

DEPARTEMENT DES MATHEMATIQUES

**Master Mathématique et Application au Calcul Scientifique  
(MACS)**

**MEMOIRE DE FIN D'ETUDES**

**Pour l'obtention du Diplôme de Master Sciences et Techniques  
(MST)**

**Programmation multi-objectives  
pour un régime optimal**

Réalisé par: - Abdellah AHOURAG

Encadré par: - Pr. Karim EL MOUTAOUAKIL(interne)

- Pr. Hicham BAÏZRI (Université Cadi Ayyad)

Soutenu le 16 juillet 2021 Devant le jury composé de:

-Pr. Karim EL MOUTAOUAKIL(FPT)

- Pr. Mohamed BENSLIMANE (EST)

- Pr. Khalid HADDOUCH (ENSAF)

- Pr. Rachid EL KHAOULANI EL IDRISSE (FST)

**Année Universitaire 2020 / 2021**

## Contexte du projet :

Ce stage est réalisé dans le cadre du projet **Alkhawarizmi/2020/23** ;

**Intitulé** : Intervention de l'intelligence artificielle dans la gestion de la thérapie nutritionnelle appliquée au diabète de type 2 ;

**Budget** : 2000000DH ;

**Coordonnateur** : Pr. Karim El Moutaouakil (IA, RO et Optimisation) ;

**Equipe** : Pr. H. Baizri (Ophtalmologue), Pr S. Chellak (Diététicien), Pr. M. Cheggour (Pharmacologue) , Pr. Quassimi (Système dynamiques).

## Résumé :

L'objectif principal de ce rapport est d'introduire un modèle de programmation multi-objectif avec contraintes pour le problème de régime alimentaire avec deux fonction objectifs dont la première est la charge glycémique (GL) des aliments alors que la deuxième fonction objective est le coût du régime . Le modèle ainsi obtenu sera résolu par une startégie génétique.

Le concept de la Charge Glycémique GL est lié au concept d'index glycémique (IG).qui permet de classer les aliments en fonction de l'élévation de la glycémie qu'ils produisent quand on les consomme. leur index est élevé, plus les aliments entraînent une hausse rapide du taux de sucre.

Les valeurs IG des aliments sont mesurées par rapport aux normes établies et disponibles dans divers sources, La distinction fondamentale entre une faible charge glycémique et un aliment à charge glycémique élevée est que la première affecte moins la glycémie ou les niveaux d'insuline, tandis que la seconde provoque des fluctuations de la glycémie.

Nous donnons l'essentiel de la programmation multi-objectifs . puis nous introduisons les concepts de bases de l'algorithme génétique multiobjectives (MOGA) . Dans une dernière partie, nous résolvons des modèles du problème de régime optimal puis on exposons les différents régimes obtenus par les algorithmes génétiques multi-objectives, puis nous donnons une conclusion ainsi que quelques perspectives.

## Remerciements :

Je tiens tout d'abord à remercier Dieu tout puissant d'avoir guidé mes pas vers les portes du savoir, en me donnant beaucoup de courage et de volonté pour la réalisation de ce travail.

J'exprime ma profonde gratitude à **MR.KARIM EL MOUTAOUAKIL** de m'avoir encadré, je le remercie pour son aide, ses conseils et sa compréhension tout au long de ce travail. Mes remerciements vont ensuite aux membres de jurés d'avoir accepté d'examiner ce travail. Enfin, j'exprime mes remerciements envers toutes les personnes qui ont contribué au bon déroulement de ce travail.

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction générale</b>	<b>6</b>
<b>2</b>	<b>Optimisation Multiobjectif</b>	<b>8</b>
2.1	Introduction sur les problèmes d'optimisation . . . . .	8
2.2	Les problèmes d'optimisation mono-objectifs . . . . .	9
2.2.1	Variables de décision . . . . .	9
2.2.2	Espace décisionnel et espace objectif . . . . .	9
2.3	Optimisation multiobjectif . . . . .	9
2.3.1	Problèmes d'optimisation multiobjectifs . . . . .	10
2.4	Approches de résolution multiobjectif . . . . .	10
2.4.1	Approches non Pareto . . . . .	11
2.4.2	Les approches non scalaires non Pareto « ces approches sont de type a posteriori » . . . . .	12
2.4.3	Approches Pareto . . . . .	12
<b>3</b>	<b>Algorithmes génétiques multi objectifs</b>	<b>15</b>
3.1	Introduction . . . . .	15
3.2	Principes de base de AG . . . . .	15
3.2.1	Codage de données . . . . .	16
3.2.2	Evaluation de la population initiale . . . . .	16
3.3	Les opérateurs de AG . . . . .	17
3.3.1	Opérateur sélection . . . . .	17
3.3.2	Opérateur de croisement . . . . .	17
3.3.3	Opérateur de mutation . . . . .	18
3.4	Algorithmes génétiques pour l'optimisation multiobjectifs . . . . .	19
3.4.1	Introduction . . . . .	19
3.4.2	Stratégie de réserve d'élite . . . . .	21
<b>4</b>	<b>Optimisation multi-objectives pour le problème du régime optimal</b>	<b>23</b>
4.1	Nutriments de base . . . . .	23
4.2	Problème du régime optimal . . . . .	26
4.3	Optimisation robuste . . . . .	28

4.3.1	Les approches robustes générales . . . . .	28
<b>5</b>	<b>Résolution du modèle du régime optimal par l'algorithme génétique</b>	<b>34</b>
5.1	introduction . . . . .	34
5.2	Base des aliments et besoins en nutriments de base . . . . .	34
5.3	Résultats numériques et analyse . . . . .	36
<b>6</b>	<b>Conclusion general</b>	<b>41</b>

## Introduction générale

Une alimentation saine et équilibrée est essentielle à la qualité de vie. Dans un problème de régime typique, une fonction de coût est minimisée tandis que satisfaire les besoins nutritionnels. Le premier problème de régime a été proposé par Stigler et résolu par Dantzig comme premier test problème pour l'algorithme simplexe [1]. Depuis, d'autres articles liés à la solution du problème de l'alimentation avec la programmation mathématique sont également apparus dans la littérature [2, 4]. Dans son article de synthèse, Lancaster [3] passe en revue le régime alimentaire de Stigler problème avec le coût minimum comme fonction objective, planification de menus assistée par ordinateur (CAMP) de première génération avec coût modèles de minimisation, CAMP de deuxième génération avec des modèles de maximisation des préférences et CAMP de troisième génération dit Nutrimeal avec modèles d'ajustement de repas. La fonction de coût dans le problème de régime de Stigler était les coûts annuels. D'autres fonctions de coût pourraient également être définies comme l'apport quotidien total en graisses ou l'apport quotidien total en sodium.

Dans ce travail, nous déterminons des régimes alimentaires basés sur la programmation linéaire multi-objectives sous contraintes dont la première fonction objective est la charge glycémique de régime alors que la deuxième fonction objective est le coût du régime [25]. Le modèle ainsi obtenu sera résolu par une stratégie génétique.

Le premier chercheur qui a introduit un programme linéaire avec la charge glycémique comme fonction objective est le turk Esra Bas [25]. Le concept de la Charge Glycémique (en anglais Glycemic Load (GL))GL est lié au concept d'index glycémique (IG). Ludwig [5] définit l'IG comme « l'aire incrémentielle sous la courbe de réponse au glucose après la consommation d'une quantité standard de glucides provenant d'un aliment d'essai par rapport à celle d'un aliment témoin (pain blanc ou glucose) », et GL comme « l'indice glycémique moyen pondéré des aliments individuels multiplié par le pourcentage d'énergie alimentaire sous forme de glucides ». Les valeurs IG des aliments sont mesurées par rapport aux normes établies et disponibles dans divers sources [6, 7]. Les valeurs IG estimées des aliments avec des valeurs IG non mesurées sont également disponibles dans diverses sources [8]. La distinction fondamentale entre une faible charge glycémique et un aliment à charge glycémique élevée est que la première affecte moins la glycémie ou les niveaux d'insuline, tandis que la seconde provoque des fluctuations de la glycémie. Il existe un corpus de littérature suggérant qu'il existe une association entre les régimes à forte charge glycémique et les maladies chroniques telles que l'obésité, le diabète sucré, les maladies cardiovasculaires et divers types de cancer [9, 10]. Les régimes à faible charge glycémique sont généralement recommandés, bien que des études plus longitudinales soient nécessaires pour une association solide [11, 13]. Un défi en ce qui concerne la recherche sur les régimes à faible charge glycémique est que les valeurs IG et GL

réelles des aliments ont tendance à s'écarter des valeurs estimées. Les valeurs IG et GL mesurées sont également sujettes à des variations en raison de plusieurs raisons telles que la confusion de la mesure de l'indice glycémique, y compris l'utilisation de deux aliments de référence, et la variabilité des valeurs de l'indice glycémique en fonction de facteurs tels que la méthode de cuisson, la méthode de traitement, type d'amidon, fibre, sucre, graisse et acidité [12].

Ainsi, un aliment spécifique consommé est susceptible d'avoir une valeur IG et GL différente des valeurs disponibles dans la littérature. De plus, la réponse glycémique de chaque personne à un aliment sera variable. À cet égard, la prise en compte de l'incertitude des valeurs IG/GL dans le problème de l'alimentation est importante, et certaines approches peuvent être envisagées pour tenir compte de l'incertitude des valeurs IG/GL. Bien qu'elle ne soit pas appliquée aux valeurs GL, la programmation stochastique a été proposée pour traiter l'incertitude paramétrique dans les modèles de programmation mathématique des problèmes de régime alimentaire [14, 15]. Dans ces modèles, c'est surtout la variabilité des nutriments qui a été prise en compte, et différentes méthodes ont été proposées pour la résolution du modèle, telles que la programmation sous contrainte aléatoire (CCP), la programmation linéaire avec une marge de sécurité, la programmation interactive à objectifs multiples et la programmation quadratique itérative pour minimiser les coûts totaux. Les techniques d'intelligence artificielle, y compris la logique floue et la modélisation, ont également été utilisées pour traiter l'incertitude des problèmes de régime alimentaire [16, 17]. Dans ces modèles, les teneurs en nutriments floues et les exigences nutritionnelles floues ont été prises en compte, et différentes méthodes ont été proposées pour les résoudre, telles que la programmation linéaire floue, les méthodes hybrides intégrant le raisonnement à partir de cas et le raisonnement à partir de règles, les règles d'ondulation, l'ontologie floue de type 2 et le mécanisme d'inférence floue de type 2, l'arithmétique floue, la correspondance de modèles floue, l'ontologie alimentaire floue via le langage de balisage flou génétique et l'algorithme de recherche heuristique. L'optimisation robuste pour le problème des régimes alimentaires a été abordée par Mulvey et al [1]. Ils ont considéré l'incertitude du contenu nutritionnel et ont souligné que Stigler était également confronté à un problème d'incertitude du contenu nutritionnel dans son problème de régime alimentaire [1].

Le reste de ce rapport est organisé comme suit : le chapitre 2 donne l'essentiel de la programmation sous contraintes. Dans le 3ème chapitre, nous introduisons les concepts de bases de l'algorithme génétique multi-objectives (MOGA). Le chapitre 4 rapporte la modélisation du problème de régime optimal. Dans le 4ème chapitre exposons les différents régimes obtenus par les algorithmes génétiques multi-objectives. Vers la fin, nous donnons une conclusion ainsi que quelques perspectives.

# Optimisation Multiobjectif

## 2.1 Introduction sur les problèmes d'optimisation

**Un problème d'optimisation est défini par**

- un espace de recherche (de décision) : ensemble de solutions ou de configurations constitué des différentes valeurs prises par les variables de décision.
- une ou plusieurs fonction(s) dite objectif(s), à optimiser (minimiser ou maximiser).
- un ensemble de contraintes à respecter.

Dans la plupart des problèmes, l'espace d'état (décision) est fini ou dénombrable. Les variables du problème peuvent être de nature diverse (réelle, entier, booléenne, etc.) et exprimer des données qualitatives ou quantitatives. La fonction objectif représente le but à atteindre pour le décideur.

L'ensemble de contrainte définit des conditions sur l'espace d'état que les variables doivent satisfaire. Ces contraintes sont souvent des contraintes d'inégalité ou d'égalité et permettent en général de limiter l'espace de recherche (solutions réalisables).

La résolution optimale du problème consiste à trouver le point ou un ensemble de points de l'espace de recherche qui satisfait au mieux la fonction objectif. Le résultat est appelé valeur optimale ou optimum.

**Un problème d'optimisation est caractérisé par :**

- le domaine des variables de décision : soit Continu et on parle alors de problème continu, soit discret et on parle donc de problème combinatoire ;
- la nature de la fonction objectif à optimiser : soit linéaire et on parle alors de problème linéaire, soit non linéaire et on parle donc de problème non linéaire ;
- le nombre de fonctions objectifs à optimiser : soit une fonction scalaire et on parle alors de problème mono-objectif, soit une fonction vectorielle et on parle donc de problème multiobjectif ;
- la présence ou non des contraintes : on parle de problème sans contrainte ou avec contrainte.
- sa taille : problème de petite ou de grande taille ;
- l'environnement : problème dynamique (la fonction objectif change dans le temps).

## Face à un problème d'optimisation

- Elaborer un modèle (mathématiques) : l'expression de l'objectif à optimiser et les contraintes à respecter.
- Développer un algorithme de résolution.
- Evaluer la qualité des solutions produites.

## 2.2 Les problèmes d'optimisation mono-objectifs

Lorsqu'un seul objectif (critère) est donné, le problème d'optimisation est **mono-objectif**.

Dans ce cas la solution optimale est clairement définie, c'est celle qui a le coût optimal (minimal,maximal). De manière formelle, à chaque instance d'un tel problème est associé un ensemble  $\Omega$  des solutions potentielles respectant certaines contraintes et une fonction d'objectif  $f : \Omega \rightarrow \Xi$  qui associe à chaque solution admissible  $s \in \Omega$  une valeur  $f(s)$ .

Résoudre l'instance  $(\Omega, f)$  du problème d'optimisation consiste à trouver la solution optimale  $s^* \in \Omega$  qui optimise (minimise ou maximise) la valeur de la fonction objectif  $f$ .

Pour le cas de la minimisation : le but est de trouver  $s^* \in \Omega$  tel que  $f(s^*) \leq f(s)$  pour tout élément  $s \in \Omega$ . Un problème de maximisation peut être défini de manière similaire.

### 2.2.1 Variables de décision

Les variables de décision sont des quantités numériques pour les quelles des valeurs sont à choisir.

Cet ensemble de  $n$  variables est appelé vecteur de décision :  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Les différentes valeurs possibles prises par les variables de décision  $x_i$  constituent l'ensemble des solutions potentielles.

### 2.2.2 Espace décisionnel et espace objectif

Deux espaces Euclidiens sont considérés en optimisation :

- L'espace décisionnel, de dimension  $n$ ,  $n$  étant le nombre de variables de décision.

Cet espace est constitué par l'ensemble des valeurs pouvant être prise par le vecteur de décision.

- L'espace objectif : l'ensemble de définition de la fonction objectif, généralement défini dans  $\mathbb{R}$ . La valeur dans l'espace objectif d'une solution est appelée coût, ou fitness.

## 2.3 Optimisation multiobjectif

Les problèmes d'optimisation rencontrés en pratique sont rarement monoobjectifs. Ils ont plusieurs critères à satisfaire simultanément. L'optimisation multiobjectif s'intéresse à la résolution de ce type de problèmes. Elle possède ses origines dans le 19ème siècle dans les travaux en économie de Edgeworth (1881) et Pareto (1896). Elle est utilisée récemment dans les sciences pour l'ingénieur. Contrairement à l'optimisation à un seul critère, la solution d'un problème multiobjectif n'est pas une solution unique, mais un ensemble de solutions connu sous le nom : «ensemble des solutions Pareto optimales».

