

---

---

# Remerciement

---

Louange à dieu qui ma donné la passion et l'amour des mathématique, je tiens à remercier toutes les personnes qui ont contribué au succès de mon projet de fin d'étude et qui m'ont aidé lors de la rédaction de ce modeste travail.

Tout d'abord, j'adresse mes remerciements à mon professeur, Mr OUKHTITE Lahcen de l'Université Sidi Mohamed Ben Abdellah faculté sciences et techniques qui m'a beaucoup aidé dans ma recherche de fin d'étude et qui m'a permis de réaliser mon sujet à propos d'un thème central entre l'algèbre et la recherche opérationnel. Son écoute et ses conseils m'ont permis de cibler exactement les informations qui ont la grande marge d'accomplissement de ma tache de compréhension de mon thème pour arriver le plus vite possible à l'étape d'investir mes connaissance soit du loin ou du prêt.

Tout d'abord, j'adresse mes remerciements à mon professeur, Mr OUKHTITE Lahcen de l'Université Sidi Mohamed Ben Abdellah faculté sciences et techniques qui m'a beaucoup aidé dans ma recherche de fin d'étude et qui m'a permis de réaliser mon sujet à propos d'un thème central entre l'algèbre et la recherche opérationnel. Son écoute et ses conseils m'ont permis de cibler exactement les informations qui ont la grande marge d'accomplissement de ma tache de compréhension de mon thème pour arriver le plus vite possible à l'étape d'investir mes connaissance soit du loin ou du prêt.

Je remercie également toute l'équipe de recherche qu'est sous occupation de Mr OUKHTITE Lahcen pour leur accueil, leur esprit d'équipe et leurs force de compréhensions variées.

Je remercie les membre de jury Mr(mme).....,Mr(mme).....,Mr(mme)....., et Mr(mme)....., pour leurs présence,leurs communication et ses idées innovatrices à propos de ce thème.

Enfin, je tiens à remercier toutes les personnes qui m'ont conseillé et relu lors de la rédaction du rapport : ma famille, mes amis, camarade de promotion.

---

---

# Sommaire

---

<b>1</b>	<b>Graphe nil clean d'un anneau</b>	<b>4</b>
1.1	Introduction . . . . .	4
1.2	Propriétés basiques du graphe nil clean : . . . . .	4
1.3	Les invariants du graphe nil clean . . . . .	9
<b>2</b>	<b>Graphe nil clean de division d'un anneau</b>	<b>15</b>
2.1	Introduction . . . . .	15
2.2	Graphe nil clean de division . . . . .	16
2.3	Le Graphe nil clean de $\mathbb{Z}_{2p}$ et $\mathbb{Z}_{3p}$ , pour tout nombre premier impair $p$	19
<b>3</b>	<b>Graphe d'idempotents d'un anneau</b>	<b>24</b>
3.1	Introduction . . . . .	24
3.2	Connexité et le diamètre du graphe d'idempotents . . . . .	25
3.3	Quelques propriétés du graphe d'idempotent d'un anneau . . . . .	28
3.4	Régularité des graphiques idempotents . . . . .	29
3.5	Clique maximal et nombre chromatique du graphe d'idempotent . . . . .	31
<b>4</b>	<b>Quelque graphe des idéaux premiers d'un anneau commutative</b>	<b>32</b>
4.1	Introduction . . . . .	32
4.2	Propriétés basic du graphe de somme propre . . . . .	33
4.3	Graphe de la somme propre du produit direct des anneaux . . . . .	37
<b>5</b>	<b>Graphe d'idempotents de division d'un anneau commutatif</b>	<b>39</b>
5.1	Introduction . . . . .	39
5.2	Résultats préliminaire . . . . .	41
5.3	La structure de $\Gamma_e(R)$ . . . . .	44
5.4	Connexité et anneaux de quotient total . . . . .	48
5.5	Anneaux régulier de von Neumann . . . . .	50

# Graphe nil clean d'un anneau

## 1.1 Introduction

Les propriétés théoriques des graphes associés aux anneaux ont été étudiées par des nombreux chercheurs. Dans ce chapitre, nous étudions un graphe simple non orienté. Pour un graphe  $G$ , soit  $V(G)$  l'ensemble des sommets et  $E(G)$  l'ensemble des arrêtes. En 1988, Beck a étudié une coloration du graphe d'un anneau commutatif fini  $R$ , où les sommets sont des éléments de  $R$  et  $xy$  est une arête si et seulement si  $xy = 0$ . Pour un entier naturel  $n$ , soit  $\mathbb{Z}_n$  l'anneau d'entiers modulo  $n$ , Grimaldi a étudié diverses propriétés du graphe unitaire  $G(\mathbb{Z}_n)$  avec l'ensemble des sommets  $\mathbb{Z}_n$  et deux sommets distincts  $x$  et  $y$  étant adjacents si  $x + y$  est une unité. Plus loin, les auteurs généralisent  $G(\mathbb{Z}_n)$  au graphe unitaire  $G(R)$ , où  $R$  est un anneau associatif arbitraire unitaire, et ils ont étudié des propriétés comme le diamètre, la circonférence, l'indice chromatique, etc. Dans ce chapitre, nous introduisons le graphe nil clean  $G_N(R)$  associé à un anneau commutatif  $R$ . Des propriétés telles que la circonférence, le diamètre, les ensembles dominants, etc, de  $G_N(R)$  sont étudiés. Dans la suite, un anneau  $R$  est toujours un anneau commutatif fini avec une identité non nulle. Un élément  $r$  de  $R$  est dit nil clean s'il existe  $n, e \in R$  tels que  $r = n + e$  avec  $e$  est un idempotent et  $n$  est un nilpotent. Un anneau  $R$  est dit nil clean si chaque élément de  $R$  est nil clean. L'ensemble des éléments nil clean de  $R$  est noté  $NC(R)$ . Les ensembles des idempotents et des nilpotents de  $R$  sont notés respectivement par  $Idem(R)$  et  $Nil(R)$ . Un anneau  $R$  est dit weak nil clean si pour chaque  $r \in R$ ,  $r = n + e$  ou  $r = n - e$  pour certains  $n \in Nil(R)$  et  $e \in Idem(R)$ .

## 1.2 Propriétés basiques du graphe nil clean :

**Définition 1.2.1** Soient  $R$  un anneau et  $a$  un élément de  $R$ . On dit que  $a$  est élément nilpotent de  $R$  s'il existe  $n \in \mathbb{N}^*$  tel que  $a^n = 0$ . On note par  $Nil(R)$  l'ensemble des éléments nilpotents de  $R$ .

**Définition 1.2.2** Soient  $R$  un anneau et  $a$  un élément de  $R$ . On dit que  $a$  est élément idempotent de  $R$  si  $a^2 = a$ . On note par  $Idem(R)$  l'ensemble des éléments idempotents de  $R$ .

**Définition 1.2.3** Soient  $R$  un anneau et  $a$  un élément de  $R$ . On dit que  $a$  est élément nil clean de  $R$  s'il existe  $(e, f) \in \text{Idem}(R) \times \text{Nil}(R)$  tel que  $a = e + f$ . On note par  $NC(R)$  l'ensemble des éléments nil clean de  $R$ . Si  $R = NC(R)$ ; on dit que  $R$  est un anneau nil clean.

**Définition 1.2.4** Soient  $R$  un anneau et  $a$  un élément de  $R$ . On dit que  $a$  est élément weak nil clean de  $R$  s'il existe  $(e, f) \in \text{Idem}(R) \times \text{Nil}(R)$  tel que  $a = e + f$  ou  $a = e - f$ . On note par  $WNC(R)$  l'ensemble des éléments weak nil clean de  $R$ . Si  $R = WNC(R)$  on dit que  $R$  est un anneau weak nil clean.

**Définition 1.2.5** Le graphe nil clean d'un anneau  $R$ , noté par  $G_N(R)$  est un graphe simple ayant pour ensemble des sommets  $R$  et deux sommets distincts  $x$  et  $y$  sont adjacents si et seulement si  $x + y \in NC(R)$ .

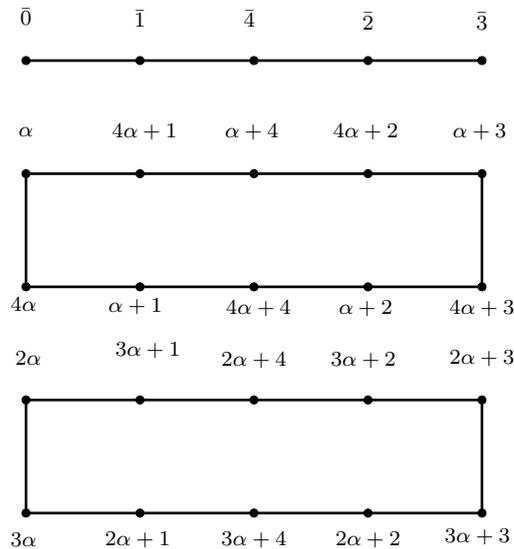
**Exemple 1.2.1** Par exemple le graphe nil clean de  $GF(25)$  (i.e Corps fini avec 25 éléments) :

On a :  $GF(25) \cong \mathbb{Z}_5[x] / \langle x^2 + x + 1 \rangle = \{ax + b + \langle x^2 + x + 1 \rangle : a, b \in \mathbb{Z}_5\}$

On pose :  $\alpha = x + \langle x^2 + x + 1 \rangle$

Alors :  $GF(25) = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \alpha, 2\alpha, 3\alpha, 4\alpha, 1 + \alpha, 1 + 2\alpha, 1 + 3\alpha, 1 + 4\alpha, 2 + \alpha, 2 + 2\alpha, 2 + 3\alpha, 2 + 4\alpha, 3 + \alpha, 3 + 2\alpha, 3 + 3\alpha, 3 + 4\alpha, 4 + \alpha, 4 + 2\alpha, 4 + 3\alpha, 4 + 4\alpha\}$

Observez que  $NC(GF(25)) = \{\bar{0}, \bar{1}\}$ , alors le graphe nil clean représentatif de  $G_N(GF(25))$  est donnée par la figure 1 ci-dessous.



