UNIVERSITE SIDI MOHAMED BEN ABDELLAH

FACULTE DES SCIENCES ET TECHNIQUES

Master Recherche Opérationnelleet Statistique-Structures Discrètes (ROSSD)

MEMOIRE DE FIN D'ETUDES

Pour l'obtention du Diplôme de Master Sciences et Techniques (MST)

# LOI DES GRANDS NOMBRES POUR LES ENSEMBLES ALEATOIRES TIGHT DANS UN ESPACE DE BANACH

Réalisé par: Mlle Fadoua EL-AMARTY
Encadré par: Pr. Fatima EZZAKI

Soutenu le : 21/06/2016

Devant le jury composé de:

Pr. Fatima EZZAKI
Pr. Ahmed EL HILALI ALAOUI
Pr. Abdelmajid HILLALI
Pr. Omar SIDKI

Année Universitaire 2015 / 2016

FACULTE DES SCIENCES ET TECHNIQUES FES – SAISS

B.P. 2202 – Route d'Imouzzer – FES

# REMERCIEMENTS :

Je tiens à remercier mes parents, mes sœurs, mon frère et mes amis pour m'avoir soutenu au long de mon parcours, chose qui m'a facilité l'obtention de ce diplôme. Je remercie aussi mes professeurs notamment Pr. Fatima EZZAKI de m'avoir accordéle temps, la patience, et le savoir qu'il me fallait pour mener à bout ce project.

Je ne manquerai pas de remercier les membres du jury d'avoir accepté d'évaluer mon travail et d'y avoir donné tout le temps nécessaire aux jugement et rectifications que je puisse réajuster le tir et m'améliorer en continu en profitant des apprentissages de mes honorables professeurs messieurs Pr. Mohammed ELKHOUMSSI, Pr. Abdelmajid HILLALI, Pr. Ahmed ELHILALI ALAOUI.

Attendu que mes efforts fournis dans ce travail ont du payer ; j'ai l'honneur de dédier mon diplôme à mes parents.

# SOMMAIRE

## Introduction :

Dans le calcul des probabilités classiques, nous entendons par ceci celui qui concerne les variables aléatoires numériques, on appelle loi des grands nombres (du moins c'est le sens précis que nous donnerons ici à cette expression) un énoncé affirmant, bien entendu,sous certaines conditions plus ou moins larges, qu'étant donnée une suite $X_1, \ X_{2,} \dots \ X_n$ de variables aléatoires, et si n tend vers l'infini, la variable aléatoire $\overline{X} = \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)$ converge vers une limite L. Le cas typique est celui où les $X_n$ sont une suite strictement stationnaire, et plus particulièrement ceux qui sont mutuellement indépendantes. Suivant la nature de la convergence stochastique indiquée dans l'enoncé, on peut distinguer les lois des grands nombres en probabilité, presque sures, en moyenne d'ordre $\alpha$, … , etc.

La théorie des lois des grands nombres est sans doute un des éléments sur lesquels repose le raisonnement inductif, il est donc philosophiquement important d'étendre les lois des grands nombres à des éléments aléatoires $X_1, \ X_{2,} \dots \ X_n$ de nature aussi générale que possible.

C'est bien evident qu'une extention est une idée qui vient naturellement à l'esprit, une idée que définie aujourd'hui la théorie des fonctions aléatoires (éléments aléatoires à valeurs dans un espace fonctionnel), et certaines applications statistiques.

Toutefois il ne peut être question d'étendre les lois des grands nombres, au sens un peu étroit que nous avons adopté car pour un espace B tout à fait quelconque la formation des $\overline{X}$ exige que B soit un espace vectoriel, et les convergences stochastiques qui constituent les lois des grands nombres exigent que B soit muni d'une topologie.

Les recherches dans cette direction ont commencé, et jusqu'à présent se sont presque limité, au cas où B est un espace de Banach.

## NOTATIONS :

- $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ espace de probabilité.
- $(\Omega, \mathcal{H}, \mu)$ espace mesurable finie.
- $B, B_1, B_2$ des espaces de Banach.
- K un ensemble compact.
- E et G espaces vectoriels normés
- X variable aléatoire / ensemble aléatoire.
- E(X) L'espérance de X.
- V(X) la variance de X
- K(B) l'ensemble des parties compacts non-vides de B.
- $Y_n = \bar{X}_n = \frac{X_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$ moyenne arithmétique de $\bar{X}_n$
- μ l'espérance de la moyenne arithmétique $\bar{X}_n$
- M l'ensemble des multifonctions mesurables
- $H\left(C_u(X^*), \bar{d}, \varepsilon\right) = logN\left(X^*, \bar{d}, \varepsilon\right)$l'entropie métrique de $C_u(X^*)$
- $\mu_1, \mu_2, \eta$ des mesures définies sur $B_1$, $B_2$, $B_1 * B_2$
- B(G) le sigma-algèbre engendré par les sous ensembles ouverts de G.
- Γ une fonction mesurable dans Ω
- $S \subset G^*$ l'ensemble des fonctions de répartition sur K.
- $\mathfrak{I}_s$ La plus faible des topologies rendantcontinus les éléments de S.
- $(f(X_k))_k$ une suite d'ensembles aléatoires.
- $U_t(x) = \sum_{i=1}^{t} f_i(x) * b_i$ des opérateurs de somme partielle de dimension finie.
- $\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n := \limsup_{n\to\infty} A_n$
- $\underline{\lim_{n\to\infty}} A_n := \liminf_{n\to\infty} A_n$
- $B_u(H^*)$ Boule unité dans $H^*$
- $S_F^p$ des sous-ensembles de $\mathrm{L}^{\mathrm{p}}(\Omega, \mathrm{X})$

# CHAPITRE I : RAPPELS MATHEMATIQUES

## I.1. MODES DE CONVERGENCE :

Il existe plusieurs notions de convergence des variables aléatoires : convergence en loi, en probabilité, en moyenne, en moyenne quadratique, convergence presque sûre,..., etc.

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace de probabilité, $X$ une variable aléatoire dans $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires dans$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ .

### Définition 1.1. (convergence presque sûre)

On dit que la suite$(X_n)_{n\geq 1}$ converge presque sûrement vers $X$ si l'ensemble des ω tel que $X_n(\omega)$ converge vers $X(\omega)$ est de probabilité 1.

$$\text{i.e. } P(\{\omega \in \Omega / X_n(\omega) \to X(\omega)\}) = 1$$

### Définition 1.2. (convergence en probabilité)

La convergence en probabilité de $(X_n)_{n\geq 1}$ vers $X$ affirme que quelques soit $\varepsilon > 0$, la probabilité que $(X_n)_{n\geq 1}$s'écarte de X quand n tend vers +∞ est nulle.

$$i.e. \ \forall \varepsilon > 0, P[|X_n - X| > \varepsilon] \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

### Définition 1.3 (convergence en loi)

Une suite$(X_n)_{n\geq 1}$ de variables aléatoires converge en loi vers une variable aléatoire$X$ si pour toute fonction$f$ continue bornée, la suite $E[f(X_n)]$ converge vers $E[f(X)]$.

### Théorème 1.4.

La convergence presque sûre =>convergence en probabilité => convergence en loi.

### Définition 1.5.

Soit $(A_k)_k$ une suite des événements de l'espace de probabilité$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ alors :

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \bigcap_{n=0}^{\infty}\bigcup_{k\geq n} A_n$$

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \bigcup_{n=0}^{\infty}\bigcap_{k\geq 0} A_n$$

## I.2. INEGALITES DE MARKOV ET DE BIENAYME-TCHEBYCHEFF (LOI FAIBLE DES GRANDS NOMBRES) :

Tout d'abord l'inégalité de Markov dont la démonstration est d'un simplicité enfantine.

### Proposition 1.6

Soit X une v.a.r. positive et intégrable. Alors,

$$\forall a > 0, \qquad a\, P[X \geq a] \leq E[X]$$

### Démonstration de l'inégalité de Markov :

<u>1. Cas d'une variable finie ou discrète :</u>

L'espérance E(X) s'écrit

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i P(X = x_i)$$

Où n désigne le nombre de valeurs prises par X, éventuellement infini.

Dans cette somme, on va séparer les termes en deux catégories : ceux qui sont plus grands que $\alpha$ et les autres :

$$E(X) = \sum_{x_i\geq\alpha} x_i P[X = x_i] + \sum_{x_i<\alpha} x_i P[X = x_i]$$

Comme X est à valeurs positives, la deuxième somme est minorée par 0. Dans lapremière, tous les $x_i$sont minorés par $\alpha$, donc

$$E(X) \geq \alpha \sum_{x_i \geq \alpha} P[X = x_i] = \alpha P[X \geq \alpha]$$

ce qui prouve le résultat.

2. Cas d'une variable continue à densité :

Désignons par f la densité de X. Comme X ne prend que des valeurs positives, f est identiquement nulle sur $\mathbb{R}$ et on a donc

$$E(X) = \int_0^{+\infty} tf(t)\, dt$$

Reprenant les mêmes idées qu'au paragraphe précédent, on minore l'intégrale en réduisant l'intervalle d'intégration de $[0, +\infty[$ à $[a, +\infty[$, et dans cette deuxième intégrale on minore t par $\alpha$ :

$$E(X) \geq \alpha \int_{\alpha}^{+\infty} f(t)dt = \alpha P[X \geq \alpha]$$

ce qui prouve le résultat.

3. Cas général :

Dans le contexte général de la théorie de la mesure, l'espérance s'écrit toujours sous une forme voisine de celle vue à la deuxième partie. En remplaçant f(t) dt par une mesure de probabilité dP(t), et on montre l'inégalité de la même manière.

**Remarque(s).** Notons que si X est une v.a.r. positive et $r > 0$, alors $X(\omega) \geq a$ si et seulementsi $X^r(\omega) \geq a^r$, et ce pour tout $a > 0$. En particulier, si X est une v.a.r. positive qui posséde un moment d'ordre r, on a

$$\forall a > 0, \qquad a^r P[X \geq a] = a^r P[X^r \geq a^r] \leq E[X^r]$$

Cette remarque très simple conduit à une seconde inégalité connue sous le nom d'inégalité de Bienaymé–Tchebychev.

Proposition 1.7

Soient $a > 0$ et X une v.a.r. de carré intégrable. Alors,

$$P[|X - E[X]| \geq a] \leq \frac{\sigma^2}{a^2}$$

Il suffit d'appliquer la remarque précédente à la variable $Y = |X - E[X]|^r$ avec $r = 2$. Eneffet, pour tout $a > 0$,

$$a^2 P[(X - EX) \geq a] = a^2 P[Y \geq a] \leq EY = \sigma^2$$

## I.3. INTRODUCTION AUX ENSEMBLES ALEATOIRES :

Dans la théorie des probabilités, l'ensemble aléatoire est une généralisation de la notion de variable aléatoire. Le concept a été introduit par Maurice Fréchet (1948) qui a remarqué que le développement de la théorie des probabilités et l'expansion de ses applications nous force à développer des systèmes où les résultats (aléatoires) peuvent être représenté par des ensembles, des fonctions, des processus, des séries, … etc.

L'utilisation moderne du ensemble aléatoire assume généralement que l'espace de valeurs est un espace vectoriel topologique, souvent un espace de Banach ou Hilbert.

### a. Définition des ensembles aléatoires dans un espace vectoriel :

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace de probabilité, E et G deux espaces vectoriels en dualité. Toute application :

$$\nu : \Omega \to \mathrm{E}$$

Est par définition un ensemble aléatoire dans E.

