جامعة سيدي محمد بن عبد الله بفاس
UNIVERSITÉ SIDI MOHAMED BEN ABDELLAH DE FES

كلية العلوم والتقنيات فاس
FACULTÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE FÈS

DÉPARTEMENT DES MATHÉMATIQUES

Master Mathématique et Applications aux Calcul Scientifiques (MACS)

MEMOIRE DE FIN D'ETUDES

Pour l'obtention du Diplôme de Master Sciences et Techniques (MST)

Les algèbres de Boole superatomiques

Réalisé par :

ASNAOUI Mohammed

Encadré par :

ALAMI Mustapha (Algébre de Boole)
BEKKALI Mohamed (Algébre de Boole)

Soutenu le 14 juillet 2021

Devant le jury :

ALAMI Mustapha	Professeur à la CRMEF de Fès-Meknès
BEKKALI Mohamed	Professeur à la FST de Fès
GMIRA Seddik	Professeur à la FST de Fès

Année Universitaire : 2020/2021

FACULTÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES FES-SAISS
B.P. 2202 – Route d'Imouzzer – FES

Remerciements

Je remercie tout d'abord ALLAH le Tout Puissant de m'avoir donné la foi et de m'avoir permis d'en arriver là.

Mes remerciements vont également à mes parents particulièrement de tous les sacrifices qu'ils ont consentis pour me permettre de suivre mes études dans les meilleurs conditions possibles et n'avoir jamais cessé de nous encourager tout au long de mes années d'études.

Je voudrais dans un premier temps remercier, mes encadrants de ce mémoire **Mohamed Bekkali**, **Mustapha Alami** pour leurs patience, leurs gentillesse, leurs disponibilité et surtout leurs judicieux conseils, qui ont contribué à alimenter ma réflexion.

Je désire aussi remercier aux membres du jury respectable : **Mohamed Bekkali**, **Mustapha Alami**, **Seddik Gmira** pour avoir accepter d'évaluer ce travail et pour l'honneur qu'ils m'ont fait en portant leur attention sur ce mémoire.

Mon vifs remerciements s'adressent également à nos professeurs qui nous ont encouragés et nous ont aidés avec leurs remarques et observations durant la période de notre parcours universitaire.

Enfin, je voudrais exprimer ma reconnaissance envers les amis et les collègues qui m'ont apporté leur soutien moral et intellectuel tout au long de ma démarche.

Table des matières

Introduction

George Boole (1815-1864) a introduit le concept de l' algèbre qui portera plus tard son nom (Algèbre de Boole). Le point de départ de l'algèbre de Boole est la recherche d'un algorithme permettant de ramener les raisonnements logiques à des calcules purement algébriques.

Une algèbre de Boole est une structure algébrique $(A, +, ., -, 0, 1)$ avec deux opérations binaires + et . , une opération unaire -, et deux éléments distingués 0 et 1 tels que pour tous les x, y et z dans A,

(B1) $x + (y + z) = (x + y) + z$, **(B1')** $x.(y.z) = (x.y).z$, **(associativité)**

(B2) $x + y = y + x$, **(B2')** $x.y = y.x$, **(commutativité)**

(B3) $x + (x.y) = x$, **(B3')** $x.(x + y) = x$, **(absorption)**

(B4) $x.(y + z) = (x.y) + (x.z)$, **(B4')** $x + (y.z) = (x + y).(x + z)$, **(distributivité)**

(B5) $x + (-x) = 1$, **(B5')** $x.(-x) = 0$. **(complementation)**

Deux exemples standard des algèbres de Boole, algèbres des ensembles et algèbres de Lindenbaum-Tarski, sont utilisés dans la théorie des ensembles et la logique. Les opérations $+, ., -$, d'une algèbre de Boole sont sauvent notés comme $\cup$, $\cap, -$, ou $\vee, \wedge, \neg$, et appelées union, intersection, complémentaire ou disjonction, conjonction, négation.

Une structure $(A, +_A, ._A, -_A, 0_A, 1_A)$ est une sous-algèbre d'une algèbre de Boole $(B, +_B, ._B, -_B, 0_B, 1_B)$ si $A \subseteq B$, $0_A = 0_B$, $1_A = 1_B$ et les opérations $+_A, ._A, -_A$ sont les restrictions de $+_B, ._B, -_B$ à A.

