = 0.$$

En conséquence la suite $(\varphi(\cdot, u_n(\cdot)))_{n>0}$ est uniformément intégrable dans $L^1_R(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$.

Démonstration. Raisonnons par l'absurde. Supposons qu'il existe une suite $(B_n)_{n>1}$ dans $\mathcal{B}$ telle que $\lim_{n\to+\infty} \mu(B_n) = 0$ et telle que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{B_n} \varphi(\omega, u_n(\omega))\, \mu(d\omega) \neq 0.$$

Alors il existe $\varepsilon > 0$ et une suite strictement croissante d'entiers (n_k) tels que $\int_{B_{n_k}} \varphi\left(\omega, u_{n_k}(\omega)\right) \mu(d\omega) > \varepsilon$, pour tout k.

Considérant la suite $\left(x_{n_k}\right)_{k\in N}$ à partir de la suite $\left(u_{n_k}\right)_{k\in N}$ et d'un élément quelconque v de $dom(J)$. En posant :

$$\begin{array}{ll} x_{n_k}(\omega) = u_{n_k}(\omega) & \text{si } \omega \in \Omega \backslash B_{n_k}, \\ x_{n_k}(\omega) = v(\omega) & \text{si } \omega \in B_{n_k}. \end{array}$$

Puisque C est une partie décomposable de l'ensemble des applications $(\mathcal{B}, \mathsf{S})$ mesurables de Ω dans S, alors x_{n_k} appartient a C quel que soit k et par suite

$$\inf_{u\in C} J(u) \leqslant J(x_{n_k}), \quad \text{pour tout} \quad k \in N.$$

D'où

$$\inf_{u\in C} J(u) \leqslant \liminf_k \left[\left(\int_{\Omega\backslash B_{n_k}} \varphi\left(\omega, u_{n_k}(\omega)\right) \mu d\omega \right) + \int_{B_{n_k}} \varphi(\omega, v(\omega))\mu(d\omega) \right].$$

Comme $v \in \operatorname{dom} J$ et $\lim_{k\to\infty} \mu\left(B_{n_k}\right) = 0$, on a

$$\lim_{k\to+\infty} \int_{B_{n_k}} \varphi(\omega, v(\omega))\mu(d\omega) = 0,$$

par suite

$$\inf_{u\in C} J(u) \leqslant \liminf_k \int_\Omega \varphi\left(\omega, u_{n_k}(\omega)\right) \mu(d\omega).$$

En raison de la définition de la suite $\left(u_{n_k}\right)_k$ on a, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega\backslash B_{n_k}} \varphi\left(\omega, u_{n_k}(\omega)\right) \mu(d\omega), &= \int_\Omega \varphi\left(\omega, u_{n_k}(\omega)\right) \mu(d\omega) - \int_{B_{n_k}} \varphi\left(\omega, u_{n_k}(\omega)\right) \quad \mu(d\omega) \\ &\leqslant \int_\Omega \varphi\left(\omega, u_{n_k}(\omega)\right) \mu(d\omega) - \varepsilon. \end{aligned}$$

Dans ces conditions

$$\inf_{u\in C} J(u) \leqslant \liminf_k \int_\Omega \varphi\left(\omega, u_{n_k}(\omega)\right) \mu(d\omega) - \varepsilon,$$

c'est-à-dire $\inf_{u\in C} J(u) \leqslant \inf_{u\in C} J(u) - \varepsilon$, ce qui est absurde et achève la démonstration. □

La proposition suivante est conséquence facile du lemme 3.0.1 ct du théorème 2.1.1.

0. Une suite bornée $\left(v_n\right)_n \geqslant_1$ dans $L^1_R(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ est uniformément intégrable si et seulement si pour toute suite $\left(B_n\right)_{n\geqslant 1}$ dans $\mathcal{B}$, avec $lim\mu\left(B_n\right) = 0$, on a $lim_{n\to+\infty} \int_{B_n} |v_n| \mu = 0$.