**Figure 1.** Graphe nil clean de  $G_N(GF(25))$

**Définition 1.2.6** Un graphe simple est dit complet si tout paire des sommets distincts de ce graphe sont adjacents.

**Définition 1.2.7** Soient  $G_1 = (V(G_1), E(G_1))$  et  $G_2 = (V(G_2), E(G_2))$  deux graphes simples. On dit que  $G_1$  et  $G_2$  sont isomorphes et on note  $G_1 \cong G_2$  s'il existe une application bijective  $\phi$  de  $V(G_1)$  dans  $V(G_2)$  tel que :

$$\forall x, y \in V(G_1) : xy \in E(G_1) \Leftrightarrow \phi(x)\phi(y) \in E(G_2)$$

**Lemme 1.2.1** Soient  $R$  et  $S$  deux anneaux tel que  $R \cong S$  alors  $G_N(R) \cong G_N(S)$ .

**Preuve** on a  $R \cong S \Rightarrow \exists \phi \in S^R : \phi$  est un isomorphisme d'anneaux. Alors dans un premier temps  $\phi$  est une application bijective de l'ensemble des sommets de  $G_N(R)$  (i.e  $R$ ) dans l'ensemble des sommets de  $G_N(S)$  (i.e  $S$ ). (1)

D'autre part soient  $x, y \in R$

$\Rightarrow$  On suppose que  $xy \in E(G_N(R))$

$$xy \in E(G_N(R)) \Rightarrow \exists (n, e) \in Nil(R) \times Idem(R) : x + y = n + e.$$

On a :

$$\begin{aligned} \phi(x) + \phi(y) = \phi(x + y) &\Rightarrow \phi(x) + \phi(y) = \phi(n + e) \\ &\Rightarrow \phi(x) + \phi(y) = \phi(n) + \phi(e) \end{aligned}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} n \in Nil(R) &\Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{N}^* : n^m = 0 \\ &\Rightarrow \exists m \in \mathbb{N}^* : (\phi(n))^m = \phi(n^m) = 0 \\ &\Rightarrow \phi(n) \in Nil(S) \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} e \in Idem(R) &\Leftrightarrow e^2 = e \\ &\Rightarrow (\phi(e))^2 = \phi(e) \\ &\Rightarrow \phi(e) \in Idem(S) \end{aligned}$$

Donc :  $\phi(x) + \phi(y) \in NC(S)$ .

c'est-à-dire :  $\phi(x)\phi(y) \in E(G_N(S))$

$\Leftarrow$  On suppose que  $\phi(x)\phi(y) \in E(G_N(S))$

On a :

$$\phi(x)\phi(y) \in E(G_N(S)) \Rightarrow \exists (a, b) \in Nil(S) \times Idem(S) : \phi(x) + \phi(y) = a + b$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} x + y = \phi^{-1}(\phi(x + y)) &\Rightarrow x + y = \phi^{-1}(\phi(x) + \phi(y)) \\ &\Rightarrow x + y = \phi^{-1}(a + b) = \phi^{-1}(a) + \phi^{-1}(b) \end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned} a \in Nil(S) &\Leftrightarrow \exists r \in \mathbb{N}^* : a^r = 0 \\ &\Rightarrow \exists r \in \mathbb{N}^* : (\phi^{-1}(a))^r = \phi^{-1}(a^r) = 0 \\ &\Rightarrow \phi^{-1}(a) \in Nil(R) \end{aligned}$$

$$b \in Idem(S) \Leftrightarrow b^2 = b$$

$$\begin{aligned} \text{De plus :} &\Rightarrow (\phi^{-1}(b))^2 = \phi^{-1}(b^2) = \phi^{-1}(b) \\ &\Rightarrow \phi^{-1}(b) \in Idem(R) \end{aligned}$$

Donc :  $x + y \in NC(R)$

c'est à dire :  $xy \in E(G_N(R))$

Alors  $\forall x, y \in R : xy \in E(G_N(R)) \Leftrightarrow \phi(x)\phi(y) \in E(G_N(S))$  (2)

De (1) et (2) on obtient

$$G_N(R) \cong G_N(S) \quad \square$$

**Théorème 1.2.1** Soit  $R$  un anneau. Les deux assertions suivantes sont équivalentes :

i)  $G_N(R)$  est un graphe complet.

ii)  $R$  est un anneau nil clean.

**Preuve**  $i) \Rightarrow ii)$  On suppose que  $G_N(R)$  est un graphe complet

Cas 1 :  $r \neq 0$

On a  $G_N(R)$  est complet, ainsi  $r, 0 \in R$  donc  $r$  et  $0$  sont adjacents dans  $G_N(R)$ , par conséquence  $r + 0 \in NC(R)$ , c'est-à-dire  $r \in NC(R)$ .

Cas 2 :  $r = 0$

$0 \in NC(R)$

Alors des deux cas on obtient :

$$\forall r \in R : r \in NC(R)$$

c'est-à-dire  $R$  est un anneau nil clean.

$ii) \Rightarrow i)$  On suppose que  $R$  est un anneau nil clean

Cas 1 :  $|R| = 1$

$G_N(R)$  est un graphe complet (Par définition d'un graphe complet)

Cas 2 :  $|R| \geq 2$

Soient  $x, y \in R$  tel que :  $x \neq y$

On a  $x, y \in R$ , d'où  $x + y \in R$  (car  $(R, +)$  est un groupe), alors  $x + y \in NC(R)$  (car  $x + y \in R$  et  $R$  est un anneau nil clean). C'est-à-dire  $xy \in E(G_N(R))$ .

Donc  $\forall x, y \in R : x \neq y \Rightarrow xy \in E(G_N(R))$ . C'est-à-dire  $G_N(R)$  est complet.  $\square$

**Lemme 1.2.2** Soient  $R$  un anneau qui possède la propriété suivante :

$$\forall x \in R : x - x^2 \in Nil(R) \Rightarrow \exists f \in Idem(R) : x - f \in Nil(R)$$

On suppose qu'ils existent  $x, y \in R$  tel que :  $(x + Nil(R))(y + Nil(R)) \in E(G_N(R/Nil(R)))$ .

Alors  $\forall (a, b) \in (x + Nil(R)) \times (y + Nil(R)) : ab \in E(G_N(R))$ .

**Preuve** Soit  $(a, b) \in (x + Nil(R)) \times (y + Nil(R))$

Étape 1 : Montrons que  $(x + y) - (x + y)^2 \in Nil(R)$

On a  $x + Nil(R)$  et  $y + Nil(R)$  sont adjacents dans  $G_N(R/Nil(R))$

Donc

$$\exists n, e \in R : \begin{cases} n + Nil(R) \in Nil(R/Nil(R)) \\ e + Nil(R) \in Idem(R/Nil(R)) \\ (x + Nil(R)) + (y + Nil(R)) = (n + Nil(R)) + (e + Nil(R)) \end{cases}$$

Pour simplifier l'écriture on pose  $\bar{z} := z + Nil(R)$  pour chaque  $z \in R$ .

$$\begin{aligned} \overline{(x + y) - (x + y)^2} &= \overline{x + y} - \overline{(x + y)^2} \\ &= \overline{x + y} - \overline{(x + y)^2} \\ &= \bar{x} + \bar{y} - (\bar{x} + \bar{y})^2 \\ &= \bar{n} + \bar{e} - (\bar{n} + \bar{e})^2 \\ &= \bar{n} + \bar{e} - \bar{n}^2 - 2\bar{n}\bar{e} - \bar{e}^2 \\ &= \bar{n} - \bar{n}^2 - 2\bar{n}\bar{e} \quad (\text{car } \bar{e} \in Idem(R/Nil(R))) \\ &= \bar{n}(\bar{1} - \bar{n} - 2\bar{e}) \in Nil(R/Nil(R)) \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \exists m \in \mathbb{N}^* : \overline{(x + y) - (x + y)^2}^m &= \bar{0} \Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{N}^* : \overline{((x + y) - (x + y)^2)^m} = \bar{0} \\ &\Leftrightarrow (x + y) - (x + y)^2 \in Nil(R) \end{aligned}$$

Étape 2 : Montrons que  $xy \in E(G_N(R))$

Puisque on a déjà monter dans la 1<sup>er</sup> étape que  $(x + y) - (x + y)^2 \in Nil(R)$

et on a déjà dit que  $R$  possède la propriété suivante :

$$\forall z \in R : z - z^2 \in Nil(R) \Rightarrow \exists f \in Idem(R) : z - f \in Nil(R)$$

D'où

$$\begin{aligned} \exists f \in Idem(R) : (x + y) - f \in Nil(R) &\Rightarrow \exists k \in Nil(R), \exists f \in Idem(R) : x + y = k + f \\ &\Rightarrow x + y \in NC(R) \\ &\Rightarrow xy \in E(G_N(R)) \end{aligned}$$

Étape 3 : Montrons que  $ab \in E(G_N(R))$

On a  $a \in \bar{x}$ , d'où  $\exists s \in Nil(R) : a = x + s$ , ainsi  $b \in \bar{y}$ , d'où  $\exists g \in Nil(R) : b = y + g$ . Donc  $a + b = x + s + y + g$ . D'après la 2<sup>ème</sup> étape  $x + y = k + f$ . alors  $a + b = (k + s + g) + \underset{\in Nil(R)}{f} \in NC(R)$ , c'est-à-dire  $a$  et  $b$  sont adjacents dans  $G_N(R)$ . Alors  $\forall (a, b) \in (x + Nil(R)) \times (y + Nil(R)) : ab \in E(G_N(R))$ . □

**Définition 1.2.8** Soient  $G = (V(G), E(G))$  un graphe simple non vide et soit  $x \in V(G)$ , on appelle degré de  $x$  dans  $G$ , on le note par  $d_G(x)$  (ou  $deg_G(x)$ ) est le nombre des sommets de  $G$  qui sont adjacents à  $x$ . On note par  $N_G(x) := \{y \in V(G) : xy \in E(G)\}$ , ainsi  $N_G[x] := \{y \in V(G) : xy \in E(G)\} \cup \{x\}$ .