Un **atome** a dans une algèbre de Boole est un élément non nul a tel qu'il n'existe aucun élément b tel que $0 < b < a$. Une BA est **atomique** si tout élément non nul de l'algèbre est au-dessus d'un atome. Les algèbres finies BA sont atomiques, mais de nombreuses algèbres infinies le sont aussi. Ces dernières n'existent pas pour tous les ensembles dans toutes les algèbres de

Boole ; si elles existent toujours, l'algèbre de Boole est dite complète. Une algèbre de Boole A est superatomique si toute image homomorphe non triviale de A possède au moins un atome, i.e toute image homomorphique de A est atomique.

En 1936, M. H. Stone a introduit sa théorie de la dualité en logique en présentant une équivalence entre les algèbres Boole et les espaces de Hausdorff compacts ayant une base d'ensembles ouvert-fermés (Clopens), appelés **espaces Booléens**. La dualité de Stone et ses variantes sont essentielles pour faire le lien entre les approches syntaxiques et sémantiques de la logique.

Dans cette dualité, les images homomorphes d'une algèbre de Boole correspondent aux sous-espaces fermés de son espace dual et les atomes correspondent aux points isolés. Ainsi, une algèbre A est superatomique si l'espace $UltA$ est dispersé, c'est-à-dire, si et seulement si pour tout sous-espace fermé Y de $UltA$, les points isolés de Y sont denses dans Y. La condition topologique d'être dispersé est conceptuellement plus facile à traiter que le côté algébrique d'être superatomique.

Dans ce mémoire, nous lisons dans le Hand Book (volume 1) une lecture succincte la structure des algèbres de Boole superatomiques à travers leurs développements de technique de constructions et classification, et leurs représentation par des espaces clairsemés compact Housdroff.

Chapitre 1

Introduction sur les algèbres de Boole superatomiques

Dans ce chapitre nous présentons quelques notions importantes de base des algèbres de Boole libres, la définition et quelques propriétés des algèbres de Boole superatomiques.

1.1 Algèbres de Boole libres

Définition 1.1.1 *Un homomorphisme d'une algèbre de Boole A dans une algèbre de Boole B est une application $f : A \longrightarrow B$ tel que $f(0) = 0, f(1) = 1$, et pour tout x, y dans A*

$$f(x + y) = f(x) + f(y),$$

$$f(x.y) = f(x).f(y),$$

$$f(-x) = -f(x).$$

f est un isomorphisme de A sur B si f est un homomorphisme bijectif de A sur B. A et B sont isomorphes ($A \cong B$) s'il existe un isomorphisme de A sur B.

Définition 1.1.2 *([1], page 130, volume 1) Soit X un ensemble arbitraire. Une algèbre de Boole libre sur X est une couple (e, F), òu F est une algèbre de Boole et e est une application de X dans F telle que pour toute application f de X dans une algèbre de Boole A, il existe un homomorphisme unique $g : F \longrightarrow A$ tel que $g \circ e = f$.*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "e"] \arrow[dr, "f"'] & F \arrow[d, "g"] \\ & A \end{tikzcd}$$

*Une algèbre de Boole F est dite **libre** s'il existe X et $e : X \longrightarrow F$ tels que (e, F) est libre sur X.*

Définition 1.1.3 *Un sous-ensemble U d'une algèbre de Boole A est dit **indépendant** si tous les produits élémentaires non triviaux sur U sont non nuls, i.e. Si pour des sous-ensembles finis disjoints arbitraires $\{u_1, \ldots, u_n\}$ et $\{v_1, \ldots, v_m\}$ de U, $u_1 \cdot \cdots \cdot u_n \cdot -v_1 \cdot \cdots \cdot - v_m > 0$.*

Proposition 1.1.1 *(Caractérisation) Soit e une application d'un ensemble X dans une algèbre de Boole F. Le couple (e, F) est libre sur X si et seulement si e est injective et $e[X]$ est un ensemble indépendent engendrant F.*

Preuve. Supposons que (e, X) est libre sur X. Si e n'est pas injective, on prend x et y dans X de telle sorte que $x \neq y$ mais $e(x) = e(y)$ et Soit f une application de X dans l'algèbre de Boole à deux éléments 2 telle que $f(x) \neq f(y)$. Clairement, il n'y a pas de g telle que $g \circ e = f$: une contradiction.

Pour le reste de la preuve, supposons e est injective ; pour simplifier, soit $X \subseteq F$ et e l'application identité sur X.

Si X engendre une sous-algèbre propre B de F, d'après le Lemma 5.32 ([1], page 83), on choisit des ultrafiltres distincts p et p' de F vérifiant $p \cap B = p' \cap B$ et soient $g, g' : F \longrightarrow 2$ deux caractéristiques homomorphismes. Alors $g \neq g'$ mais $g \restriction X = g' \restriction X$, contradiction avec l'unicité des algèbres libres.