Proposition 3.0.1

Soit E un espace de Banach tel que E'_b ait la propriété de Radon Nikodym.
Soit $\varphi : \Omega \times E \to [0, +\infty]$ un intégrande $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(E)$ -mesurable, convexe semi continu inférieurement sur E, pour tout $\omega \in \Omega$ et tel que $\varphi(\omega, x) \geqslant \|x\| - \alpha(\omega)$, pour tout $(\omega, x) \in \Omega \times E$ avec α μ -intégrable positive. Soit C une partie non vide, décomposable dans $L^1_E(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ et $\sigma\left(L^1_E(\mathcal{A}), L^\infty_{E'_b}(\mathcal{A})\right)$ fermée.
On suppose qu'il existe une suite (u_n) dans C *qui vérifie les conditions suivantes :*

(i) $\forall n, J(u_n) = \int_\Omega \varphi(\omega, u_n(\omega)) \mu(d\omega)$ *est fini et*

$$\lim_{n\to\infty} J(u_n) = \inf_{u\in C} J(u).$$

(ii) L'ensemble $H_B = \left\{\int_B u_n d\mu : n \geqslant 1\right\}$ *est relativement faiblement compact dans E, pour tout $B \in \mathcal{B}$.*

(iii) Toute mesure vectorielle $m : \mathcal{B} \to E$, à variation bornée qui vérifie $m(B) \in \overline{\mathrm{co}}(H_B), \forall B \in \mathcal{B}$, admet une densité Bochner μ -intégrable et $\mathcal{B}-$ mesurable.

Alors l'intégrale fonctionnelle

$$J(u) = \int_\Omega \varphi(\omega, u(\omega))\mu(d\omega),$$

atteint son minimum sur C.

Démonstration. Résulte facilement du lemme 3.0.1 et du théorème 2.1.1. En effet, le lemme 3.0.1 et les conditions (i) (ii) et (iii) permettent d'affirmer que la suite (u_n) est relativement faiblement compacte dans $L^1_E(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$, par application du théorème 2.1.1. En vertu du théorème d'Eberlein-Smulian 1.1.1, on peut supposer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge faiblement vers $\tilde{u}$ dans $L^1_E(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$. Alors il est évident que $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge faiblement vers $\tilde{u}$ dans $L^1_E(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. Comme C est faiblement fermé dans $L^1_E(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, on a $\tilde{u} \in C$. D'après la proposition 1.2.3 on a J est semi-continu inférieurement sur $L^1_E(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ pour la topologie faible de cet espace. D'où le résultat annoncé, car on a trivialement,

$$\inf_{u\in C} J(u) \leqslant J(\tilde{u}) \leqslant \liminf_n J(u_n) = \lim_{n\to\infty} J(u_n).$$

□

Application

On se donne une sous tribu μ complète $\mathcal{B}$ de $\mathcal{A}$ et on suppose que E'_b et E sont séparables avec E admettant la propriété de Radon-Nikodym et E est réflexif. Le problème posé est le suivant. Soit C une partie non vide décomposable de $L^1_E(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ et faiblement compact dans $L^1_E(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$.

- Etant donnée un élément $X \in L^1_E(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, on cherche $\tilde{Y} \in L^1_E(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ plus précisément $\tilde{Y} \in S^1_K(\mathcal{B})$ telle que

$$\int_\Omega \|X(\omega) - \tilde{Y}(\omega)\|\mu(d\omega) = \mathrm{Inf}\left\{\int_\Omega \|X(\omega) - Y(\omega)\|\mu(d\omega) : Y \in S^1_K(\mathcal{B})\right\}.$$

Soit (u_n) une suite minimisante d'élément de $S^1_K(\mathcal{B})$,

$$\lim_{n\to\infty} J(u_n) = \inf_{u\in S^1_K(\mathcal{B})} J(u).$$

On applique la proposition 3.0.1 en prenant $\varphi(\omega,x) = \|X(\omega)-x\|$, $(\omega,x)\in\Omega\times E$ et $C = S^1_K(\mathcal{B})$.
Comme $S^1_K(\mathcal{B})$ est décomposable dans $L^1_E(\Omega,\mathcal{B},\mu)$, convexe fermé dans $L^1_E(\Omega,A,\mu)$, alors d'après le lemme 3.0.1 et le théorème 2.1.1 la suite (u_n) est uniformément intégrable dans $L^1_E(\Omega,\mathcal{B},\mu)$ et puisque E est réflexif alors d'après le théorème de Dunford-Pettis (u_n) est relativement faiblement compacte dans $L^1_E(\Omega,\mathcal{B},\mu)$. Donc (u_n) vérifie les conditions d'application de la proposition 3.0.1. D'où l'existence de $\tilde{Y}$.