**Lemme 1.2.3** Soit  $R$  un anneau et  $x \in R$ . Alors on a les assertions suivantes :

i)  $2x \in NC(R) \Rightarrow d_{G_N(R)}(x) = |NC(R)| - 1$

ii)  $2x \notin NC(R) \Rightarrow d_{G_N(R)}(x) = |NC(R)|$

**Preuve** Soit  $x \in R$ . Observez que  $x + R = R$ , donc pour tout  $y \in NC(R)$ , il existe un élément unique  $x_y \in R$  tel que  $x + x_y = y$ . Donc, nous avons  $deg(x) \leq |NC(R)|$ . Si  $2x \in NC(R)$ , définissez  $f : NC(R) \rightarrow N_{G_N(R)}[x]$  par  $f(y) = x_y$ . Il est facile de voir que  $f$  est une bijection, et donc  $deg(x) = |N_{G_N(R)}(x)| = |N_{G_N(R)}[x]| - 1 = |NC(R)| - 1$ . Si  $2x \notin NC(R)$ , définissez  $f : NC(R) \rightarrow N_{G_N(R)}(x)$  par  $f(y) = x_y$ . Alors  $f$  est une bijection, et donc  $deg(x) = |N_{G_N(R)}(x)| = |NC(R)|$ . □

**Définition 1.2.9** Soit  $G$  un graphe simple. On dit qu'un chemin dans  $G$  est hamiltonien s'il passe une fois et une seule sur chaque sommet de  $G$ .

**Théorème 1.2.2** Pour un anneau  $R$ , on a les assertions suivantes :

(i)  $G_N(R)$  n'est pas nécessairement connexe.

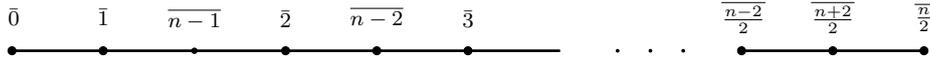
(ii) Soit  $R = \mathbb{Z}_n$ . Pour  $\bar{a} \in \mathbb{Z}_n$  il y a un chemin de  $\bar{a}$  vers  $\bar{0}$ .

(iii)  $G_N(\mathbb{Z}_n)$  est connexe.

(iv) Soit  $R = \mathbb{Z}_n$ . Pour  $A \in M_n(\mathbb{Z}_n)$  il y a un chemin de  $\mathbb{Z}_n$  à  $0$ , où  $0$  est la matrice nulle de  $M_n(\mathbb{Z}_n)$ .

(v)  $M_n(\mathbb{Z}_n)$  est connexe.

**Preuve** i) Est clair par le graphe  $G_N(GF(25))$  (voir figure 1). Pour (ii) et (iii), si  $n$  est impair, en remplaçant  $p$  par  $n$  dans la figure 5, on obtient un chemin hamiltonien dans  $G_N(\mathbb{Z}_n)$ ; si  $n$  est pair, le chemin présenté dans la figure 2 est un chemin hamiltonien dans  $G_N(\mathbb{Z}_n)$ .



**Figure 2.**Chemin hamiltonien dans  $G_N(\mathbb{Z}_n)$  lorsque  $n$  est un entier naturel pair

Pour la démonstration de (iv), soit  $A = [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{Z}_n)$ . On définit  $A_1 = [a_{1ij}]$ , où  $a_{1ij} = -a_{ij}$  pour  $i \geq j$ , sinon  $a_{1ij} = 0$ . Observez que  $A_1 + A$  est nilpotent, donc nil clean. Ainsi, il existe une arête entre  $A$  et  $A_1$ . Aussi définissons  $A_2 = [a_{2ij}]$ , où  $a_{2ij} = a_{ij}$  pour  $i = j$  et sinon  $a_{2ij} = 0$ . Alors clairement nous avons une arête entre  $A_1$  et  $A_2$  dans  $G_N(M_n(\mathbb{Z}_n))$ . Pour chaque élément  $a_{ii}$  de  $A_2$ , par(ii) nous avons un chemin  $\{a_{ii}, b_{i1}, b_{i2}, b_{i3}, \dots, b_{ik_i} = \bar{0}\}$  de longueur  $k_i \in \mathbb{N}$  à  $\bar{0}$ . Maintenant soit  $K = \max\{k_i : 1 \leq i\}$ . Nous construisons un chemin de longueur  $K$  de  $A_2$  à  $0$  comme suit : Définissez  $B_i = [b_{1jl}]$ , où  $b_{1jj} = b_{ji}$  si  $b_{1ij}$  apparaît dans un chemin ci-dessus, et sinon  $b_{1ij} = 0, 1 \leq i \leq K$ . Ainsi,  $\{A, A_1, A_2, B_1, B_2, \dots, B_K = 0\}$  est un chemin de  $A$  à  $0$  dans  $G_N(M_n(\mathbb{Z}_n))$ . Enfin, (v) découle de (iv).  $\square$

*Le résultat suivant qui est lié aux corps finis peut être considéré comme un corollaire au théorème de Wedderburn (voir [1]). Ici, nous affirmons et prouvons cela en utilisant les outils basique de la structure algébrique.*

**Définition 1.2.10** Un anneau  $R$  est réduit si :  $\forall x \in R : (\exists n \in \mathbb{N}^* : x^n) \Rightarrow (x = 0)$ .

**Lemme 1.2.4**  $R$  est un anneau réduit sans idempotents non triviaux si et seulement si  $R$  est un corps fini.

**Preuve**

( $\Rightarrow$ ) Soit  $0 \neq x \in R$ . Observez que  $A = \{x_k : k \in \mathbb{N}\}$  est un ensemble fini. Par conséquent, il existe  $m > l$  tel que  $x^l = x^m$ . Notez que  $x^l = x^m = x^{m-l+l} = x^{m-l}x^l = x^{m-l}x^m = x^{2m-l+l-l} = x^{2(m-l)+l} = \dots = x^{k(m-l)+l}$ , où  $k$  est un entier naturel. Maintenant nous avons :

$$\begin{aligned}
 [x^{l(m-l)}]^2 &= x^{l(m-l)} \cdot x^{l(m-l)} \\
 &= x^{l(m-l)+l(m-l)+l-l} \\
 &= x^{l(m-l)+l} \cdot x^{l(m-l)-l} \\
 &= x^{l(m-l)+l} \cdot x^{l(m-l)-l} \\
 &= x^l \cdot x^{l(m-l)-l} \\
 &= x^{l(m-l)}
 \end{aligned}$$

c'est-à-dire que  $x^{l(m-l)}$  est un idempotent. Donc,  $x^{l(m-l)} = 1$ , ce qui donne que  $x$  est inversible. Par conséquent,  $R$  est un corps fini.

( $\Leftarrow$ ) Évident.  $\square$

### 1.3 Les invariants du graphe nil clean

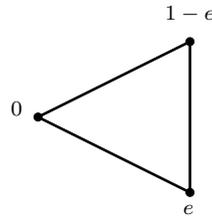
Dans cette section, nous prouvons quelques résultats liés aux invariants de la théorie des graphes.

**Définition 1.3.1** La circonférence d'un graphe simple  $G$ , noté  $Gr(G)$  est la longueur du plus petit cycle dans  $G$ .

**Théorème 1.3.1** Les assertions suivantes sont vraies pour le graphe nil clean  $G_N(R)$  de  $R$  :

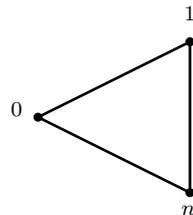
- (i) Si  $R$  n'est pas un corps, alors  $Gr(G_N(R)) = 3$ .
- (ii) Si  $R$  est un corps, alors
  - (a) La circonférence de  $Gr(G_N(R)) = 2p$  si  $R \cong GF(p^k)$  ( le corps d'ordre  $p^k$ ) où  $p$  est un nombre premier impair et  $k > 1$  ;
  - (b) Sinon,  $Gr(G_N(R)) = \infty$  et donc,  $G_N(R)$  est un chemin.

**Preuve** (i) Supposons que  $R$  a au moins un idempotent non trivial ou un nilpotent non trivial . Si  $e \in R$  est un idempotent non trivial, alors nous avons un cycle de longueur 3 dans  $G_N(R)$  pour  $e$  comme le montre la figure 3 .