Si X n'est pas indépendant, on choisit des sous-ensembles finis disjoints $\{x_1, \ldots, x_n\}$ et $\{y_1, \ldots, y_m\}$ de X tels que $x_1 \cdot \cdots \cdot x_n \cdot -y_1 \cdot \cdots \cdot - y_m = 0$. Soit $f : X \longrightarrow 2$ une application tel que $f(x_i) = 1$ et $f(y_j) = 0$. Il s'ensuit de la partie triviale du critère d'extension de Sikorski 5.5 ([1], page 67) que f n'a pas d'extension homomorphe à B : contradiction.

Théorème 1.1.1 *(Existence) Pour tout ensemble I, il existe une algèbre de Boole libre sur I.*

Preuve. Soient I un ensemble et F une algèbre d'ouvert-fermé de l'espace de Cantor ${}^I 2$; pour $i \in I$, on définit $e(i)$ comme étant le sous-ensemble d'ouvert-fermé de ${}^I 2$,définit par :

$$e(i) = u_i = \{x \in^I 2 : x(i) = 1\}$$

En utilisant la proposition 1.1.1, on déduit que la paire (e, F) est libre sur I.

D'autre part, l'argument suivant montre que e est injective et que $e[I]$ est indépendant dans F : Soient $\{i_1, ..., i_n\}$ et $\{j_1, ..., j_m\}$ des sous-ensembles finis disjoints de I. Alors tout point x de ${}^I 2$ tel que $x(i) = 1$ pour $i \in \{i_1, ..., i_n\}$ et $x(j) = 0$ pour $\in \{j_1, ..., j_m\}$ montre que

$$x \in e(i_1) \cap \cdots \cap e(i_n) \setminus (e(j_1) \cup \cdots \cup e(j_m)) \neq \emptyset.$$

De plus, $e[I]$ engendre F, pour considérons la sous-algèbre B de F engendrée par $e[I]$. B inclut la sous-base canonique

$$\{u_i : i \in I\} \cup \left\{{}^I2 \backslash u_i : i \in I\right\}$$

de ${}^I2$, donc la base canonique de ${}^I2$. Ensuite, $F \subseteq B$ puisque tout sous-ensemble ouvert-fermé de ${}^I2$ est, par compacité, une union finie d'ensembles de de cette base.

Proposition 1.1.2 *Toute algèbre de Boole libre infinie n'a aucun atome.*

Preuve. Soit F engnedré par un sous-ensemble infini U indépendent et soit $0 < b$ dans F on cherche b' dans F tel que $0 < b' < b$. Par la forme normale 4.4 ([1], p 51), b peut être choisi comme produit élémentaire $b = u_1 \cdot \dots \cdot u_n \cdot -v_1 \cdot \dots \cdot - v_m$, où $u_1, ..., v_m$ sont des éléments distincts de U. Puisque U est infini, choisir $u \in U \backslash \{u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_m\}$ et soit $b' = b.u$ alors $b' \leqslant b$ et par l'indépendance de U, $0 < b'$. Si $b' = b$, alors $b \leqslant u$ et $b \cdot -u = 0$, contradiction avec l'indépendance de U. Donc $b' < b$.

1.2 Algèbres de Boole superatomiques

1.2.1 Caractérisation de la superatomicité

Dans cette sous-section, nous donnons des équivalences algébriques des propriétés d'être superatomique et les traduire en propriétés topologiques dans les espaces Booléens.

Définition 1.2.1 *Soient B une algèbre de Boole et $a < b$, alors $a \in B$ est un atome si $0 < a$ et il n'y a pas $x \in B$ tels que $0 < x < a$. L'ensemble des atomes de B est noté AtB. On dit que B est atomless (resp. est atomique) B ne contient aucun atome (s'il existe un atome dans B).*

Lemme 1.2.1 *Les propositions suivantes sont équivalentes, pour tout élément a de A :*

1) a est un atome de A,

2) pour tout x dans A, $a \leq x$ ou $a \leq -x$ mais pas les deux,

3) $a > 0$ et pour tous les x et y dans A, $a \leq x + y$ ssi $a \leq x$ ou $a \leq y$.

Définition 1.2.2 *Une algèbre de Boole B est une image homomorphe d'une algèbre de Boole A s'il existe un morphisme surjectif f de A sur B.*

Définition 1.2.3 *([1]) Une algèbre de Boole A est superatomique si toute image homomorphique non triviale de A possède un atome.*

Théorème 1.2.1 *([3], Day, 1967) Si B est une algèbre de Boole, alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

i) B est superatomique ;

ii) Toute sous-algèbre de B est atomique ;

iii) B ne contient pas de sous algèbre libre infinie ;

iv) B ne contient pas la chaîne des rationnels avec son ordre naturel ;

v) $S(B)$, l'espace de Stone de B, est clairsemé ; c'est-à-dire que tout sous-espace non vide de $S(B)$ a au moins un point isolé.