#### Définition 1.8. (Billigsley 1968)

Une suite $(X_n)_n$ de variables aléatoires est dite tight si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un sous ensemble compact $K_\varepsilon$ tell que :

$$\mathrm{P}[X_n \in \mathrm{K}_\varepsilon] > 1 - \varepsilon, \qquad \forall n$$

#### Proposition 1.9.

X est tight si et seulement s'il prend presque sûrement ses valeurs dans un sous espace vectoriel fermé séparable E' de E.

$$i.e. \qquad P[X \in E'] = 1$$

### b. Variables aléatoires indépendants :

Dans la théorie classique du calcul des probabilités, on dit que deux variables aléatoires numériques $X_1$ et $X_2$ sont indépendantes si, quels que soient $x_1$ et $x_2$ :

$$P[X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2] = P[X_1 \leq x_1] \times P[X_2 \leq x_2]$$

Ce qui équivaut à dire que les événements $\{X_1 \leq x_1\}$ et $\{X_2 \leq x_2\}$ sont indépendants quels que soient $x_1$ et $x_2$. Considérons maintenant des variables aléatoires $X_1$ et $X_2$ prenant leurs valeurs dans des espaces de Banach $B_1$et $B_2$ respectivement, ces variables aléatoires sont indépendantes si les données qu'on a sur l'une des variables ne modifient pas la loi de probabilité de l'autre. Sans étudier quand et comment il serait possible de définir des probabilités conditionnelles. La généralisation de la définition de l'indépendance de deux variables aléatoires donne une définition immédiate de l'indépendance des ensembles aléatoires.

## I.4. FONCTION SOUS-LINEAIRE :

Soit V un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. On dit qu'une applications$s: V \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ est sous-linéaire lorsque :

- pour tous ensembles$x$ et $y$ de V, on a

  $$s(x+y) \leq s(x) + s(y)$$

  (on dit également que $s$ est sous-additive)
- pour tout ensemble $x$de V et $\lambda \geq 0$ ; on a

  $$s(\lambda x) = \lambda s(x)$$

  (on dit que $s$ est positivement homogène).

Les applications sous-linéaires sont convexes.

Comme exemples d'applications sous-linéaires, citons les semi-normes ou, plus généralement, toute jauge d'un convexe contenant l'origine.

# CHAPITRE II : THEOREMES LIMITES DANS IR

## II.1. LOIS DES GRANDS NOMBRES :

Pour un phénomène aléatoire, la loi des grands nombres énonce que la fréquence d'apparition d'un résultat, lorsqu'on répète la même expérience aléatoire un nombre de fois suffisamment grand, se rapproche d'un nombre déterminé. Ce nombre caractérisant le résultat observé, est sa probabilité. Alors Si $(X_n)$ est une suite de variables aléatoires, on cherche les conditions suffisantes pour que la variable aléatoire$Y_n$ telle que $(Y_n = \frac{S_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k)$ converge vers une constante µ.

Le calcul des probabilités réponds au désir de pouvoir fournir des modèles que l'on appelait lois empiriques du hasard et qui se manifestent par une stabilité étonnante des fréquences d'un événement quand on donne à celui-ci un grand nombre d'occasions de se produire. Ainsi, par exemple, en lançant un grand nombre de fois une pièce de monnaie parfaite, la fréquence d'apparition de pile se stabilise autour de la valeur $1 / 2$, valeur que définit la probabilité d'apparition de pile.C'est J. Bernoulli qui a fourni un modèle rendant compte de ce phénomène; il a introduit un mode de convergence proche de la convergence en probabilité et il a montré que la suite des fréquences d'apparition de pile converge, selon ce mode, vers la valeur $1 / 2$ qu'est la probabilité théorique d'apparition de pile. Les arguments de Bernoulli sont de nature combinatoire et fort compliqués. Ils ont été considérablement simplifiés par Tchebychev, grâce à l'inégalité qui porte son nom. Le problème étudié par J. Bernoulli été considérablement généralisé et a donné naissance aux différentes versions de lois des grands nombres.

### a. Loi faible des grands nombres :

La loi faible des grands nombres nous annonce que la moyenne arithmétique d'une suite $(X_n)_{n\geq 1}$ de variables aléatoires indépendantes et de même loi, et ayant une espérance commune finie, converge en probabilité vers cette espérance.

La loi faible des grands nombres a été établie par J. Bernoulli pour le cas particulier où les variables aléatoires $X_i$ ne prennent que les valeurs 0 ou 1. Son énoncé et sa démonstration figurent dans son ouvrage « Ars Conjectandi » publié en 1713 par son neveu Nicolas Bernoulli. Il faut savoir que l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev n'étant pas connue à l'époque, Bernoulli dut développer une démonstration extrêmement ingénieuse pour établir ce résultat. La version générale de la loi faible des grands nombres est attribuée au mathématicien russe Khintchine sous le théorème ci-dessous.

Théorème 2.1. (*Loi faible des grands nombres - Khintchine*)

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées d'espérance μ et de variance$\sigma^2$. Alors :

1. $\bar{X}_n$converge en probabilités vers μ. ($\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow{prob}$ μ)
2. $\forall\varepsilon > 0 \quad \lim_{n\to\infty} P[|\bar{X}_n - \mu| \geq \varepsilon] = 0$

Interprétation :

La première partie signifie que quand on répète une expérience aléatoire un grand nombre de fois, la moyenne de X tend vers $E[X]$, tandis que la deuxième partie implique que la variance de $\bar{X}_n$ tend vers 0. Ce qui signifie qu'en plus de converger vers *E[X]*,$\bar{X}_n$ne spécule pas indéfiniment autour de sa moyenne, mais, au contraire, s'en rapproche infiniment.

Preuve :

La démonstration est une conséquence immédiate de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev à l'ordre 2 appliquée à la variable $\bar{X}_n - \mu$.

L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev nous donne alors pour $\varepsilon > 0$, fixé :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \; P\left[|\bar{X}_n - E[\bar{X}_n]| > \varepsilon\right] \leq V\left[\bar{X}_n\right]/\varepsilon^2$$

Alors on a :

$E\left[\bar{X}_n\right] = \mu$, et $V\left[\bar{X}_n\right] = \frac{\sigma^2}{n}$

Donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \ \mathrm{P}\left[|\overline{\mathrm{X}}_{\mathrm{n}} - \mu| > \varepsilon\right] \leq \sigma^2/n\varepsilon^2$$

En faisant tendre n vers +∞ ($\varepsilon$ fixé ), on déduit :

$\forall \varepsilon > 0 \ \ \lim_{n\to\infty} P[|\bar{X}_n - \mu| \geq \varepsilon] = 0.$

Il existe une version de la loi des grands nombres pour la convergence presque sûre, on parle de la loi forte (car la convergence presque sûre est plus forte que celle en probabilité voir les rappels mathématiques)

### b. Loi forte des grands nombres :

La loi forte des grands nombres est sans doute le résultat le plus célèbre en théorie des probabilités. Il établit que la moyenne d'une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées tend vers l'espérance de cette distribution commune, avec une probabilité de 1.

Théorème 2.2. (*Lemme de Borel-Cantelli*)

Soit $(A_k)_k$ une suite d'événements de l'espace de probabilité$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ alors :

1- $\sum_{k=0}^{n} P(A_k) < +\infty \quad => \quad P\left(\overline{lim_n}\ A_n\right) = 0$

2- Si $\sum_{k=0}^{n} P(A_k) = +\infty$ et les événements $(A_k)_{k\geq 1}$ sont indépendants alors : $P\left(\overline{lim_n}\ A_n\right) = 1.$

Preuve :

1. Supposons que $\sum_{k=0}^{n} P(A_k) < +\infty$. Posons $B_n = \bigcup_{k\geq n} A_k$, la suite $(B_n)_n$ est décroissante. (i.e. $B_{n+1} \subset B_n$).

$$P\left(\overline{lim_n}\ A_n\right) = P\Big(\bigcap_{n\geq 1}\left(\bigcup_{k\geq n} A_k\right)$$
$$= P\left(\bigcap_{n} B_n\right)$$

Donc,

$$P(\overline{lim_n}\ A_n) \leq P(B_n) \leq \sum_{k=n}^{\infty} P(A_k)$$

Avec

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=n}^{\infty} P(A_k) = 0$$

2. Supposons que $\sum_{k=0}^{n} P(A_k) = +\infty$, et que la série $(A_k)_k$ est indépendante. Et montrons que $P\left(\overline{\lim_n} A_n\right) = 1$.

Or $P\left(\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n\right) = P\left(\left(\underline{lim_n}\ A_n^c\right)^c\right) = 1 - P(\underline{lim_n}\ A_n^c)$

Donc il suffit de montrer que $P\left(\underline{lim_n}\ A_n^c\right) = 0$.

$$P\left(\underline{lim_n}\ A_n^c\right) = \lim_{n\to\infty} P(\bigcap_{k\geq n} A_k^c)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\lim_{N\to\infty} P\left(\bigcap_{k=n}^{N} A_k^c\right)\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\lim_{N\to\infty} \prod_{k=n}^{N} P(A_n^c)\right)$$

Et on a $\prod_{k=n}^{N} P(A_n^c) = \prod_{k=n}^{N}(1 - P(A_k))$

$$\leq \prod_{k=n}^{N} e^{-P(A_k)} = e^{-\sum_{k=1}^{N} P(A_k)}$$

(Car $\forall x \in R\ ; 1 + x \ \leq e^x$)

Donc

$$P\left(\underline{lim_n}\ A_n^c\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\lim_{N\to\infty} \prod_{k=n}^{N} P(A_n^c)\right)$$

$$\leq \lim_{n\to\infty}\left(\lim_{N\to\infty} e^{-\sum_{k=1}^{N} P(A_k)}\right)$$

$$= 0$$

Donc $P\left(\underline{lim_n}\, A_n^c\right) = 0$, d'où $P\left(\overline{\lim_n} A_n\right) = 1$.

Théorème 2.3. (*Loi forte des grands nombres*)

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires Indépendantes identiquement distribuées et d'espérance et variance finis, alors :$\bar{X}_n$ converge presque sûrement vers μ, $\left(\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \overset{p.s}{\rightarrow} \mu\right)$.

$$i.e.\quad \mathrm{P}\left[\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{X}_k = \mu\right] = 1.$$

Interprétation :

Ce théorème annonce que pour calculer l'espérance d'une variable aléatoire*X*, il suffit de prendre un grand nombre de variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ indépendantes et ayant toutes la loi de *X*, et de calculer la moyenne $\frac{X_1+\cdots+X_n}{n}$ des valeurs données par ces variables aléatoires, et on a : $\frac{X_1+\cdots+X_n}{n} \approx E[X]$.

Preuve :

Il suffit de prouver le théorème quand $\mu = 0$. On peut alors en déduire le cas générale par translation $Y_i = X_i - \mu$.

Posons $\bar{X}_n = \frac{X_1+\cdots+X_n}{n}$.

Et soit $\varepsilon > 0$ *et* $\mathrm{D}_\varepsilon = \overline{\lim_{n\to\infty}}\{|\overline{\mathrm{X}_n} - \mu| > \varepsilon\} = \overline{\lim_{n\to\infty}}\{|\overline{\mathrm{X}_n} - 0| > \varepsilon\} = \overline{\lim_{n\to\infty}}\{|\overline{\mathrm{X}_n}| > \varepsilon\}$.

Utilisant le lemme de Borel-Cantelli pour montrer que $P(D_\varepsilon) = 0$. Pour en conclure en montrant que $D = \cup_n D_{1/n}$ est de probabilité nulle.

En effet, on a $D = \{\bar{X}_n \nrightarrow 0\}$, donc le résultat est satisfait si on montre que *D* est de probabilité nulle.

Afin d'utiliser le lemme de Borel-Cantelli , on montre la convergence de la série de terme général $P[|\bar{X}_n| > \varepsilon]$. On a :

$$\mathrm{P}\left[|\overline{\mathrm{X}_n}| > \varepsilon\right] = \mathrm{P}[|\mathrm{S}_n| > n\varepsilon] = \mathrm{P}[|\mathrm{S}_n|^4 > \mathrm{n}^4\varepsilon^4]$$

Et par l'inégalité de Markov, on a :

$$\mathrm{P}[|\overline{\mathrm{X}_n}| > \varepsilon] \leq E[\mathrm{S}_n^4]/\mathrm{n}^4\varepsilon^4$$

Il reste à estimer $[S_n^4]$ :

$$\mathrm{S_n^4} = (\mathrm{X_1} + \cdots + \mathrm{X_n})^4$$

$$= \sum_{\mathrm{k_1 k_2 k_3 k_4} \in \{1,2,3,4\}} \mathrm{X_i^{k_1} X_j^{k_2} X_k^{k_3} X_l^{k_4}}$$

Et $\mathrm{E[S_n^4] = E[(X_1 + \cdots + X_n)(X_1 + \cdots + X_n)(X_1 + \cdots + X_n)(X_1 + \cdots + X_n)]}$.