**Figure 3.** Cycle de longueur 3 dans  $G_N(R)$  pour un idempotent non trivial  $e$

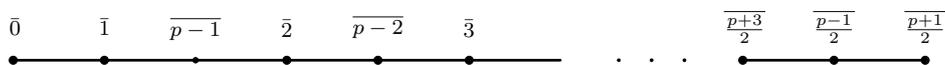
Par conséquent, la circonférence de  $G_N(R)$  est 3. Encore une fois, si  $R$  contient un nilpotent non trivial  $n \in R$ , alors nous avons un cycle de longueur 3 dans  $G_N(R)$  pour  $n$  comme le montre la figure 4.



**Figure 4.** Cycle de longueur 3 dans  $G_N(R)$  pour un nilpotent non trivial  $n$

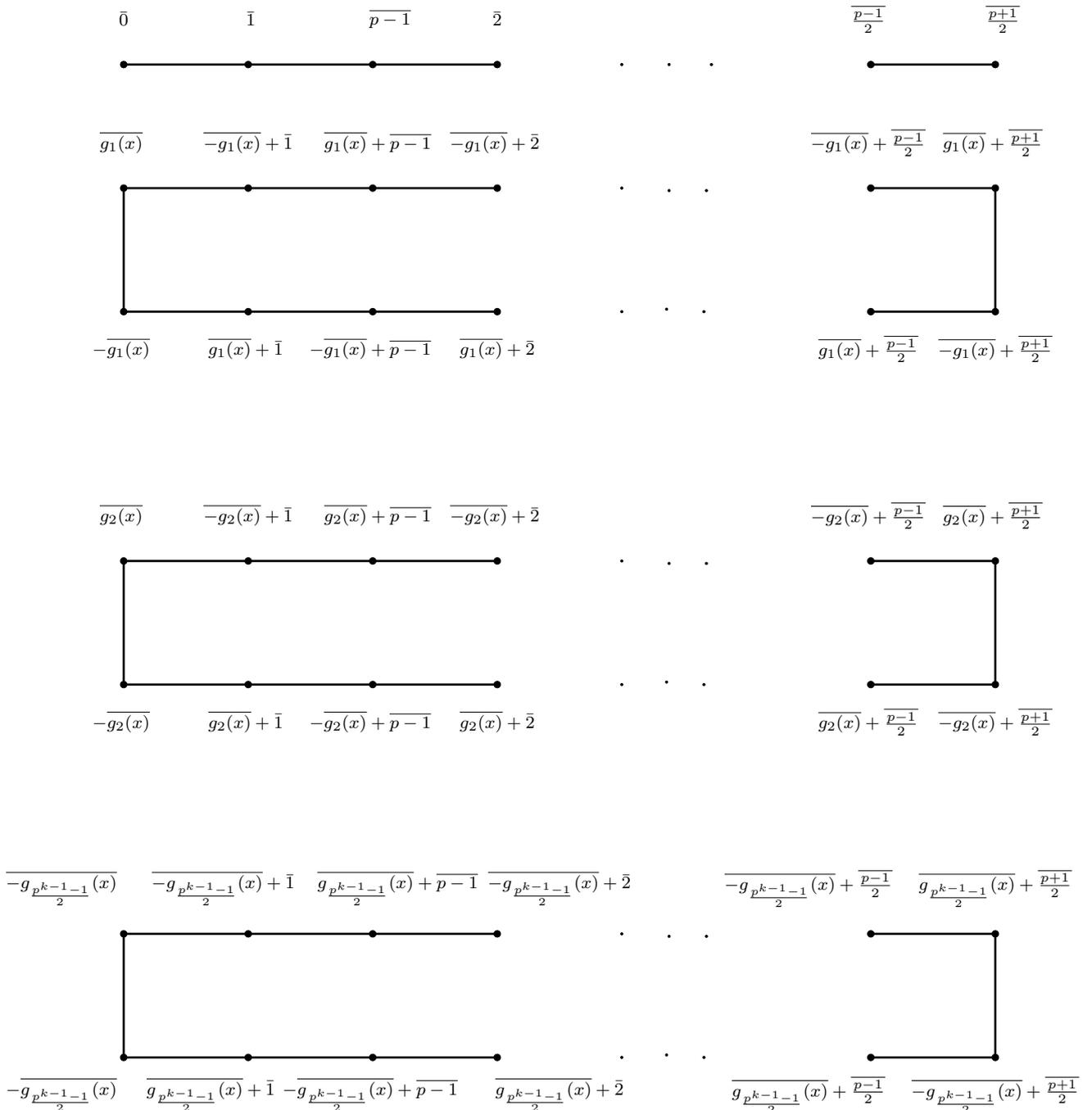
Ainsi, la circonférence est 3. D'après le lemme 1.2.4, les anneaux sans idempotents non triviaux et des nilpotents non triviaux sont des corps. Cela prouve (i).

(ii) Comme  $\{ 0, 1 \}$  l'ensemble d'éléments nil clean d'un corps fini, donc le graphe nil clean de  $\mathbb{F}_p$ , où  $p$  est un nombre premier, est comme ci-dessous :



**Figure 5.** Le graphe nil clean de  $\mathbb{Z}_p$

D'après le graphe, il est clair que  $Gr(G_N(\mathbb{Z}_p)) = \infty$ , ce qui prouve (b). Il est facile d'observer à partir de la caractérisation des corps finis que le graphe nil clean de  $GF(p^k)$  avec  $p > 2$  est un graphe non connexe constitué d'un chemin de longueur  $p$  et  $(\frac{p^{k-1}-1}{2}) 2p$ - cycles. Pour la démonstration, on a  $GF(p^k) = \mathbb{Z}_p[X]/\langle f(x) \rangle$ , où  $f(x)$  est un polynôme irréductible de degré  $k$  sur  $\mathbb{Z}_p$ . Soit  $A \subseteq GF(p^k)$  tout combinaisons linéaire de  $x, x^2, \dots, x^{k-1}$  avec des coefficients de  $\mathbb{Z}_p$  tels que si  $g(x) + \langle f(x) \rangle \in A$ , alors  $-g(x) + \langle f(x) \rangle \notin A$ . Clairement,  $A = \{g_i(x) + \langle f(x) \rangle : 1 \leq i \leq \frac{p^{k-1}-1}{2}\}$ . On pose  $\overline{g_i(x)} = g_i(x) + \langle f(x) \rangle$  pour  $1 \leq i \leq \frac{p^{k-1}-1}{2}$ . Par conséquent, (a) découle du graphe nil clean présenté par la figure 6.



**Figure 6.** Graphe nil clean de  $GF(p^k)$

**Définition 1.3.2** Soit  $G = (V(G), E(G))$  un graphe simple. On dit que  $S \subseteq V(G)$  est une partie indépendante de  $G$  si :  $\forall x, y \in V(G) : x \neq y \Rightarrow \{x, y\} \notin E(G)$

**Définition 1.3.3** On dit qu'un graphe simple  $G = (V(G), E(G))$  est biparti s'il existe une partition en deux ensembles indépendants de  $G$  (noté  $(S_1, S_2)$ ) de  $V(G)$ .

**Théorème 1.3.2**  $G_N(R)$  est biparti si et seulement si  $R$  est un corps.

**Preuve** Supposons que  $G_N(R)$  est un graphe biparti. Alors la circonférence de  $G_N(R)$  n'est pas un nombre impair, et donc par le théorème 1.3.1  $R$  doit être un corps. Inversement, si  $R$  est un corps, il est clair à partir du graphe nil clean de  $R$  que  $G_N(R)$  est biparti.  $\square$

**Définition 1.3.4** Soit  $G = (V(G), E(G))$  un graphe simple. On dit que  $S \subseteq V(G)$  est un ensemble dominant de  $G$  si :  $\forall x \in V(G) : (x \in S)$  ou  $(\exists y \in S : \{x, y\} \in E(G))$ .

**Théorème 1.3.3** Soit  $R$  un anneau weak nil clean tel que  $R$  n'a pas d'idempotents non triviaux. Alors  $\{1, 2\}$  est un ensemble dominant pour  $G_N(R)$ .

**Preuve** Soit  $a \in R$ , alors  $a = n, n + 1$  ou  $n - 1$  pour un certains  $n \in Nil(R)$ . Si  $a = n$ , alors  $n + 1 \in NC(R)$  implique que  $a$  est adjacent à 1. Si  $a = n - 1$ , alors  $n - 1 + 1 = n \in NC(R)$  implique que  $a$  est adjacent à 1. Si  $a = n + 1$  et  $2 = n_1$  pour un nilpotent  $n_1 \in R$ , alors  $a$  est adjacent à 2. Si  $a = n + 1$  et  $2 = n_1 - 1$  pour un nilpotent  $n_1 \in R$ , alors  $a$  est adjacent à 2. Si  $a = n + 1$  et  $2 = n_1 + 1$  pour un nilpotent  $n_1 \in R$ , on observe que  $a + 2 = (n + 1) + (n_1 + 1) = (n + n_1) + 2 = n + n_1 + (n_1 + 1) = (n + 2n_1) + 1$  est nil clean. Par conséquent,  $a$  est adjacent à 2.  $\square$

**Théorème 1.3.4** Soit  $R = A \times B$  tel que  $A$  est nil clean et  $B$  est weak nil clean sans idempotents non triviaux. Alors  $\{(1_A, 1_B), (2_A, 2_B)\}$  est un ensemble dominant pour  $G_N(R)$ .