### 2.3.1 Problèmes d'optimisation multiobjectifs

Un problème d'optimisation avec objectifs multiples peut être représenté par le programme suivant :

$$\begin{cases} \text{optimiser } F(S) = (f_1(S), f_2(S), \dots, f_p(S)) \\ \text{t.q } S \in \Omega \text{ et } p \geq 2 \end{cases}$$

$S$ , étant un vecteur solution  $(x_1, \dots, x_n)$  d'un espace  $\Omega$  de dimension  $n$ , représentant des instances des variables de décision  $x_i$ .  $\Omega$  représente l'ensemble des solutions réalisables respectant un ensemble de contraintes  $C$  d'égalité, d'inégalité et des bornes explicite.

$F(f_1, f_2, \dots, f_p)$  est le vecteur fonction objectif à optimiser, et  $p$  représente le nombre d'objectifs.

$Y = F(\Omega)$  représente les points réalisables dans l'espace objectif,  $Y = (y_1, \dots, y_p)$  avec  $y_i = f_i(S)$  représente un point de l'espace objectif.

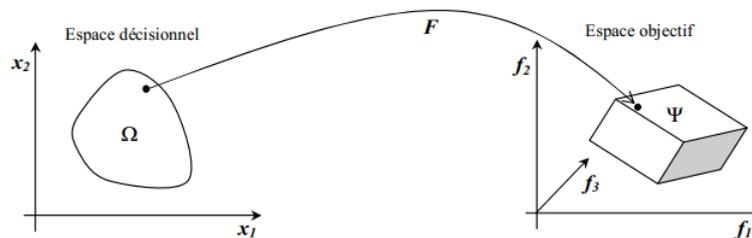


FIGURE 2.1 – problème d'optimisation multiobjectif (2 variables de décision et 3 fonctions objectifs)

## 2.4 Approches de résolution multiobjectif

La résolution de problèmes multiobjectifs relève de deux disciplines assez différentes. En effet, résoudre un problème multiobjectif peut être divisé en deux phases :

1. **la recherche des solutions de meilleur compromis** : C'est la phase d'optimisation multiobjectif.
2. **le choix de la solution à retenir** : C'est la tâche du décideur qui, parmi l'ensemble des solutions de compromis, doit extraire celle(s) qu'il utilisera. On parle alors ici de décision multiobjectif et cela fait appel à la théorie de la décision.

#### Classification « point de vue décideur »

On distingue à cet égard trois schémas possibles. Soit le décideur intervient dès le début de la définition du problème, en exprimant ses préférences, afin de transformer un problème multiobjectif en un problème simple objectif. Soit le décideur effectue son choix dans l'ensemble des solutions proposées par le solveur multiobjectif :

- **les approches a priori** : le décideur intervient en aval du processus d'optimisation, pour définir la fonction d'agrégation modélisant le compromis que l'on désire faire entre les différents objectifs. Dans ce cas le décideur est supposé connaître a priori le poids de chaque objectif afin de les mélanger dans une fonction unique. Cela revient à résoudre un problème mono-objectif. Cependant dans la plupart des cas, le décideur ne peut pas exprimer clairement sa fonction d'utilité, parce que les différents objectifs sont non commensurables (exprimés dans des unités différentes).

- **les approches interactives** : combinent de manière cyclique et incrémentale les processus de décision et d'optimisation. le décideur intervient de manière à modifier certaines variables ou contraintes afin de diriger le processus d'optimisation. Le décideur modifie ainsi interactivement le compromis entre ses préférences et les

résultats. Cette approche permet donc de bien prendre en compte les préférences du décideur, mais nécessite sa présence tout au long du processus de recherche.

- **les approches a posteriori** : cherche à fournir au décideur un ensemble de bonnes solutions bien réparties. Il peut ensuite, au regard de l'ensemble des solutions, sélectionner celle qui lui semble la plus appropriée. Ainsi, il n'est plus nécessaire de modéliser les préférences du décideur (ce qui peut s'avérer être très difficile), mais il faut en contrepartie fournir un ensemble de solutions bien réparties, ce qui peut également être difficile et requérir un temps de calcul important (mais ne nécessite pas la présence du décideur).

### Classification « point de vue concepteur »

Ce classement adopte un point de vue plus théorique articulé autour des notions d'agrégation et d'optimum Pareto.

Les approches utilisées pour la résolution de problèmes multiobjectifs peuvent être classées en deux catégories : les approches **non Pareto** et les approches **Pareto**.

- Les approches non Pareto ne traitent pas le problème comme un véritable problème multiobjectif. Elles cherchent à ramener le problème initial à un ou plusieurs problèmes mono-objectifs.
- Les approches Pareto ne transforment pas les objectifs du problème, ceux-ci sont traités sans aucune distinction pendant la résolution.

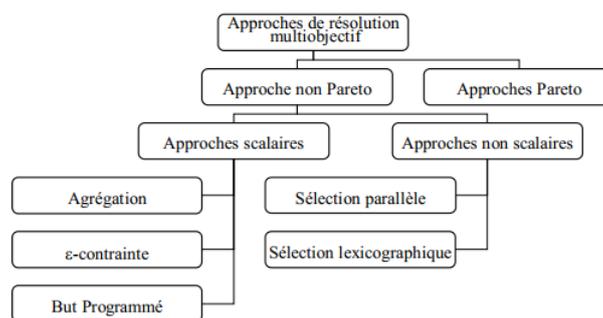


FIGURE 2.2 – classification « point de vue concepteur »

#### 2.4.1 Approches non Pareto

##### Les approches scalaires «ces approches sont de type a priori»

A l'origine, les problèmes multiobjectifs étaient transformés en problèmes mono-objectifs.

Plusieurs approches différentes ont été mises au point pour transformer les problèmes multiobjectifs en problèmes mono-objectifs : les approches agrégées, programmation par but, et les approches e-contraintes, etc.

**a) Approche d'agrégation** C'est l'une des premières approches utilisée pour résoudre les problèmes multiobjectifs. Elle consiste à transformer un problème multiobjectif en un problème monoobjectif, en définissant une fonction objectif unique  $F$  comme étant la somme pondérée des différentes fonctions objectifs du problème initial. En affectant à chaque objectif un coefficient de poids qui représente l'importance relative que le décideur attribue à l'objectif :

$$F(s) = \sum_{i=1}^p \lambda_i f_i(s) \quad \text{où les poids } \lambda_i \in [0, 1] \quad \text{avec } \sum_{i=1}^p \lambda_i = 1.$$

Cette approche a l'avantage de pouvoir réutiliser tous les algorithmes classiques dédiés aux problèmes d'optimisation à un seul objectif.

#### **b)-But programmé**

Dans les approches de ce type, le décideur doit définir des buts  $T_i$  ou références qu'il désire atteindre pour chaque objectif  $f_i$ . Ces valeurs sont introduites dans la formulation du problème, le transformant en un problème mono-objectif. La nouvelle fonction objectif est modifiée de façon à minimiser les écarts entre les résultats et les buts à atteindre.

$$\min \sum_{i=1}^p | f_i(s) - T_i(s) | \quad \text{où } s \in \Omega$$

Différentes approches sont envisageables, comme celles du min-max, ou du but à atteindre. Ces approches, bien que travaillant par agrégation des objectifs, permettent de générer des solutions non-supportées.

#### **c)- Approches $\epsilon$ -contraintes**

Dans cette approche, le problème consiste à optimiser une seule fonction objectif  $f_k$  soumise à des contraintes sur les autres fonctions objectif (Convertir  $p - 1$  des  $p$  objectifs du problème en contraintes).

### **2.4.2 Les approches non scalaires non Pareto « ces approches sont de type a posteriori »**

Ces approches ne transforment pas le problème multiobjectif en un problème mono-objectif, mais utilisent des opérateurs qui traitent séparément les différents objectifs, elles n'utilisent pas non plus la notion de dominance Pareto : sélection parallèle, sélection lexicographique.

#### **a)- Sélection parallèle**

Cette approche a été la première proposant un algorithme génétique pour la résolution de problèmes multiobjectifs [Schaffer, 1984]. L'algorithme proposé, VEGA (Vector Evaluated Genetic Algorithm), sélectionne les individus selon chaque objectif de manière indépendante.

L'idée est simple : Pour  $k$  objectifs et une population de  $n$  individus, une sélection de  $\frac{n}{k}$  meilleurs individus est effectuée pour chaque objectif. Ainsi  $k$  sous-populations vont être créées et ensuite mélangées afin d'obtenir une nouvelle population de taille  $n$ . Le processus se termine par l'application des opérateurs génétiques (croisement et mutation).

#### **b)- Sélection lexicographique**

Cette approche, proposée par Fourman [Fourman, 1985], elles classent les objectifs en fonction d'un ordre d'importance proposé par le décideur. Ensuite l'optimum est obtenu en optimisant tout d'abord la fonction objectif la plus importante puis la deuxième en intégrant les valeurs obtenues comme contraintes pour la résolution sur des objectifs moins prioritaire et ainsi de suite. La solution obtenue à l'étape  $k$  sera la solution du problème. Le risque essentiel de cette méthode est la grande importance attribuée aux objectifs classés en premier. La meilleure solution trouvée pour l'objectif le plus important va faire converger l'algorithme vers une zone restreinte de l'espace d'état et enfermer les points dans une niche.

### **2.4.3 Approches Pareto**

Dans un *PMO*, il existe un équilibre tel que l'on ne peut pas améliorer un critère sans détériorer au moins un des autres critères [Vilfredo Pareto 1896]. Cet équilibre a été appelé **Optimum de Pareto**, ou bien un point

non dominé.

### Notion de dominance

La notion de dominance consiste à attribuer un rang à chaque individu en favorisant la sélection des individus de rang le plus élevé pour rechercher une meilleure solution. Lorsqu'on résout un problème d'optimisation multi-objectif, on obtient une multitude de solutions. Seul un nombre restreint de ces solutions va nous intéresser. Pour qu'une solution soit intéressante, il faut qu'il existe une relation de dominance entre la solution considérée et les autres solutions, dans le sens suivant :

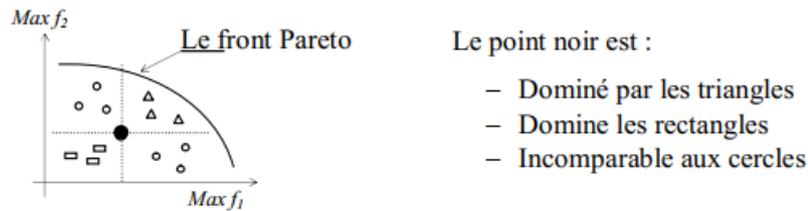


FIGURE 2.3 – Relation de dominance (Cas de deux objectifs à maximiser)

#### « dominance au sens Pareto »

Soient deux vecteurs objectifs  $Y^1, Y^2 \in \Psi$  tel que :  $Y^1 = F(S^1)$  et  $Y^2 = F(S^2)$ .

On dit que la solution  $S^1$  domine  $S^2$  ( $Y^1$  domine  $Y^2$ ) si et seulement si :

$Y^1 \succeq Y^2$  et  $Y^1 \neq Y^2$  (ie,  $y_k^1 \geq y_k^2$  pour tout  $k = 1, \dots, p$ , et  $y_k^1 > y_k^2$  pour au moins un  $k$ ).

On notera alors  $S^1 \succeq S^2$ .

Si  $S^1$  est meilleur que  $S^2$  sur tous les objectifs (ie,  $y_k^1 \geq y_k^2$  pour tout  $k = 1, \dots, p$ ) alors on dit que  $S^1$  domine fortement  $S^2$ ; On notera alors  $S^1 \succ S^2$ .

Lorsque ni  $S^1 \succeq S^2$ , ni  $S^2 \succeq S^1$ , alors on dit qu'elles sont incomparables ou Pareto équivalentes,  $S^1 \sim S^2$ .

La relation de **dominance** est une relation d'ordre partiel stricte transitive, non réflexive et non antisymétrique [Dupas 2004].

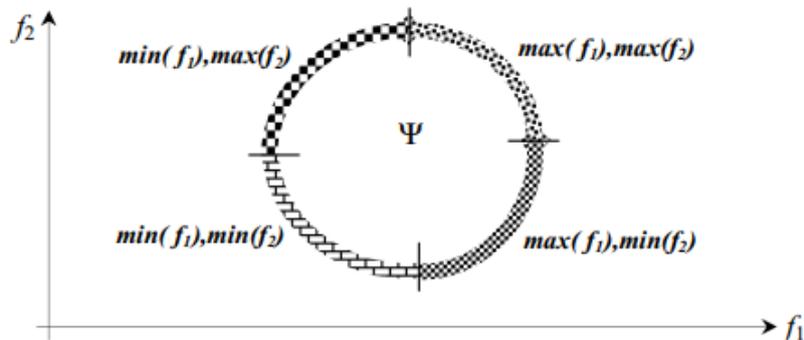


FIGURE 2.4 – allure de la frontière Pareto selon l'optimisation (minimisation, maximisation) des différents objectifs

#### Frontière de Pareto :

L'ensemble Pareto optimal  $PO = \{S \in \Omega, \neg \exists S' \in \Omega, F(S') \succeq F(S)\}$  L'image de l'ensemble Pareto optimal  $F(PO)$  dans l'espace objectif  $Y$  est appelée frontière Pareto, ou surface de compromis.

L'allure de cette frontière prend des formes différentes selon que les objectifs doivent être minimisés ou maximisés, cas de deux objectifs.

### La représentation de la surface de compromis

Toutes les représentations de la surface de compromis, pour un même problème, ne sont pas équivalentes. En effet, la représentation idéale de la surface de compromis devra être constituée de points solution de notre problème répartis de manière uniforme sur la surface de compromis.

Dans le cas où les points représentant la surface de compromis ne sont pas répartis de manière uniforme, l'utilisateur n'aura alors pas en sa possession un ensemble de solutions très utile .

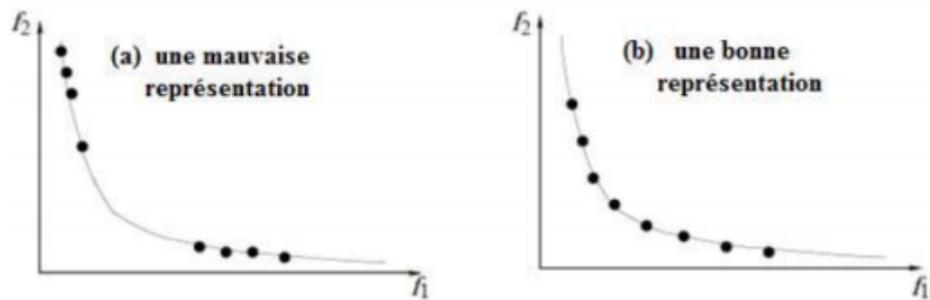


FIGURE 2.5 – représentation de la surface de compromis

### Conclusion

Dans ce chapitre nous avons introduit quelques notions de base concernant l'optimisation multi-objectif, à savoir la dominance, le front de Pareto et quelques approches de résolution qu'on va adopter lors du traitement de notre modèle d'optimisation multi-objectif pour un régime optimal.

# Algorithmes génétiques multi objectifs

## 3.1 Introduction

C'est en 1860 que Charles Darwin publie son livre intitulé L'origine des espèces au moyen de la sélection naturelle ou la lutte pour l'existence dans la nature. Dans ce livre, Darwin rejette l'existence «de systèmes naturels figés», déjà adaptés pour toujours à toutes les conditions extérieures, et expose sa théorie de l'évolution des espèces processus de reproductions.

Dans les années 1960, John Holland étudie les systèmes évolutifs et, en 1975, il introduit le premier modèle formel des algorithmes génétiques (the canonical genetic algorithm AGC) dans son livre "Adaptation in Natural and Artificial Systems". Il expliqua comment ajouter de l'intelligence dans un programme informatique avec les croisements (échangeant le matériel génétique) et la mutation (source de la diversité génétique). Ce modèle servira de base aux recherches ultérieures et sera plus particulièrement repris par Goldberg qui publiera en 1989, un ouvrage de vulgarisation des algorithmes génétiques, et ajouta à la théorie des algorithmes génétiques les idées suivantes :

- Un individu est lié à un environnement par son code d'ADN.
- Une solution est liée à un problème par son indice de qualité.