Preuve.

$i) \Rightarrow ii)$: Supposons que B a une sous-algèbre A sans atomes. D'après le corollaire (5.10, Page.70, [1]), il existe une image homomorphisme B' de B tel que A et un sous algèbre dense dans B' donc B' est une image homomorphe non atomique de B : En effet, puisque A est non atomique alors $\exists x \in A$ tel que $0 < a \leqslant x$ implique que a n'est pas atome, puisque $x \in B'$, si B' est atomique alors, $\exists b$ atome de B' tel que $0 < b \leqslant x$ par la densité de A dans B' $0 < a \leqslant b \leqslant x$ ce qui implique que $a = b$, donc a est un atome dans A contradiction avec le fait que a n'est pas atome.

$ii) \Rightarrow iii)$: Triviale car une algèbre libre infinie n'a pas d'atomes.

$iii) \Rightarrow iv)$: Sinon, B va contenir une algèbre libre.

$iv) \Leftrightarrow i)$: Par dualité.

1.3 Stabilité des algèbres de Boole superatomiques

Théorème 1.3.1 *([3], Day, 1967) Si l'algèbre de Boole B est engendrée par $B_1 \cup B_2 \cup ... \cup B_n$, où $B_1, B_2, ..., B_n$ sont des sous-algèbres superatomiques de B, alors B est superatomique.*

Preuve. Clairement, nous devons seulement prouver que ce résultat est valable pour $n = 2$. De plus, puisque toute image homomorphe de B est engendrée par l'union des images homomorphes de $B_1, B_2, ..., B_n$ et ces images homomorphes sont superatomiques, la condition (a') du théorème 1.2.1 nous permet de montre que si l'algèbre de Boole B est engendrée par $B_1 \cup B_2$, où B_1 et B_2 sont des sous-algèbres superatomiques de B, alors B a au moins un atome.

Supposons donc que, B, B_1 et B_2 satisfassent ces hypothèses. Soient a un atome de B_1 et l'homomorphisme h de B_2 dans B définie par $h(x) = ax$. Puisque B_2 est superatomique, il en est de même pour $h[B_2]$; ainsi, il existe un élément b de B_2 tel que $ab \neq 0$, et pour tout $x \in B_2$, $(ax)(ab) = 0$ ou ab. Pour tout $u \in B_1$ et $x \in B_2$, on a alors : $(ux)(ab) = ((ua)x)(ab) = 0$ ou ab. Donc, puisque tout élément de B est une somme finie de produits finis d'éléments de B_1 et B_2, ab est un atome de B.

Chapitre 2

Dualité topologique

Nous considérons dans ce chapitre une classe particulière d'espaces topologiques, les espaces Booléens. L'algèbre duale d'un espace Booléen X est Clop X, l'algèbre des sous-ensembles ouverts-fermés de X, et l'espace dual d'une algèbre de Boole A est l'ensemble $UltA$ des ultrafiltres de A. Nous donnons ensuite un aperçu, des propriétés algébriques et des notions sur les algèbres de Boole et leurs équivalents topologiques pour les espaces Booléens. Finalement on va voir la dérivée de Cantor-Bendixson.

2.1 Espace Booléens

Définition 2.1.1 *Soit (X, τ) un espace topologique.*

1) *(X, τ) est totalement discontinu si τ admet une base d'ouvert-fermé (Clopen).*

2) *Un espace topologique (X, τ) est Hausdorff si τ séparée.*

3) *Un espace topologique (X, τ) est compacte si X est séparé et tout recouvrement ouvert de X on peut extraire un sous recouvrement fini, c-à-d.*

$$X = \cup_{i \in I} O_i \Rightarrow \exists J \subset I, J \text{ fini tel que } X \subseteq \cup_{i \in J} O_i.$$

Définition 2.1.2 *Soit X un espace topologique. X est zéro-dimensionnel si $ClopX$ est une base pour la topologie de X.*

On dira que X est un espace Booléen s'il est de Hausdorff, compact et zéro-dimensionnel

Exemple 2.1.1 1) *Tout espace discret fini est un espace Booléen. En particulier, on note par 2 l'espace Booléen de deux éléments $2 = \{0, 1\}$ avec la topologie discrète.*