En développant le terme de droit, on obtient un résultat en termes de la forme $\mathrm{X_i^4}$ , $\mathrm{X_i^3 X_j}$, $\mathrm{X_i^2 X_j^2}$, $\mathrm{X_i^2 X_j X_k}$, $\mathrm{X_i X_j X_k X_l}$. Avec *i, j, k, l,* sont tous différents.

Et comme tous les $X_i$ont pour moyenne 0 ; on obtient par indépendance que

$$E\left[X_i^3 X_j\right] = E[X_i^3] E\left[X_j\right] = 0$$

$$E\left[X_i^2 X_j X_k\right] = E[X_i^2] E\left[X_j\right] E[X_k] = 0$$

$$E\left[X_i^2 X_j X_k X_i\right] = 0$$

Pour une paire donnée et il y a $C_2^4 = 6$ termes dans le développement qui sont égaux à $X_i^2 X_j^2$. Cela entraine donc, en développant le produit précédent et nous prenons l'espérance terme à terme, que :

$$E[S_n^4] = nE[X_i^4] + 6C_n^2\, E\left[X_i^2 X_j^2\right]$$

$$= nE[X_i^4] + \cdots + 3n(n-1) E[X_i^2] E[X_j^2]$$

On pose $M = \max\{E[X_i^4], E[X_i^2], E\left[X_j^2\right]$

Donc,

$$E[S_n^4] \leq nM + 3Mn(n-1) \leq 3Mn^2 < \infty$$

On a alors

$$P\left[\left|\overline{X_n}\right| > \varepsilon\right] \leq \frac{E[S_n^4]}{n^4 \varepsilon^4} \leq \frac{3M}{n^2 \varepsilon^4}$$

Comme $\frac{3M}{n^2 \varepsilon^4}$ représente le terme général d'une série convergente alors,

$$P\left[\left|\overline{X_n}\right| > \varepsilon\right] < \infty$$

Le lemme de Borel-Cantelli s'applique et donne $P(D_\varepsilon) = 0$ ($D_\varepsilon$ de mesure nulle), posons alors $D = \bigcup_{p=1}^{\infty} D_{\frac{1}{P}}$. On a $P(D) = 0$, car $D$ est la réunion dénombrable d'ensembles $D_{\frac{1}{P}}$ de probabilité nulle. Posons alors :

$$\Omega_0 = D^c = \bigcap_{p=1}^{n} D_{Y_p}^C = \bigcap_{p\geq 1} \bigcup_{k\geq 1} \bigcap_{n\geq k} \left\{\left|\overline{X_n}\right| \leq \frac{1}{p}\right\}$$

On a donc $P(\Omega_0) = 1$.

Lorsque la moyenne des $X_i$ n'est pas égale à 0, on peut appliquer l'argument précédent aux variables aléatoires $X_i - \mu$ , pour obtenir avec une probabilité de 1 :

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{X_i - \mu}{n} = 0$$

Alors

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k = \mu$$

Ce qui prouve le résultat

## II.2. THEOREME DE LA LIMITE CENTRALE TLC :

Les lois des grands nombres nous assurent qu'en présence d'une suite$(X_n)_{n\geq 0}$de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées, la moyenne empirique $\bar{X} = \frac{S_n}{n}$ converge vers la moyenne théorique $\mu$. Cependant, nous ne savons rien sur les alternances autour de cette moyenne théorique, autrement dit, la vitesse de convergence de la moyenne empirique en fonction de n est inconnue.

Dans le cas le plus simple, considéré ci-dessous pour la démonstration du théorème, les variables aléatoires sont indépendantes, continues et possédant la même moyenne et la même variance. En raison d'obtenir un résultat fini, il faut centrer cette somme en lui soustrayant sa moyenne et la réduire en la divisant par son écart-type. Sous des conditions assez larges, la loi de probabilité (de la moyenne) converge alors vers la loi Normale centrée réduite. L'omniprésence de la loi Normale s'expliquant par le fait que de nombreux phénomènes considérés comme aléatoires sont dus à la superposition de nombreuses causes.

Ce théorème possède donc une interprétation en statistique mathématique. Cette dernière associe une loi de probabilité à une population. Chaque élément extrait de la population est donc considéré comme une variable aléatoire et, en réunissant un nombre n de ces variables supposées indépendantes, nous obtenons un échantillon. La somme de ces variables aléatoires divisée par n donne une nouvelle variable nommée la moyenne empirique. Celle-ci, une fois réduite, tend vers une variable Normale réduite lorsque n tend vers l'infini.

### Thèorème 2.4. (Théorèmede la limite centrale)

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ un espace probabilisé et soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a.i.i.d. d'éspérance $\mu$ et de variance $\sigma^2$ finies. Alors la distribution de $\frac{X_1+\cdots+X_2-n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$ tend vers la distribution normale lorsque $n \to \infty$.

i.e. $\lim\limits_{n\to\infty} P[\frac{X_1+\cdots+X_2-n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq a] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{a} e^{\frac{x^2}{2}}\, dx$

### Interprétation :

Le théorème central limite nous donne une sorte de développement limité de la moyenne empirique lorsque n est grand. Autrement dit, pour n grand, on a :

$$\frac{S_n}{n} \approx \mu + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}.Z$$

Où Z est une variable aléatoire gaussienne centrée réduite. La convergence dans la loi des grands nombres est donc en $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ c'est-à-dire les alternances autour de la moyenne théorique au bout de n expériences sont de l'ordre $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

Autrement dit, l'écart entre les moyennes arithmétiques et l'espérance, qui tend vers *0* par la Loi des grand nombres*,* se comporte après normalisation comme la loi Normale.

Preuve :

L'idée de la preuve que nous allons donner est simple : nous allons montrer que la fonction caractéristique $\varphi_{zn}$ des $z_n$ tend vers la fonction caractéristique de la loi normal centrée réduite.

Soit $(X_i)_i$une suite des variables aléatoires réelles indépendantes identiquement distribuées dont la moyenne E(X) et l'écart-type $\sigma(X)$.

Posons, $Z_n = \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$. Donc$Z_n$ est une variable centrée réduite générée à l'aide d'une suite de *n* variables aléatoires indépendantes identiquement distribuéesqui, par construction, a une moyenne nulle et une variance unitaire:

$$E[Z_n] = 0 \ \ et \ \ V(Z_n) = 1$$

Et on a

$$Z_n = \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}}[\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)]$$

En utilisant la fonction caractéristique, on obtient

$$\varphi_{Z_n}(t) = E[e^{itZ_n}] = E\left[exp\left(\frac{it}{\sigma\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n} X_k - \mu\right)\right]$$

Comme les variables aléatoires $X_i$ sont indépendantes identiquement distribuées, il vient que

$$\varphi_{Z_n}(t) = \prod_{k}^{n} E\left[\exp\left(it\frac{X_k - \mu}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right] = \left(E\left[\exp\left(it\frac{X_k - \mu}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right]\right)^n$$

Puis le développement de Taylor du terme $E\left[\exp\left(it\frac{X_k-\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right]$donne au troisième ordre :

$$E\left[\exp\left(it\frac{X_k - \mu}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right] \cong \mathrm{E}\left[1 + \mathrm{i}\frac{\mathrm{t}}{\sigma\sqrt{n}}(\mathrm{X} - \mu) - \frac{\mathrm{t}}{2!\,\mathrm{n}\sigma^2}(\mathrm{X} - \mu)^2\right]$$

Finalement

$$\varphi_{Z_n}(t) \cong \left\{E\left[1 + i\ \frac{t}{\sigma\sqrt{n}}(X-\mu) - \frac{t}{2!\,n\sigma^2}(X-\mu)^2\right]\right\}^n$$

$$= \left[\int_{-\infty}^{+\infty}\left(1 + i\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}(X-\mu) - \frac{t^2}{2!\,n\sigma^2}(X-\mu)^2\right) f_X(x)dx\right]^n$$

$$= \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f_X\,dx + \int_{-\infty}^{+\infty} ix\frac{t}{\sigma\sqrt{n}} f_X(x)dx\ -\ \int_{-\infty}^{+\infty} \mu.i\ \frac{t}{\sigma\sqrt{n}} f_X(x)dx \right.$$
$$\left. + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^2}{2n\sigma^2}(x-\mu)^2 \frac{t}{\sigma\sqrt{n}} f_X(x)dx\ \right]^n$$

$$= \left[1 + \frac{it}{\sigma\sqrt{n}}\int_{-\infty}^{+\infty} x\ f_X(x)\ dx - \frac{\mu it}{\sigma\sqrt{n}}\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\ dx \right.$$
$$\left. - \frac{t^2}{2n\sigma^2}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu)^2\ f_X(x)\ dx\right]^n$$

$$= \left[1 + \frac{it}{\sigma\sqrt{n}}\mu - \frac{\mu it}{\sigma\sqrt{n}} - \frac{t^2}{2n\sigma^2}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu)^2\ f_X(x)\ dx\right]^n$$

$$= \left[1 - \frac{t^2}{2n\sigma^2}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu)^2\ f_X(x)\ dx\right]^n$$

$$= \left[1 - \frac{t^2}{2n\sigma^2}V(X)\right]^n\ =\ \left[1 - \frac{t^2}{2n}\right]^n$$

Posons $-\frac{t^2}{2n} = \frac{1}{x}$ donc $n = -\frac{xt^2}{2}$, nous obtenons alors :

$$\varphi_{Z_n}(t) \cong \left[1 - \frac{1}{x}\right]^{-\frac{xt^2}{2}} = \left[\left(1 - \frac{1}{x}\right)^x\right]^{-\frac{t^2}{2}}$$

$$= \left[\lim_{n\to+\infty}\left(1 - \frac{1}{x}\right)^x\right]^{-\frac{t^2}{2}}$$

$$= \left[\lim_{n\to+\infty} e^{x\ \ln\left(1-\frac{1}{x}\right)}\right]^{-\frac{t^2}{2}}$$

$$= e^{-\frac{t^2}{2}}$$

Nous retrouvons donc la fonction caractéristique de la loi Normale centrée réduite. Malgré l'immensité de champ d'applications de ce théorème, le TLC n'est pas universel. Dans sa forme la plus simple, il impose en particulier à la variable considérée d'avoir des moments du premier et du deuxième ordre (moyenne et variance), si tel n'est pas le cas, il n’est plus satisfait.

L'exemple le plus simple d'échec du TLC est donné par la distribution de Cauchy, qui n'a ni moyenne, ni variance, et dont la moyenne empirique a toujours la même distribution (Cauchy) quelle que soit la taille de l'échantillon.

## II.3. CONCLUSION :

Le théorème de la limite centrale est l’un des résultats les plus remarquables de la théorie des probabilités. Il établit que la somme d’un grand nombre de variables aléatoires indépendantes suit une distribution approximativement normale. Il fournit donc non seulement une méthode simple pour le calcul approximatif de probabilité liées à des somme de variables aléatoires, mais il explique également ce fait empirique que bien des phénomènes naturels admettent une distribution en forme de cloche, c’est à dire de type normal.

# CHAPITRE III : ESPACES DE FONCTIONS MULTIVALUEES INTEGRABLEMENT BORNEES

Dans les années 70, l'étude sur les multifonctions a été largement développée, surtout dans le domaine de l'économie mathématique et des problèmes de contrôle optimal.

Soit $(\Omega, \mathcal{H}, \mu)$ un espace mesurable fini, et B un espace de Banach réel séparable. Les notions de mesurabilité et de prolongement sont définies pour les fonctions multivaluéedans Ω à valeurs dans l'ensemble des sous-ensembles fermés non-vides de E.

L'espérance conditionnelle multivoque est définie pour les fonctions multivaluée appartenant à ces espaces et les propriétés possédées par l'espérance conditionnelle habituelle sont aussi vérifiées pour l'espérance conditionnelle multivoque.