Les algorithmes génétiques sont des méthodes d'optimisation basés sur le processus d'évolution observé dans la nature. Ces algorithmes fondé par la théorie Darwin (théorie d'évolution) dans la modernisation et le développement. en raison de leur forte dépendance à la tradition du travail de gènes, au cours de leur recherche de la solution parfaite.

Les algorithmes génétiques appartiennent à la famille des algorithmes évolutionnistes. Leur but est d'obtenir une solution approchée à un problème d'optimisation, lorsqu'il n'existe pas de méthode exacte (ou que la solution est inconnue) pour le résoudre en un temps raisonnable. Nous pouvons dire l'algorithme génétique est une méthode de programmation qui repose sur le principe de l'évolution pour effectuer la recherche d'une solution adéquate d'un problème donné.

## 3.2 Principes de base de AG

Un algorithme génétique est un algorithme d'optimisation se basant sur des techniques dérivées de la génétique et des phénomènes biologiques, Ils manipulent une population de taille constante. Cette population est formée des points candidats appelés chromosomes et chaque chromosome est constitué d'un ensemble d'éléments

appelés gènes.

L'algorithme génétique nécessite tout d'abord le codage de l'ensemble des paramètres du problème d'optimisation. Le chromosome représente le codage d'une solution potentielle au problème à résoudre. Il s'agit de simuler l'évolution d'une population d'individus jusqu'à un critère d'arrêt. En commençant par la génération d'une population initiale d'individus (solutions) de façon purement aléatoire. Ensuite, à chaque itération (génération) des individus sont sélectionnés grâce à une fonction objective (fonction d'adaptation). Puis on applique les opérateurs de croisement et de mutation pour avoir une nouvelle population. Pour le croisement, il permet de générer deux chromosomes nouveaux "enfants" à partir de deux chromosomes sélectionnés "parents". La mutation, elle réalise l'inversion d'un ou plusieurs gènes d'un chromosome.

Ce processus est répété jusqu'à une condition d'arrêt, qui est souvent le nombre maximal de génération souhaitant effectué.

Les différents principes de l'algorithme génétique sont donnés par le pseudo code suivant :

<b>Principe des algorithmes génétiques</b>
Initialiser la population initiale $P$
Evaluer $P$
Calcul de la fonction sélective
<b>TantQue</b> (Pas de critère d'arrêt) <b>faire</b>
$P' =$ <b>Sélection</b> des Parents dans $P$
$P' =$ Appliquer Opérateur de <b>Croisement</b> sur $P'$
$P' =$ Appliquer Opérateur de <b>Mutation</b> sur $P'$
$P =$ Remplacer les Anciens de $P$ par leurs Descendants de $P'$
Evaluer $P$
<b>FinTantQue</b>

### 3.2.1 Codage de données

Le code individuel de population utilisé par l'algorithme génétique est représenté par une chaîne de bits, qui contient toutes les informations nécessaires pour décrire un point dans l'espace d'états.

L'avantage de ce codage est que vous pouvez créer des opérateurs Crossover et Simple Mutation. Ensuite, nous pouvons diviser les types de codage en deux types, à savoir le codage binaire et le codage en nombre réel .

**Codage binaire :** chaque gène représenté par des 0 et des 1, les chromosomes qui sont des suites de gènes sont représentés par des tableaux de gènes et les individus de notre espace de recherche sont représentés par des tableaux de chromosomes.

**Codage réel :** chaque gène représenté par des valeurs réelles. C'est le plus utilisé dans le cas où l'on recherche le maximum d'une fonction réelle.

### 3.2.2 Evaluation de la population initiale

Au niveau de cette étape, on s'intéresse à calculer la force de chaque chromosome ce qui permet de retenir les individus les plus forts lors de la sélection. Soit  $C(x)$  la valeur du critère optimiser pour l'individu  $x$ . La fonction force  $F(x)$  de l'individu proposée par Goldberg est donnée par :

$$F(x) = \begin{cases} C_{max} - C(x) & \text{si } C(x) \geq 0 \\ 0 & \text{si } C(x) < 0 \end{cases}$$

où  $C_{max}$  est un coefficient qui désigne la plus grande valeur observée de  $C(x)$ .

### 3.3 Les opérateurs de AG

#### 3.3.1 Opérateur sélection

La sélection consiste à choisir les individus les mieux adaptés afin d'avoir une population de solution la plus proche de converger vers l'optimum global. Il existe plusieurs technique de sélection, nous donnons ici les techniques les plus usitées.

La sélection par la roulette

La sélection par la roulette se base sur le principe de création d'une roue de loterie biaisée Chaque section de la roue est occupée par un individu de la population, et comme ça même les individus les moins adaptés ont une chance de survivre. Si la population d'individus est de taille égale à  $N$ , alors la probabilité de sélection d'un individu  $x_i$  notée  $p(x_i)$  est égale à :

$$p(x_i) = \frac{f(x_i)}{\sum_{k=1}^N f(x_k)}$$

En pratique, on calcule pour chaque individu  $x_i$  sa probabilité cumulée  $q_i = \sum_{j=1}^i p(x_j)$  et on choisi aléatoirement un nombre compris entre 0 et 1.

L'individu retenu est  $x_1$  si  $q_1 \geq r$  ou  $x_i$ , ( $0 \leq i \leq 1$ ) si  $q_{i-1} \leq r \leq q_i$  Ce processus est répété  $N$  fois.

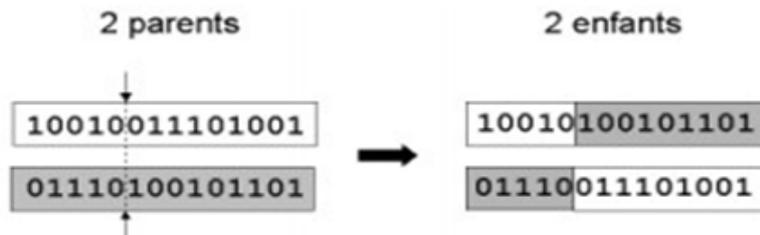
#### La sélection par tournois

On effectue un tirage aléatoirement de deux individus de  $P$ , et on les fait "combattre". Celui qui a la fitness la plus élevée l'emporte. On répète ce processus  $n$  fois de manière à obtenir les  $n$  individus de  $P'$ . L'avantage de ce type de sélection est d'éviter qu'un individu mieux adapté soit sélectionné plusieurs fois.

#### 3.3.2 Opérateur de croisement

Le croisement a pour but d'enrichir la diversité de la population en manipulant la structure des chromosomes. Classiquement, les croisements sont envisagés avec deux parents et génèrent deux enfants. Au fait, pour garder quelques individus parents dans la population suivante, on associe à notre algorithme une probabilité de croisement, qui permet de prendre la décision d'appliquer le croisement sur les parents ou de les recopier simplement dans la prochaine population.

Il existe plusieurs types d'opérateur de croisement qui se diffèrent selon le type de codage et la nature du problème à résoudre. On s'intéresse dans ce partie à étudier le croisement en binaire ce type de croisement est le plus simple et le plus connu, son principe est de choisir un point de croisement par hasard pour chaque couple de chromosomes. Les gènes situés après ce point sont par la suite inter-changés pour construire les deux enfants.



**Figure 1** : croisement en un point.

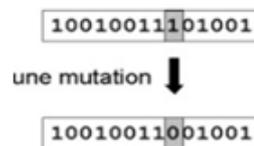
Ce principe peut être étendu au croisement  $n$ -points, où  $n$  représente le nombre de point de croisement en générant  $n + 1$  sous chromosomes qui sont recombinaisonnés pour créer deux chromosomes enfants. En particulier pour  $n=2$ , la figure 2 montre bien cette situation.



**Figure 2** : croisement en deux point

### 3.3.3 Opérateur de mutation

La mutation peut être définie comme une modification aléatoire d'une partie d'un chromosome afin d'éviter la perte de diversité de la population. Le changement soudain du code binaire est le changement aléatoire accidentel (faible probabilité) de la valeur de caractère dans la chaîne.



**Figure 3** : Mutation portant sur un chromosome

#### Note :

Pour arrêter l'algorithme, nous devons définir le nombre maximum de générations que nous voulons avoir. Lorsque la population cesse d'évoluer ou qu'il y a une population homogène le processus peut également être arrêté.

#### Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié les algorithmes génétiques standard, qui sont des algorithmes d'optimisation plus importants pour estimer des solutions à des problèmes plus complexes. Puis nous avons présenté les éléments et les principaux opérateurs de l'algorithme génétique. Dans le prochain chapitre, nous appliquerons cet algorithme génétique pour dresser des régimes optimaux minimisant la charge glycémique totale.

## 3.4 Algorithmes génétiques pour l'optimisation multiobjectifs

### 3.4.1 Introduction

Dans ce rapport, nous proposons un cadre d'algorithmes génétiques pour rechercher des solutions Pareto optimales (c'est-à-dire des solutions non dominées) de problèmes d'optimisation multi-objectifs,

Notre approche diffère des algorithmes génétiques à objectif unique dans sa procédure de sélection et sa stratégie de préservation de l'élite.

**La procédure de sélection** de nos algorithmes génétiques sélectionne les individus pour une opération de croisement basée sur une somme pondérée de multiples fonctions objectives.

**La stratégie de préservation de l'élite** dans nos algorithmes génétiques utilise plusieurs solutions d'élite au lieu d'une seule. C'est-à-dire qu'un certain nombre d'individus sont sélectionnés dans un ensemble provisoire de solutions optimales de Pareto et transmis à la génération suivante en tant qu'individus d'élite.

Les Algorithmes Génétiques ont été principalement appliqués aux problèmes d'optimisation à objectif unique. Cependant, de nombreux problèmes du monde réel ont des fonctions à objectifs multiples.

Depuis les travaux de Schaffer, quelques études ont été tentées pour appliquer les algorithmes génétiques aux problèmes d'optimisation multi-objectifs.

Schaffer a proposé l'algorithme génétique évalué par vecteur (VEGA) pour trouver les solutions Pareto optimales de problèmes d'optimisation multi-objectifs.

Dans le VEGA, une population est divisée en sous-populations disjointes qui sont régies par des fonctions objectives différentes.

Bien que Schaffer ait rapporté quelques résultats positifs, le VEGA semble ne pouvoir trouver que des solutions extrêmes sur le front de Pareto.

La figure 2 montre les directions de recherche dans le VEGA.

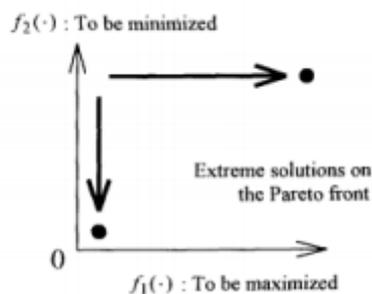


FIGURE 3.1 – Directions de recherche dans VEGA

Comme le montre la Fig.3,1 le VEGA peut trouver des solutions extrêmes car les directions recherche sont parallèles aux axes de l'espace objectif.

Schaffer a proposé deux approches pour améliorer le VEGA.

La première consiste à fournir une préférence de sélection heuristique pour les individus non dominés dans chaque génération .

L'autre consiste à effectuer des croisements entre les espèces "en ajoutant une sélection du partenaire".

L'objectif des problèmes d'optimisation multi-objectifs est de trouver tous les compromis possibles entre plusieurs fonctions objectives qui sont généralement contradictoires.

Comme il est difficile de choisir une solution unique pour un problème d'optimisation multiobjectif sans interaction itérative avec le décideur, une approche générale consiste à montrer l'ensemble des solutions optimales de Pareto au décideur.

Ensuite, l'une des solutions optimales de Pareto peut être choisie en fonction de la préférence

Dans ce document, nous proposons un algorithme génétique multi multi-objectifs (MOGA) avec plusieurs directions de recherche, comme le montre la Figure 3.2

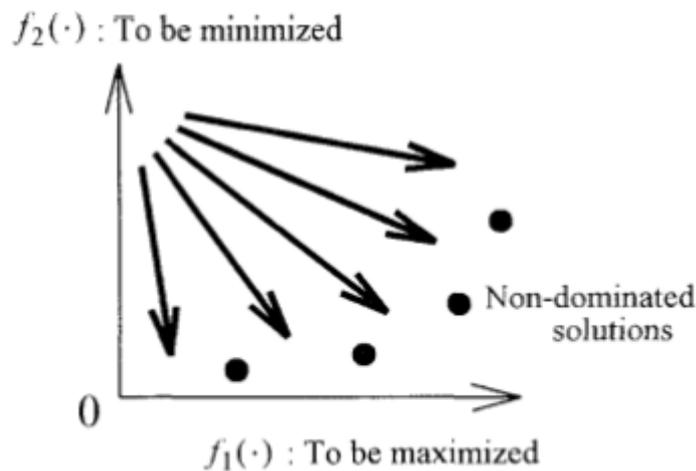


FIGURE 3.2 – Directions de recherche dans **MOGA**

Dans la procédure de sélection sélection, notre MOGA utilise une somme pondérée de fonctions multiples objectives pour les combiner en une fonction de forme scalaire

La direction dans les algorithmes génétiques est fixée comme indiqué dans la Figure 3.3 Nous proposons donc une procédure de de sélection avec des pondérations aléatoires pour rechercher des solutions optimales de pareto en utilisant des directions de recherche différentes, comme comme le montre la Figure 3.2 , Lorsqu'une paire d'individus est sélectionnée pour l'opération de croisement , nous attribuons un nombre réel aléatoire à chaque poids comme suit :

$$w_i = \frac{rand_i(.)}{\sum_{j=1}^n rand_j(.)} \quad i = 1, \dots, n \quad (2)$$

où  $rand_j(.)$  est un nombre aléatoire non négatif.

D'après (2), on peut voir que  $w_i$  est un nombre réel dans l'intervalle fermé  $[0, 1]$ .

Le paire suivante de chaînes de caractères est sélectionnée avec des valeurs de poids différentes nouvellement données par (2), et et ainsi de suite.

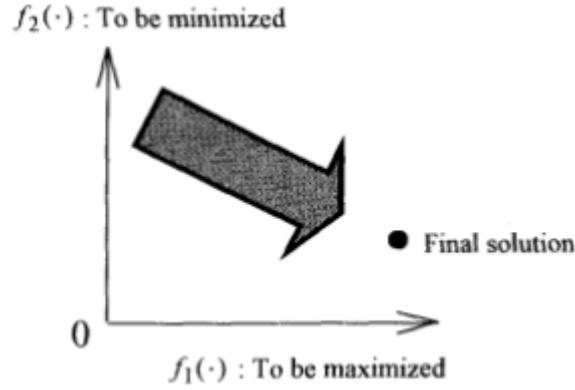


FIGURE 3.3 – Directions de recherche dans les algorithmes génétiques GA

### 3.4.2 Stratégie de réserve d'élite

Au cours de l'exécution du MOGA, une tentative ensemble de solutions optimales de Pareto est stocké et mis à jour à chaque génération.

Un certain nombre (*say*,  $N_{elite}$ ) des individus sont choisis au hasard dans l'ensemble à chaque génération.

Ces solutions sont utilisées comme élite individus dans notre MOGA.

Cette stratégie de réserve d'élite a un effet sur le maintien de la variété de chaque population dans notre MOGA.

Le schéma de principe du MOGA proposé est présenté à la Fig.4 et il est décrit ci-dessous.

**Étape 0 (Initialisation)** : Générer une population initiale contenant  $N_{pop}$  chaînes de caractères où  $N_{pop}$  est le nombre de chaînes de caractères dans chaque population.

**Étape 1 (Evaluation)** : Calculer les valeurs des fonctions objectives pour les chaînes générées.

Mettre à jour une liste provisoire de solutions optimales de Pareto.

**Étape 2 (Sélection)** : Calculer la valeur de fitness de chaque chaîne en utilisant les poids aléatoires  $w_i$  est dans (2). Sélectionner une paire de chaînes de la population actuel en fonction de la probabilité de sélection suivante.