**Preuve** Soit  $(a, b) \in R$ , où  $a \in A$  et  $b \in B$ . Pour  $n_1 \in Nil(A), n_2 \in Nil(B)$  et  $0 \neq e \in Idem(A)$ ,  $(a, b)$  a l'une des formes suivantes :  $(a, b) = (n_1, n_2) + (e, 1_B), (n_1, n_2) + (e, 0), (n_1, n_2) - (e, 1_B)$  ou  $(n_1, n_2) + (0, 0)$ . Si  $(a, b) = (n_1, n_2) + (e, 1_B)$ , on a  $(a, b) + (2_A, 2_B) = (n_1 + e + 2_A, n_2 + 1_B + 2_B)$ . Puisque  $A$  est nil clean,  $n_1 + e + 2_A = n'_1 + f$  pour certains  $n'_1 \in Nil(A)$  et  $f \in Idem(A)$ . Puisque  $B$  est weak nil clean,  $2_B = n'_2$  ou  $n'_2 - 1_B$  pour quelque  $n'_2 \in Nil(B)$ . Si  $2_B = n'_2$ , on a  $(a, b) + (2_A, 2_B) = (n'_1, n_2 + n'_2) + (f, 1_B)$ , qui est une expression nil clean, et donc  $(a, b)$  est adjacent à  $(2_A, 2_B)$ . Si  $2_B = n'_2 - 1_B$ , on a  $(a, b) + (2_A, 2_B) = (n'_1, n_2 + n'_2) + (f, 0)$  donc  $(a, b)$  est adjacent à  $(2_A, 2_B)$ . Dans les trois autres cas, il est facile de voir que  $(a, b) + (1_A, 1_B)$  est nil clean, et donc  $(a, b)$  est adjacent à  $(1_A, 1_B)$ . Par conséquent,  $\{(1_A, 1_B), (2_A, 2_B)\}$  est un ensemble dominant pour  $R$ .  $\square$

**Théorème 1.3.5** Soit  $R$  un anneau weak nil clean. Alors  $\{1, 2\}$  est un ensemble dominant pour  $G_N(R)$ .

**Preuve** Si  $R$  n'a pas d'idempotents non triviaux, alors par le théorème 1.3.7 nous

avons terminé. Si  $R$  a un idempotent non trivial  $e$ , alors par la décomposition de Peirce  $R \cong eR \oplus (1-e)R$  or, d'après le théorème 2.3 du [2], l'un de  $eR$  et  $(1-e)R$  doit être un anneau nil clean. Sans perte de généralité, supposons que  $eR$  est un anneau nil clean et  $(1-e)R$  donc est un anneau weak nil clean. Si  $(1-e)R$  n'a pas d'idempotents non triviaux, alors nous avons le résultat par le théorème 1.3.8. Si  $f \in \text{Idem}((1-e)R)$ , en répétant comme ci-dessus on obtient une somme directe de  $R$  où chaque élément de la sommation est weak nil clean. Puisque  $R$  est un anneau fini, après avoir répété ce qui précède à la sommation directe de  $R$ , nous aurons une décomposition en somme directe de  $R$ , où les idempotents de la sommation direct de  $R$  sont triviaux. Puis nous appliquons le théorème 1.3.8 pour obtenir le résultat désiré.  $\square$

**Définition 1.3.5** Une coloration d'arêtes d'un graphe  $G$  est une application  $C : E(G) \rightarrow S$ , où  $S$  est un ensemble des couleurs telles que pour tout  $e, f \in E(G)$ , si  $e$  et  $f$  sont adjacents alors  $C(e) \neq C(f)$ . L'indice chromatique d'un graphe  $G$ , notée  $\chi'(G)$ , est défini comme le nombre minimum de couleurs nécessaires pour une coloration correcte de  $G$ . Soit le degré de sommet maximum de  $G$ . Alors le théorème de Vizing (voir [8]) nous donne que  $\Delta \leq \chi'(G) \leq \Delta + 1$ . Le théorème de Vizings divise les graphes en deux classes selon l'indice chromatique : graphes satisfaisant  $\chi'(G) = \Delta$  sont appelés graphes de classe 1, et ceux avec  $\chi'(G) = \Delta + 1$  sont les graphes de la classe 2.

**Lemme 1.3.1** Soit  $R$  un anneau. Le graphe nil clean de  $R$  est de classe 1.

**Lemme 1.3.2** Un anneau  $R$  est un anneau nil clean si et seulement si  $\text{diam}(G_N(R)) = 1$ .

**Théorème 1.3.6** Soit  $R$  un anneau weak nil clean sans idempotents non triviaux, mais n'est pas nil clean. Alors  $\text{diam}(G_N(R)) = 2$

**Preuve** Soient  $a, b \in R$ . Alors on a  $a = n_1 + 1, n_1 - 1$  ou  $n_1$  et  $b = n_2 + 1, n_2 - 1$  ou  $n_2$  pour certains  $n_1, n_2 \in \text{Nil}(R)$ .

Si  $a = n_1 + 1$  et  $b = n_2 - 1$  ou  $n_2$ , alors clairement  $a + b$  est nil clean, et donc  $ab$  est une arête dans  $G_N(R)$ . Par conséquent,  $d(a, b) = 1$ . Si  $a = n_1 + 1$  et  $b = n_2 + 1$ , alors nous avons le chemin  $a - (-1) - b$  dans  $G_N(R)$ . Donc  $d(a, b) \leq 2$ .

Si  $a = n_1 - 1$  et  $b = n_2 - 1$  ou  $n_2$ , comme ci-dessus, nous avons un chemin de longueur 2 de  $a$  à  $b$  en passant par 1. Par conséquent, dans ce cas,  $d(a, b) \leq 2$ . Enfin si  $a = n_1$  et  $b = n_2$ , alors  $d(a, b) = 1$ . Ainsi, d'après ce qui précède nous concluons que  $\text{diam}(G_N(R)) \leq 2$ .

Puisque  $R$  est un anneau weak nil clean mais non nil clean, il y a au moins un  $x \in R$  tel que  $x = n - 1$  et  $x \neq n + 1$ , c'est-à-dire que  $x$  n'est pas nil clean. Alors nous avons  $d(0, x) = 2$ . Donc  $\text{diam}(G_N(R)) \geq 2$ .  $\square$

**Théorème 1.3.7** Soit  $R = A \times B$  tel que  $A$  est un anneau nil clean et  $B$  est un anneau weak nil clean n'ayant pas d'idempotents non triviaux. Alors  $\text{diam}(G_N(R)) = 2$ .

**Preuve**

$Idem(R) = \{(e, 0_B), (e, 1_B) : e \in Idem(A)\}$  . Soient  $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in R$  . Dans le cas où  $(a_1, b_1) + (a_2, b_2)$  est nil clean,  $d((a_1, b_1), (a_2, b_2)) = 1$  dans  $G_N(R)$ .

Si  $(a_1, b_1) + (a_2, b_2)$  n'est pas nil clean, alors  $b_1 + b_2$  n'est pas nil clean. Nous avons donc les cas suivants :

Cas I : Si  $b_1 = n_1 + 1$  et  $b_2 = n_2 + 1$ , nous obtenons le chemin  $(a_1, b_1) - (0, -1) - (a_2, b_2)$  dans  $G_N(R)$ . Ainsi,  $d((a_1, b_1), (a_2, b_2)) \leq 2$ .

Cas II : Si  $b_1 = n_1 - 1$  et  $b_2 = n_2 - 1$ , nous avons le chemin  $(a_1, b_1) - (0, 1) - (a_2, b_2)$  dans  $G_N(R)$ . Ainsi,  $d((a_1, b_1), (a_2, b_2)) \leq 2$ .

Cas III : Si  $b_1 = n_1 - 1$  et  $b_2 = n_2$ , on a le chemin  $(a_1, b_1) - (0, 1)(a_2, b_2)$  dans  $G_N(R)$ . Ainsi,  $d((a_1, b_1), (a_2, b_2)) \leq 2$ .

Cas IV : Si  $b_1 = n_1$  et  $b_2 = n_2 - 1$ , alors par le cas III et la symétrie nous avons  $d((a_1, b_1), (a_2, b_2)) \leq 2$ .