2) *L'espace produit de toute famille d'espaces Booléens est un espace Booléen.*

En effet : soit $X = \prod_{i \in I} X_i$ *le produit des espaces Booléens* X_i. *Alors* X *est un espace Hausdorff et, d'après le théorème de Tychonoff, il est compact. Soit* $i \in I$ *et* $b_i \in ClopX_i$, *on définie le sous ensemble* $s(b_i)$ *de* X *par*

$$s(b_i) = \{x \in X : x_i \in b_i\}.$$

Alors $X \setminus s(b_i) = s(x_i \setminus b_i)$ *et d'après la définition des ouverts de la topologie produit de* X *on a* $s(b_i)$ *et* $s(x_i \setminus b_i)$ *sont des ouverts, d'ou ouvert-fermé.* X *est zéro-dimensionnel puisque les ensembles* $s(b_i)$ *forment une sous base pour la topologie produit.*

3) *Tout sous-espace fermé d'un espace Booléen est un espace Booléen.*

En effet : Soit X *un espace Booléen et* Y *un sous espace fermé de* X. *alors* Y *est un espace Hausdorff et compact, il est zéro-dimensionnel puisque les intersections des sous-ensembles fermés de* X *avec* Y *constituent une base fermée de* Y.

2.2 Théorème de Stone version topologique

Dans cette section on va montrer que chaque algèbre de Boole est isomorphe à l'algèbre d'ouvert-fermé (Clopen) d'un espace Booléen.

Définition 2.2.1 *On appelle filtre d'une algèbre de Boole* A *une partie non vide* F *de* A *tel que*

i) $1 \in F$.

ii) si $x \in F$ *et* $y \in A$ *et* $x \leq y$, *alors* $y \in F$.

iii) si $x \in F$ *et* $y \in F$, *alors* $x.y \in F$.

Définition 2.2.2 *un filtre* F *de* A *est un ultrafiltre si, pour tout* $x \in A$, $x \in F$ *ou* $-x \in F$ *mais pas les deux.*

Définition 2.2.3 *Soit* A *une algèbre de Boole,*

$$UltA = \{p \subseteq A : p \text{ } est \text{ } un \text{ } ultrafiltre \text{ } de \text{ } A\}$$

est l'ensemble des ultrafiltres de A. *L'application*

$$s : A \longrightarrow P(UltA)$$

défini par

$$s(x) = \{p \in UltA : x \in p\}$$

est une application de Stone.

Définition 2.2.4 *Soit A une algèbre de Boole, la topologie de Stone est l'unique topologie sur $UltA$ ayant $s[A]$ comme base. $UltA$, muni d'une topologie de Stone, est l'espace de Stone ou l'espace dual ou l'espace des ultrafiltres de A.*

Théorème 2.2.1 *(Stone's representation theorem, topological version). Toute algèbre de Boole est isomorphe à l'algèbre d'ouvert-fermée (Clopen) d'un espace Booléen. Plus précisément, l'espace dual $UltA$ d'une algèbre de Boole A est Booléen et l'application de Stone de A est un isomorphisme de A sur Clop $UltA$.*

Preuve. Soit A une algèbre de Boole et $X = UltA$ son espace dual. X est zéro-dimensionnel, par $X \setminus s(a) = s(-a)$ tout ensemble de base $s(a)$ est ouvert-fermé. ainsi X est un espace Hausdorff, en effet : soit p et q des ultrafiltres distinct de A, par la maximalité de p si $a \in p \setminus q$ alors $s(a)$ et s(-a) sont des voisinages disjoint de p et q.

Pour montre que X est compacte, soit U est un recouvrement ouvert de X. Il suffit de considérer le cas ou chaque élément de U est un ensemble de base tel que $U = \{s(a) : a \in A'\}$, où $A' \subseteq A$. Supposons qu'aucune sous ensemble fini de U recouvre X. Alors Soit $n \in w$ et $a_1, ..., a_n \in A'$,

$$s(a_1) \cup ... \cup s(a_n) \neq X = s(1),$$

donc $a_1 + ... + a_n \neq 1$ et $-a_1..... - a_n \neq 0$. il en résulte que l'ensemble $-A' = \{-a : a \in A'\}$ a propriété d'intersection finie d'après le théorème 2.16 ([1]), soit p un ultrafiltre de A inclus dans $-A'$. pour tout $a \in A'$ on a $-a \in p$, $a \notin p$ et $p \notin s(a)$ ce qui contredit le fait que aucun U recouvre X.

Donc X est un espace Booléen. Puisque l'application de Stone s est un monomorphisme de A dans $ClopX$, il nous reste que de montrer que $ClopX = s[A]$. mais ce la résulte du lemme 7.6 (a) ([1], page 98) en considérant la base $B = s[A]$ de X.