La probabilité de sélection  $P(x)$  d'une chaîne de caractères  $x$  dans une population  $\Phi$  est spécifiée comme suit :

$$p(x) = \frac{f(x) - f_{min}(x)}{\sum_{x \in \Phi} f(x) - f_{min}(x)} \quad (3)$$

où

$$f_{min}(\Phi) = \min\{f(x) \mid x \in \Phi\} \quad (4)$$

Cette étape est répétée pour sélectionner  $\frac{N_{pop}}{2}$  paires de chaînes de caractères à partir des populations actuelles.

**Étape 3 (Crossover)** : Pour chaque paire sélectionnée, appliquez une opération de croisement pour générer deux nouvelles chaînes de caractères.

$N_{pop}$  nouvelles chaînes de caractères sont générées par l'opération de croisement.

**Étape 4 (Mutation)** : Pour chaque valeur binaire des chaînes générées par l'opération de croisement, appliquez une opération de mutation avec une probabilité de mutation prédéfinie.

**Étape 5 (stratégie d'élitisation)** : retirer de façon aléatoire  $N_{elite}$  des chaînes de l'ensemble des  $N_{pop}$ , chaînes générées par les opérations précédentes, et les remplacer par  $N_{elite}$ , chaînes sélectionnées aléatoirement à partir d'une liste provisoire ensemble de solutions optimales de Pareto.

**Étape 6 (test d'arrêt)** : Si une condition d'arrêt pré-spécifiée n'est pas satisfaite, retour à l'étape 1.

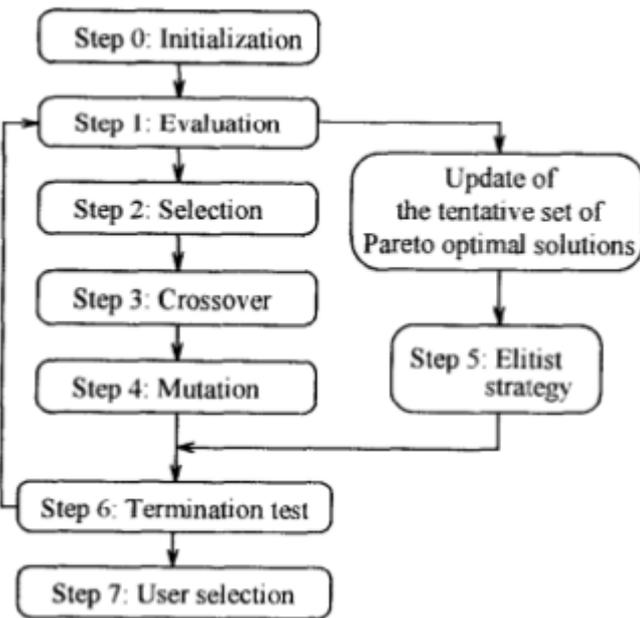


FIGURE 3.4 – Le diagramme de recherche des algorithmes génétiques multi-objectif

**Étape 7 (Sélection de l'utilisateur) :** Le MOGA présente l'ensemble final de solutions Pareto optimales au décideur.

La meilleure solution est alors sélectionnée selon la préférence du décideur.

Les opérations génétiques telles que le croisement et la mutation sont décidées en fonction de la caractéristique du problème à résoudre.

#### Conclusion :

Dans ce chapitre, nous avons étudié les algorithmes génétiques standard, qui sont des algorithmes d'optimisation plus importants pour estimer des solutions à des problèmes plus complexes. Puis nous avons présenté les éléments et les principaux opérateurs de l'algorithme génétique. Dans le prochain chapitre, nous appliquerons cet algorithme génétique pour dresser des régimes optimaux minimisant la charge glycémique totale.

# Optimisation multi-objectives pour le problème du régime optimal

## 4.1 Nutriment de base

Connaître le rôle et les effets des nutriments influence la façon dont nous choisissons nos repas quotidiens pour une bonne santé et un corps sain. Dans ce paragraphe, nous allons présenter ces nutriments et déterminer leurs effets sur le corps.

### Acides gras saturés (SF)

**Définition :** les acides gras saturés sont des molécules lipidiques au sein desquelles tous les atomes de carbone portent le maximum d'atomes d'hydrogène possible. Aucun atome d'hydrogène ne peut être ajouté.

**Le rôle des SF dans le corps :** les acides gras saturés sont bons pour l'organisme car ils lui fournissent de l'énergie et lui apportent des vitamines (A,D,E et K) .

**Effets négative des SF sur le corps :** une consommation excessive d'acides gras saturés peut également augmenteraient le mauvais cholestérol dans le sang, ce qui provoquerait, par une série de réactions métaboliques, des dépôts dans les artères qui empêcheraient le sang de bien circuler.

### Calcium

**Définition :** le calcium est l'élément chimique de numéro atomique 20, de symbole Ca. Le corps humain contient de 1000g à 1200g de calcium. Dont pratiquement 99% sont localisés dans les os et les dents (sous forme de phosphate de calcium).

**Le rôle du calcium dans le corps :** la consommation quotidienne d'aliments riches en calcium a des effets positifs sur la santé du corps, notamment :

- Préserve la santé des os et des dents.
- Aide à prévenir la déminéralisation osseuse (ostéomalacie) et l'ostéoporose.
- Intervient dans la contraction cardiaque et musculaire, la transmission de l'influx nerveux et la coagulation du sang.
- Pourrait abaisser la tension artérielle des hypertendus et le risque de cancer du côlon et de la prostate.

**Effets négative du nutriment sur le corps :** organisme puise dans ses réserves osseuses. À long terme, si les apports calciques quotidiens sont insuffisants, ces ponctions risquent de rendre les os poreux et fragiles.

## Carbohydate

**Définition :** carbohydate est une classe de composés organiques. Il existe deux types de carbohydate : les carbohydates simples et les carbohydate complexe.

Les carbohydates simples comprennent le glucose, le fructose, et le galactose qui peuvent à leurs tour former du saccharose(=sucre du table), du lactose ou du maltose.

Les carbohydates complexes comprennent l'amidon, le glycogène ainsi que les fibres.

**Le rôle du calcium dans le corps :** le principal rôle des carbohydates est de fournir de l'énergie aux cellules du corps humain (1g de carbohydates fournit 4 calories).

Lorsque nous les mangeons, ils se transforment plus ou moins rapidement en glucose, qui est le carburant de certaines cellules du corps. C'est le cas des cellules des cerveaux. Notez que le glucose est le carburant exclusif du cerveau, qui en a besoin d'environ 140g par jour.

**Effets négative du nutriment sur le corps :** un régime alimentaire très faible en carbohydate (en dessous de la quantité minimale risque pour le cerveau) peut entraîner l'augmentation de la production de cétones et donc, une perte de densité minérale osseuse, l'hypercholestérolémie, l'augmentation du risque de lithiases urinaires et même nuire au développement et au fonctionnement du système nerveux. Des apports très bas en carbohydates peuvent également altérer la sensation de bien-être(malaise, fatigue).

## Calorie

**Définition :** la calorie est une unité de mesure d'énergie. En nutrition, on utilise toujours la grande calorie que l'on abrège kilocalorie (kcal). Dans le jargon courant, on néglige le préfixe et on parle de «calories» en pensant implicitement aux « kilocalories».

**Le rôle des calories dans le corps :** les calories sont le carburant ou l'énergie qu'une personne obtient par la boisson et la nourriture, qu'une personne utilise dans ses activités physiques et mentales telles que parler, marcher, manger, penser et respirer.

**Effets négative du nutriment sur le corps :** ne pas manger suffisamment de nourriture signifie consommer moins de calories que le corps n'en a besoin pour fonctionner, ce qui peut affecter gravement les niveaux d'énergie, la fatigue physique et la fatigue mentale qui peuvent altérer les fonctions quotidiennes d'une personne, et un faible niveau d'énergie peut affecter né.

## Cholestérol

**Définition :** le cholestérol est un lipide, il fait partie de la famille des stérols. Sa formule brute est C<sub>27</sub>H<sub>46</sub>O . Le cholestérol est présent dans l'organisme au niveau du foie, du cerveau et de la moelle épinière. Le cholestérol est fabriqué par l'organisme à près de 70% , le reste est apporté par l'alimentation.

**Le rôle du cholestérol dans le corps :** parmi les rôles du cholestérol dans l'organisme on a :

- Constituant des membranes cellulaires.
- Production de sels biliaires.
- Synthèse de la vitamine D.

**Effets négative du nutriment sur le corps :** en effet, l'excès de cholestérol favorise l'encombrement des

artères et des petits vaisseaux et expose à un risque plus élevé d'accident cardiovasculaire.

### **Fibres alimentaires (tdf)**

**Définition :** les fibres alimentaires font partie de la famille des glucides. Ce sont des polysaccharides à chaîne plus ou moins longue que l'homme ne sait pas digérer. On les retrouve dans les aliments d'origine végétale et il en existe de deux types : les fibres solubles et les fibres insolubles.

**Le rôle des fibres alimentaires dans le corps :** parmi les bienfaits de fibres alimentaires :

- Diminuent la charge glycémique.
- Protègent de certains cancers digestifs.
- Les fibres, qu'elles soient solubles ou insolubles, ont un effet positif sur le transit intestinal. En se gonflant d'eau, elles augmentent le poids et le volume du bol alimentaire et facilitent son évacuation. Consommer suffisamment de fibres alimentaires permet donc de lutter contre la constipation et de réguler le transit.

**Effets négative du nutriments sur le corps :** une alimentation dépourvu de fibres alimentaires est peu rassasiant et peut entraîner de la constipation. Même s'il n'y a pas de pathologie liées directement à une carence en fibres, elles peut favoriser l'apparition de certaines maladies telles que le diabète de type 2 et favoriser l'hypercholestérolémie.

### **Iron**

**Définition :** le iron est l'élément chimique de numéro atomique 26, de symbole Fe.

Indispensable à l'organisme, le fer est présent à raison de 4g environ chez un homme adulte, et 2,5 g chez la femme.

**Le rôle de l'iron dans le corps :** parmi les effets bénéfique du iron sont :

- Traite l'anémie ferriprive.
- Souvent utile aux personnes qui pratiquent un régime végétarien.
- Parfois utile aux femmes enceintes et à celles qui ont des règles abondantes ; dans toute autre situation, sur avis médical.

**Effets négative du nutriments sur le corps :** beaucoup de gens ont une alimentation carencée en fer et ignorent qu'un tel déficit peut être à l'origine de fatigue, de difficultés de concentration et d'une moindre résistance aux infections.

### **Lipides (tf)**

**Définition :** les lipides constituent la matière grasse des êtres vivants. Ce sont des molécules hydrophobes ou amphiphiles — molécules hydrophobes possédant un domaine hydrophile — très diversifiées, comprenant entre autres les graisses, les cires, les stérols, les vitamines liposolubles, les mono-, di- et triglycérides, ou encore les phospholipides.

**Le rôle des lipides dans le corps :** certains acides gras sont dits essentiels car le corps ne peut pas les synthétiser. Contrairement aux protéines et aux glucides qui fournissent 4 kcal par gramme, les lipides fournissent 9 kcal par gramme. Ils jouent un rôle important au niveau des membranes des cellules du corps humain. **Effets négative du nutriments sur le corps :** l'obésité et il existe également un lien entre des apports élevés en lipides et un risque augmenté de maladies cardiovasculaires, cancer et résistance à l'insuline menant au diabète

de type 2. Pour ne pas noyer ce chapitre par des connaissances nutritionnelles, nous avons mis en annexe le reste des informations sur les nutriments de base.

## 4.2 Problème du régime optimal

### Données :

Un ensemble des aliments caractérisés par les valeurs nutritives :

charge glycémique, vitamines, calcium, phosphore, Magnésium,...., Ces composants sont répartis en deux groupes :

#### Nutriments positifs :

(Calories, Protein, Carbohydrate, Potassium, Magnesium, fibres alimentaires (tdf), Calcium, Iron, Phosphorus, Zinc, Vitamin b6,b12, C, A, E) .

#### Nutriments négatifs :

(acide gras saturés(sf), Sodium, Cholesterol, Lipides (tf)).

$c_i$  : vecteur des calories provenant des nutriments  $i$  de  $\{car, p, tf, sf\}$ .

#### Exigences :

- Minimums nécessaires en nutriments positifs :

$bc = 2.000 \text{ kcal}, bp = 91 \text{ g}, bcar = 271 \text{ g}, bpo = 4044 \text{ mg}, bmg = 380 \text{ mg}, btdf = 31 \text{ g}, bca = 1316\text{mg}, bir = 18\text{mg}, bph = 1740\text{mg}, bz = 14\text{mg}, bvb6} = 2.4\text{mg}, bvb12} = 8.3\text{g}, bvc = 155\text{mg}, bva = 1052\mu\text{g}, bve = 9.5\text{mg}.$

- Maximums tolérables en nutriments négatifs :

$fsf = 17\text{g}, fs = 1.779\text{mg}, fch = 230\text{mg}, ftf = 65\text{g}.$

-  $r_i$  pourcentage du nombre de calories totaux des nutriments  $i$  de  $\{car, p, tf, sf\}$  du total des calories de repas d'une journée :  $r_p = 18\%, r_{car} = 55\%, r_{sf} = 7\%.8 \text{ et } r_{tf} = 29\%.$

#### Inconnus :

Les quantités optimales de chaque aliment qui vérifie toutes les exigences et dont **la charge glycémique et le coût** totales sont minimales.

### Modélisation du problème de régime optimal

#### Symboles :

Nous donnons dans ce qui suit les différents symboles que nous avons adoptés au cours du processus de modélisation du problème de régime.

Matrices :  $A = (\text{nombre de nutriments positifs}, \text{nombre d'aliments}) = (15, 177)$  ;

Matrice :  $E = (\text{nombre de nutriments négatifs}, \text{nombre d'aliments}) = (4, 177)$  ;

Vecteurs :  $b = (15, 1)$  vecteur des minimums nécessaires en nutriments positifs ;

Vecteurs :  $f = (4, 1)$  vecteur des maximums tolérables en nutriments négatifs ;

$A_c$  : vecteur ligne correspond au nutriment positif "calories" ;

$c_i$  : vecteur des calories provenant du nutriment  $i$  de  $\{car, p, tf, sf\}$  ;

$g$  : vecteur des charges glycémiques générées par chaque aliment.

$C$  : vecteur des coûts des aliments.

#### Variables :

On définit  $x_j$  comme la quantité de l'aliment  $j$  adoptée dans notre régime. Ainsi, on définit le vecteur  $x = (x_j)_{1 \leq j \leq 177}$ .

**Première fonction objective :**

Si on décide de prendre la quantité  $x_j$  de l'aliment  $j$ , la charge glycémique associée à cette quantité est de  $g_j$ . Donc la charge glycémique générée par une décision  $x$  est de  $g^T x$ ; c'est cette quantité qu'on doit minimiser (Fonction objective).

**Dexième fonction objective :**

Le coût de l'alimentation  $C^T x$  où  $C = (C_1, \dots, C_{177})^T$  est un vecteur dont les composantes représentent le coût des aliments.

**Contraintes :****Contrainte sur les nutriments positifs :**

- Si on adopte la décision  $x = (x_j)_{1 \leq j \leq 177}$ ,  $Ax = (\sum_{j=1}^{177} a_{ij} x_j)_{1 \leq i \leq 15}$  est le vecteur de 15 lignes dont chacune représente la quantité totale de chaque nutriment positif offerte par notre régime.

Comme  $b = (b_i)_{1 \leq i \leq 15}$ , où  $b_i$  représente le minimum nécessaire de chaque nutriment positive  $i$  dans le régime, alors on a la famille de contraintes suivante  $Ax \geq b$ .

- Le total des calories provenant de carbohydate doit faire au moins  $r_{car} = 55\%$  des calories provenant de tout les nutriments positives de régime; d'où on la contraintes  $c_{car}^T x \geq 0.55(A_c^T x)$ .

- Le total des calories provenant de Protein doit faire au moins  $r_p = 18\%$  des calories provenant de tout les nutriments positives de régime; d'où on la contraintes  $c_p^T x \geq 0.18(A_c x)$ .