## III.1. THEOREME DE RADSTRÖM POUR LES ENSEMBLES ALEATOIRES MULTIVOQUES :

Soit M l'ensemble desfonctions multivaluéemesurables$F\colon \Omega \to E$. M est dit décomposable si :

$$f_1, f_2 \in \mathrm{M} \text{ et } \mathrm{A} \in \mathcal{H} \implies 1_{\mathrm{A}}\, f_1 + 1_{\Omega\setminus \mathrm{A}} f_2 \in \mathrm{M}$$

Il est clair que si M est décomposable, alors $\sum_{i=1}^{n} 1_{A_i}\, f_i \in \mathrm{M}$ pour toute partition finie mesurable $\{A_1, \dots, A_n\}$ de Ω et$\{f_1, \dots, f_n\} \subset \mathrm{M}$. Le théorème suivant représente une caractérisation des sous-ensembles $S_F^p$ de $\mathrm{L}^p(\Omega, \mathrm{E})$.

### Théorème 3.1 :

Soit M un sous-ensemble fermé non-vide de$\mathrm{L}^p(\Omega, \mathrm{E})$, $1 \le p < \infty$ alors $\exists\, F \in M[\Omega, E]$tel que $\mathrm{M} = S_F^p$si et seulement si M est décomposable.

### Lemme 3.2 :

Soit $F \in M[\Omega, E]$ et $1 \leq \mathrm{p} \leq \infty$. Si $S_F^p$ est non-vide, alors il existe une suite $(\mathrm{f_n})_\mathrm{n}$ de$S_F^p$ tel que : $\mathrm{F}(w) = \ cl\{f_n(w)\}$ pour tout $w \in \ \Omega$.

Lemme 3.3 :

Soient $F \in \ M[\Omega, E]$ et $1 \leq \mathrm{p} < +\infty$, $(\mathrm{f_i})_\mathrm{i}$une suite de $S_F^p$, telle que l'on a $\mathrm{F(w)} = \mathrm{cl}\{\mathrm{f_i(w)}\} \forall\ \mathrm{w} \in \Omega$. Alors, $\forall\ \mathrm{f} \in S_F^p$ et $\varepsilon > 0$ , il existe une partition mesurable finie $\{\mathrm{A_1}, \dots, \mathrm{A_n}\}$ de Ω tell que :

$$\left\| \mathrm{f} - \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} 1_{\mathrm{A_i}} \mathrm{f_i} \right\|_\mathrm{p} < \varepsilon.$$

Preuve du théorème 3.1 :

Il est évident que $S_F^p$ est nécessairement décomposable. Pour prouver le contraire, soit M un sous-ensemble fermé non-vide décomposable de $\mathrm{L^p}(\Omega, \mathrm{E})$. D'après le lemme 3.2, il existe une suite $(\mathrm{f_i})_\mathrm{i} \subset \mathrm{L^p}(\Omega, \mathrm{E})$ tell que $\{\mathrm{f_i(w)}\}$. est dense dans E, ∀w ∈ Ω.

Pour tout i , soit $\alpha_\mathrm{i} = \inf\{\|\mathrm{f_i} - \mathrm{g}\|_\mathrm{p}, \mathrm{g} \in \mathrm{M}\}$, Choisissons une suite $(\mathrm{g_{i,j}})_{\mathrm{j}\geq 1} \in \mathrm{M}$, telle que $\lim\limits_{\mathrm{p}} \left\|\mathrm{f_i} - \mathrm{g_{i,j}}\right\|_\mathrm{p} = \alpha_\mathrm{i}$ et posons $F(w) \ = \ cl\{g_{i,j}(w); i, j \ \geq 1\}$ avec $F \ \in \ M\ [\Omega, X]$. Nous cherchons à démontrer que M = $S_F^p$ poue tout $f \in S_F^p$ et $\varepsilon > 0$.

$\forall \mathrm{f} \in S_F^p$, $\forall \varepsilon > 0$, on peut choisir une partition finie mesurable $\{\mathrm{A_1}, \dots, \mathrm{A_n}\} \subset \Omega$ et $\{\mathrm{h_1}, \dots, \mathrm{h_n}\} \subset \{\mathrm{g_{i,j}}\}$ telle que :

$$\left\| \mathrm{f} - \sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{n}} 1_{\mathrm{A_k}} \mathrm{h_k} \right\|_\mathrm{p} < \varepsilon$$

Puisque $\sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{n}} 1_{\mathrm{A_k}} \mathrm{h_k} \in \mathrm{M}$, ceci implique que f ∈ M. D'où$S_F^p \subset \mathrm{M}$.

Maintenant supposons que M≠ $S_F^p$ alors $\exists\ \mathrm{f}\ \in \mathrm{M}$, ∃A ∈ $\mathcal{H}$ avec $\mu(\mathrm{A}) > 0$, $et$ $\exists \delta > 0$ telle que :

$$\inf_{\mathrm{i,j}} \left\|\mathrm{f(w)} - \mathrm{g_{i,j}}(\omega)\right\| \geq \delta, \omega \in \mathrm{A}.$$

Prenons un entier i fixé, de telle sorte que l'ensemble

$$B = A \cap \{\omega \in \Omega : \|f(\omega) - f_i(\omega)\| < \frac{\delta}{3}\}$$

ait une mesure positive, et soit :

$$g_i^{'} = 1_B f + 1_{\Omega\backslash B}$$

Alors puisque $\{g_i^{'}\} \in M$ et

$$\left\|f_i(\omega) - g_{i,j}(\omega)\right\| \geq \left\|f_i(\omega) - g_{i,j}(\omega)\right\| - \|f(\omega) - f_i(\omega)\|_p^p$$

$$> \frac{2\delta}{3} \quad \forall \omega \in B$$

Alors,

$$\left\|f_i - g_{i,j}\right\|_p^p - \alpha_i{}^p \geq \left\|f_i - g_{i,j}\right\|_p^p - \left\|f_i - g_i^{'}\right\|_p^p$$

$$= \int_B \left(\left\|f_i(\omega) - g_{i,j}(\omega)\right\|^p - \|f_i(\omega) - f(\omega)\|^p\right) d\mu$$

$$\geq \left[\left(\frac{2\delta}{3}\right)^p - \left(\frac{\delta}{3}\right)^p\right] * \mu(B)$$

$$> 0, \qquad \forall j \geq 1$$

Ce qui ramène à une contradiction lorsque j tend vers l'infini.

■

SoientE₁ et E₂ deux sous-ensembles fermés non-vides de E. on définit $\delta(E_1, E_2) \geq 0$ par :

$$\delta(E_1, E_2) = \max\left\{\sup_{e_1 \in E_1} d(e_1, E_2), \sup_{e_2 \in E_2} d(e_2, E_1)\right\} \qquad (1.1)$$

En particulier le nombre $|E|$ est définit par :

$$|E| = \delta(E, \{0\}) = \sup_{e \in E} \|e\| \qquad (1.2)$$

Soit $\mathcal{L}^1(\Omega, A, \mu, E) = \mathcal{L}^1(\Omega, E)$ l'espace des fonctions intégrablement bornées dans M[Ω,X], où deux fonctions $F_1$ et $F_2$ sont dites identiques si $F_1(w) = F_2(w)$ p.p.

Pour $F_1$ et $F_2 \in \mathcal{L}^1(\Omega, E)$ et puisque $\delta\big(F_1(w), F_2(w)\big) \leq |F_1(w)| + |F_2(w)|$, la fonction $w \to \delta\big(F_1(w), F_2(w)\big)$ apparient à $L^1$, et on définit :

$$\Delta(F_1, F_2) = \int_\Omega \delta\big(F_1(w), F_2(w)\big)\, d\mu \qquad (1.3)$$

Soient K(E) l'ensemble des sous-ensembles fermés, bornés, non-vides de E, $K_c(E)$ l'ensemble de tout les convexes de K(E), et $K_{cc}(E)$ l'ensemble de tout les compacts convexes de K(E). On définit deux sous ensembles de $\mathcal{L}^1(\Omega, E)$ comme suite :

$$\mathcal{L}^1{}_c(\Omega, A, \mu ; E) = \mathcal{L}^1{}_c(\Omega, E)$$

$$= \{F \in \mathcal{L}^1(\Omega, E) : F(\omega) \in K_c(E) \text{ p.p.}\} ;$$

$$\mathcal{L}^1{}_{cc}(\Omega, A, \mu ; E) = \mathcal{L}^1{}_{cc}(\Omega, E)$$

$$= \{F \in \mathcal{L}^1(\Omega, E) : F(\omega) \in K_{cc}(K) \text{ p.p.}\} .$$

Notons que K(E) est un espace métrique complet, $K_c(E)$ est un sous-espace fermé de K(E) et $K_{cc}(E)$ est un espace métrique complet séparable.

### III.2. LA FONCTION MULTIVOQUE SIMPLE :

#### Théorème 3.4 :

$\mathcal{L}^1(\Omega, E)$ est un espace métrique complet, $\mathcal{L}^1{}_c(\Omega, E)$ et $\mathcal{L}^1{}_{cc}(\Omega, E)$ sont des sous-espaces fermés de $\mathcal{L}^1(\Omega, E)$.

La fonction multivoque $F \in M[\Omega, E]$ est appelée fonction simple s'il existe une partition mesurable finie $\{A_1, \dots, A_n\}$ de Ω et $E_1, \dots, E_n$ des sous-ensembles fermés non-vides de E telle que $F(\omega) = \sum_{i=1}^{n} 1_{A_i}(\omega)\, E_i \quad \forall\, \omega \in \Omega$. Puisque $K_{cc}(E)$ est séparable alors l'ensemble des fonctions simples dans $\mathcal{L}^1{}_{cc}(\Omega, E)$ est dense dans $\mathcal{L}^1{}_{cc}(\Omega, E)$. Pourtant l'ensemble des fonctions simples de $\mathcal{L}^1{}_c(\Omega, E)$ n'est pas dense dans $\mathcal{L}^1{}_c(\Omega, E)$.

Posons alors $L^1_c(\Omega,A,\ \mu\ ;\ E) = L^1_c(\Omega, E)$ la fermeture de l'ensemble des fonctions simples dans $\mathcal{L}^1{}_c(\Omega, E)$. Généralement, la relation suivante est vérifiée :

$$\mathcal{L}^1{}_{cc}(\Omega, E) \subset L^1_c(\Omega, E) \subset \mathcal{L}^1{}_c(\Omega, E) \subset \mathcal{L}^1(\Omega, E) \qquad (3.4)$$

De plus, l'espace $\mathcal{L}^1(\Omega, E)$ est considéré comme étant un sous-espace de $\mathcal{L}^1{}_{cc}(\Omega, E)$.

Théorème 3.5 :

(1) Les espaces $\mathcal{L}^1{}_{cc}(\Omega, E), L^1_c(\Omega, E), \mathcal{L}^1{}_c(\Omega, E), \mathcal{L}^1(\Omega, E)$ sont fermés sous l'addition et multiplication par les fonctions $L^\infty$.

(2) La projection $F \to \overline{\mathrm{Co}}\, F$ est une projection non-expansive de $\mathcal{L}^1(\Omega, E)$ vers $\mathcal{L}^1{}_c(\Omega, E)$.

$$\text{i.e.} \qquad \Delta(\overline{\mathrm{Co}}\, F_1, \overline{\mathrm{Co}}\, F_2) \leq \Delta(F_1, F_2), \qquad F_1, F_2 \in \mathcal{L}^1(\Omega, E)$$

Preuve :

Montrons que $L^1_c(\Omega, E)$ est fermé par l'addition.