- Etant donné $X\in L^\Phi_E(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ et un convexe fermé K non vide de E, on pose

$$S^\Phi_K(\mathcal{B}) = \left\{Y\in L^\Phi_E(\Omega,\mathcal{B},\mu) : Y(\omega)\in K\mu\text{ -p.p }\right\}.$$

On cherche $\tilde{Y}\in L^\Phi_E(\Omega,\mathscr{B},\mu)$, précisément $\tilde{Y}\in S^\Phi_K(\mathcal{B})$ tel que

$$\int_\Omega \Phi(\|X(\omega)-\tilde{Y}(\omega)\|)\mu(d\omega) = \inf\left\{\int_\Omega \Phi(\|X(\omega)-Y(\omega)\|)\mu(d\omega) : Y\in S^\Phi_K(\mathcal{B})\right\}.$$

Soit (u_n) une suite minimisante d'élément de $S^\Phi_K(\mathcal{B})$,

$$\lim_{n\to\infty} J(u_n) = \inf_{u\in S^\Phi_K(\mathcal{B})} J(u).$$

Avec $J(u) = \int_\Omega \Phi(\|X(\omega)-Y(\omega)\|)\mu(d\omega)$.
On applique la proposition 3.0.1 en prenant $\varphi(\omega,x) = \Phi(\|X(\omega)-\tilde{Y}(\omega)\|)$ $(w,x)\in\Omega\times E$ et $C = S^\Phi_K(\mathcal{B})$.
Comme C est décomposable dans $L^1_E(\Omega,\mathcal{B},\mu)$ et d'après le lemme 3.0.1 et la théorème 2.1.1 on a la suite (u_n) est uniformément intégrable dans $L^1_E(\Omega,\mathscr{B},\mu)$ et puisque E est réflexif alors par théorème de Dunford-Pettis (u_n) est relativement faiblement compact dans $L^1_E(\Omega,\mathcal{B},\mu)$.
Ceci étant, on peut supposer que (u_n) converge faiblement vers $\tilde{u}$ dans $L^1_E(\Omega,\mathcal{B},\mu)$, donc (u_n) converge aussi faiblement vers $\tilde{u}$ dans $L^1_E(\Omega,\mathcal{A},\mu)$. Tout revient à prouver que $\tilde{u}\in S^\Phi_K(\mathcal{B})$, car, on aura alors

$$\liminf_n J(u_n) \geqslant J(\tilde{u}) \geqslant \inf_{u\in C} J(u),$$

par semi-continuité faible de J sur $L^1_E(\Omega,\mathcal{A},\mu)$. Tout d'abord, $\tilde{u}\in S^1_K(\mathcal{B}) = \{u\in$ $\in L^1_E(\Omega,\mathscr{B},\mu) : u(\omega)\in Kp.p.\}$. Reste à vérifier que

$$\int_\Omega \Phi\left(\|\tilde{u}(\omega)\|\lambda\right)\mu(d\omega) < +\infty,$$

pour un certain $\lambda>0$. En effet, en prenant $\lambda=\frac{1}{2}$, on a

$$u\longmapsto \int_\Omega \Phi\left(\frac{\|u(\omega)\|}{2}\right)\mu(d\omega),$$

est semi-continue inférieurement dans $L^1_E(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ pour la topologie faible, donc on a

$$\int_\Omega \Phi\left(\frac{|\ \tilde{u}(\omega)\|}{2}\right)\mu(d\omega) \leqslant \liminf_n \int_\Omega \Phi\left(\frac{\|u_n(\omega)\|}{2}\right)\mu(d\omega),$$
$$\leqslant \sup_n \int_\Omega \Phi\left(\frac{\|u_n(\omega)\|}{2}\right)\mu(d\omega).$$

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $\omega \in \Omega$, on a

$$\Phi\left(\frac{\|u_n(\omega)\|}{2}\right) \leqslant \frac{1}{2}\Phi\left(\|X(\omega) - u_n(\omega)\|\right) + \frac{1}{2}\Phi(\|X(\omega)\|),$$

par convexité de Φ. Or

$$\sup_n \int_\Omega \Phi\left(\|X(\omega) - u_n(\omega)\|\right)\mu(d\omega) < +\infty,$$

par suite

$$\int_\Omega \Phi\left(\frac{\|\tilde{u}(\omega)\|}{2}\right)\mu(d\omega) < +\infty.$$

D'ou $\tilde{u} \in S^\Phi_K(\mathcal{B})$.
Donc (u_n) vérifie les conditions d'application de la proposition 3.0.1. D'où l'existence de $\tilde{Y}$.