**Contraintes sur les nutriments négatifs :**

- Si on adopte la décision  $x = (x_j)_{1 \leq j \leq 177}$ ,  $Ex$  est le vecteur de 4 lignes dont chacune représente la quantité totale de chaque nutriment négatif offerte par notre régime.

Comme  $f$  représente le maximum total total de chaque nutriment négatif, alors on a la famille de contraintes suivante  $Ex \leq f$ .

-Le total des calories provenant de gras total doit faire au maximum  $r_{tf} = 29\%$  des calories provenant de tout les nutriments positives de régime; d'où on la contraintes  $c_{tf}^T x \leq 0.29(A_c^T x)$ .

- Le total des calories provenant de gras saturé doit faire au maximum  $r_{sf} = 7.8\%$  des calories provenant de tout les nutriments positives de régime; d'où on la contraintes  $c_{sf} x \leq 0.078(A_c x)$ .

**Problème final :**

Le modèle mathématique la moins coûteuse minimisant la charge glycémique total et qui assure le minimum nécessaire en nutriments positifs et limite la consommation des nutriments négatifs est donné par :

$$\min \quad g^T x, \min \quad C^T x \quad (4.1)$$

$$(P) \quad s.c : \quad Ax \geq b \quad (4.2)$$

$$E.x \leq f \quad (4.3)$$

$$c_i^T x \geq r_i (A_c^T x) \quad i \in \{car, p\} \quad (4.4)$$

$$c_i^T x \leq r_i (A_c^T x) \quad i \in \{tf, sf\} \quad (4.5)$$

$$x \geq 0 \quad (4.6)$$

Dans le chapitre suivant, nous allons utilisé les algorithmes génétique pour générer des régimes optimaux.

## 4.3 Optimisation robuste

Dans ce paragraphe, on va présenter quelques approches, dites robustes, qui permettent de traiter des programmes linéaires contenant des données incertaines où l'ensemble d'incertitude adopté pour modéliser les coefficients de la matrice  $A$  est un modèle par intervalles.

### 4.3.1 Les approches robustes générales

#### Incertitudes portant sur la matrice des contraintes

Dans un programme linéaire, considérer que les incertitudes portent sur les coefficients de la matrice des contraintes revient à considérer que le domaine des solutions réalisables est incertain. La préoccupation de la réalisabilité est donc une considération centrale lors de la recherche de solutions robustes pour ce problème incertain. Nous verrons dans ce qui suit, comment chacune des approches présentées définit une solution robuste et de quelle manière la réalisabilité du problème est prise en compte. Soit le programme linéaire  $(P^A)$  s'écrivant sous la forme suivante :

$$\min \quad cx \tag{4.7}$$

$$(P^A) : \quad Ax \leq b \tag{4.8}$$

$$x \geq 0 \tag{4.9}$$

où  $x$  est une matrice colonne de taille  $n$  qui représente les variables du problème. Le coût  $c$  est une matrice ligne de taille  $n$ , la matrice  $A$  des contraintes de taille  $m \times n$  et le second membre  $b$  est une matrice colonne de taille  $m$ . Supposons que l'incertitude porte uniquement sur les coefficients de la matrice des contraintes  $A$  et que le domaine réalisable est non vide, quelle que soit la réalisation de l'incertitude.

L'ensemble d'incertitude adopté pour modéliser les coefficients de la matrice  $A$  est un modèle par intervalles, que nous définissons de la manière suivante : pour tout  $i = 1 \dots m$  et  $j = 1 \dots n$ , le paramètre  $a_{ij}$  appartient à  $[\bar{a}_{ij} - \hat{a}_{ij}, \bar{a}_{ij} + \hat{a}_{ij}]$ , où  $\bar{a}_{ij}$  représente la valeur nominale du coefficient  $a_{ij}$  et  $\hat{a}_{ij}$  (avec  $\hat{a}_{ij} \geq 0$ ) sa déviation maximale. En d'autres termes,

$$a_{ij} = \bar{a}_{ij} + \hat{a}_{ij}\xi_{ij}$$

avec

$$\xi_{ij} \in [-1, 1]$$

#### Approche de Soyster

L'approche de Soyster (1973) est l'une des premières approches référencées dans la littérature pour la détermination de solutions robustes au problème  $(PA)$ . Son principe rejoint celui du critère du pire cas décrit précédemment, où la solution doit, pour être qualifiée de robuste, être acceptable (réalisable) quel que soit le scénario qui se réalise.

La version robuste, notée  $(P^A)_{soyster}$ , associée au problème  $(P^A)$  selon cette approche s'écrit :

$$\min \sum_{j=1}^n c_j x_j \quad (4.10)$$

$$(P^A) : \quad s.c. \sum_{j=1}^n (\bar{a}_{ij} + \hat{a}_{ij} \xi_{ij}) x_j \leq b_i \quad \forall \xi_{ij} \in [-1, 1] \quad i = 1 \dots m \quad (4.11)$$

$$x_j \geq 0 \quad j = 1 \dots n \quad (4.12)$$

qui revient à résoudre :

$$\min \sum_{j=1}^n c_j x_j \quad (4.13)$$

$$(P^A)_{Soyster} : \quad s.c. \sum_{j=1}^n \bar{a}_{ij} x_j + \max_{\xi_{ij} \in [-1, 1]} \hat{a}_{ij} \xi_{ij} x_j \leq b_i \quad i = 1 \dots m \quad (4.14)$$

$$x_j \geq 0 \quad j = 1 \dots n \quad (4.15)$$

Dans notre cas, puisque les variables  $x_j, j = 1 \dots n$  sont non négatives, et que les coefficients sont indépendants, la version robuste de  $(P^A)$  selon l'approche de Soyster correspond au programme linéaire suivant :

### Approche de Ben-Tal et Nimerovski (1999,2000)

Consiste à chercher des solutions robustes moins conservatives que les solutions de pire cas, et cela en utilisant un domaine d'incertitude qui exclut les valeurs extrêmes des intervalles. En effet, la modélisation proposée ne situe plus les scénarios sur les extrémités des intervalles, mais sur les bords d'ellipsoïdes inscrits dans les intervalles de variation. Pour ce faire, les auteurs imposent, pour toute contrainte  $i, i = 1 \dots m$  du programme linéaire incertain  $P^A$ , que les déviations maximales sur une même contrainte  $i$  appartiennent à un ellipsoïde défini par :

$$\Theta_i(\Omega_i) = \{ \xi_i \in \mathbb{R}^n \mid \sqrt{\sum_{j=1}^n \xi_{ij}^2} \leq \Omega_i, \xi_{ij} \in [-1, 1] \}$$

avec  $\Omega_i \geq 0, i = 1 \dots m$ .

Ce modèle d'incertitude est souvent nommé dans littérature par modèle en ligne, du fait qu'un paramètre  $\Omega_i$  soit défini pour chaque contrainte  $i$ .

Selon l'approche de Ben-Tal et Nimerovski (1999), la version robuste du problème  $(P^A)$  consiste à se placer dans le pire cas dans le domaine s'écrit  $\Theta_i(\Omega_i)$  et s'écrit :

$$\min \sum_{j=1}^n c_j x_j \quad (4.16)$$

$$P^A(\Omega)_{BenTal} : \quad s.c. \sum_{j=1}^n \bar{a}_{ij} x_j + \max_{\xi_i \in \Theta_i(\Omega_i)} \sum_{j=1}^n \hat{a}_{ij} \xi_{ij} x_j \leq b_i \quad i = 1 \dots m \quad (4.17)$$

$$x_j \geq 0 \quad j = 1 \dots n \quad (4.18)$$

où  $\Omega$  représente le vecteur des paramètres  $(\Omega_1, \dots, \Omega_m)$ . Il est possible de simplifier le problème en employant le lemme suivant :

**lemme 1.** Soit  $p$  un réel (avec  $p > 1$ ), et soit  $q$  un réel tel que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ .

Pour tout vecteurs  $d, \xi \in \mathbb{R}^n$  et un réel positif  $k$ , nous avons :

$$\max_{\|\xi\|_p \leq k} d^T \xi = k \|d\|_q.$$

Il découle de ce Lemme que le problème  $P^A(\Omega)_{BenTal}$  est équivalent à :

$$\min \sum_{j=1}^n c_j x_j \quad (4.19)$$

$$P^A(\Omega)_{BenTal} : \quad s.c. \sum_{j=1}^n \bar{a}_{ij} x_j + \Omega_i \sqrt{\sum_{j=1}^n \hat{a}_{ij}^2 x_j^2} \leq b_i \quad i = 1 \dots m \quad (4.20)$$

$$x_j \geq 0 \quad j = 1 \dots n \quad (4.21)$$

il suffit de prendre pour toute contrainte  $i$  :

$d_j = (\hat{a}_{ij} x_j)_{j=1 \dots n}$  et  $k = \Omega_i$  et  $p = q = 2$  et  $\xi = \xi_i = (\xi_{ij})_{j=1 \dots n}$  on a donc :

$$\max_{\|\xi_i\|_2 \leq \Omega_i} d_i^T \xi_i = \Omega_i \|d_i\|_2.$$

qui revient au problème quadratique suivant :

$$\min \sum_{j=1}^n c_j x_j \quad (4.22)$$

$$P^A(\Omega)_{BenTal} : \quad s.c. \sum_{j=1}^n \bar{a}_{ij} x_j + \Omega_i z_i \leq b_i \quad i = 1 \dots m \quad (4.23)$$

$$\sum_{j=1}^n \hat{a}_{ij}^2 x_j^2 \leq z_i^2 \quad i = 1 \dots m \quad (4.24)$$

$$z_i \geq 0 \quad i = 1 \dots m \quad (4.25)$$

$$x_j \geq 0 \quad j = 1 \dots n \quad (4.26)$$

Le problème robuste  $P^A_{BenTal}$  est non linéaire mais de type conique quadratique.

### approche de Bertsimas et Sim(2004)

L'approche que Bertsimas et Sim présentent est similaire à l'approche de Ben-Tal et Nemirovski.

La différence entre les deux approches est uniquement l'ensemble d'incertitude de  $\xi_i$ .

En effet, nous supposons cette fois que le vecteur  $\xi_i$  appartient non plus à un ellipsoïde mais à l'ensemble :

$$\Phi_i(\Gamma_i) = \{\xi_i \in \mathbb{R}^n, \sum_{j=1}^n |\xi_{ij}| \leq \Gamma_i, \xi_{ij} \in [-1, 1]\}$$

Ainsi, pour une contrainte  $i$ , la valeur de  $\Gamma_i$  permet de contrôler la déviation totale des paramètres incertains de leur valeur nominale.

La version robuste associée à  $P^A$  selon cette approche s'écrit :

$$\min \sum_{j=1}^n c_j x_j \quad (4.27)$$

$$(P^A)_{BS}(\Gamma) : \quad s.c. \sum_{j=1}^n \bar{a}_{ij} x_j + \max_{\xi_i \in \Phi_i(\Gamma_i)} \sum_{j=1}^n \hat{a}_{ij} \xi_{ij} x_j \leq b_i \quad i = 1 \dots m \quad (4.28)$$

$$x_j \geq 0 \quad j = 1 \dots n \quad (4.29)$$

Il est possible de simplifier ce dernier en le linéarisant. Il suffit pour cela de remarquer que les variables  $x_j$ , ainsi que les valeurs de  $\hat{a}_{ij}$  sont non négatives. Ceci nous permet dans un premier temps de remarquer que la valeur du

$$\max_{\xi_i \in \Phi_i(\Gamma_i)} \sum_{j=1}^n (\hat{a}_{ij} x_j) \xi_{ij}$$

pour un vecteur  $x$  fixé est atteinte pour des valeurs non négatives des variables  $\xi_{ij}$ .

*Ceci pour conséquence la suppression des valeurs absolues dans la formulation du domaine d'incertitude, qui devient alors :*

$$\Phi_i(\Gamma_i) = \{ \xi_{ij} \in \mathbb{R}^n; \sum_{j=1}^n \xi_{ij} \leq \Gamma_i; 0 \leq \xi_{ij} \leq 1 \}$$

nous pouvons remplacer le sous-problème de maximisation, par son dual dans l'écriture de  $(P^A)_{BS}$ , selon le théorème fort de dualité.

**Théorème 1.** *Théorème de la dualité (version forte)*

*On a l'égalité*

$$\min \quad c^t x \quad (4.30)$$

$$s.c. \quad Ax \geq b \quad (4.31)$$

$$x \geq 0 \quad (4.32)$$

=

$$\max \quad b^t y \quad (4.33)$$

$$s.c. \quad A^t y \leq c \quad (4.34)$$

$$y \geq 0 \quad (4.35)$$

*De plus une des alternatives suivantes a lieu :*

- a)- *Si un des problèmes primal ou dual admet une solution, alors l'autre problème admet aussi une solution.*
- b)- *Si un des problèmes primal ou dual n'admet pas une solution, alors l'autre problème n'admet pas de solution.*

On a pour toute contrainte  $i = 1 \dots m$  :

$$\max_{\xi_i \in \Phi_i(\Gamma_i)} \sum_{j=1}^n (\hat{a}_{ij} x_j) \xi_{ij} = \max \sum_{j=1}^n (\hat{a}_{ij} x_j) \xi_{ij} \quad (4.36)$$

$$\sum_{j=1}^n \xi_{ij} \leq \Gamma_i \quad (4.37)$$

$$\xi_{ij} \leq 1 \quad j = 1 \dots n \quad (4.38)$$

$$\xi_{ij} \geq 0 \quad j = 1 \dots n \quad (4.39)$$

$\Leftrightarrow$

$$\max \quad b^t y \tag{4.40}$$

$$s.c. \quad A^t y \leq c \tag{4.41}$$

$$y \geq 0 \tag{4.42}$$

,avec :  $b^t = (a_{i1}x_1, a_{i2}x_2, \dots, a_{ij}x_j, \dots, a_{in}x_n)$  et  $y = \begin{pmatrix} \xi_{i1} \\ \xi_{i2} \\ \vdots \\ \xi_{ij} \\ \vdots \\ \xi_{in} \end{pmatrix}$  et

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \vdots & \dots & 1 \end{pmatrix} \text{ de taille } (n+1) \times n. \text{ et } c = \begin{pmatrix} \Gamma_i \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \text{ de taille } n+1.$$

Sous réserve que  $\Gamma_i \geq 0$ , ce programme linéaire admet une solution optimale.

Appliquant le théorème forte de dualité dans le programme précédentes Comme le programme linéaire précédent admet une solution optimale sous réserve que  $\Gamma_i \geq 0$ , il en est de même pour son dual et la valeur des deux fonctions objectifs coïncident. Le dual s'écrit donc

$$\min \quad c^t x \tag{4.43}$$

$$s.c. \quad Ax \geq b \tag{4.44}$$

$$x \geq 0 \tag{4.45}$$

avec :  $x = \begin{pmatrix} \pi_i \\ \lambda_{i1} \\ \lambda_{i2} \\ \vdots \\ \lambda_{ij} \\ \vdots \\ \lambda_{in} \end{pmatrix}$

où  $\pi_i, \lambda_{ij}$  correspondent aux variables du problème dual.