Par conséquent,  $diam(G_N(R)) \leq 2$ . Notez que  $R$  n'est pas nil clean, ce qui implique  $diam(G_N(R)) \geq 2$ , et donc  $diam(G_N(R)) = 2$ .  $\square$

**Théorème 1.3.8** *Soit  $R$  un anneau weak nil clean mais pas nil clean.*

*Alors  $diam(G_N(R)) = 2$ .*

**Preuve** Si  $R$  n'a pas d'idempotents non triviaux, alors par le théorème 1.3.7, nous avons terminé. Si  $R$  a un idempotent non trivial, noté  $e$ , alors par la décomposition de Peirce, nous avons  $R \cong eR \oplus (1-e)R$  donc, d'après le théorème 2.3 du [2], l'un de  $eR$  et  $(1-e)R$  doit être un anneau nil clean. Sans perte de généralité, supposons que  $eR$  soit un anneau nil clean, alors  $(1-e)R$  est un anneau weak nil clean. Si  $(1-e)R$  n'a pas d'idempotents non triviaux, alors nous avons le résultat du théorème 1.3.8. Si  $f \in Idem((1-e)R)$ , en répétant comme ci-dessus on obtient une décomposition en somme directe de  $R$ , où une seule sommation est weak nil clean. Comme  $R$  est un anneau fini, alors après avoir répété ce qui précède à la sommation weak nil clean de  $R$  nous avons une décomposition en somme directe de  $R$ , où les idempotents de la sommation weak nil clean de  $R$  sont triviaux. Puis à nouveau par le théorème 1.3.8, nous obtenons le résultat désiré.  $\square$

**Théorème 1.3.9** *Soit  $n$  un entier positif. Alors on a les assertions suivantes :*

(i) *Si  $n = 2^k$  pour un entier  $k \geq 1$ , alors  $diam(G_N(\mathbb{Z}_n)) = 1$ .*

(ii) *Si  $n = 2^k 3^l$  pour un certains entiers  $k \geq 0$  et  $l \geq 1$ , alors  $diam(G_N(\mathbb{Z}_n)) = 2$ .*

(iii) *Pour un nombre premier  $p$ ,  $diam(G_N(\mathbb{Z}_p)) = p - 1$ .*

**Preuve** (i) et (ii) découlent respectivement du lemme 1.3.12 et du théorème 1.3.8. (iii) découle de  $G_N(\mathbb{Z}_p)$  sur la figure 5.  $\square$

# Graphe nil clean de division d'un anneau

---

## 2.1 Introduction

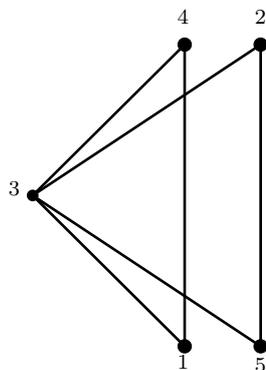
Dans ce chapitre, les anneaux sont commutatifs finis avec une identité non nulle. Diesl en 2013, introduit le concept d'anneau nil clean en tant que sous-classe d'anneaux cleans. Il a défini qu'un élément  $x$  d'un anneau  $R$  est un élément nil clean s'il peut être écrit comme une somme d'un élément idempotent et un élément nilpotent de  $R$ .  $R$  est appelé un anneau nil clean si chaque élément de  $R$  est nil clean. Toujours en 2015, Kosan et Zhou, ont développé le concept d'anneau weak nil clean comme une généralisation de l'anneau nil clean. Un élément  $x$  d'un anneau  $R$  est dit weak nil clean si  $x = n + e$  ou  $x = n - e$ , où  $n$  est un élément nilpotent et  $e$  est un élément idempotent de  $R$ . L'ensemble des éléments nilpotents, l'ensemble des éléments unitaires, les éléments nil clean et weak nil clean d'un anneau  $R$  sont notés respectivement  $Nil(R)$ ,  $U(R)$ ,  $NC(R)$  et  $WNC(R)$ . Dans les graphes, on considère un graphe simple non orienté. Pour un graphe  $G$ , l'ensemble des arêtes et l'ensemble des sommets sont notés respectivement  $E(G)$  et  $V(G)$ . Le concept du graphe zéro diviseur d'un anneau commutatif a été introduit par Beck pour discuter de la coloration d'anneaux. En 1999, Anderson et Livingston ont introduit le graphe zéro diviseur  $\Gamma(R)$  d'un anneau commutatif  $R$ . Ils ont défini, l'ensemble des sommets de  $\Gamma(R)$  comme étant l'ensemble de tous les zéros diviseurs non nuls de  $R$  et deux sommets  $x$  et  $y$  sont adjacents si  $xy = 0$ . Li et al, ont développé une sorte de structure du graphe d'un anneau  $R$ , appelé graphe des nilpotents de division de  $R$ , dont l'ensemble des sommets est  $\{x \in R : x \neq 0, \exists y (\neq 0) \in R \text{ tel que } xy \in Nil(R)\}$  et deux sommets  $x$  et  $y$  sont adjacents si  $xy \in Nil(R)$ . En 2018, Kimball et Lagrange, ont généralisé le concept du graphe zéro diviseur en graphe d'idempotents de division. Pour tout idempotent  $e \in R$ , ils ont défini le graphe d'idempotents de division  $\Gamma_e(R)$  associé à  $e$ , où  $V(\Gamma_e(R)) = \{a \in R : \text{il existe } b \in R \text{ avec } ab = e\}$  et deux sommets  $a$  et  $b$  sont adjacents si  $ab = e$ . Dans ce chapitre, nous introduisons le graphe nil clean de division  $G_N(R)$  associé à un anneau commutatif fini  $R$ . On définit le graphe nil clean de division  $G_N(R)$  d'un anneau  $R$  par la donnée de  $V(G_N(R)) = \{x \in R : x \neq 0, \exists y (\neq 0, \neq x) \in R \text{ tel que } xy \in NC(R)\}$  comme ensemble des sommets et deux sommets  $x$  et  $y$  sont adjacents si et seulement si  $xy$  est un élément

nil clean de  $R$ . Il est clair que le graphe nil clean de division est une généralisation du graphe d'idempotents de division et le graphe des nilpotents de division. Les propriétés comme la circonférence, le nombre cliques, le diamètre et le nombre de domination etc. de  $G_N(R)$  ont été étudiés. Pour commencer, rappelons quelques préliminaires sur la théorie des graphes. Pour un graphe  $G$ , le degré d'un sommet  $v \in V(G)$  est le nombre d'arêtes incidentes à  $v$ , noté  $deg(v)$ . Les voisins d'un sommet  $v \in G$  est l'ensemble de tous les sommets incidents à  $v$ , noté  $A_v$ . Un graphe  $G$  est dit connexe, si pour deux sommets distincts de  $G$ , il existe un chemin dans  $G$  qui les joignent. Le nombre d'arêtes sur le chemin le plus court entre les sommets  $x$  et  $y$  est appelé la distance entre  $x$  et  $y$  et est noté  $d(x, y)$ . S'il n'y a pas de chemin entre  $x$  et  $y$ , alors on dit  $d(x, y) = \infty$ . Le diamètre d'un graphe  $G$ , noté  $diam(G)$ , est le maximum des distances de chaque paire des sommets distincts dans  $G$ . Si  $G$  n'est pas connexe, alors on dit que  $diam(G) = \infty$ . La circonférence de  $G$  est également la longueur du plus court cycle dans  $G$ , notée par  $Gr(G)$  et s'il n'y a pas de cycle dans  $G$ , alors nous disons que  $Gr(G) = \infty$ . Un graphe complet est un graphe simple non orienté dans lequel chaque paire des sommets distincts est reliée par une arête. Une clique est un sous-ensemble des sommets d'un graphe tel que son sous-graphe induit soit complet. Une clique ayant  $n$  sommets est appelée  $n$ -clique. Une clique maximale d'un graphe est une clique telle qu'il n'y a pas de clique avec une taille plus grande. Le nombre clique d'un graphe  $G$  est notée  $\omega(G)$  et défini comme étant le nombre des sommets dans une clique maximale de  $G$ .

## 2.2 Graphe nil clean de division

**Définition 2.2.1** *Pour un anneau  $R$ , le graphe nil clean de division, noté  $G_N(R)$  est défini comme un graphe simple avec ensemble des sommets  $\{x \in R : x \neq 0, \exists y (\neq 0, \neq x) \in R \text{ tel que } xy \in NC(R)\}$  et deux sommets  $x$  et  $y$  sont adjacents si et seulement si  $xy \in NC(R)$ .*

À partir de la définition ci-dessus, nous observons que le graphe nil clean de division est une généralisation du graphe nilpotent de division, qui est à nouveau une généralisation du graphe zéro diviseur. Pour tout idempotent  $e \in R$ , le graphe nil clean de division d'un anneau  $R$  est aussi une généralisation de  $\Gamma_e(R)$ . Par exemple, le graphe  $G_N(\mathbb{Z}_6)$  est illustré ci-dessous :

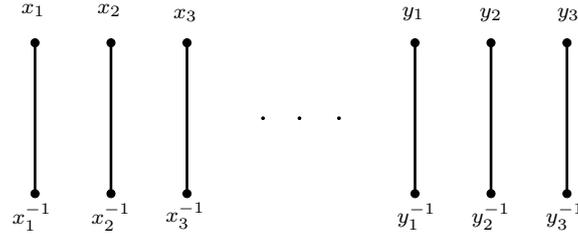


**Figure 1.** Le graphe Nil clean de division de  $\mathbb{Z}_6$

**Théorème 2.2.1** *Le graphe nil clean de division d'un anneau  $R$ ,  $G_N(R)$  est complet si et seulement si  $R$  est un anneau nil clean.*

**Preuve** On suppose que  $G_N(R)$  est complet et  $x \in R$ . Si  $x = 0$ , alors  $x$  est nil clean, si  $x \neq 0$  alors  $x.1 = x$  est nil clean si  $1 \in V(G_N(R))$ . Inversement elle est clair d'après la définition du graphe nil clean de division.  $\square$

Si  $\mathbb{F}$  est un corps fini d'ordre  $n$ , alors clairement  $NC(\mathbb{F}) = \{0, 1\}$ . Donc pour tout  $x (\neq 0) \in \mathbb{F}$ ,  $x$  est adjacent seulement à  $x^{-1}$ , à condition que  $x \neq x^{-1}$ . Par conséquent, le graphe nil clean de division de  $\mathbb{F}$  est comme suit :



**Figure 2.** Le graphe Nil clean de division de  $\mathbb{F}$

Notez que  $x_i \neq x_i^{-1}$  et  $y_i \neq y_i^{-1}$ , d'autre part nous pouvons également obtenir des points isolés dans le graphe  $G_N(\mathbb{F})$ .