3.0.2 Application de théorème 2.2.1

On se donne une sous tribu μ complète $\mathcal{B}$ de $\mathcal{A}$ et on suppose que E'_b et E sont séparables avec E admettant la propriété de Radon-Nikodym. Le problème posé. Soit C une partie non vide décomposable de $\mathcal{L}^1_{\mathcal{P}_{\text{wkc}}(E)}(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ c'est-à-dire pour tout $B \in \mathcal{B}$, tout $(\Gamma, \Delta) \in C \times C$ la multifonction $\chi_B\Gamma + \chi_{B^c}\Delta$ appartient à C. Etant donné un élément $X \in \mathcal{L}^1_{\mathcal{P}_{\text{wkc}}(E)}(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, trouver $\tilde{Y} \in C$ tel que

$$\int_\Omega h(X(\omega), \tilde{Y}(\omega))\mu(d\omega) = \inf\left\{\int_\Omega h(X(\omega), Y(\omega))\mu(d\omega) : Y \in C\right\}.$$

Lemme 3.0.2

Soient $\mathcal{B}$ une sous tribu μ complète de $\mathcal{A}$, h la distance de Hausdorff des fermés non vides de E, C une partie non vide décomposable dans $\mathcal{L}^1_{\mathcal{P}_{wkc}(E)}(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ et $X \in \mathcal{L}^1_{\mathcal{P}_{wkc}(E)}(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$.
Si $(Y_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite dans C telle que

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega h\left(X(\omega), Y_n(\omega)\right)\mu(d\omega) = \inf_{Y\in C} \int_\Omega h(X(\omega), Y(\omega))\mu(d\omega).$$

Alors la suite $(|Y_n|)_{n\geqslant 1}$ est uniformément intégrable dans $L^1_{\boldsymbol{R}}(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$.

Démonstration. Posons $\varphi(\omega, F) = h(X(\omega), F)$ pour tout F fermé dans E. Il est clair que pour tout $Y \in \mathcal{L}^1_{\mathcal{P}_{\text{wkc}}(E)}(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, $\varphi(\cdot, Y(\cdot))$ est $\mathcal{A}$ -mesurable et finie. Le lemme 3.0.1. permet d'affirmer que pour toute suite $(B_n)_{n\geqslant 1}$ dans $\mathcal{B}$ avec $\lim_{n\to\infty} \mu(B_n) = 0$, on a

$$\lim_{n\to\infty} \int_{B_n} h\left(X(\omega), Y_n(\omega)\right) \mu(d\omega) = 0,$$

or, on a, pour tout $\omega \in \Omega$ et tout $n \geqslant 1$,

$$|Y_n(\omega)| = h\left(Y_n(\omega), \{0\}\right) \leqslant h(\{0\}, X(\omega)) + h\left(X(\omega), Y_n(\omega)\right),$$

d'où

$$\lim_{n\to\infty} \int_{B_n} |Y_n|(\omega)\mu(d\omega) \leqslant \lim_{n\to\infty} \int_{B_n} |X|(\omega)\mu(d\omega) + \lim_{n\to\infty} \int_{B_n} h\left(X(\omega), Y_n(\omega)(\mu(d\omega)\right)$$

ce qui termine la démonstration.

□

La proposition suivante permet d'obtenir l'existence des éléments de meilleure approximation dans $\mathcal{L}^1_{\mathcal{P}_{\text{wkc}}(E)}(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$.

Proposition 3.0.2

Soient $\mathcal{B}$ une sous tribu μ complète de $\mathcal{A}$ et $X \in \mathcal{L}^1_{\mathcal{P}_{wkc}(E)}(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, Soit C une partie décomposable dans $\mathcal{L}^1_{\mathcal{P}_{wkc}(E)}(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$, faiblement fermée dans $\mathcal{L}^1_{\mathcal{P}_{wkc}(E)}(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$.
Soit $(Y_n)_{n\geqslant 1}$ une suite dans C qui vérifie les conditions suivantes :
(i) $\lim_{n\to\infty} \int_\Omega h\left(X(\omega), Y_n(\omega)\right) \mu(d\omega) = \inf_{Y\in C} \int h(X(\omega), Y(\omega))(\mu(d\omega)$.
(ii) Pour tout $B \in \mathcal{B}$, $\bigcup_{n\geqslant 1} \left\{\int_B Y_n d\mu\right\}$ est relativement faiblement compact dans E.
Alors il existe $\tilde{Y} \in C$ tel que

$$\int_\Omega h(X(\omega), \tilde{Y}(\omega))\mu(d\omega) = \inf_{Y\in C} \int h(X(\omega), Y(\omega))\mu(d\omega).$$

Démonstration. Comme C est décomposable, la condition (i) implique que la suite $(|Y_n|)_{n\geqslant 1}$ est uniformément intégrable dans $L^1_R(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ (d'après lemme 3.0.2).