Le dual s'écrit donc pour toute contrainte  $i = 1 \dots m$  :

$$\min \Gamma_i \pi_i + \sum_{j=1}^n \lambda_{ij} \quad (4.46)$$

$$\pi_i + \lambda_{ij} \geq \hat{a}_{ij} x_j \quad j = 1 \dots n \quad (4.47)$$

$$x_j \geq 0 \quad j = 1 \dots n \quad (4.48)$$

$$\lambda_{ij} \geq 0, \quad j = 1 \dots n \quad (4.49)$$

$$\pi_i \geq 0 \quad (4.50)$$

Le problème robuste est alors équivalent au programme linéaire suivant :

$$\min \sum_{j=1}^n c_j x_j \quad (4.51)$$

$$(P^A)_{BS}(\Gamma) : \quad s.c. \sum_{j=1}^n \bar{a}_{ij} x_j + \min \left\{ \Gamma_i \pi_i + \sum_{j=1}^n \lambda_{ij} \right\} \leq b_i \quad i = 1 \dots m \quad (4.52)$$

$$\pi_i + \lambda_{ij} \geq \hat{a}_{ij} x_j \quad i = 1 \dots m \text{ et } j = 1 \dots n \quad (4.53)$$

$$x_j \geq 0 \quad j = 1 \dots n \quad (4.54)$$

$$\lambda_{ij} \geq 0 \quad i = 1 \dots m \text{ et } j = 1 \dots n \quad (4.55)$$

$$\pi_i \geq 0 \quad i = 1 \dots m \quad (4.56)$$

où  $\pi_i$ ,  $\lambda_{ij}$  correspondent aux variables du problème dual de  $\max_{\xi_i \in \Phi_i(\Gamma_i)} \sum_{j=1}^n \hat{a}_{ij} x_j$

Le problème robuste est alors équivalent au programme linéaire suivant :

$$\min \sum_{j=1}^n c_j x_j \quad (4.57)$$

$$(P^A)_{BS}(\Gamma) : \quad s.c. \sum_{j=1}^n \bar{a}_{ij} x_j + \Gamma_i \pi_i + \sum_{j=1}^n \lambda_{ij} \leq b_i \quad i = 1 \dots m \quad (4.58)$$

$$\pi_i + \lambda_{ij} \geq \hat{a}_{ij} x_j \quad i = 1 \dots m \text{ et } j = 1 \dots n \quad (4.59)$$

$$x_j \geq 0 \quad j = 1 \dots n \quad (4.60)$$

$$\lambda_{ij} \geq 0 \quad i = 1 \dots m \text{ et } j = 1 \dots n \quad (4.61)$$

$$\pi_i \geq 0 \quad i = 1 \dots m \quad (4.62)$$

où  $\pi_i$ ,  $\lambda_{ij}$  correspondent aux variables du problème dual de  $\max_{\xi_i \in \Phi_i(\Gamma_i)} \sum_{j=1}^n \hat{a}_{ij} x_j$

## Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté comment transformer un problème réel en un problème mathématique bien défini en modélisation. Le modèle donne enfin un problème d'optimisation sous contraintes, qui peut être résolu par l'algorithme génétique dans le chapitre suivant.

# Résolution du modèle du régime optimal par l’algorithme génétique

## 5.1 introduction

Dans ce chapitre, le travail que nous avons à faire peut être très compliqué, c’est-à-dire que nous devons étudier plusieurs données : les ingrédients alimentaires (minéraux, vitamines, autres ingrédients), et la colonne la plus intéressante c’est la valeur de la glycémie charge (CG) La formule de calcul est  $CG = \frac{IG \times glucides}{100}$ . Ces données suffisent à remplir les 177 lignes du tableau, et elles représentent Nourriture (fruits Egumes, le-quide...) et 26 colonnes. Ce qui représente les ingrédients alimentaires. Malheureusement, ces tableaux sont très volumineux et difficiles à intégrer dans notre rapport. Toutes les données sont disponibles dans : [29] Nous utilisons l’algorithme *MOGA* pour résoudre le modèle du régime optimal multi-objectives introduit dans le chapitre 4.

## 5.2 Base des aliments et besoins en nutriments de base

Pour calculer les différents paramètres ( $A, E, \dots$ ) du modèle du régime optimal, l’équipe projet a collecté presque 177 aliments (disponibles sur le marché marocain) tout en considérant les nutriments a effets positifs (respectivement négatifs) sur le corps humain ,voir le tableau suivant :

Nutriments positifs			Nutriments négatifs
Calories		Vb6	Satured fat
Protéine	Calcium	Vb12	Sodium
Carbohydrate	Iron	VC	cholestérol
Potassium	Phosphore	VA	Total fat
Magnésium	Zinc	VE	

Pour chaque 100g de chacun des 177 aliments, nous estimons le contenu en chacun des nutriments ainsi considérés ; la table suivante dans le contenu en 100g de l’abricot des différents nutriments (en vert les nutriments positifs et rouge les nutriments négatifs).

Nom des aliments	Vitamin (A) mg/100g	Vitamin C mg/100g	Vitamin E mg/100g	Vitamin B6 mg/100g	Vitamin B12 mg/100g	Calcium (Ca) mg/100g	Phosphore mg/100g	Magnesium mg/100g	Potassium mg/100g	Iron(Fer) mg/100g	Zinc mg/100g	Calories /100g	Protéine g/100g	Carbohydrate	Sodium mg/100g	Lipides (T) g/100g	Cholesterol mg/100g	acide gras saturés(SF)
Abricot	0	5,5	0,6	0,1	0	15,6	16,6	8,7	237	0,3	0,1	49	0,9	9	1	0,19	0,1	0,027

Pour plus d'illustration, nous avons capturé trois parties de la table des 177 aliments :

Nom des aliments	Vitamin (A) mg/100g	Vitamin C mg/100g	Vitamin E mg/100g	Vitamin B6 mg/100g	Vitamin B12 mg/100g	Calcium (Ca) mg/100g	Phosphore mg/100g	Magnesium mg/100g	Potassium mg/100g	Iron(Fer) mg/100g	Zinc mg/100g	Calories /100g	Protéine g/100g	Carbohydrate	Sodium mg/100g	Lipides (T) g/100g	Cholesterol mg/100g	acide gras saturés(SF)
Abricot	0	5,5	0,6	0,1	0	15,6	16,6	8,7	237	0,3	0,1	49	0,9	9	1	0,19	0,1	0,027
Abricot sec	0	1	4	0,2	0	61,2	68,1	36,5	1090	4,3	0,3	271	3,1	53	10	0,51	0,195	0,017
Ail	0	17	0	1,2	0	17,7	161	20,7	555	1,3	0,8	131	7,9	21,5	17	0,5	0	0,089
ananas	0	12	0,1	0,1	0	20,3	11	19,8	170	0,2	0,7	53	0,4	11	1	0,12	0	0,009
Ananas conserve	0	10,4	0,1	0,1	0	14,3	5	11,3	105	0,2	0,1	82	0,4	19,1	1	0,1	0	0,1
Artichaut	0	10,3	0,2	0,1	0	39	49,2	29,5	380	0,7	0,5	44	2,8	4,9	94	0,15	0	0,016
Asperge	0	16	0	0	0	19,9	51,5	6,3	198	0,7	0,4	30	2,7	3,2	14	0,22	0	0,048
Aubergine	0	1,3	0	0,1	0	20,1	15	15	123	0,3	0,1	35	0,8	6,3	1	0,23	0	0,044

Fruit de la passion	0	30	0	0,1	0	10,4	67,1	26,7	348	1,6	0,1	84	2,2	9,5	0,1	0,7	0	0,1
Gnocchi	0	5	0,9	0,1	0,0002	5,1	39	18,8	184	0,7	0,5	179	5	34,3	402	2,1	129	0,1
Goyave(conserve)	0	0	0	0,1	0	0	0	0	0	0	0	88	0,4	19,4	0,1	0,9	0	0,1
Graine de Sésam	0	0	0	0,8	0	962	604	324	468	14,6	5,7	9,3	17,7	9,3	0,1	49,7	0	7
Graine de tournesol	0	0,5	31,9	1,2	0	94,3	477	364	622	4,9	3,8	642	20,2	15	4,7	51,46	0	5,9
Grenade	0	8,1	0,6	0,2	0	4,3	18	7,5	262	0,3	0,4	71	1,1	17	0,1	1,2	0	0,1
Groseille à maquignon	0	29,5	1	0	0	25,5	25,9	9	187	0,3	0,1	40	0,9	4,8	0,1	0,6	0	0,1

Salifits	0	1	0,4	0,1	0	0,47	56	18	283	0,6	0,3	46	2,7	7,5	16	0,1	0	0,001
Sardine à l'huile	0,0115	0	1,3	0,3	0,0138	613	342	38,1	374	2,5	2	222	26,4	0	505	14,45	80,4	1,529
Saucisse	0,002	5,1	0,3	0,1	0,0004	18,9	114	18,6	357	1,1	1,8	307	15,5	3,3	652	27,98	50,9	10,905
Steak haché cru	0,0074	1	0,4	0,2	0,0019	10,2	155	15,3	226	2,6	4,8	199	18,7	0	110	13,6	67	5,9
Tomate	0	14,3	1,1	0,1	0	8,2	19,3	10,1	251	0,2	0,221	16	0,8	1,7	3,1	0,3	0,11	0
Viande cuite	0,0009	3,7	0,1	0,4	0,0021	12,4	173	27,4	319	2,2	4,3	185	24,6	0	102	9,7	67,3	4,1
Zeste citron	0	129	0,2	0,2	0	171	12	15	160	0,9	0,2	51	1,5	2,5	6	0,3	0	0,0019

La fonction objective du problème du régime optimal est formée par le vecteur glycémie  $g$ . Nous avons utilisé la formule mentionnée dans chapitre précédent pour estimer l'intervalle contenant le contenu en charge glycémique dans 100g de chacun des 177 aliments. La table suivante donne le contenu en 100g de l'abricot en charge glycémique :

Nom des aliments	Glycémie		
	min	moyenn	max
Abricot	5,13	5,13	5,13

Pour plus d'illustration, nous avons capturé quelques parties de la table géante ainsi conçue :

Nom des aliments	Glycémie		
	min	moyenn	max
Abricot	5,13	5,13	5,13
Abricot sec	15,9	18,55	21,2
Ail	3,225	3,225	3,225
ananas	3,57	3,753	3,936
Ananas conserve	0	0,313	0,626
Artichaut	0,735	0,735	0,735
Asperge	0,48	0,48	0,48
Aubergine	0,945	0,945	0,945
Cerise	29,88	29,88	29,88
Cervelle de veau	0	0	0
Chataigne	28,68	28,68	28,68
Chips de crevette	0	0	0
Chou blanc	0,72	0,72	0,72
Chou rouge	0,75	0,75	0,75
Choucroute	0,24	0,24	0,24

La table suivante donne l'intervalle-prix de 16 aliments :

Nom des aliments	Prix		
	Prix min	Prix moyenne	Prix max
Abricot	0,9	1,1	1,3
Abricot sec	6,8	8,4	10
Ail	4	6	8
Amande	6,9	20,4	33,9
ananas	3	3,4	3,8
Ananas conserve	5,16	7,965	10,77
Artichaut	0,8	1	1,2
Asperge	0,5	0,64	0,78
Aubergine	0,2	0,5	0,8
Avocat	5	6,5	8
Baguette	0,26	0,67	1,08
Banane	1	1,25	1,5
Bettrave	0,3	0,55	0,8
Blanc d'Œuf cuit	0,1	0,11	0,12
Brocoli (cuit)	1,8	2,15	2,5

En outre, nous avons consulté plusieurs sites et documents pour estimer les besoins en nutriments positifs (pendant une journée) [18] , [19] , [21] , [22] , [20] , et [23] :

Favorable Nutrient	Minimum nécessaire	Favorable Nutrient	Minimum nécessaire	Favorable Nutrient	Minimum nécessaire
Calories	ac=2000 kcal	Calcium	bca = 1316mg	Vb6	brb6 = 2.4mg
Protein	bp = 91g	Iron	bi = 18mg	Vb12	brb12 =8.3μg
Carbohydate	bcar = 271g	Phosphorus	bph = 1740mg	VC	bv = 155mg
Potassium	bpo = 4044mg	Zinc	bz = 14mg	VA	bva=1052μg
Magnesium	bmg=380mg			VE(AT)	bv =9.5(mg)

Le maximum tolérable en nutriments négatifs (pendant une journée) [24] et [25] :

Nutrient négatifs	Maximum tolérable
Satured.fat	fsf = 17 g
Sodium	fs = 1779mg
Cholesterol.	fch = 230mg
Total fat	ftf = 65 g

### 5.3 Résultats numériques et analyse

Nous utilisons, dans cette partie, l'algorithme génétique pour résoudre le problème du régime optimal. Dans ce cadre, nous avons adopté les caractéristiques suivantes :

Caractéristique	Croisement	Pourcentage de croisement	Initialisation	Nombre d'itérations	Mutation	Taille de la population	Fonction de sélection
Valeur	Plusieurs points	0.8	Arbitraire	100*foods	Gaussienne	200	Stochastique uniforme

Nous avons considéré neuf modèles multi-objectives :

		Coût		
		faible	moyenne	élevé
Glycémie	faible	modèle 1	modèle 4	modèle 7
	moyenne	modèle 2	modèle 5	modèle 8
	élevé	modèle 3	modèle 6	modèle 9

Dans le cas du modèle 1, on considère les glycémies faibles et les coûts faibles qui correspondent aux bornes inférieures des intervalles des charges glycémiques des 177 aliments et aux bornes inférieures des coûts des aliments. Par exemple, la charge glycémique de l'abricot sec considéré dans ce cas est de 15.9 et le prix considéré de cet aliment dans ce cas est de 6.8.

Par exemple, le code *MATLAB* permettant de résoudre des neuf modèles est donné par :

```

Editor - C:\Users\KARIM\multiobjectives_diet\multi_objectives_Diet.m
costp.m  glycLoad.m  multi_objectives_Diet.m  +
1  global g; global cost;
2  %foods load
3  food=load('all_foods_glycimic_cost.txt');
4  reqmnt=load('requirements.txt');
5  nbfood=size(food,1);
6  %parameters calculation
7  A=(food(:,1:14));
8  E=(food(:,15:18));
9  %low-low
10 %g=(food(:,19));cost=(food(:,22));
11 % %low-mean
12 % g=(food(:,19));cost=(food(:,23));
13 % %low-high
14 % g=(food(:,19));cost=(food(:,24));

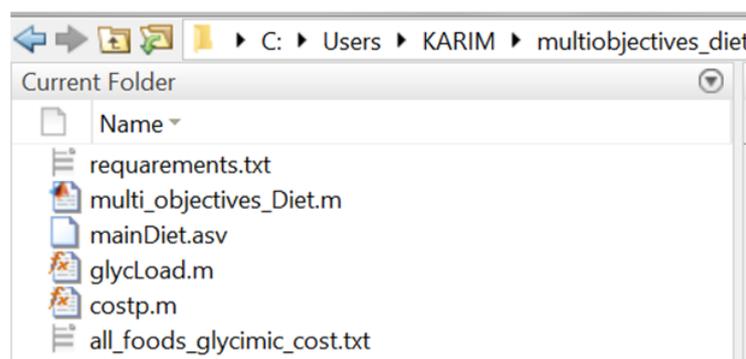
```

```

Editor - C:\Users\KARIM\multiobjectives_diet\multi_objectives_Diet.m
costp.m  glycLoad.m  multi_objectives_Diet.m  +
fr=(reqmnt(1:14));ufr=(reqmnt(15:18));
M=[-A;E];m=[-fr;ufr];lb=zeros(nbfood,1);ub=6*ones(nbfood,1);
%Resolution using genetic algorithm
fitnessfcn=@glycLoad;nvars=size(A,2);
%multi-objectives
fun=@(x)[dot(cost,x),dot(g,x)];
%options = optimoptions('gamultiobj','PlotFcn',@gaplotpareto);
rng default
[x,fval,exitflag,output,population,scores]=gamultiobj(fitnessfcn,nvars,M,m,[],[],lb,ub)%options);
%costPop=costp(population);glycimp=glycLoad(population);
plot(costp(population),glycLoad(population),'r*')
xlabel('cost')
ylabel('glycimic')
title('Pareto Front')
legend('Pareto front')

```

Le dossier contenant les différents composants de notre projet est donné par :



Dans ce dossier, nous trouvons la fonction *glycLoad* qui représente la première fonction objective de notre modèle et la fonction *costp* qui représente la deuxième fonction de notre modèle.

Les paramètres *g* et *c* sont globaux parce qu'ils sont utilisés par le script actuel et les fonctions *glycLoad* et *costp*.

La commande «  $x = gamultiobj(fun, nvars, M, m, [], [], lb, ub);$  » fait appel à l'algorithme de génétique qui se situe dans le même dossier que le script actuel.