**Corollaire 2.2.1** *Pour un corps  $\mathbb{F}$  d'ordre  $n$ , où  $n > 2$ . Si  $A = \{a \in \mathbb{F} : a = a^{-1}\}$  alors on a les assertions suivantes :*

- 1)  $diam(G_N(\mathbb{F})) = \infty$ .
- 2)  $Gr(G_N(\mathbb{F})) = \infty$  et  $\omega(G_N(\mathbb{F})) = 2$ .
- 3)  $|E(G_N(\mathbb{F}))| = n - |A| - 1$ .

**Théorème 2.2.2** *Si  $R$  a un élément idempotent non trivial ou un élément nilpotent non trivial, alors  $Gr(G_N(R)) = 3$ .*

**Preuve** Si  $R$  a un idempotent  $e$  non trivial, alors  $\{0, 1, e, 1 - e\} \subset NC(R)$  et on obtient le cycle  $1 - e - (1 - e) - 1$  dans  $G_N(R)$ . Aussi si  $R$  a un nilpotent non trivial  $n$ , alors  $\{0, 1, n, n + 1\} \subset NC(R)$ . Dans ce cas  $1 - n - (n + 1) - 1$  est un cycle dans  $G_N(R)$ .  $\square$

**Théorème 2.2.3** *Si  $R$  n'a que des idempotents triviaux et des nilpotents triviaux, alors  $Gr(G_N(R)) = \infty$ .*

**Preuve** Puisque  $R$  n'a que des idempotents triviaux et des nilpotents triviaux, donc par le lemme 2.6 [3],  $R$  est un corps.  $\square$

**Théorème 2.2.4** *Soit  $R$  un anneau. Alors on a les assertions suivantes :*

- 1) Soit  $R$  est un corps, soit  $G_N(R)$  est connexe.
- 2)  $diam(G_N(R)) = \infty$  ou  $diam(G_N(R)) \leq 3$ .
- 3)  $Gr(G_N(R)) = \infty$  ou  $Gr(G_N(R)) = 3$ .

**Preuve** Supposons que  $R$  est un anneau réduit.

Cas (I) : Si  $R$  n'a pas d'idempotent non trivial, alors  $R$  est un corps

Cas (II) : Si  $R$  a un idempotent non trivial, disons  $e \in Idem(R)$ , alors pour tout  $x, y \in V(G_N(R))$ , il existe  $x_1, y_1 \in V(G_N(R))$ , tel que  $xx_1, yy_1 \in NC(R) = Idem(R)$ . Donc, nous avons un chemin  $x - x_1e - y_1(1 - e) - y$  de  $x$  à  $y$ . Si  $R$  n'est pas un anneau réduct, alors il existe  $n \in Nil(R)$ , tel que  $x - n - y$  est un chemin de  $x$  à  $y$ , pour tout  $x, y \in V(G_N(R))$ . Par conséquent (1) et (2) découlent des observations ci-dessus et la figure 2.

3) Si  $R$  est réduct, alors soit  $R$  est un corps, soit il existe un idempotent non trivial  $e \in R$ , tel que  $1 - e - (1 - e) - 1$  est un cycle. Donc,  $Gr(G_N(R)) = \infty$  ou  $Gr(G_N(R)) = 3$ . Si  $R$  n'est pas un anneau réduct, alors comme le graphe nilpotent est un sous-graphe du graphe nil clean de division, donc du théorème 2.1[4],  $Gr(G_N(R)) = 3$ .  $\square$

**Corollaire 2.2.2** *Si  $R$  n'est pas un anneau réduct, alors  $diam(G_N(R)) \leq 2$ .*

**Corollaire 2.2.3** *Un anneau  $R$  est un corps si et seulement si le graphe nil clean de division de  $R$  est biparti.*

**Preuve**

$\Rightarrow$  Trivial.

$\Leftarrow$  Si le graphe nil clean de division de  $R$  est biparti alors  $Gr(G_N(R)) \neq 3$ . Donc, d'après le théorème 2.2.5,  $Gr(G_N(R)) = \infty$  et donc  $R$  est un corps.  $\square$

**Théorème 2.2.5**  $\omega(G_N(R)) \geq \max\{|Nil(R)| - 1, |Idem(R)| - 1\}$ .

**Preuve** À partir de la définition du graphe nil clean de division, nous observons que  $Nil(R)$  et  $Idem(R)$  induisent respectivement des sous-graphes complet de  $G_N(R)$ .  $\square$

*Ensuite, nous étudions le graphe nil clean de division d'un anneau propre weak nil clean.*

**Théorème 2.2.6** *Soit  $R$  un anneau weak nil clean qui n'est pas nil clean. Alors on a les assertions suivantes :*

- 1)  $\omega(G_N(R)) \geq \left\lceil \frac{|R|}{2} \right\rceil$ , où  $[x]$  est la partie entière de  $x$ .
- 2) Si  $|R| (> 3)$  est pair alors  $diam(R) = 2$ .

**Preuve** Comme  $x \in WNC(R)$  implique  $-x \in NC(R)$ , donc si  $|R|$  est pair, alors  $|NC(R)| \geq \frac{|R|}{2}$  et si  $|R|$  est impair, alors  $|NC(R)| \geq \frac{|R|+1}{2}$ . Puisque  $R$  est commutatif, donc le produit de deux éléments nil clean est aussi nil clean. D'où  $\omega(G_N(R)) \geq \left\lceil \frac{|R|}{2} \right\rceil$ . D'autre part si  $|R| > 3$ , donc  $R$  n'est pas un corps et donc  $G_N(R)$  est connexe. Comme  $|R \setminus \{0\}|$  est impaire, donc il existe un élément  $a \in R$  tel que  $x \in NC(R) \cap WNC(R)$ . Donc pour tout  $x, y \in R$ ,  $x - a - y$  est un chemin dans  $G_N(R)$  et  $diam(G_N(R)) = 2$  car  $R$  n'est pas un anneau nil clean.  $\square$

## 2.3 Le Graphe nil clean de $\mathbb{Z}_{2p}$ et $\mathbb{Z}_{3p}$ , pour tout nombre premier impair $p$

Dans cette section, nous étudions les structures de  $G_N(\mathbb{Z}_{2p})$  et  $G_N(\mathbb{Z}_{3p})$ , pour tout nombre premier impair  $p$ .

**Lemme 2.3.1** Si  $a \in V(G_N(\mathbb{Z}_{2p}))$  , où  $p$  est un nombre premier impair, alors on a les assertions suivantes :

- 1) Si  $a = p$ , alors  $\deg(a) = 2p - 2$  .
- 2) Si  $a \in \{1, p - 1, p + 1, 2p - 1\}$ , alors  $\deg(a) = 2$  .
- 3) Sinon  $\deg(a) = 3$ .

**Preuve** Clairement  $NC(\mathbb{Z}_{2p}) = \{0, 1, p, p + 1\}$  .

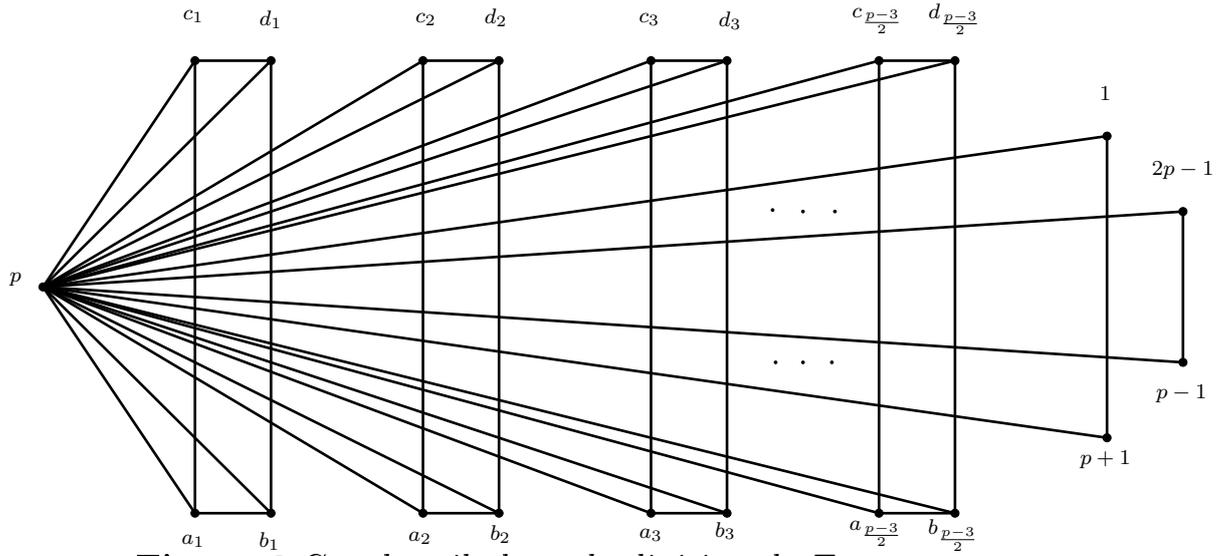
- 1) Si  $a = p$  , alors pour tout  $y \in V(G_N(\mathbb{Z}_{2p}))$ , on a  $yp = p$  ou  $yp = 0$ . D'où chaque élément de  $V(G_N(\mathbb{Z}_{2p}))$  est adjacent à  $p$  .
- 2) Il est facile d'observer que,  $A_1 = \{p, p + 1\}$  ,  $A_{p-1} = \{p, 2p - 1\}$  ,  $A_{p+1} = \{1, p\}$  et  $A_{2p-1} = \{p - 1, p\}$  .
- 3) Soit  $a \in \mathbb{Z}_{2p} \setminus \{0, 1, p - 1, p, p + 1, 2p - 1\}$  .