Puisque $(Y_n)_{n\geqslant 1}$ vérifie la condition (ii), il résulte de la première point 2.2 du théorème 2.2.1 . qu'il existe une suite généralisée $(Y_d)_{d\in D}$ dans C qui converge faiblement vers $\hat{Y} \in C$ dans l'espace $\mathcal{L}^1_{\mathcal{P}_{\text{wkc}}(E)}(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ car on a supposé que C est faiblement fermée dans $\mathcal{L}^1_{\mathcal{P}_{\text{wkc}}(E)}(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$. Et d'après la deuxieme point 2.3 du théorème 2.2.1 on a

$$\liminf_{d\in D} \int_\Omega h\left(X(\omega), Y_d(\omega)\right) \mu(d\omega) \geqslant \int_\Omega h(X(\omega), \tilde{Y}(\omega))\mu(d\omega),$$

ainsi

$$\begin{aligned}\liminf_{d\in D} \int_\Omega h\left(X(\omega), Y_d(\omega)\right) \mu(d\omega) &\geqslant \int_\Omega h(X(\omega), \tilde{Y}(\omega))\mu(d\omega),\\ &\geqslant inf_{Y\in C} \int_\Omega h(X(\omega), \tilde{Y}(\omega))\mu(d\omega).\end{aligned}$$

D'ou on conclure que $\tilde{Y}$ est un élément de meilleure approximation. □

Soit $X \in \mathcal{L}^1_{\mathcal{P}_{\text{wkc}(E)}}(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, on cherche $\tilde{Y} \in C$ telle que

$$\int_\Omega h(X(\omega), \tilde{Y}(\omega))\mu(d\omega) = \inf \left\{ \int_\Omega h(X(\omega), Y(\omega))\mu(d\omega) : Y \in C \right\}.$$

On prend $C = \mathcal{L}^1_{\mathcal{P}_{\text{wkc}(E)}}(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ est décomposable et faiblement fermée dans $\mathcal{L}^1_{\mathcal{P}_{\text{wkc}(E)}}(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. Soit Y_n une suite qui minimise l'éléments de $C = \mathcal{L}^1_{\mathcal{P}_{\text{wkc}(E)}}(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ telle que

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega h\left(X(\omega), Y_n(\omega)\right)\mu(d\omega) = \inf_{Y\in C} \int h(X(\omega), Y(\omega))(\mu(d\omega).$$

Comme $\mathcal{L}^1_{\mathcal{P}_{\text{wkc}(E)}}(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ est décomposable et faiblement fermée dans $\mathcal{L}^1_{\mathcal{P}_{\text{wkc}(E)}}(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$,alors d'après le lemme 3.0.2, la suite Y_n est uniformément intégrable dans $\mathcal{L}^1_{\mathcal{P}_{\text{wkc}(E)}}(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$. Donc Y_n est uniformément intégrable dans $\mathcal{L}^1_{\mathcal{P}_{\text{wkc}(E)}}(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$, alors

$$\sup_{n\in N} \int \|Y_n\|\, d\mu < \infty.$$

Ainsi il existe $k > 0$ telle que

$$\sup_{n\in N} \int \|Y_n\|\, d\mu < k,$$

par suite

$$\bigcup_{n\geqslant 1} \left\{ \int_A Y_n d\mu \right\} \subset B\left(0, k\right),$$

alors

$$\overline{\bigcup_{n\geqslant 1} \left\{ \int_A Y_n d\mu \right\}} \subset \overline{B\left(0, k\right)}.$$

Puisque E est réflexif, alors $\overline{B\left(0, k\right)}$ est faiblement compact et convexe. Alors $\overline{\bigcup_{n\geqslant 1} \left\{ \int_A Y_n d\mu \right\}}$ est faiblement compact, c'est-à-dire que $\bigcup_{n\geqslant 1} \left\{ \int_A Y_n d\mu \right\}$ est relativement faiblement compact. En vertu de proposition 3.0.2 Alors il existe $\tilde{Y} \in \mathcal{L}^1_{\mathcal{P}_{\text{wkc}(E)}}(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ tel que

$$\int_\Omega h(X(\omega), \tilde{Y}(\omega))\mu(d\omega) = \inf_{Y\in \mathcal{L}^1_{\mathcal{P}_{\text{wkc}(E)}}(\Omega,\mathcal{B},\mu)} \int h(X(\omega), Y(\omega))\mu(d\omega).$$