Si pour E et G deux espaces de probabilités,

$$E_i, G_i \in K(E), i = 1, 2, \ldots$$

Alors l'inégalité suivante est vérifiée :

$$\delta\big(\mathrm{cl}(E_1 + E_2), \mathrm{cl}(G_1 + G_2)\big) \leq \delta(E_1, G_1) + \delta(E_2, G_2)$$

Soit $F_1, F_2 \in L^1_c(\Omega, E)$, il existe alors deux suites $(F_{1n})_n$ et $(F_{2n})_n$ de fonctions simples dans $\mathcal{L}^1{}_c(\Omega, X)$ de telle sorte que $\Delta(F_{in}, F_i) \to 0$, $i \in \{1, 2, \ldots\}$ Puisque $(F_{1n} + F_{2n})_n$ est une suite de fonctions simples de $\mathcal{L}^1{}_c(\Omega, X)$, alors $F_1 + F_2 \in L^1_c(\Omega, X)$ et donc :

$$\Delta(F_{1n} + F_{2n}\ ;\ F_1 + F_2) = \int_\Omega \delta\Big(\mathrm{cl}\big(F_{1n}(\omega) + F_{2n}(\omega)\big), \mathrm{cl}\big(F_1(\omega) + F_2(\omega)\big)\Big)\, d\mu$$

$$\leq \int_\Omega \delta\big(F_{1n}(\omega), F_1(\omega)\big) d\mu + \int_\Omega \delta\big(F_{2n}(\omega), F_2(\omega)\big) d\mu$$

$$= \Delta(F_{1n}, F_1) + \Delta(F_{2n}, F_2) \to 0$$

Si $X_1, X_2 \in K(E)$ alors l'inégalité suivante est vérifiée :

$$\delta(\overline{Co}E_1, \overline{Co}E_2) \leq \delta(E_1, E_2).$$

Pour $F_1,\ F_2 \in \mathcal{L}^1{}_c(\Omega, E)$ on a :

$$\Delta(\overline{Co}F_1, \overline{Co}F_2) = \int_\Omega \delta\big(\overline{Co}\, F_1(w) + \overline{Co}\, F_2(w)\big)\, d\mu$$

$$\leq \int_\Omega \delta\big(F_1(w) + F_2(w)\big)\, d\mu$$

$$= \Delta(F_1, F_2)$$

Selon le théorème de Radström (théorème 3.1), $K_{cc}(E)$ peut être prolongé à un cône convexe dans un espace de Banach réel B d'une manière que :

(a) Le plongement soit isométrique,

(b) L'additivité dans B implique l'additivité dans $K_{cc}(E)$ ,

(c) La multiplication par des nombres réels non négatifs dans B induit l'opération correspondante dans $K_{cc}(E)$ .

De même, si B est réflexive, $K_c(E)$ peut être prolongé à un espace de Banach réel B de la même façon.

Alors on a le théorème suivant qui énonce que les fonctions dans $\mathcal{L}^1_{cc}(\Omega, E)$ (ou dans $\mathcal{L}^1_c(\Omega, E)$ si E est réflexif) peuvent être considérées comme fonctions Bochner-Intégrables à valeurs dans un espace de Banach. Et donc la théorie de Bochner-Intégration peut être appliquée à ces fonctions.

### Théorème 3.6 :

Il existe un espace de Banach réel séparable B tell que $\mathcal{L}^1_{cc}(\Omega, \mathcal{H}, \mu, E)$ peut être prolongé vers une cone convexe dans $L^1_{cc}(\Omega, \mathcal{H}, \mu, B)$ de sorte que :

(a) Le plongement soit isométrique,

(b) L'additivité dans $L^1(\Omega, B)$ implique l'additivité dans $\mathcal{L}^1_{cc}(\Omega, E)$ ,

(c) La multiplication par des fonctions réels non négatifs de $L^1(\Omega, B)$ à valeurs dans $L^\infty$ induit l'opération correspondante dans $\mathcal{L}^1_{cc}(\Omega, E)$.

### III.3. CONCLUSION :

Pour pouvoir présenter la théorie des intégrales, d'espérance conditionnelle, et des martingales des multifonctions, plusieurs types d'espaces de multifonctions intégrablement bornées sont construits sous forme d'espaces métriques complets.

# CHAPITRE IV : LOIS DES GRANDS NOMBRES POUR LES ENSEMBLES ALEATOIRES TIGHTS DANS UN ESPACE VECTORIEL NORME.

## Introduction :

L'hypothèse considérant le processus stochastique en tant que fonction à valeurs variables aléatoires a motivé l'étude sur les variables aléatoires prenant leurs valeurs dans un espace vectoriel normé. Ces études ont été faites par Doob (1947), Mourier (1953), Prohorov (1956), Beck (1963), Billingsley (1968), …, etc.

Padgelt et Taylor (1973) ont présenté une liste de Lois des grands nombres pour les variables aléatoires reposant sur deux théories. La première est construite dans une structure probabiliste d'une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées sous contrainte de borgnitude de l'ordre p. La deuxième représente les propriétés géométriques de l'espace, appelée condition d'annulation, comme par exemple la Théorie du B-convexité (Beck (1963)).

Soit E un espace réel séparable normé de norme $\|.\|$ et soit B$(E)$ le sima-Borel engendré par les sous-ensembles ouverts de E.

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ un espace de probabilité et X une fonction de $\Omega$ vers E. Si $X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$ pour tout ensemble Borel B∈ $B(E)$ alors X est dite ensemble aléatoire de E.

L'espérance de X est définie par l'inégalité de Pettis de X notée par E X. Pour $p > 0$ $E\|X\|^p = \int_\Omega \|X\|^p \, dp$ est le p^ième moment de X.

<u>Remarque</u> :

Un ensemble aléatoire est dit symétrique s'il existe $\phi$ une fonction mesurable de $\Omega$ telle que :

$$P[X \circ \phi = -X] = 1$$

Notons que si X est symétrique alors E X = 0.

Les définitions de l'indépendance et de la distribution identique pour les ensembles aléatoires sont similaires au cas des variables aléatoires.

Définition **:** (ensembles aléatoires tights)

Une suite $\{X_n\}$ d'ensembles aléatoires est dite tight (Billingsley 1968) si pout tout $\varepsilon > 0$, il existe un sous ensemble compacte $K_\varepsilon$ de E tell que :

$$P[X_n \in K_\varepsilon] > 1 - \varepsilon \quad \text{pour tout n}$$

Remarque :

Puisque l'image par une fonction continue d'un ensemble compacte est compacte alors $f(X_n)$ est tight si $\{X_n\}$ est tight et $f$ une fonction continue de E vers un espace vectoriel normé.

## IV.1. LOI FORTE DES GRANDS NOMBRES :

Le principe de la Loi forte des grands nombres est que sous certains conditions la moyenne d'une suite de variables aléatoires $(X_n)_n$ converge presque sûrement vers la limite E(X).

Définition :

La Loi forte des grands nombres est dite satisfaite si :

$$\lim_n \|n^{-1} \sum_{k=1}^{n} (X_k - E(X_k))\| = 0 \qquad \text{avec une probabilité égale à 1}$$

Théorème 4.1.

Soient K un sous ensemble compacte d'un espace vectoriel normé E, et $(X_n)_n$ une suite d'ensembles aléatoires définie sur Ω à valeur dans K avec $E(X_n) = 0$ ∀n. Alors la loi forte des grands nombres est satisfaite.

i.e. : $\lim_{n \to +\infty} 1/n \sum_{i=1}^{n} X_n = 0$ p.s.

Théorème 4.2.

Soit E un espace vectoriel normé séparable et $(X_n)_n$ une suite d'ensembles aléatoires indépendantes tights dans E tell que :

$E\ \|X_n\|^p \leq M, \forall n$ , avec $p > 1$.

Alors la loi forte des grands nombres est satisfaite.

(i.e. $\lim_{n\to+\infty} 1/n \sum_{i=1}^{n} X_n = 0$ p.s)

## IV.2. LOIS FAIBLE DES GRANDS NOMBRES :

### Théorème 4.3.

Soient K un sous-espace compact d'un espace vectoriel normé E, et $\{Vn\}$ des ensembles aléatoires qui prennent leurs valeurs dans $K$ avec $\mathrm{E}(\mathrm{X_n}) = 0,\ \forall n$. Alors $\forall \mathrm{f} \in E^*$ (le dual topologique de E):

$$\lim_{\mathrm{n}} \left| \mathrm{n}^{-1} \sum_{k=1}^{n} \mathrm{f}(\mathrm{X_k}) \right| = 0, \qquad en\ probabilité,$$

Si et seulement si,

$$\lim_{\mathrm{n}} \left\| \mathrm{n}^{-1} \sum_{k=1}^{n} \mathrm{X_k} \right\| = 0, \qquad en\ probabilité.$$

### Théorème 4.4.

Soit E un espace vectoriel normé séparable $\{\mathrm{X_n}\}$ des ensembles aléatoires tights de E tell que $E\|\mathrm{X_n}\|^{\mathrm{p}} \leq \mathrm{M},\ \forall \mathrm{n}, \text{avec } \mathrm{p} > 1$.

Alors $\forall\ f \in E^*$ (le dual topologique de E):

$$\lim_{n} \left| \mathrm{n}^{-1} \sum_{k=1}^{n} \mathrm{f}(\mathrm{X_k}) \right| = 0, \qquad \text{en probabilité},$$

Si et seulement si,

$$\lim_{n} \left\| \mathrm{n}^{-1} \sum_{k=1}^{n} \mathrm{X_k} \right\| = 0, \qquad \text{en probabilité}.$$

## IV.3. CONCLUSION :

Il est intéressant de comparer la Loi Faible des Grands Nombres du théorème 4.4 avec le résultat de Taylor (1972) où la condition de distribution identique est éliminée en assurant la fermeture, et en utilisant une condition sur l'ordre $p > 0$, au lieu de la condition sur le premier ordre.

# CHAPITRE V : THEOREMES LIMITES PROBABILISTES DANS LES ESPACES DE BANACH

## INTRODUCTION :

La théorie des probabilités classique sur IR ou IR$^k$ concerne principalement la limitation comportementale de la suite de somme partielle $(S_n)_{n\geq 1}$.Les résultats les plus importants et les plus connus sont la loi (forte) des grands nombres (LLN), le théorème central limite (CLT) et la loi du logarithmique itérée (LIL) qui, pour les variables aléatoires à valeurs réelles, peut être résumé de la manière suivante.

Soit X une variable aléatoire à valeur réelle.

- La suite $(S_n \,/\, n)_{n\geq 1}$ converge presque sûrement vers $E(X)$ si et seulement si $E(|X|) < \infty$ (on dit alors que X satisfait la LLN, ou la LLN fort).
- La suite $(S_n \,/\, \sqrt{n})_{n\geq 1}$converge en distribution (vers une variable aléatoire normale G) si et seulement si $\mathbb{E}(X)$ = 0 et $\sigma^2 = E(X^2) < \infty$ (et dans ce cas, G est centré de variance $\sigma^2$) (on dit alors que X satisfait le CLT).

Définissons, sur $\mathbb{R}^+$, la fonction $LLx = loglogx$ si $x \geq e$, et $LLx = 1$ si $x < e$, et définissons $a_n \;=\; (2nLLn)^{1/2}$ pour tout $n \geq 1$. La suite $(S_n = a_n)_{n\geq 1}$ est presque sûrement borné si et seulement si $E(X)$ = 0 et $\sigma^2 = E(X^2) < \infty$, et dans ce cas,

$$\lim_{n\to\infty} inf \frac{S_n}{a_n} = -\sigma$$

Et

$$\lim_{n\to\infty} sup \frac{S_n}{a_n} \;= +\sigma$$

Avec une probabilité de 1. De plus, l'ensemble des points limites de la suite $(S_n \,/\, a_n)_{n\geq 1}$ est presque sûrement égal à l'intervalle $[-\sigma;\, +\sigma]$ (on dit alors que X satisfait la LIL).

À l'exception de la dernière déclaration sur la LIL, ces déclarations peuvent s'étendre facilement à des variables aléatoires de dimension finie, avec les modifications évidentes.