Exemple 2.2.1 *(Algèbres de Boole finie). Soit A une algèbre de Boole, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- *A est finie.*

- *$UltA$ est un espace Booléen fini.*
- *$UltA$ est un espace discret fini.*
- *$ClopUltA = P(UItA)$.*
- *L'application de Stone de A est un isomorphisme de A dans $P(X)$, pour certain ensemble fini X.*

Proposition 2.2.1 *Les atomes d'une algèbre de Boole A correspondent aux points isolés de $UltA$. Donc A est sans atome si et seulement si $UltA$ n'a aucun point isolé et A est atomique si et seulement si les points isolés de $UltA$ constituent un sous ensemble dense dans $UltA$.*

Preuve. Une bijection f entre l'ensemble AtA des atomes de A et l'ensemble Is des points isolés de $UltA$ est obtenue en prenant, pour tout $a \in AtA$,

$$f(a) = x \text{ si et seulement si } s(a) = \{x\}.$$

Ceci est vrai puisque, premièrement $a > 0$ dans A si et seulement si le sous ensemble $s(a)$ de $UltA$ est non vide et, deuxièmement a est un atome si et seulement si $s(a)$ n'est pas l'union de deux sous ensembles ouvert-fermé disjoint non vide, i.e. ssi $s(a)$ est un singleton $\{x\}$, où x est un point isolé.

Théorème 2.2.2 *Les assertions*

$$I \longmapsto o(I) = \bigcup s[I] \qquad \textit{(la partie ouverte de Ult A dual de I),}$$

$$u \longmapsto i(u) = \{a \in A : s(a) \subseteq u)\} \qquad \textit{(l'ideal de A dual de I),}$$

sont des bijection préservent l'ordre entre les idéaux d'une algèbre de Boole et les parties ouverts de $UltA$. Pour tous idéal I de A,

$$Ult(A/I) \cong UltA \setminus o(I).$$

preuve. Soient Id l'ensemble des idéaux de A et Θ l'ensemble des ouverts de $UltA$. Il est clair que les applications :

$$o : Id \longrightarrow \Theta, \qquad i : \Theta \longrightarrow Id;$$

Sont des applications préservent l'ordre.
On montre qu'il sont réciproque l'une de l'autre.

C'est évident que, $o(i(u)) \subseteq u$ pour tout $u \in \Theta$ et $I \subseteq i(o(I))$ pour tout $I \in Id$. Inversement, soit $x \in u$. Fixons $a \in A$ tel que $x \in s(a) \subseteq u$. alors $a \in i(u)$ et $x \in o(i(u))$ ce qi montre que $u \subseteq o(i(u))$. Pour prouver que $i(o(I)) \subseteq I$, prenant $a \in i(o(I))$. alors $s(a) \subseteq \bigcup s[I]$ et par la compacité de $s(a)$ on a $a \leqslant a_1 + ... + a_n$ pour certain $n \in w$ et $a_1 + ... + a_n \in I$; d'où $a \in I$. finalement, supposons que $u = o(I)$. L'homomorphisme $f : A \longrightarrow Clop(UltA \setminus u)$ défini par $f(a) = s(a) \cap (UltA \setminus u)$ est surjectif, d'après le lemme 7.6(b) ([1]), et son noyau est l'idéal I. donc d'après le théorème d'isomorphisme, $A/I \cong Clop(UltA \setminus u)$ et $Ult(A/I) \cong UltA \setminus u$.

2.3 La dérivée de Cantor-Bendixson

Un espace topologique X est dit dispersé (scattered) si pour tout sous espace fermé Y de X, les points isolés de Y sont denses dans Y. La dualité entre les images homomorphes d'une algèbre de Boole A et les sous-espaces fermés de son espace dual $UltA$ (respectivement entre les atomes d'une algèbre de Boole Q et les points isolés de $UltQ$), donne l'observation suivante.

Remarque 2.3.1 *Une algèbre de Boole A est superatomique si et seulement si son espace dual est dispersé.*

Exemple 2.3.1 *(finite-cofinite algebras). Soit I un ensemble infini avec la topologie discrète et soit*

$$X = I \cup \{\infty\}$$

est sa compactification en un point. Alors X est un espace Booléen dont l'algèbre duale A est isomorphe à l'algèbre finie-cofinie sur I. On prouve que X est dispersé (scattered), c'est-à-dire que A est superatomique : Soit Y un sous-espace fermé de X. Si Y est fini, alors il est discret et tout point de Y est isolé dans Y. Sinon, ∞ est le seul point non isolé de Y, encore les points isolés de Y sont denses dans Y.