3.0.3 Application de théorèmes 2.1.3 et 2.2.3 à les martingales à la limite

Rappel sur l'espérance conditionnelle

Définition 3.0.1

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré avec μ finie et $\mathscr{F}$ une sous tribu de $\mathcal{A}$, et $f \in L^1_E(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. L'espérance conditionnelle $E(f \mid \mathscr{F})$ de f par rapport à $\mathscr{F}$ est définie comme une fonction $E(f \mid \mathscr{F}) \in L^1_E(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ telle que

$$\int_A E(f \mid \mathscr{F})d\mu = \int_A f d\mu, \quad A \in \mathscr{F}.$$

Lorsque E est un espace de Banach général, il est connu que l'espérance conditionnelle $E(f \mid \mathscr{F})$ existe et elle est unique p.s, pour tout $f \in L^1_E(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ et tout sous tribu de $\mathscr{F}$, et la fonction $f \longmapsto E(f \mid \mathscr{F})$ est une projection de norme 1 de $L^1_E(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ dans $L^1_E(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$.

Nous considérant $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et $(\mathcal{A}_n)_{n\geqslant 1}$ une suite croissante de sous-tribus de $\mathcal{A}$ telle que $\mathcal{A} = \sigma\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}_n\right)$, et E est un espace de Banach séparable.

Soit $\Gamma \in \mathcal{L}^1_{\mathcal{P}_{\text{wkc}}(E)}(\mathcal{A})$, lorsque E'_b est séparable, alors l'espérance conditionnelle de Γ est un élément de $\mathcal{L}^1_{\mathcal{P}_{\text{wkc}}(E)}(\mathcal{A})$ telle que

$$S^1_{E^{\mathcal{A}_n}(\Gamma)} = \left\{E^{\mathcal{A}_n} f : f \in S^1_\Gamma(\mathcal{A})\right\}$$

où $S^1_{E^{\mathcal{A}_n}(\Gamma)}$ est l'ensemble des sélection $\mathcal{A}_n$- mesurables et intégrables de $E^{\mathcal{A}_n}(\Gamma)$.
$S^1_\Gamma(\mathcal{A})$ est l'ensemble des sélection $\mathcal{A}-$ mesurables et intégrables de Γ. Pour tout $x' \in E'$, on a

$$\delta^*\left(x', E^{\mathcal{A}_n}(\Gamma)\right) = E^{\mathcal{A}_n}\left(\delta^*\left(x', \Gamma\right)\right) \text{ p.s.}$$

Une suite $(\Gamma_n)_n \geqslant 1$ de multifonctions de Ω à valeurs dans $P_{cf}(E)$ sera dite adaptée à $(\mathcal{A}_n)_{n\geqslant 1}$ si pour tout $n \geqslant 1, \Gamma_n$ est $\mathcal{A}_n$ -mesurable.

Définition 3.0.2

On suppose que E'_b est séparable, une suite adaptée (Γ_n) dans $\mathcal{L}^1_{\mathcal{P}_{wkc}(E)}(\mathcal{A})$ est un mil si pour chaque $\varepsilon > 0$, il existe p tel que pour tout $n \geq p$ on a

$$P\left(\sup_{p\leq q\leq n} h\left(\Gamma_q, E^{\mathcal{A}_q}\left(\Gamma_n\right)\right) > \varepsilon\right) \leq \varepsilon$$

Il est claire que si (Γ_n) est un mil dans $\mathcal{L}^1_{\mathcal{P}_{wkc}(E)}(\mathcal{A})$, alors pour tout x' dans la boule unité B' de E', la suite $(\delta^*(x', \Gamma_n))$ est un mil dans $L^1_{\mathbb{R}}(\mathcal{A})$ puisque on a

$$h\left(\Gamma_p, E^{\mathcal{A}_q}\left(\Gamma_n\right)\right) = \sup_{x'\in B'}\left|\delta^*\left(x', \Gamma_p\right) - E^{\mathcal{A}_q}\left(\delta^*\left(x', \Gamma_n\right)\right)\right|$$

Théorème 3.0.1

Un mil (Γ_n) de valeur réelle tel que $\liminf E\left|\Gamma_n\right| < \infty$ *converge presque sûrement.*