Les définitions de ces théorèmes limites de base s'étendent aux variables aléatoires prenant des valeurs dans un espace de Banach séparable réel de dimension infinie B. Par exemple, la convergence faible dans le théorème de la limite centrale doit être comprise comme une convergence faible dans l'espace des mesures de probabilité de Borel sur l'espace métrique séparable complet B. Pour la LIL, il faut distinguer une forme bornée (la suite $(S_n \,/\, a_n)_{n\geq 1}$ est presque sûrement bornée en B), et une forme compacte (la suite $(S_n \,/\, a_n)_{n\geq 1}$ est presque sûrement relativement compact en B). Dans ce dernier cas, il peut être montré, généralement, que l'ensemble des points limites de la suite $(S_n \,/\, a_n)_{n\geq 1}$ est un ensemble compact convexe symétrique en B (la boule unité de l'espace de Hilbert associée à la structure de covariance de la variable aléatoire X).

Les conditions de moment sur la loi de X caractérisent pleinement les théorèmes limites précédents en dimension finie. Cependant, comme on s'en est vite rendu compte, ce n'est plus vrai pour les dimensions infinies. À ce stade, l'accent a été mise sur la compréhension de quel type de conditions sur l'espace peut assurer une extension des déclarations de dimensions finies, et quelles nouvelles descriptions sont disponibles dans ces paramètres. Dans la première partie de cette enquête, nous décrivons les théorèmes limites presque sûrs (LLN et LIL). Comme observation principale, il a été établi, en raison de limites exponentielles approfondies, qui font partie de la concentration du phénomène de mesure pour les produits de mesure, que les déclarations presque sûres sont actuellement réduites aux correspondantes en probabilité ou en distribution sous des conditions nécessaire de moment. C'est une contribution majeure de l'approche de l'espace de Banach pour réaliser que ces conditions du moment sont en fait utilisées pour gérer la convergence de la distribution. Ce fait est illustré en détail plus tard dans l'étude du théorème de la limite centrale classique utilisant le type et le cotype.

## V.1. THEOREMES LIMITES PRESQUE SURS :

### Théorème 5.1.

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans un espace de Banach $B$. Alors la suite $(S_n/n)_{n\geq 1}$ converge presque sûrement vers $E\ (X)$ si et seulement si $E(\|X\|)\ <\infty$.

Ici, lorsque $E(\|X\|)<\infty$, l'espérance $E(X)\in B$ de telle sorte que $\langle\delta, E(X)\rangle = E(\langle\delta, X\rangle)$ pour tout $\delta\in B'$.

### Preuve :

D'après le lemme de Borel-Cantelli dans IR, la condition sur les évènements$E\ (\|X\|)<\infty$ est nécessaire. Supposons donc que $E\ (\|X\|)<\infty$. Sans perte de généralisation, nous pouvons supposer que $E(X)=0$. Pour chaque $\varepsilon>0$, soit $Y$ une variable aléatoire de l'étape centrée (en prenant seulement un nombre fini de valeurs) dans $B$ tel que $E\ (\|X-Y\|)\leq\varepsilon$. Soient $(Y_n)_{n\in IN}$ des copies indépendantes de Y, et $T_n=Y_1+\cdots+Y_n$pour tout $n\geq 1$, Alors la LLN dans le cas de dimensions finie donne

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\|T_n\| = 0\ \ p.s. \qquad (1)$$

D'autre part, par l'inégalité triangulaire on a,

$$\frac{1}{n}\|S_n-T_n\|\leq\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\|X_i-Y_i\|.$$

et par la LLN sur la ligne appliquée à $\|X-Y\|$, avec une probabilité de 1,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\|X_i - Y_i\| = E(\|X - Y\|) \leq \varepsilon \qquad (2)$$

D'après (1) et (2),

$$\lim sup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\|S_n\| \leq \varepsilon \quad p.s.$$

Puisque$\varepsilon > 0$ est arbitraire, la conclusion suit.

Juste après la démonstration de ce théorème, la recherche s'est concentrée sur les formes connexes de la LLN forte dans les espaces de Banach, en particulier sur la LLN de Kolmogorov qui annonce que si les variables réelles$(Y_i)_{i\in IN}$sont indépendantes, mais pas nécessairement identiquement distribuées de moyenne zéro, telle que,

$$\sum_i \frac{1}{i^2}E(Y_i^2) < \infty$$

Alors la suite $\frac{1}{n}\sum_1^n Y_i$converge presque sûrement vers 0. En 1962 A. Beck annonce que la LLN de Kolmogorov ne peut pas s'étendre aux espaces de Banach de dimension infinie. Il a aussi caractérisé, par une condition géométrique connue sous le nom de convexité de Beck, les espaces de Banach $B$ pour lesquels chaque suite $(Y_i)_{i\in IN}$ de variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $B$ et demoyenne zéro avec $Sup_i\|Y_i\|_\infty < \infty$ vérifie la LLN, i.e. $\lim_{n\to\infty} 1/n\sum_{i=1}^n Y_i = 0$ presque surement.

En particulier, les espaces tels que $l_1, L_1, c_0, C(K)$ ne satisfait pas la condition de Beck, et donc la LLN de Kolmogorov.

La condition de convexité de Beck a ensuite été reconnu (dans les années soixante-dix à travers le travail de base de G. Pisier) équivalente à une condition de type probabiliste. Cette condition ainsi qu'une autre condition relative « duale » ont été introduites de façon indépendante par $B$. Maurey. Rappelons qu'un espace de

Banach $B$ est de type p, $1 < p < 2$, s'il existe une constante C de telle sorte que pour tout $x_1, \dots, x_n$ dans $B$,

$$E\left(\left\|\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i x_i\right\|^p\right) \leq C \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^p$$

Ici, $(\varepsilon_i)_{i\in IN}$ est une suite de Rademacher, qu'est une suite de variables aléatoires indépendantes de distribution commune $P\{\varepsilon_i = +1\} = P\{\varepsilon_i = -1\} = \frac{1}{2}$. De même, $B$ est dite de cotype $q, 2 \leq q < \infty$ , si il ya une constante C de telle sorte que pour chaque $x_1, \dots, x_n$dans $B$,

$$\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^q \leq C\, E\left(\left\|\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i x_i\right\|^q\right)$$

Les espaces$L^p$ sont de type $min\,(p, 2)$ et de cotype $max\,(p, 2)$. D'après le théorème de Kwapien, les espaces de Banach de type 2 et de cotype 2sont isomorphes aux espaces de Hilbert.

La découverte de G. Pisier en 1973 était que la condition de convexité de Beck pour un espace de Banach $B$ est équivalente au fait que $B$ est de type p avec$p > 1$. Et donc, ça devient évident que la condition probabiliste est bien adapté à l'étude sur la LLN, chose qui a mené au théorème suivant, théorème de Hoffmann-Jorgensen et G. Pisier généralisant le résultat de Beck.

### Théorème 5.2.

Un espace de Banach $B$ est de type $p > 1$ si et seulement si pour toute suite $(Y_i)_{i\in IN}$ de variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $B$ et de moyenne nulle de telle sorte que,

$$\sum_{i} \frac{1}{i^p} E(\|Y_i\|^p) < \infty$$

on a

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i \to 0 \qquad p.s.$$

Jusqu'à maintenant, les résultats ont été développés sous forme d'extensions naturelles, dans des espaces d'un certain type, des théorèmes classiques en dimension infinie. Une étape importante a été réalisé avec la contribution de V.V. Yurinskii, (dont les intérêts étaient en inégalités exponentielles), et les applications de ses idées par J. Kuelbs (pour la LIL) et J. et J. KuelbsZinn (pour la LLN). Depuis ces résultats, les conceptualisations de l'espace de Banach ont commencé à avoir un impact important sur l'analyse probabiliste.

Etant donné $Y_1, \dots, Y_n$variables aléatoires intégrables indépendantes à valeurs dans un espace de Banach l'observation de V.V. Yurinskii était que la norme de la somme $S = \sum_{i=1}^{n} Y_i$centrée à sa moyenne, peut être écrite comme une somme de différence de martingale,

$$\|S\| - E(\|S\|) = \sum_{i=1}^{n} d_i$$

Sachant que la filtration $F_i = \sigma(Y_1, \dots, Y_i),\ i = 1, \dots, n,$ (c.à.d. $E(d_i|F_{i-1}) = 0$) avec, pour tout $i = 1, \dots, n,$

$$|d_i| \leq \|Y_i\| + E(\|Y_i\|)$$

Dans un sens où$\|S\| - E(\|S\|)$est aussi bonne que la somme $\sum_{i=1}^{n}\|Y_i\|$de sorte que, $E(\|S\|)$est sous contrôle, les résultats unidimensionnels classiques sont appliqués de façon similaire. Avec cette représentation, J. et J. Kuelbs et J. Zinn ont prouvé le suivant.

### Théorème 5.3.

Soit $(Y_i)_{i \in IN}$ une suite de variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $B$ de telle sorte que, pour p, $1 \leq p \leq 2$,

$$\sum_i \frac{1}{i^p} E(\|Y_i\|^p) < \infty$$

Alors,

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i \to 0$$

Presque sûrement, si et seulement si,

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i \to 0$$

En probabilité.

Preuve :

Sous l'hypothèse $\frac{Y_i}{i} \to 0$ presque sûrement, de sorte que nous pouvons supposer que $\|Y_i\|_\infty \leq i$pour tout $i \geq 1$. Nous cherchons donc à symétriser de tel sorte que le blocage soit facilement gérée.

Pour symétriser on prends $S_n = Y_1 + \cdots + Y_n,\ n \geq 1$. De toute évidence, $S_n/n\ \to 0$ presque sûrement $(S_n - S_n')/n\ \to 0$ presque sûrement, où $S_n'/n\ \to 0$ est formée à partir d'une copie indépendante de l'original $(Y_i)$, et$S_n/n\ \to 0$ en probabilité. En effet, si $(S_n - S_n')/n\ \to 0$ presque sûrement, alors, via le théorème de Fubini, on peut trouver$\omega'$tel que$S_n/n - S_n'(\omega')/n\ \to 0$ presque sûrement qui, en particulier, implique que cette dernière tend vers zéro en probabilité. Mais, puisque $S_n/n\ \to 0$ en probabilité, alors$S_n'(\omega')/n\ \to 0$. Ainsi, $S_n/n\ \to 0$ avec une probabilité de 1.Donc nous pouvons nous restreindre au cas des variables aléatoires symétriques indépendantes $Y_i$.

Supposons que$S_n/n\ \to 0$ en probabilité. Alors par conséquence des inégalités de Hoffmann-Jorgensen on a $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} E(\|S_n\|) = 0$. En outre, par les inégalités maximales pour les sommes de variables aléatoires indépendantes symétriques, il suffit de montrer que

$$\frac{1}{2^n}\sum_{i=2^{n-1}+1}^{2^n} Y_i \ \to 0$$

De probabilité 1. Par le résultat de Yurinskii, $\forall\varepsilon > \ O$, et $\forall n$,

$$\mathbb{P}\left\{\left\|\sum_{i=2^{n-1}+1}^{2^n} Y_i\right\| - E\left(\left\|\sum_{i=2^{n-1}+1}^{2^n} Y_i\right\|\right) \geq \varepsilon n\right\} \leq \frac{4}{\varepsilon^2 2^{2n}}\sum_{i=2^{n-1}+1}^{2^n} E(\|Y_i\|^2)$$

$$\leq \frac{4}{\varepsilon^2}\sum_{i=2^{n-1}+1}^{2^n} \frac{1}{i^p} E(\|Y_i\|^p)$$

La conclusion suit alors immédiatement par le lemme de Borel-Cantelli.