Construction 2.3.1 *Pour toute algèbre de Boole A, soit $I(A)$ un idéal de A engendré par les atomes de A.*

Pour tout ordinal α, on définit par récurrence un idéal I_α de A ; si I_α a été défini, on pose

$$A_\alpha = A/I_\alpha$$

(la α-ième dérivée de Cantor-Bendixson de A), et soit

$$\pi_\alpha : A \longrightarrow A_\alpha$$

est une application canonique. On défini

$$I_0 = \{0\}, I_{\alpha+1} = \pi_\alpha^{-1}[I(A_\alpha)],$$

et pour λ *un ordinal limite,*

$$I_\lambda = \bigcup_{\lambda<\alpha} I_\alpha.$$

Finalement, on pose

$$I_\infty = \bigcup_{\alpha\in Ord} I_\alpha$$

(avec Ord *est la classe de tous les ordinaux). Puisque* $I_\alpha \subseteq I_{\alpha+1}$*, par récurrence* $(I_\alpha)_{\alpha\in Ord}$ *est une chaîne croissante des idéaux de* A *; ainsi* I_∞ *est un idéal de* A*.*

Pour tout ordinal α*,* $I_\alpha = I_{\alpha+1}$ *si et seulement si* A_α *est sans atome (atomless). Dans ce cas,* A_α *est trivial ou bien infini et on suit par récurrence* $I_\alpha = I_\beta$ *pour tout* $\beta \geqslant \alpha$*, i.e.* $I_\alpha = I_\infty$*. Il existe toujours un ordinal* α *(dépendant de* A*) tel que* $I_\alpha = I_{\alpha+1}$ *: si* A *est trivial, soit* $\alpha = 0$ *; si* A *est fini et non trivial, soit* $\alpha = 1$*. Si* $|A| = \kappa$ *est un cardinal infini, alors la considération de la chaîne croissante* $(I_\alpha)_{\alpha<\kappa^+}$ *de sous-ensembles de* A *montre que* $I_\alpha = I_{\alpha+1}$*, pour quelque* $\alpha < \kappa^+$*.*

Le théorème 2.2.2 établit une correspondance entre les idéaux d'une algèbre de Boole A *et des sous-ensembles fermés de* $UltA$ *tels que* $Ult((A/I)) \cong Y$*, si* Y *est l'ensemble fermé correspondant à* I*. Ainsi, les notions algébriques et les assertions de 2.3.1 se traduisent par des notions topologiques comme suit.*

Construction 2.3.2 *Pour tout espace Booléen* X*, soit*

$$Is(X) = \{x \in X : x \text{ isolé dans } X\},$$

l'ensemble des points isolés de X *et*

$$X' = X \setminus Is(X)$$

la (1ère) dérivée de Cantor-Bendixson de X*. On définit une une suite décroissante* $(X_\alpha)_{\alpha\in Ord}$ *de sous-espaces fermés de* X *par*

- $X_0 = X$.

- $X_{\alpha+1} = (X_\alpha)'$.

- *Si λ un ordinal limite, $X_\lambda = \bigcap_{\alpha<\lambda} X_\alpha$.*

X_α est la α-ième dérivée de Cantor-Bendixson de X. Le sous-espace fermé $X_\infty = \bigcap_{\alpha\in Ord} X_\alpha$ est le noyau parfait de X.
Si X est un espace dual d'une algèbre de Boole A, alors l'idéal $I(A) = I_1$ correspond au sous-espace $X' = X_1$, I_α correspond à X_α, et l'espace dual de $A_\alpha = A/I_\alpha$ est homéomorphe à X_α. De même, I_∞ correspond à X_∞ et $Ult(A/I_\infty)$ est homéomorphe à X_∞.

Proposition 2.3.1 *Une algèbre de Boole non triviale A est superatornique si et seulement si $I_\infty = A$ si et seulement si $I_\alpha = A$, pour quelque ordinal α. Duellement, $X = UltA$ est dispersé si et seulement si son noyau parfait X_∞ est vide si et seulement si son α-ième dérivée de Cantor-Bendixson est vide, pour quelque α.*

Preuve. Soit A une algèbre de Boole et X son espace dual. Par la remarque précédente de 2.3.1, preuve que si α grand $I_\alpha = I_\infty$ et donc $X_\alpha = X_\infty$. Alors $A/I_\alpha = A/I_\infty$ est sans atome (atomless) et son espace dual X_∞ est dense en lui-même, i.e. il n'a aucun point isolé.
Ainsi, si X est dispersé, alors X_∞ est vide. Inversement, supposons que X n'est pas dispersé. Donc il existe un sous-espace fermé non vide Y de X qui est dense en lui-même. Il s'ensuit par induction que $Y \subseteq X_\alpha$ pour tout α et donc que X_∞, est non vide.