Démonstration. [15, voir le théorème 4 page 1193] □

Théorème 3.0.2

Soit Γ_n un mil à valeur dans E tel que $\liminf E\left(\|\Gamma_n\|\right) < \infty$. *Si $x' \circ \Gamma_n \longrightarrow 0$, pour tout $x' \in E'$, alors*

$$\|\Gamma_n\| \longrightarrow 0.$$

Démonstration. [15, voir le théorème 6 page 1193] □

Théorème 3.0.3

Soit $\varphi : \Omega \times E \to [0, +\infty]$ *un intégrande,* $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(E)-$*mesurable tel que que* $\varphi(\omega, 0) = 0, \quad \forall \omega \in \Omega$ *et tel que, pour* $\rho \in \mathbb{R}^+, \quad r \in \mathbb{R}^+, \omega \in \Omega$*, l'ensemble* $\{x \in \rho B : \varphi(\omega, x) \leqslant r\}$ *soit convexe faiblement compact. Soit* $(\Gamma_n)_{n \geqslant 1}$ *un mil borné dans* $L^1_E(\mathcal{A})$ *tel que*

$$\sup_{n \geqslant 1} \int_\Omega \varphi\left(\omega, \Gamma_n(\omega)\right) P(d\omega) < +\infty$$

Alors il existe Γ_∞ *dans* $L^1_E(\mathcal{A})$ *tel que* $\left(\Gamma_n - E^{\mathcal{A}_n} \Gamma_\infty\right)_{n \geqslant 1}$ *converge vers* 0 *p.p.*

Démonstration. Comme pour tout $x' \in E'$, $\left(\langle x', \Gamma_n \rangle\right)_{n \geqslant 1}$ est un mil borné dans $L^1_{\mathbb{R}}(\mathcal{A})$, $\left(\langle x', \Gamma_n \rangle\right)_n \geqslant 1$ converge p.p. vers une fonction intégrable $\varphi_{x'}$ d'après le théorème 3.0.1. En vertu du Théorème 2.1.3, il existe une suite (Γ_{n_k}) extraite de $(\Gamma_n)_{n \geqslant 1}$ et $(B_k)_{k \geqslant 1}$ dans $\mathcal{A}$ tel que $(1_{B_k} \Gamma_{n_k})$ converge pour $\sigma\left(L^1_E, L^\infty_{E'}\right)$ vers $\Gamma_\infty \in L^1_E(\mathcal{A})$ et $\left(1_{B^c_k} \Gamma_{n_k}\right)$ converge vers 0 p.s. Par suite, $(\Gamma_n)_{n \geqslant 1}$ converge vers Γ_∞ scalairement p.s. Soit $E^{\mathcal{A}_n}\left(\Gamma_\infty\right)$ l'espérance conditionnelle de Γ_∞. Alors $\left(\Gamma_n - E^{\mathcal{A}_n}\left(\Gamma_\infty\right)\right)_{n \geqslant 1}$ est un mil borné dans $L^1_E(\mathcal{A})$ qui converge scalairement p.s vers 0. Donc $\left(\Gamma_n - E^{\mathcal{A}_n}\left(\Gamma_\infty\right)\right)_{n \geqslant 1}$ converge vers 0 p.s, pour la norme de E d'après 3.0.2. □

Théorème 3.0.4

Supposons E'_b *séparable et* E *ayant la propriété de Radon-Nikodym. Soit* (Γ_n) *est un mil bornée dans* $\mathcal{L}^1_{\mathcal{P}_{wkc}(E)}(\mathcal{A})$ *tel que* (Γ_n) *est converge scalairement vers une multifonction* $(\Gamma_\infty) \in \mathcal{L}^1_{\mathcal{P}_{wkc}(E)}(\mathcal{A})$*, i.e. pour tout* $x' \in E'$,

$$\lim_{n \to \infty} \delta^*\left(x', \Gamma_n(\omega)\right) = \delta^*\left(x', \Gamma_\infty(\omega)\right)$$

Alors

$$\lim_n h\left(\Gamma_n, E^{\mathcal{A}_n}\left(\Gamma_\infty\right)\right) = 0 p.p.$$

Démonstration. [7, voir Appendix 21] □

Théorème 3.0.5

Supposons E'_b *séparable et* E *ayant la propriété de Radon-Nikodym. Soit* $(\Gamma_n)_{n \geqslant 1}$ *un mil borné dans* $\mathcal{L}^1_{\mathcal{P}_{wkc}(E)}(\mathcal{A})$ *tel que* $\left\{\int_A \Gamma_n dP : n \geqslant 1\right\}$ *soit relativement* $\sigma\left(E, E'\right)$ *compact. Alors il existe* Γ_∞ *dans* $\mathcal{L}^1_{\mathcal{P}_{wkc}(E)}(\mathcal{A})$ *tel que* $\lim_n h\left(\Gamma_n, E^{\mathcal{A}_n}\left(\Gamma_\infty\right)\right) = 0$ *p.p.*