La caractéristique importante du théorème 5.3 est que, en vertu de la convergence en probabilité de la suite de somme partielle, aucune hypothèse ne doit être imposée à l'espace de Banach. Par respect au théorème 5.2, la condition de type est en fait uniquement utilisée afin de réaliser cette convergence en probabilité. Supposons en effet que les $Y_i$sont centrées et représentent par $(Y_i')_{i\in IN}$une copie indépendante de la suite $(Y_i)_{i\in IN}$. Alors, par l'inégalité de Jensen et l'inégalité triangulaire, pour tout $n$, et $p \ \geq 1$,

$$E\left(\left\|\sum_{i=1}^{n} Y_i\right\|^p\right) \leq E\left(\left\|\sum_{i=1}^{n} (Y_i - Y_i')\right\|^p\right) = E\left(\left\|\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i(Y_i - Y_i')\right\|^p\right)$$
$$\leq 2^p E\left(\left\|\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i Y_i\right\|^p\right) \tag{4}$$

où la suite de Rademacher$(\varepsilon_i)_{i\in IN}$est indépendante des suites précédentes. En utilisant l'inégalité de type conditionnel sur les$Y_i$, pour une constante C ne dépendant que de B,

$$E\left(\left\|\sum_{i=1}^{n} Y_i\right\|^p\right) \leq 2^p C\sum_{i=1}^{n} E(\|Y_i\|^p)$$

Par conséquent, si

$$\sum_i \frac{1}{i^p} E(\|Y_i\|^p) < \infty$$

Alors $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i \to 0$ dans $L^p$ par le lemme de Kronecker, et donc en probabilité.

Une autre façon de faire la preuve précédente est l'utilisation des inégalités de Hoffmann-Jørgensen. Encore une fois, ceux-ci peuvent être considérés comme une conséquence de la conceptualisation de l'espace de Banach. Dans son début de formulation, l'inégalité Hoffmann-Jorgensen indique que si les $Y_1, \dots, Y_n$sont des variables aléatoires symétriques indépendantes à valeurs dans B, $\forall s$ et $t > 0$

$$\mathbb{P}\{\|S\| \geq s + 2t\} \leq \mathbb{P}\left\{\max_{1\leq i\leq n}\|Y_i\| \geq s\right\} + 4(\mathbb{P}\{\|S\| \geq t\})^2 \qquad (5)$$

Où $S = \sum_{i=1}^{n} Y_i$. L'inégalité (5) peut être utilisé pour montrer que si $(a_n)_{n\in IN}$ est une suite de nombres positifs et croissante vers l'infini et si $(Y_i)_{i\in IN}$ est une suite de variables aléatoires symétriques indépendantes, alors chaque fois que la suite

$$\frac{1}{a_n}\sum_{i=1}^{n} Y_i\,, \qquad n \geq 1$$

est borné ou converge vers 0 en probabilité en $B$, la suite

$$\frac{1}{a_n}\sum_{i=1}^{n} Y_i I_{\{\|Y_i\| \leq Ca_n\}}\,, \qquad n \geq 1$$

est borné ou converge vers 0 dans $L^p(B)$ pour tout $p > 0$.

La principale conséquence du théorème 5.3 est que les théorèmes limites probabilistes classiques doivent être étudiés, dans le cadre des espaces de Banach, en deux étapes distinctes. À savoir, prouver la convergence en probabilité ou en distribution sous les conditions classiques sur le moment, à l'aide des conditions sur le type (ou le cotype). Les énoncées résultant ainsi ne détiennent que pour les classes des espaces de Banach avec les conditions géométriques appropriées. Un exemple typique et fondamentale de cette situation est le théorème central limite que nous étudions dans la section suivante. Une fois que la convergence en probabilité est atteinte, ou simplement supposé, prouver, dans un espace de Banach quelconque, l'énoncé presque sûr correspondant. **La leçon à en tirer pour les théorèmes limites dans les espaces de Banach** est que les conditions sur le moment sont nécessaires pour assurer la convergence en probabilité et que, plus ou moins, la convergence en probabilité implique toujours la convergence presque sûre.

Muni de ces observations fondamentales, nous nous tournons vers des énoncés presque sûrs plus raffinés, comme par exemple la loi du logarithme itéré (LIL). De même que dans le théorème 5.1. soient $X$ une variable aléatoire à valeurs dans B, et $(X_n)_{n\in IN}$ une suite de copies indépendantes de $X$. Pour chaque $n \geq 1$, $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Rappelons également que$a_n = (2nLLn)^{\frac{1}{2}}$. Comme prévu dans les conclusions précédentes, et à l'aide de bornes exponentielles sur la martingale de Yurinskii, J. Kuelbs a démontré en 1977 que la suite$(S_n/a_n)_{n\geq 1}$est relativement compact dans $B$ tant que $E(\|X\|^2) < \infty$et $S_n/a_n \to 0$en probabilité.

Bien que ce résultat était une extension puissante de la LIL classique, ça n'a pas été entièrement satisfaisant, car la condition de moments $E(\|X\|^2) < \infty$était connu pour ne pas être nécessaire pour la LIL. La condition de moment nécessaire sur la loi de X pour satisfaire la LIL dans un espace de Banach de dimension infinie $B$se divise actuellement en deux parties : d'abord, pour chaque fonctionnelle linéaire $\xi \in B'$, la variable aléatoire scalaire $\langle \xi, X\rangle$ satisfait la LIL, et alors $E(\langle \xi, X\rangle) = 0$ et $E(\langle \xi, X\rangle^2) < \infty$. Deuxièmement, si la suite$(S_n/a_n)_{n\geq 1}$ est presque sûrement bornée, alors la suite$(X_n/a_n)_{n\geq 1}$ est elle aussi presque sûrement bornée, et donc, par le lemme de Borel-Cantelli $E(\|X\|^2/LL\|X\|) < \infty$. L'apparition des moments faibles par respect aux conditions de norme usuelle ne fait que compliquer cette étude, beaucoup plus que la plupart des résultats précédents. Ainsi, il était possible pendant un certain temps de savoir si ces conditions de moments nécessaires, avec l'étude de la suite$(S_n/a_n)_{n\geq 1}$en probabilité, étaient également suffisante pour satisfaire la LIL.

Cette conjecture a été d'abord établie dans les espaces de Hilbert en utilisant la structure de produit scalaire, et ensuite prolongée dans des espaces réguliers (espaces uniformément convexes).

La percée finale a été accompli avec l'aide des idées isopérimétriques et de concentration. L'inégalité isopérimétrique gaussienne peut être considéré comme à l'origine de ce développement. Cette inégalité implique notamment que si G est un vecteur aléatoire gaussienne à valeurs dans B, pour tout $t \geq 0$

$$P\{(\|G\| - E(\|G\|)) \geq t\} \leq e^{-t^2/2\sigma^2}. \qquad (6)$$

Avec $\sigma^2 = sup_{\|\xi\|\leq 1} E(\langle \xi, G \rangle^2)$. En particulier,

$$E(\exp(\alpha\|G\|^2)) < \infty$$

si et seulement si$\sigma < \frac{1}{2\sigma^2}$.

Cela conduit à un premier résultat. Ce fut effectivement le point de l'enquête profonde par M. Talagrand des inégalités isopérimétriques et de concentration dans des espaces produit, avec des applications dans la théorie des probabilités de Banach. En particulier, cette approche donne des extensions optimales des limites exponentielles classiques sur des sommes de variables aléatoires indépendantes.

Soit par exemple $Y_1, \dots, Y_n$ variables aléatoires indépendantes à valeurs dans B, de moyennes zéro, telle que, $\|Y_i\|_\infty \leq C$, $\forall i \in \{1, \dots, n\}$, et posons $\sigma^2 = sup_{\|\xi\|\leq 1} \sum_{i=1}^{n} E(\langle \xi, Y_i \rangle^2)$. Donc, pout tout $t \geq 0$,

$$P\{\|S\| - E(\|S\|) \geq t\} \leq Kexp\left(-\frac{t}{KC}\log\left(1 + \frac{Ct}{\sigma^2 + CE(\|S\|)}\right)\right) \qquad (7)$$

Où $K > O$ est une constante numérique.

Avec une telle estimation, il est facile de caractériser la LIL dans les espaces de Banach.

### Théorème 5.4

Soit $X$ une variable aléatoire à valeurs dans un espace de Banach B.

La suite $\left(S_n(a_n)\right)_{n\geq 1}$ est presque sûrement borné si et seulement si elle est bornée en probabilité,

$$E(\|X\|^2/LL\|X\|) < \infty$$

et pour tout $B$ fonctionnelle linéaire

$$\xi \in B', \qquad E(\langle \xi, X\rangle) = 0 \; et \; E(\langle \xi, X\rangle^2) < \infty.$$

La suite $\left(S_n(a_n)\right)_{n\geq 1}$ est presque sûrement relativement compact si et seulement $lim \; S_n/a_n \to 0$ en probabilité, $E(\|X\|^2/LL\|X\|) < \infty$, et la famille de variables aléatoires $\langle \xi, G\rangle^2 \; / \; \|\xi\| \leq 1$ est uniformément intégrable.

Preuve.

Concentrons-nous seulement sur la forme bornée de la LIL. Les conditions ont été vus à être nécessaire. Comme dans la LLN, par un argument de blocage classique, il suffit de montrer que

$$sup_n \frac{1}{a_{2^n}} \left\| \sum\nolimits_{i=1}^{2^n} X_i \right\| < \infty, \qquad p.s. \qquad\qquad (8)$$

On peut montrer que, sous la condition d'intégrabilité $E(\|X\|^2/LL\|X\|) < \infty$, il existe une suite d'entiers $(K_n)_{n\in IN}$tels que $\sum_n 2^{-k_n} < \infty$et

$$\sum_n \mathbb{P}\left\{\sum\nolimits_{r=1}^{k_n} \|X_{2^n}^{(r)}\| \geq a_{2^n}\right\} < \infty$$

où $X_{2^n}^{(r)}$ est le r^ème^ élément le plus important de l'échantillon$(\|X_i\|)_{1\leq i\leq 2^n}$. En particulier, il suffit de prouver (8) en remplacant les $X_i$ par $Y_i = X_i \mathrm{I}_{\{\|X_i\|\leq a_{2^n}/k_n\}}, \forall i \in \{1, \dots, 2^n\}$. Puisque la suite$(S_n/a_n)_{n\geq 1}$ est bornée en probabilité, par les inégalités du Hoffmann-Jorgensen, pour une constante fini M,

$$sup_n \frac{1}{a_{2^n}} E\left(\left\|\sum_{i=1}^{2^n} Y_i\right\|\right) \leq M.$$

D'autre part, par le théorème du graphe fermé,

$$\sigma^2 = sup_{\|\xi\|\leq 1} E(\langle \xi, X\rangle^2) < \infty.$$

En appliquant (6) à $S = Y_1 + \cdots + Y_{2^n}$ on obtient : pour$t = Ta_{2^n},\ T > 0$,

$$\mathbb{P}\left\{\left\|\sum_{i=1}^{2^n} Y_i\right\| - E\left(\left\|\sum_{i=1}^{2^n} Y_i\right\|\right) \geq Ta_{2^n}\right\}$$
$$\leq K \exp\left(\frac{Mk_n}{K} \log\left(1 + \frac{M}{(\sigma^2 k_n / LL2^n) + 1}\right)\right)$$

Puisque$\sum_n 2^{-k_n} < \infty$, la borne exponentielle qui précède est le terme général d'une suite sommable pour tout t assez grand. La conclusion suit.

Quant à la LLN, il est facile de voir que dans un espace de Banach de type 2, chaque fois que X a une moyenne nulle et $E(\|X\|^2/LL\|X\|) < \infty$ alors $S_n/a_n \to 0$en probabilité. Comme corollaire du Théorème 5.4, on obtient ainsi une belle caractérisation de la LIL dans les espaces de Banach de type 2, se basant uniquement sur les conditions de moments sur la loi de X.

### Corollaire 5.5.

Soit X une variable aléatoire de moyenne zéro avec des valeurs dans un espace de Banach B de type 2. Alors la suite $(S_n/a_n)_{n\geq 1}$est presque sûrement relativement compact si et seulement si $E(\|X\|^2/LL\|X\|) < \infty$, et la famille de variables aléatoires $\langle \xi, X\rangle^2, \|\xi\| \leq 1$ est uniformément intégrable.

On remarques que la propriété type de l'espace de Banach B est utilisée seulement pour assurer la convergence en probabilité, ou la convergence faible. Comme nous allons maintenant développer, le type et cotype sont en fait intimement liées à la convergence faible, et en particulier au théorème central limite.