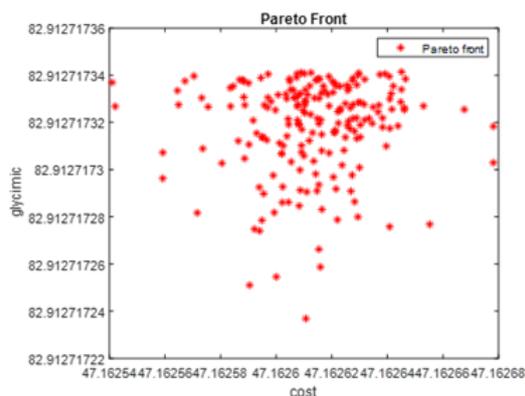
### Modèle min glycémie et min coût

La figure ci-dessus donne la grappe des régimes offerts par *MOGA* dans le cas des charges glycémiques faibles et des coûts faibles; dans ce cadre, il est possible d'exploiter cette non dominance pour diversifier les repas des patients au cours du mois.

Le tableau suivant donne le régime estimé par *MOGA*, sa charge glycémique et le coût en *DH*. En effet, dix aliments forme de ce régime dont aubergine, courgette (cuite), lait de soja lentille pois chiche et thé sont présents en grandes quantités. La charge glycémique de ce régime est de 82.91 qui est acceptable, alors que le coût de ce régime est de 47.17 *DH* qui est un prix raisonnable en considérant le niveau de vie de la plupart des marocains.

Nom des aliments	Régime
Aubergine	5,048E+00
Blanc d'Œuf cuit	1,006E-01
Choucroute	1,867E-01
Courgette(cuite)	6,000E+00
Lait de soja	6,000E+00
Lentille	6,000E+00
Pois chiche	4,218E+00
Salsifis	2,120E+00
Thé	4,986E+00
Zeste citron	7,926E-01
Charge glycémie total	82.9127
Coût total du régime	47.1626 (DH)

**Table :** Régime minimum glycémie et minimum coût



**Figure :** Front du Pareto

### Modèle min glycémie et moyenne coût

Nom des aliments	Régime (g)
Aubergine	5,04830626
Blanc d'Œuf cuit	0,10063508
Courgette(cuite)	6
Crevette	0,04766646
Dinde rotie	0,03809841
Foie d'agneau cuit	0,07260813
Fromage de chèvre nature	0,02343094
Lait de soja	5,99981531
Lentille	6
Pois chiche	4,21812987
Salsifis	2,12013752
Thé	4,98627927
Zeste citron	0,79259588
Charge glycemique total	82.9127
Coût du régime	64.5631

Table : régime min glycémie et moyenne coût

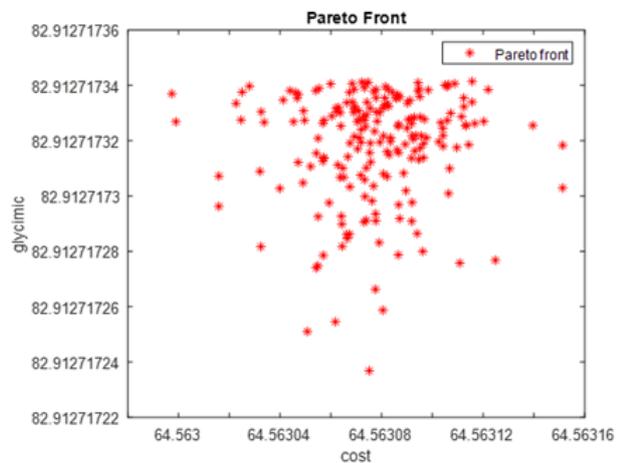


Figure : Front pareto min glycémie et max coût

### Modèle : minimum glycémie et maximum coût

Nom des aliments	Régime
Aubergine	5,04830626
Blanc d'Œuf cuit	0,100635081
Chips de crevette	0,010586854
Choucroute	0,186717309
Courgette(cuite)	6
Salsifis	2,120137524
Thé	4,986279271
Zeste citron	0,792595884
Charge glycémie totale	82.9127
Coût du régime	81.9635

Table : Régime min glycémie et max coût

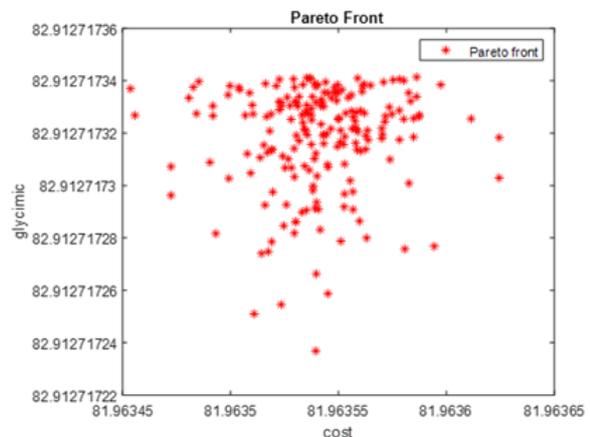
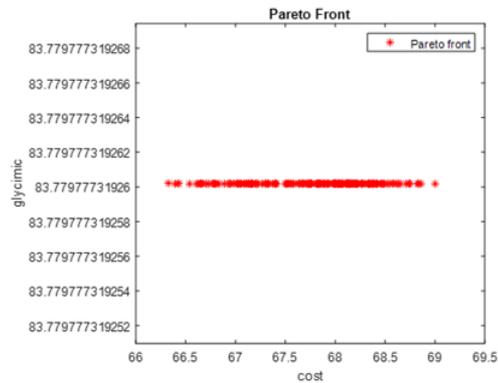


Figure : Front de Pareto min glycémie et max coût

### Modèle : moyenne glycémie et moyenne coût

La figure ci-dessus donne la grappe des régimes offerts par *MOGA* dans le cas des charges *glycémiques* moyennes et des coûts moyennes ; dans ce cadre, il est possible d'exploiter cette non dominance pour diversifier les repas des patients au cours du mois. Le tableau suivant donne le régime estimé par *MOGA*, sa charge glycémique et le coût en *DH*. En effet, dix aliments forme de ce régime dont l'aubergine, lait de soja, lentille, pois chiche et thé sont présentent en grandes quantités. La charge glycémique de ce régime est de 82.91 qui est acceptable, alors que le coût de ce régime est de 81.96*DH* qui est un prix raisonnable en considérant le niveau de vie de la plupart des marocains.

Nom des aliments	Régime
Aubergine	6
Blanc d'Œuf cuit	0,191101639
Crevette	0,050002013
Dinde rotie	0,323012391
Foie d'agneau cru	0,033221889
Foie d'agneau cuit	0,072608126
Homard	0,100191878
Huile d'Olive Vierge	0,027828534
Huile d'avocat	0,09564942
Lait de soja	6
Lentille	6
Pois chiche	4,220041389
Salsifis	2,120137524
Thé	4,986279271
Zeste citron	0,792595884
<b>Charge glycémie du régime</b>	<b>83.7798</b>
<b>Coût du régime</b>	<b>68.8284</b>



**Table :** régime moyenne glycémic et moyenne coût **Figure :** Front de pareto pour moyenne glycémic et moyenne coût

Les régimes ainsi estimés sont presque équivalents. En effet, certains aliments sont toujours présents (l'aubergine, lait de soja, lentille, pois chiche et thé ) et rare sont les aliments qui marquent leurs absences comme le courgette cuit. Vers la fin, les charges glycémiques sous-jacentes aux différents repas sont acceptables même pour les patients diabétiques. En outre, le prix des régimes proposés par *MOGA* ne dépasse pas le pouvoir d'achat des citoyens marocains.

## Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons donné le détail concernant la collecte des données et les répartitions adoptées. Puis, nous avons utilisé les algorithmes génétiques multi-objectives pour résoudre les neuf modèles qui correspondent aux différentes bornes des charges glycémiques et les prix des différents aliments : faible, moyenne, et charge. Les régimes obtenus génèrent des charges glycémiques acceptables et respectent le pouvoir d'achat des citoyens marocains.

## Conclusion general

Dans ce rapport, nous avons traité le problème des régimes alimentaires optimaux que plusieurs chercheurs ont étudié pour une longtemp, notamment le chercheur turk Esra Bas dans l'article [25]. Il s'agit d'un problème d'optimisation linéaire multi-objectives avec contraintes. La première fonction objective est la charge glycémique totale, alors que la deuxième fonction objectives est le coût total du régime.

Trois types de contraintes sont considérées dans ce travail : le premier type concerne le minimum nécessaire en nutriments positifs, le deuxième type concerne le maximum tolérable en nutriments négatifs, alors que le troisième type de contraintes concerne le pourcentage en calories, provenant de certains nutriments de base celle provenant du reste des nutriments. Dans le deuxième chapitre, nous avons fait un tour d'horizon sur les différents concepts de la programmation sous contraintes et les méthodes d'approximation les plus connues. Dans le troisième chapitre, nous avons donné une introduction sur les algorithmes génétique multi-objectives : principes, opérateurs, et convergence. Dans le quatrième chapitre, nous avons détaillé le processus de modélisation du problème de régime optimal. Dans le chapitre cinq, nous avons intégré les différentes connaissances sur les nutriments dans le modèle mathématique du chapitre précédant ; puis, nous avons résolu les instances obtenues par les algorithmes génétiques multi-objectives sur un environnement intégré matlab. Pour ce faire, nous avons considéré les neuf cas de base : charge glycémique (faible, moyenne, maximale) et coût (faible, moyenne, maximale).

L'algorithme génétique multi-objectives ne donne pas des régimes optimaux mais il permet un certain degré de diversité des régimes produits. Vers la fin, les charges glycémiques sous-jacentes aux différents repas sont acceptables même pour les patients diabétiques. En outre, le prix des régimes proposés par MOGA ne dépasse pas le pouvoir d'achat des citoyens marocains.

Dans de nombreux cas, les modèles de programmation linéaire à coût minimal ne prend pas en compte la variabilité des éléments nutriments dans les aliments.

En programmation mathématique, cette variabilité des paramètres du modèle est traitée dans le cadre de la programmation stochastique. Dans cette technique, la fonction objectif ou certaines contraintes sont traitées en termes probabilistes.

# Bibliographie

- [1] Mulvey, R. Vanderbei, S. Zenios. Robust optimization of large-scale systems. *per. Res.* 43 (2) (1995) 264–281.
- [2] J.L. Balintfy, Menu planning by computer,. *Commun. ACM* 7 (4)
- [3] L.M. Lancaster . The history of the application of mathematical programming to menu planning. *Eur. J. Oper. Res.* 57 (3) (1992) 339–347.
- [4] D. Sklan, I. Dariel. Diet planning for humans using mixed-integer linear programming
- [5] D.S. Ludwig. The glycemic index : physiological mechanisms relating to obesity, diabetes, and cardiovascular disease
- [6] F.S. Atkinson, K. Foster-Powell, J.C. Brand-Miller International table of glycemic index and glycemic load values . *Diabetes Care* 31 (12) (2008) 2281–2283.
- [7] Nutritiondata. Nutrition facts. Available at : <http://www.glycemicindex.com>
- [8] Glycemic Index Foundation. GI database. Available at : <http://www.nutritiondata.com>
- [9] L.S.A. Augustin, C. Galeone, L. Dal Maso, C. Pelucchi, V. Ramazzotti, D.J.A. Jenkins, M. Montella, R. Talamini, E. Negri, S. Franceschi, C. La Vecchia. Glycemic index, glycemic load and risk of prostate cancer . *Int. J. Cancer* 112 (3) (2004) 446–450. .
- [10] W. Willett, J. Manson, S. Liu. Glycemic index, glycemic load, and risk of type 2 diabetes . *Am. J. Clin. Nutr.* 76 (1) (2002) 274–280.
- [11] M.J. Franz, J.P. Bantle, C.A. Beebe, J.D. Brunzell, J.L. Chiasson, A. Garg, L.A. Holzmeister, B. Hoogwerf, E. Mayer-Davis, A.D. Mooradian, J.Q. Purnell, M. Wheeler. Evidence-based nutrition principles and recommendations for the treatment and prevention of diabetes and related complications, *Diabetes . Care* 26 (2003) 51–61.
- [12] H. Connor, F. Annan, E. Bunn, G. Frost, N. McGough, T. Sarwar, B. Thomas. The implementation of nutritional advice for people with diabetes, *Diabet. . Med.* 20 (10) (2003) 786–807.
- [13] P.C. Colombani. , *Physiol. Behav.* 83 (2004) 603–610. Glycemic index and load-dynamic dietary guidelines in the context of diseases . *Glycemic index and load-dynamic dietary guidelines in the context of diseases .*
- [14] C. van de Panne, W. Popp, , Minimum-cost cattle feed under probabilistic protein constraints . *Manage. Sci.* 9 (3) (1963) 405–430.
- [15] J.M. Torres-Rojo. Risk management in the design of a feeding ration : a portfolio theory approach . *Agric. Syst.* 68 (1) (2001) 1–20.

- [16] J.M. Cadenas, D.A. Pelta, H.R. Pelta, J.L. Verdegay. Application of fuzzy optimization to diet problems in Argentinean farms . Eur. J. Oper. Res. 158 (2004)218–228.
- [17] J.C. Buisson, Nutri-educ, a nutrition software . application for balancing meals, using fuzzy arithmetic and heuristic search algorithms . Artif. Intell. Med. 42 (3) (2008) 213–227.
- [18] EL-KATEB, Sally, SRIDHARAN, Sivakumar, FARRINGTON, Ken, et al. Comparison of equations of resting and total energy expenditure in peritoneal dialysis patients using body composition measurements determined by multi-frequency bioimpedance. Clinical nutrition, 2018, vol. 37, no 2, p. 646-650.
- [19] Humayun MA, et al Reevaluation of the protein requirement in young men with the indicator amino acid oxidation technique. Am J Clin Nutr. (2007)
- [20] VERMA, H. et GARG, R. Effect of magnesium supplementation on type 2 diabetes associated cardiovascular risk factors : a systematic review and meta-analysis. Journal of human nutrition and dietetics. 2017, vol. 30, no 5, p. 621-633.
- [21] Morris RC Jr, Sebastian A, Formon A, Tanaka M, Schmidlin O. textit Normotensive saltsensitivity : effects of race and dietary potassium. Hypertension 1999 ;33 :18-23.
- [22] Bothwell TH, Charlton RW, Cook JD, Finch CA. Iron metabolism in man. Oxford : Blackwell Scientific, 1979.
- [23] Specker BL, Beck A, Kalkwarf H, Ho M. Randomized trial of varying mineral intake on total body bone mineral accretion during the first year of life Pediatrics 1997 ;99 :E12.
- [24] Suckling, R.J., et al. Dietary salt influences postprandial plasma sodium concentration and systolic blood pressure. Kidney International. 2012. 81(4) : p. 407-411.
- [25] Bas E. A robust optimization approach to diet problem with overall glycemic load as objective function. Applied Mathematical Modelling. 2014 ; 38(19–20) : 4926–4940.<https://doi.org/10.1016/j.apm.2014.03.049>
- [26] philippe G.Ciarlet introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation
- [27] S.N.Sivanandam,S.N.Deepa introduction to genetic algorithms
- [28] Souquet Amédée,Radet Francois-Gérard TE de fin d'année Tutorat de Mr Philippe Audebaud
- [29] <https://www.lanutrition.fr/> <https://sante.journaldesfemmes.fr/> [https://www.aly-abbara.com/livre\\_gyn\\_obs/termes/diabete/index\\_glycemique.html](https://www.aly-abbara.com/livre_gyn_obs/termes/diabete/index_glycemique.html)
- [30] michel delfour introduction à l'optimisation et au calcul semi-différentiel
- [31] MURATA, Tadahiko, et al. MOGA : multi-objective genetic algorithms. In : IEEE international conference on evolutionary computation. 1995. p. 289-294
- [32] MAHDI, Samir. Optimisation multiobjectif par un nouveau schéma de coopération méta/exacte. 2007.
- [33] MERDJAOUI, Brahim. Optimisation multi-objectif par algorithmes génétiques et approche pareto des paramètres d'usinage sous contraintes des limitations de production. 2006.
- [34] BELHASSANI, Saliha. Optimisation multiobjectif par des Techniques évolutionnaires. 2012. PhD Thesis. UMMTO.