Définition et Lemme 2.3.1 *Soit A une algèbre de Boole superatomique et X son espace dual. Il existe un couple unique $(\alpha(A), n(A)) = (\alpha(X), n(X))$ tel que :*

(a) *$\alpha(A) = -1$ et $n(A) = 0$ si A est trivial ; sinon, $\alpha(A)$ est un ordinal et $n(A)$ est un entier positif,*

(b) *si A est non trivial, alors $A_{\alpha(A)}$, la $\alpha(A)$-ième dérivée de Cantor-Bendixson de A, est fini et possède exactement $n(A)$ atomes, i.e. si X est non vide, alors $X_{\alpha(A)}$, la $\alpha(X)$-ième dérivée de Cantor-Bendixson de X, est finie et de cardinalité n(X),*

(c) *si A est infini, $\alpha(A) < |A|^+$.*
$\alpha(A)$ et $n(A)$ sont appelés les invariants de Cantor-Bendixson de A (respectivement X).

Preuve. On prouve que la version topologique du lemme. Soit $X = UltA$ non vide. D'après la proposition 2.3.1, il existe un minimum ordinal β satisfaisant $X_\beta = \emptyset$; nous affirmons que β est un successeur ordinal $\beta = \alpha + 1$ et que le couple $(\alpha, |X_\alpha|)$ est valable pour lemme.

Évidemment, $\beta > 0$ puisque $X_0 = X$ est non vide. De plus, β ne peut pas être un ordinal limite car sinon X_β, étant l'intersection de la suite décroissante $(X_\lambda)_{\lambda<\alpha}$ de sous-ensembles compacts non vides de X, est non vide. Ainsi, $\beta = \alpha+1$ pour un ordinal unique α. Par le choix minimal de β, X_α est non vide mais sa dérivée $(X_\alpha)'$ est vide. Par conséquent, tout point de X_α est isolé, X_α est discret et, par compacité il est fini.

Clairement, $(\alpha, |X_\alpha|)$ est le couple unique qui satisfait les conditions (a) et (b). L'assertion (c) a été prouvée en 2.3.1.

Proposition 2.3.2 *Toute algèbre de Boole superatomique infinie A, $|A| = |UltA|$.*

Preuve. Pour démontrer que $|UltA| \leq |A|$, On considère l'espace $X = UltA$ et on note que

$$\emptyset = X_\infty = X_{\alpha(X)+1}.$$

Puisque $(X_\beta)_{\beta<\alpha(X)+1}$ est une chaîne décroissante de sous-ensembles de X qui satisfont $X_\lambda = \bigcap_{\alpha<\lambda} X_\alpha$ si λ est limite, on peut écrire

$$X = \bigcup_{\beta<\alpha(X)} (X_\beta \setminus X_{\beta+1}).$$

Or $\alpha(X) < |A|$ d'après (c) dans la Définition 2.3.1, et pour tout $\beta < \alpha(X)$

$$|X_\beta \setminus X_{\beta+1}| = |At\ A_\beta| \leqslant |A_\beta| \leqslant |A|,$$

car les points isolés de X_β correspondent aux atomes de A_β de manière injectif et A_β est un quotient de A. Ainsi, $|X| \leqslant |A|.|A| \leqslant |A|$. $\square$

Conclusion

L'étude de cette classe d'algèbres nous donne des exemples d'algèbres très intéréssantes ; mais malheureusement pas toute algèbre de Boole est de cette sorte. L'intérêt de classe réside dans le grand nombre de mathématiciens qui s'y intéressent.

Bibliographie

[1] Koppelberg, S. HandBook of Boolean Algebras, Volume I. North Holland P.C., (1989).

[2] G. W. Day, Free complete extensions of Boolean algebras, Pacific J. Math. 15, 1145-1151, (1965).

[3] G. W. Day, Superatomic Boolean algebras, Pacific. J. Math. 23, 479-489, (1967).

[4] Ph. Dwinger, Introduction to Boolean Algebras, Wurzburg, (1961).

[5] Gehrke, M. : Stone duality, topological algebra, and recognition. http :// hal.archives-ouvertes.fr/docs/00/86/01/62/PDF/Ge13.pdf

[6] F. M. Yaqub, Free extensions of Boolean algebras, Pacific J. Math. 13, 761-771, (1963).