## V.2. LE THEOREME CENTRAL LIMITE ET LA CONVERGENCE FAIBLE :

D'après ce qui prècède les conditions de moment classique$E(X) = 0 \; et \; E(\|X\|^2) < \infty$ ne sont ni nécessaire, ni suffisantes pour une variable aléatoire X pour satisfaire le théorème central limite dans un espace de Banach B quelconque. Elles sont en fait suffisante (seulement) pour les espaces de type 2, et nécessaire (seulement) dans les espaces de cotype 2.

Lors d'une conférence à Durham, en Angleterre 1975, RM Dudley a posé la question: Quels sont les espaces de Banach (séparables) qui garentissent que les conditions classiques de moyenne nulle et de variance finie $E(\|X\|^2) < \infty$ vérifient la CLT?

La réponse à cette question a entraîné les théorème de J. Hoffmann-Jorgensen et G. Pisier [HJ-P] ci-dessous :

### Théorème 5.6.

Une variable aléatoire X à valeurs dans un espace de Banach B de type 2 satisfait la CLT tant que $E(X) = 0 \; et \; E(\|X\|^2) < \infty$. Inversement, si dans un espace de Banach B, toutes les variables aléatoires X tel que $E(X) = 0 \; et \; E(\|X\|^2) < \infty$ satisfaire la CLT, alors B est de type 2.

### Théorème 5.7.

Une variable aléatoire X à valeurs dans un espace de Banach B de cotype 2 satisfait la CLT de sortes que $E(X) = 0 \; et \; E(\|X\|^2) < \infty$. Inversement, si dans un espace de Banach B, toutes les variables aléatoires X satisfaisant la CLT telles que $E(X) = 0 \; et \; E(\|X\|^2) < \infty$, alors B est de cotype 2.

### Preuve du théorème 5.6.

Supposons que B est de type 2. On a via l'argument de symétrisation (4), $\forall n > I$,

$$E\left(\left\|\sum_{i=1}^{n} X_i\right\|^2\right) \leq 4C_n E(\|X\|^2) \qquad (9)$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, soit Y une variable aléatoire de moyenne zéro telle que $E(\|X - Y\|^2) \leq \varepsilon/4C$. Par conséquent, si $(Y_i)_{i\in IN}$est une suite de copies indépendantes de Y, alors en appliquant (9) à $X - Y$ on obtient

$$sup_{n\geq 1} E\left(\left\|\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}(X_i, Y_i)\right\|^2\right) \leq \varepsilon$$

Puisque Y est de dimension finie, elle satisfait la CLT. La suite $\left(S_n\sqrt{n}\right)_{n\geq 1}$ est donc uniformément équivalente dans $L^2$ à une suite faiblement convergente, et est donc tendu. Etant donné que par la dimension finie CLT, la seule limite possible est la limite gaussienne dela même structure de covariance que X, X satisfait la CLT. Inversement, supposant que chaque variable aléatoire X à valeurs dans B et de moyenne zéro  telle que $E(\|X\|^2) < \infty$ satisfait la CLT, on déduit alors (à partir d'un argument du graphe fermée) qu'il existe une constante C finie de telle sorte que :

$$sup_{n\geq 1} E\left(\left\|\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n} X_i\right\|^2\right) \leq C\ E(\|X\|^2).$$

L'application de cette inégalité à une variable aléatoire X prenant un nombre fini de valeurs$x_1, \ldots, x_n$ montre que B est de type 2.

Avec la caractérisation isomorphe de Kwapien des espaces de Hilbert, on peut déduire des théorèmes 5.12 et 5.13 la caractérisation probabiliste suivante des espaces de Hilbert.

### Corollaire 5.8.

Un espace de Banach B est isomorphe à un espace de Hilbert si et seulement si les conditions classiques du moment $E(X) = 0 \; et \; E(\|X\|^2) < \infty$sont nécessaires et suffisantes pour une variable aléatoire X à valeurs dans B pour satisfaire la CLT.

Quant à la LIL, le second moment fort $E(\|X\|^2) < \infty$ n'est pas toujours bien adapté, on peut plutôt  envisager des moments faibles. Dans le contexte de la CLT, une condition nécessaire supplémentaire pour une variable aléatoire X pour satisfaire la CLT est l'existence d'un vecteur aléatoire gaussien G  à valeurs dans B avec la même structure de covariance que X, qui est $E(\langle\xi, X\rangle^2) = E(\langle\xi, G\rangle^2)$, pour chaque. $\xi \in B'$. Dans un contexte de dimension infinie, ce n'est pas toujours évident qu'il existe une distribution gaussienne avec une structure de covariance donnée. En fait, les théorèmes 5.6 et 5.7 peuvent être reformulées en remplaçant la propriété de la limite centrale que par l'existence d'une distribution gaussienne limite. Les preuves sont assez similaires.

En présence d'une distribution gaussienne limite, la condition de moment nécessaire évidente sur la norme, pour qu'une variable aléatoire X à valeurs dans un espace de Banach B satisfait la CLT est que

$$\lim_{t\to\infty} t^2 P\{\|X\| \geq 1\} = 0. \qquad (10)$$

En particulier,$E(\|X\|^p) < \infty, \forall p \in ]0,2[$ . Il est difficile, de caractériser les espaces de Banach B dans lesquels la condition (10) avec l'existence d'une distribution gaussienne limite sont (nécessaires et) suffisantes pour qu'une variable aléatoire X à valeurs dans B et de moyenne zéro satisfait la CLT. G. Pisier et J. Zinn ont montré que les espaces $L^p$avec $2 \leq p < \infty$ partagent cette propriété. Si, dans un espace de Banach une certaine version d'une inégalité de HP Rosenthal détient, alors la CLT est satisfaite si et seulement si la condition (10) est satisfaite et la distribution gaussienne limite existe.

Dans les espace de Banach, on ne peut pas espérer avoir une description raisonnable de variables aléatoires satisfaisant la CLT. Cependant, on peut définir des conditions suffisantes pour certaines classes de variables aléatoires. Soit par exemple C (K) l'espace de Banach des fonctions continues sur un espace métrique compact (K, d) de norme$\|.\|_\infty$. Considérez la classe de variables aléatoires Lipschitz X sur C(K) telles que, pour chaque variable aléatoire positive M,

$$|X(s,w) - X(t,w)| \leq M(w)d(s,t), \quad s,t \in K$$

pour tous (ou presque tous) les w.

### Théorème 5.9.

Soit X une variable aléatoire Lipschitienne de moyenne zéro de telle sorte que $E(M^2) < \infty$. Donc, tant que $d \leq d_G$, avec$d_G(s,t) = \|G(s) - G(t)\|_2 \;/\; s,t \in K^2$ la métrique $L^2$ d'un vecteur aléatoire gaussien G dans C(K), alors X satisfait la CLT.

### Preuve :

Considérons l'injection canonique$j$: $Lip(K) \to C(K)$. L'espace $Lip(T)$ est de norme :

$$\|x\|_{Lip} = \|x\|_\infty + sup_{s \neq t} \frac{|x(s) - x(t)|}{d(s,t)}$$

Bien que C(K) n'est pas de type p> 1, sous l'hypothèse du théorème, l'opérateur linéaire j est en fait de type 2. Soit en effet $x_1, \dots, x_n$ des éléments de Lip (K) de telle sorte que, par l'homogénéité$\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|_{Lip}^2 = 1$. On obtient ensuite, par une comparaison élémentaire

$$E\left(\left\|\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i j(x_i)\right\|_\infty^2\right) \leq 2E\left(\left\|\sum_{i=1}^{n} g_i j(x_i)\right\|_\infty^2\right)$$

où $g_i$ sont des variables normales standard indépendantes. Puisque les$x_i$ sont des éléments de Lip(K), le processus gaussien donne,

$$\tilde{G}(t) = \sum_{i=1}^{n} g_i x_i(t), \qquad t \in K,$$

est telles que, $\forall s \; et \; t \in K$

$$E\left(\left|\tilde{G}(s)-\tilde{G}(t)\right|^2\right)=\sum\nolimits_{i=1}^{n}|x_i(s)-x_i(t)|^2\leq d_G(s,t)^2.$$

Les théorèmes classiques de comparaison gaussiennes montrent alors que :

$$E\left(\left\|\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i j(x_i)\right\|_\infty^2\right)\leq C$$

où $C > O$ ne dépend que de G. Par conséquent, en homogénéité, j est un opérateur de type 2 dans le sens où tant que $x_1, \dots, x_n$, sont des éléments de Lip(K), alors

$$E\left(\left\|\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i j(x_i)\right\|_\infty^2\right)\leq C\sum_{i=1}^{n}\|x_i\|_{Lip}^2$$

Suivant la même logique de la preuve du théorème 5.6, nous obtenons que

$$\frac{1}{\sqrt{n}}E\left(\left\|\frac{1}{\sqrt{n}}\sum\nolimits_{i=1}^{n}j(X_i)\right\|_\infty^2\right)\leq CE(\|X\|_\infty^2) \qquad (11)$$

La conclusion suit (comme dans le théorème 5.6). Il est cependant un peu plus difficile puisque la Lip(K) ne doit pas être séparable. Pour traiter ce problème, montrent que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un sous-espace de dimension finie F de C (K) tel que si $Q_F : C(K) \to C(K)/F$. La constante de type 2 de l'opérateur$j \circ Q_F$ est inférieur à $\varepsilon$. Puis en appliquant (11) à$j \circ Q_F$on obtient alors le résultat.

La condition d'intégrabilité sur M peut être affaibli à$\lim_{t\to\infty} t^2\, P\{M \geq t\} = 0$ à condition qu'il existe un processus gaussien continu avec la même structure de covariance que X.

Dans une certaine mesure, l'analyse précédente du théorème central limite classique avec des limites de Gauss peut être développée de la même dans le cas du théorème central limite générale avec des limites infiniment divisibles.

Sous l'hypothèse que la suite de somme partielle est tendue, des limites sont identifiées plus ou moins comme dans le cas scalaire. Les hypothèses de type et de cotype sont suffisantes ou nécessaires pour que la suite soit tendue. En particulier, les limites stables peuvent être caractérisés par le type stable.

# CONCLUSION :

Dans ce rapport, nous avons étudié les lois des grands nombres pour les variables aléatoires à valeurs réelles et Banachique, aussi pour les ensembles aléatoires à valeurs dans un espace de Banach.

Nous avons distingué entre les lois des grands nombres pour les variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées et dont l'espérance est donnée et les variables aléatoires qui présentent entre elles certaine dépendance, qui ne sont plus exactement distribués de la même façon ou dont l'espérance n'est pas donnée. Nous avons démontré que l'indépendance des variables aléatoires est une condition suffisante et n'est pas nécessaire. En revanche l'existence de l'espérance est nécessaire dans les hypothèses les lois des grands nombres. Nous avons étendu la loi forte des grands nombres aux variables aléatoires de variances bornées, en ajoutant d'autres conditions alternatives assurant les lois des grands nombres.

Afin d'étendre notre étude aux ensembles aléatoires, nous avons donné trois topologies différentes, une sur l'ensemble des parties fermées d'un espace de Banach séparable. Nous avons aussi découvert que les lois des grands nombres est satisfaite pour les ensembles aléatoires à condition d'avoir des outils suffisants sur la distribution des ensembles aléatoires pour reformuler les hypothèses de Kolmogorov dans le cas multivoque.

# BIBLIOGRAPHIE :

PROBABILISTIC LIMIT THEOREMS IN THE SETTING OF BANACH SPACES. M. Ledoux, J. Zinn. University of Toulousee and Texas A&M University

A STRONG LAW OF LARGE NUMBERSFOR RANDOM COMPACT SETS. Par ZVI ARTSTEIN et RICHARD A. VITALE. BROWN UNIVERSITY.

INTEGRALS, CONDITIONAL EXPECTATIONS, ANS MARTINGALES OF MULTIVALUDES FUNCTIONS par FUMIO HIAI and HISAHARU UMEGAKI. Tokyo institute of technology, Oh-okayama, Meguro-ku, Tokyo JAPAN.

LAWS OF LARGE NUMBER FOR TIGHT RANDOM ELEMENTS IN NORMED LINEAR SPACES par R. L. TAYLOR AND DUAN WEI. UNIVERSITY OF SOUTH CAROLINA.