## Annexe 1

Liste complémentaire des nutriments de base :

### ●Magnésium

**Définition :** le magnésium est l'élément chimique de numéro atomique 12, de symbole Mg. Il compte parmi les sels minéraux essentiels au bon fonctionnement de l'organisme. Le corps d'un adulte en renferme environ 25g, dont plus de la moitié se situe au niveau osseux et le reste principalement au sein des muscles.

#### **Le rôle du nutriment sur le corps :**

Le magnésium est impliqué dans l'activité de plus de 300 enzymes et dans un grand nombre de fonctions cellulaires fondamentales. -Il participe ainsi au métabolisme des lipides, à la synthèse de protéines, à la dégradation du glucose pour libérer de l'énergie, à l'activité de certaines hormones, telles que l'insuline.

-Il est essentiel à la transmission neuro-musculaire de l'influx nerveux et à la régulation du rythme cardiaque.

-Des études récentes suggèrent l'intérêt d'un apport suffisamment de magnésium dans la prévention des maladies cardiovasculaires et du diabète de type 2.

#### **Effets négative du nutriment sur le corps :**

En effet, une carence en magnésium se fait rapidement ressentir au travers de signaux corporels qui ne trompent pas : spasmes des paupières, fatigue, vertiges, nausées, crampes, tétanie, irritabilité, stress, maux de tête ou encore fourmillements et engourdissement.

### ●Phosphorus

**Définition :** Le phosphore est l'élément chimique de numéro atomique 15, de symbole P. L'organisme de l'adulte contient environ 700g de phosphore, ce qui place ce minéral au deuxième rang sur le plan quantitatif, après le calcium. On le trouve sous forme de phosphates (notamment de calcium, de sodium, de potassium), et aussi de composés organiques très divers. Les os et les dents concentrent 85% du phosphore, tandis que le reste se répartit dans le sang et divers organes, dont le coeur, les reins, le cerveau et les muscles.

#### **Le rôle du nutriment sur le corps :**

Le corps a besoin de phosphore pour maintenir et renforcer les os .pour générer de l'énergie et faciliter le mouvement et le fonctions musculaires , et voici les avantages du phosphore : Participe à la construction des os. protège et fortifie le squelette. Contribue à la formation de l'émail dentaire et consolide les dents. **Effets**

#### **négative du nutriment sur le corps :**

La plupart du temps, un manque de phosphore entraîne un certain nombre de symptômes liés aux os, tels que : Douleur dans les os,Ostéoporose,Les os se cassent plus facilement,Anorexie. En plus de ces symptômes, il existe d'autres symptômes qui incluent : Fatigue et fatigue, Respiration irrégulière, Raideur articulaire.

### ●Potassium

**Définition :** Le calcium est l'élément chimique de numéro atomique 19, de symbole K. C'est le troisième rang des minéraux du corps humain sur le plan quantitatif (après le calcium et le phosphore), le potassium est présent sous forme de solution dans l'organisme et se concentre en quasi-totalité à l'intérieur des cellules. Comme le chlore et le sodium, il s'agit d'un électrolyte, une substance qui se charge positivement ou négativement une fois dissoute.

#### **Le rôle du nutriment sur le corps :**

Parmi c'est avantages : -Aide à faire baisser la tension artérielle. -protégerait contre l'hypertension. les maladies cardiaques et les accidents cardio-vasculaires.

### **Effets négative du nutriments sur le corps :**

Les premiers symptômes d'une carence en potassium comprennent : -faiblesse musculaire. -fatigue. -Vertiges et confusion. Une carence en potassium peut également affecter les nerfs et les muscles ,ce qui peut entraîner : -coeur perturbation taux. - Constipation due à un mauvais mouvement musculaire.

#### **●Protéin**

**Définition :** Les protéines sont les principales composantes des structures de toutes les cellules du corps humain. Ce sont des chaînes d'acides aminés qui peuvent entrer dans la composition des muscles, de la peau, des ongles, des poils, du sang, etc. Celles-ci sont également à la base de nombreuses hormones, d'enzymes et d'anticorps et sont nécessaires à la croissance, la réparation et la défense des tissus du corps humain.de plus Les protéines fournissent de l'énergie, soit 4 calories par gramme. Au même titre que les lipides et les glucides, les protéines sont des macro nutriments essentiels à l'organisme.

### **Effets négative du nutriments sur le corps :**

La carence en protéines a des effets négatifs sur tous les organes et systèmes du corps tels que le cerveau, la fonction cérébrale, le système immunitaire et la fonction rénale. Les signes liés à une carence en protéines sont un œdème (rétention d'eau ou gonflement), une diminution de la masse musculaire.

#### **●Sodium**

**Définition :** Le sodium est l'élément chimique de numéro atomique 11, de symbole Na. Il compte parmi les sels minéraux. Au sein de l'organisme, il se situe principalement dans le sang et le liquide interstitiel (liquide situé autour des cellules) . Sa concentration dans le sang est contrôlée par plusieurs hormones, notamment l'aldostérone et l'hormone anti-diurétique. Au sein des aliments, le sodium est généralement présent sous forme de chlorure de sodium, c'est-à-dire de sel : 1g de sel = 400mg de sodium.

### **Le rôle du nutriments sur le corps :**

-Le sodium est indispensable à la transmission de l'influx nerveux et à la contraction musculaire. -Sa concentration dans le sang et le liquide interstitiel conditionne la quantité d'eau présente dans les cellules et le volume sanguin. -Chez les personnes sensibles à l'apport de sel, l'excès de sodium peut augmenter le volume sanguin et ainsi favoriser la survenue d'une hypertension artérielle.

### **Effets négative du nutriments sur le corps :**

Une consommation excessive de sodium peut également entraîner des effets indésirables dont l'hypertension artérielle et la perte de masse osseuse (ostéoporose). L'hypertension artérielle constitue un important facteur de risque d'accident vasculaire cérébral, de maladie cardiaque et de maladie rénale.

**Définition :** La vitamine A est une vitamine liposoluble qui est emmagasinée dans notre foie. Elle contribue au développement naturel et à la croissance normale du corps tout en maintenant la santé de nos yeux, de notre peau et de notre système immunitaire. La vitamine A contribue de manière très importante à la bonne santé de la vision.

### **Le rôle du nutriments sur le corps :**

Renforcent l'immunité et aident l'organisme à lutter contre les agressions et les infections. Indispensables à la cicatrisation et au bon état de la peau et des muqueuses digestives. - La vitamine A améliore la vision crépusculaire : les caroténoïdes ralentissent l'évolution de la dégénérescence maculaire. E Les caroténoïdes réduiraient le risque de certains cancers.

### **Effets négative du nutriments sur le corps :**

La carence en vitamine A est beaucoup plus fréquente qu'on ne le pense, surtout dans les populations défavorisées. Elle entraîne majoritairement des troubles de la vision pouvant aller d'une simple altération de la cornée à une cécité totale. La carence en vitamine A peut aussi être responsable d'une diminution des défenses immunitaires et donc d'une plus grande sensibilité aux infections.

### **●Vitamine B6**

**Définition :** La vitamine b6 compte parmi les vitamines hydrosolubles (solubles dans l'eau). Elle désigne six composés : le pyridoxal, la pyridoxine, la pyridoxamine, le pyridoxal 5-phosphate, la pyridoxine 5-phosphate et la pyridoxamine 5-phosphate. Les aliments d'origine animale apportent principalement du pyridoxal 5-phosphate et de la pyridoxamine 5-phosphate. Les végétaux contiennent surtout de la pyridoxine.

### **Le rôle du nutriments sur le corps :**

-Elle permet la transformation du tryptophane (acide aminé) en vitamine B3. -Elle est essentielle à la production de divers neuromédiateurs ou hormones : sérotonine, dopamine adrénaline, noradrénaline. -Elle participe au renouvellement globules rouge et au fonctionnement du système immunitaire.

### **Effets négative du nutriments sur le corps :**

-Une carence expérimentale (induite volontairement pour être étudiée) se traduit, au bout de deux à trois semaines, par une altération de la peau, une glossite, de la fatigue, des signes de dépression, une altération des nerfs périphériques, une fonte musculaire.

### **●Vitamine B12**

**Définition :** La vitamine B12 ou cobalamine, compte parmi les vitamines hydrosolubles . Elle doit son nom à l'atome de cobalt qu'elle renferme dans sa structure.

### **Le rôle du nutriments sur le corps :**

-La vitamine B12 est indispensable au renouvellement cellulaire.  
-Elle contribue ainsi au bon état de la peau.  
-Elle participe à la formation des globules rouges.  
-Elle est essentielle au bon des neurones (cellules nerveuses).  
-En association avec la vitamine B9, elle permet de réduire le taux sanguin d'homocystéine, un composé dont l'excès est impliqué dans les maladies cardiovasculaires. -Chez la femme, durant une grossesse, la vitamine B12 est importante pour l'expansion du volume sanguin, tout comme le développement du système nerveux du fœtus.

### **Effets négative du nutriments sur le corps :**

-La carence se traduit par une anémie macrocytaire ( des globules rouges trop gros), de la fatigue, une perte d'appétit, une atteinte des nerfs périphériques avec perte de sensibilité et difficultés à la marche, des troubles de la mémoire, une dépression.

### **●Vitamine C**

**Définition :** La vitamine C, ou acide ascorbique, compte parmi les vitamines hydrosolubles . Elle doit son nom A la maladie qu'elle prévient : le scorbut.

### **Le rôle du nutriments sur le corps :**

-La vitamine C a une action anti-oxydante. En synergie avec la vitamine E , le bêta-carotène, le sélénium,

le zinc... , elle piège l'excédent de radicaux libres présents dans l'organisme, qui accélèrent le vieillissement cellulaire. A ce titre, elle contribue à la prévention des maladies cardio-vasculaires, de certains cancers, de la cataracte et des maladies neuro-dégénératives. -Elle essentielle aux défenses immunitaires, intervenant dans le renouvellement et le fonctionnement de certains globules blancs. Elle est particulièrement concentrée dans ces cellules. -Elle contribue à la production de neuromédiateurs appelés dopamine et noradrénaline, du collagène une protéine de soutien présente dans la peau et dans les os, dont elle constitue la trame et de la carnitine qui permet aux cellule d'utiliser les graisses à des fins énergétiques. -Elle augmente l'assimilation du fer d'origine végétale.

#### **Effets négative du nutriments sur le corps :**

-La carence qui induit un scorbut est exceptionnelle de nos jours. Chez les personnes alcooliques, elle n'apparaît qu'en cas de dénutrition sévère. Le scorbut se manifeste par des œdèmes et des hémorragies (notamment buccales) et peut en quelques mois entraîner la mort en l'absence de traitement. -La déficience est en revanche fréquente, la vitamine C n'étant pas stockée dans l'organisme et rapidement éliminée dans les urines. Elle se traduit par de la fatigue, une perte d'appétit et un amaigrissement.

#### **●Vitamin E**

**Définition :** Vitamine E est un terme générique employé pour désigner une famille de composés, les tocophérols, classés en quatre grandes catégories : les alpha-, bêta-, gamma- et deltatocophérols. L'alphatocophérol en est la forme la plus courante et la plus active. Liposoluble, elle se stocke dans l'organisme, principalement dans les tissus graisseux et le foie.

#### **Le rôle du nutriments sur le corps :**

Protège contre les maladies cardio-vasculaires, certains cancers et diverses maladies chroniques. Et Pourrait retarder ou prévenir la cataracte. Stimule le système immunitaire. - Protège contre les effets néfastes des substances toxiques du tabac et autres polluants. Favorise la cicatrisation de la peau. - Réduit les processus inflammatoires.

#### **Effets négative du nutriments sur le corps :**

la carence en vitamine E peut affecter le système nerveux et les muscles et provoquer des troubles de la coordination. Elle peut aussi être à l'origine de l'anémie hémolytique chez l'enfant en bas âge.

#### **●Zinc**

**Définition :** Le calcium est l'élément métallique de numéro atomique 30, de symbole Zn. Le zinc, présent à raison de 2 à 3 g dans l'organisme, est lié aux protéines, et se concentre dans les muscles (60%), les os(30%) , le foie(5%) et, chez les hommes, dans la prostate. Son élimination se fait surtout par la voie intestinale, mais aussi par la sueur et la desquamation de la peau. Comme l'organisme ne stocke par le zinc, celui-ci doit être apporté par la nourriture, en particulier par les aliments riches en protéines tels que la viande et le poisson, dans lesquels il abonde.

#### **Le rôle du nutriments sur le corps :**

Ils jouent un rôle très important dans le corps tel que : - Contribue à réduire les symptômes des rhumes, gripes et autres infections. - Atténue les problèmes cutanés et certains troubles digestifs. - Stimulerait la fertilité. -Pourrait protéger contre le cancer de la prostate.

#### **Effets négative du nutriments sur le corps :**

Une carence en zinc peut entraîner -Perte d'appétit et altération du sens du goût.

- Retard de croissance chez les enfants.
- Altération de la croissance et du développement sexuel et nanisme.
- Aussi une carence grave et persistante en zinc peut entraîner une maladie rare de la peau accompagnée d'une chute des cheveux d'éruption cutanées d'infections pustuleuses de la peau, d'infections de la bouche, d'infections de la langue, d'infections des paupières et d'infections autour des ongles.

## Annexe 2

Résumé des notation et des valeurs nutritionnelles adopté dans le modèle de régime  
le tableau suivant représente les notations du modèle régime optimal :

Notation	Description	Favorable nutrients	Unfavorable nutrients	Basic food groups	Some parameters used in the model
$x$	Vector of serving sizes				
$g$	Vector of glycemic loads				
$A$	Matrix of nutrient content for favorable nutrients				
$b$	Vector of daily nutritional requirements for favorable nutrients	c: Calories p: Protein car: Carbohydrate po: Potassium mg: Magnesium tdf: Total dietary fiber ca: Calcium ir: Iron ph: phosphorus z: Zinc vb6: vitamin b6 vb12: vitamin b12 a: Vitamin C a <sub>6</sub> : Vitamin A v: Vitamin E			$b_c = 2.000$ kcal $b_p = 91$ g $b_{car} = 271$ g $b_{po} = 4044$ mg $b_{mg} = 380$ mg $b_{tdf} = 31$ g  $b_{ca} = 1316$ mg $b_{ir} = 18$ mg $b_{ph} = 1740$ mg $b_z = 14$ mg $b_{vb6} = 2.4$ mg $b_{vb12} = 8.3$ µg $b_{vc} = 155$ mg $b_{va} = 1052$ µg $b_{ve} = 9.5$ AT
$E$	Matrix of nutrient content for unfavorable nutrients				
$f$	Vector of maximum daily allowance for unfavorable nutrients		sf: Saturated fat s: Sodium ch: Cholesterol tf: Total fat		$f_{sf} = 17$ g $f_s = 1.779$ mg $f_{ch} = 230$ mg $f_{tf} = 65$ g
$c_i$	Calories from nutrient $i \in \{car, p\}$ or $i \in \{tf, sf\}$				
$r_i$	Ratio of total calories from nutrient $i \in \{car, p\}$ or $i \in \{tf, sf\}$ to the total daily calorie intake				$r_p = \%18$ $r_{car} = \%55$ $r_{sf} = \%7.8$ $r_{tf} = \%29$
$A_c$	Row vector of $A$ corresponding to the favorable nutrient "calories"				
$c_{sf}$	Vector of calories from saturated fat per serving size of food				
$a_{kj}$	Calories from basic food group $D$				
$f_{dca}$	Daily discretionary calorie allowance				$f_{dca} = 267$ kcal
$d_k$	Daily number of serving sizes required for basic food group $k$			G: Grain M: Milk V: Vegetable F: Fruit T: Fish, poultry, red meat B: Beans, nuts, egg O: Oil D: Discretionary	$d_G = 6$ oz•equivalent $d_M = 3$ cups $d_V = 5$ servings $d_F = 4$ servings $d_{T, B} = 5.5$ oz•equivalent $d_O = 6$ tsp