Démonstration. Pour tout $x' \in B'$, $\left(\delta^*\left(x', \Gamma_n\right)\right)_{nz1}$ est un mil borné dans $L^1_{\mathrm{R}}(\mathcal{A})$. D'après théorème 3.0.1 $\left(\delta^*\left(x', \Gamma_n\right)\right)_{n \geqslant 1}$ converge p.p. vers une fonction intégrable $\varphi_{x'}$. En vertu du théorème 2.2.3 et sa remarque, il existe $\Gamma_\infty \in \mathcal{L}^1_{\mathcal{P}_{\mathrm{wkc}}(E)}(\mathcal{A})$ tel que $\Gamma_n \longrightarrow \Gamma_\infty$ scalairement p.p, c'est à-dire

$$\lim_{n \to \infty} \delta^*\left(x', \Gamma_n(\omega)\right) = \delta^*\left(x', \Gamma_\infty(\omega)\right) \tag{3.1}$$

excepté sur un négligeable $N_{x'}\left(x' \in B'\right)$. En vertu du théorème 3.0.5 et 3.1 on déduire que $\lim_n h\left(\Gamma_n, E^{\mathcal{A}_n}\left(\Gamma_\infty\right)\right) = 0$ p.p. □

Conclusion

Dans ce travail, nous avons étudié les méthodes de compacité faible dans l'espace des fonctions mesurables et Bochner intégrables, et dans l'espace des multifonctions mesurables et intégralement bornées à valeurs dans l'ensembles des parties convexes et faiblement compactes d'un espace de Banach E. Notre étude a été réalisée sous différentes hypothèses.

À la fin de ce mémoire nous avons appliqué les résultats obtenus à l'existence d'un minimum pour des fonctionnelles intégrales convexes et à l'existence des éléments de meilleurs approximation dans $L^1_E(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, et $L^\Phi_E(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ où Φ est une fonction de Young. La troisième application a été consacré à l'existence d'un minimum pour des fonctionnelles intégrales convexes dans le cas multivoque ainsi qu'à l'existence des éléments de meilleurs approximation dans $\mathcal{L}^1_{\mathrm{wkc}\ (E)}(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. Ensuite nous avons présenté une nouvelle application des méthodes de compacité à savoir ; la convergence des martingales à la limite dans le cas univoque et multivoque.

Bibliographie

[1] Haim Brezis. *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*. Springer Science & Business Media, 2010.

[2] James K Brooks et N Dinculeanu. "Weak compactness in spaces of Bochner integrable functions and applications". In : *Advances in Mathematics* 24.1 (1977), p. 172-188.

[3] Charles Castaing. "Compacité et inf-équicontinuité dans certains espaces de Kothe-Orlioz, Séminaire d'Analyse Convexe". In : (1979).

[4] Charles Castaing. "Méthode de compacité et de décomposition applications : Minimisation, convergence des martingales, lemma de Fatou multivoque". In : *Annali di matematica pura ed applicata* 164.1 (1993), p. 51-75.

[5] Charles Castaing et Paulette Clauzure. "Compacité faible dans l'espace L^1_E et dans l'espace des multifonctions intégralement bornées, et minimisation". In : *Annali di Matematica pura ed Applicata* 140.1 (1985), p. 345-364.

[6] Charles Castaing et Michel Valadier. *Convex analysis and measurable multifunctions*. T. 580. Springer, 2006.

[7] C.CASTAING-F.EZZAKI. "some convergence results for multivalued martingales in the limit, séminaire d'analyse convexe". In : (1990).

[8] Leszek Gasiński et Nikolaos S Papageorgiou. *Exercises in Analysis : Part 2 : Nonlinear Analysis*. Springer, 2016.

[9] JR J. DIESTEL-J.J. UHL. *vector measures, Mathematical Survey, number 15*. merican Mathematical Society, 1977.

[10] Shouchuan HU et Nikolas S.Papageotgiou. *Handbook of Multivalued Analysis Volume 1 :Theory*. Springer, 1997.

[11] B. Richard. *Geometric Functional Analysis and its Applications. New Work*. Springer, 1975.

[12] W. Rudin. *Functional Analysis second edition. Singapore*. McGraw-Hil, 1973.

[13] Takuro Shintani et Tsuyoshi Ando. "Best approximants in L 1 space". In : *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und Verwandte Gebiete* 33.1 (1975), p. 33-39.

[14] Jean STARYNKÉVITCH. *Intégration et espaces* L^p *à valeurs dans un Banach*. Springer, 29 septembre 2004.

[15] Michel TALAGRAND et al. "Some structure results for martingales in the limit and pramarts". In : *The annals of probability* 13.4 (1985), p. 1192-1203.