Cas (I) : Soit  $a$  un nombre pair. Si  $ax = 0$  dans  $\mathbb{Z}_{2p}$  , alors il a deux solutions 0 et  $p$  .  
 Si  $ax = 1$  dans  $\mathbb{Z}_{2p}$  , alors il n'a pas de solution, puisque  $\text{pgcd}(2p, a) = 2 \nmid 1$ .  
 Si  $ax = p$  dans  $\mathbb{Z}_{2p}$  , alors il n'a pas de solution, puisque  $\text{pgcd}(2p, a) = 2 \nmid p$  .  
 Si  $ax = p + 1$  dans  $\mathbb{Z}_{2p}$  , alors il a deux solutions distinctes  $x_1$  et  $x_2$  dans  $\mathbb{Z}_{2p}$  , puisque  $\text{pgcd}(2p, a) = 2 \mid p + 1$ . Par conséquent, nous concluons que  $A_a = \{p, x_1, x_2\}$  .

Cas (II) : Soit  $a$  un nombre impair. Si  $ax = 0$  dans  $\mathbb{Z}_{2p}$  , alors il a une solution unique  $x = 0$ . Si  $ax = 1$  dans  $\mathbb{Z}_{2p}$  , alors il a une solution impaire unique  $x = y_1$  dans  $\mathbb{Z}_{2p}$  , puisque  $\text{pgcd}(2p, a) = 1 \mid 1$ .  
 Si  $ax = p$  dans  $\mathbb{Z}_{2p}$  , alors il a une solution unique  $x = p$  , puisque  $\text{pgcd}(2p, a) = 1 \mid p$  .  
 Si  $ax = p + 1$  dans  $\mathbb{Z}_{2p}$  , alors il a une solution paire unique  $x = y_2$  dans  $\mathbb{Z}_{2p}$  , puisque  $\text{pgcd}(2p, a) = 1 \mid p + 1$ . D'où  $A_a = \{p, y_1, y_2\}$  Des cas ci-dessus, on obtient  $\deg(a) = 3$ .

□

**Remarque 2.3.2** Dans la démonstration du lemme 2.3.1 (3), cas (I), puisque  $ax_1 = ax_2$  dans  $\mathbb{Z}_{2p}$  , donc  $x_1 - x_2 = 0$  ou  $p$  , mais  $x_1 - x_2 \neq 0$  car  $x_1$  et  $x_2$  sont distincts. Donc si  $x_1$  est impair, alors  $x_2$  est pair et si  $x_1$  est pair, alors  $x_2$  est impair. D'après le lemme 2.3.1 et la remarque Précédente, pour tout nombre premier  $p > 2$ , le graphe nil clean de division de  $\mathbb{Z}_{2p}$  est le suivant :



**Figure 3.** Graphe nil clean de division de  $\mathbb{Z}_{2p}$

Dans la figure 3,  $a_i$  et  $b_i$  sont des nombres pairs de  $\mathbb{Z}_{2p} \setminus \{0, 1, p-1, p, p+1, 2p-1\}$  tels que  $a_i b_i = p+1$ , pour  $1 \leq i \leq \frac{p-3}{2}$ . Aussi  $c_i = a_i + p$  et  $d_i = b_i + p$ , pour  $1 \leq i \leq \frac{p-3}{2}$ . À partir des observations ci-dessus, nous concluons ce qui suit :

**Théorème 2.3.1** Le graphe nil clean de division  $G_N(\mathbb{Z}_{2p})$  vérifie les assertions suivantes, pour tout nombre premier impair  $p$ .

- 1)  $\omega(G_N(\mathbb{Z}_{2p})) = 3$ .
- 2)  $\text{diam}(G_N(\mathbb{Z}_{2p})) = 2$ .
- 3)  $\text{Gr}(G_N(\mathbb{Z}_{2p})) = 3$ .
- 4)  $\{p\}$  est le plus petit ensemble dominant qui se caractérise par son unicité pour  $G_N(\mathbb{Z}_{2p})$ , c'est-à-dire le nombre de domination du graphe  $G_N(\mathbb{Z}_{2p})$  est 1.

Ensuite, nous discutons du graphe nil clean de division de  $\mathbb{Z}_{3p}$ .

**Lemme 2.3.2** Dans  $G_N(\mathbb{Z}_{3p})$ ; où  $p \equiv 2 \pmod{3}$ , Alors on a les assertions suivantes :

- 1)  $\text{deg}(3k) = 5$  si  $3k \notin \{p+1, 2p-1\}$ , pour  $1 \leq k \leq p-1$ .
- 2)  $\text{deg}(p+1) = \text{deg}(2p-1) = 4$ .

**Preuve** Nous avons  $NC(\mathbb{Z}_{3p}) = \{0, 1, p+1, 2p\}$ . Observez que  $3k.x \equiv 1 \pmod{3p}$  et  $3k.x \equiv 2p \pmod{3p}$  n'a pas de solution, car  $\text{pgcd}(3k, 3p) = 3$  ne divise pas 1 et  $2p$ . La congruence  $3k.x \equiv 0 \pmod{3p}$  a trois solutions  $\{0, p, 2p\}$  dans  $\mathbb{Z}_{3p}$ . Aussi  $3k.x \equiv p+1 \pmod{3p}$  a trois solutions distinctes dans  $\mathbb{Z}_{3p}$ , comme  $\text{pgcd}(3k, 3p) = 3$  divise  $p+1$ .

- 1) Comme  $x_2 \equiv p+1 \pmod{3p}$ , a deux solutions  $p+1$  et  $2p-1$ , donc si  $3k \notin \{p+1, 2p-1\}$ , alors  $\text{deg}(3k) = 6 - 1 = 5$ , comme  $0 \notin V(G_N(\mathbb{Z}_{3p}))$ .
- 2) Si  $3k \in \{p+1, 2p-1\}$ , alors  $\text{deg}(3k) = 6 - 2$ , comme  $0 \notin V(G_N(\mathbb{Z}_{3p}))$  et nous considérons n'importe quel cycle.  $\square$

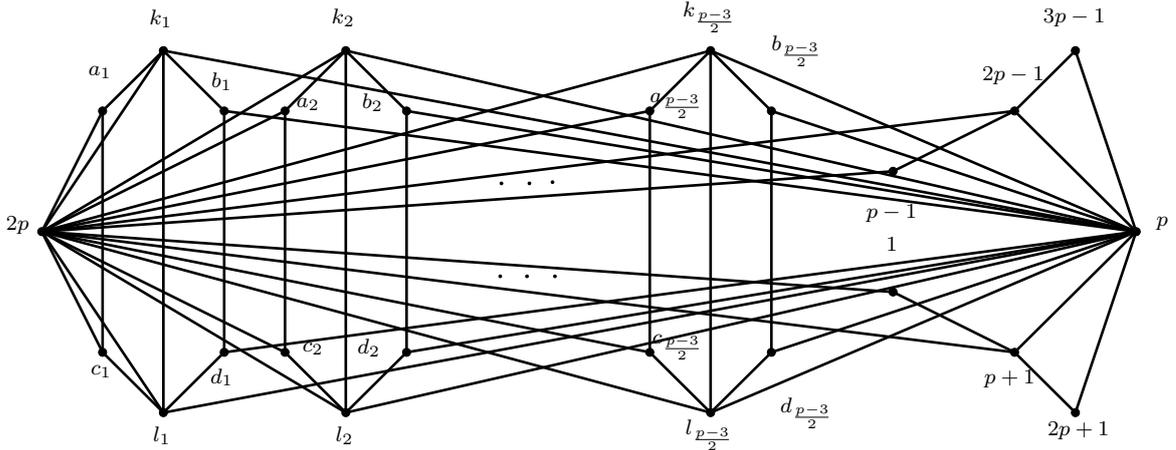
**Lemme 2.3.3** Dans  $G_N(\mathbb{Z}_{3p})$ , où  $p \equiv 2(\text{mod } 3)$  Alors on a les assertions suivantes :

- 1)  $\text{deg}(p) = \text{deg}(2p) = 2p - 2$ .
- 2) Pour  $x \in \{1, p - 1, 3p - 1, 2p + 1\}$ ,  $\text{deg}(x) = 2$ .
- 3) Pour  $x \in \mathbb{Z}_{3p} \setminus L$ ,  $\text{deg}(x) = 3$ , où  $L = \{3k : 1 \leq k \leq p - 1\} \cup \{1, p - 1, 2p + 1, 3p - 1, p, 2p\}$ .

**Preuve** On a  $NC(\mathbb{Z}_{3p}) = \{0, 1, p + 1, 2p\}$ .

- 1) Clairement,  $px \equiv 1(\text{mod } 3p)$  et  $px \equiv p + 1(\text{mod } 3p)$  n'ont pas de solution comme  $\text{pgcd}(3p, p)$  ne divise pas 1 et  $p + 1$ . Aussi  $px \equiv 0(\text{mod } 3p)$  a  $p$  solutions incongrues  $\{3k : 0 \leq k \leq p - 1\}$  et  $px \equiv 2p(\text{mod } 3p)$  a  $p$  solutions incongrues  $\{3k + 2 : 0 \leq k \leq p - 1\}$ . Puisque  $0 \notin V(G_N(\mathbb{Z}_{3p}))$  et  $p$  est de la forme  $3i + 2$ , pour certains  $0 \leq i \leq p - 1$ , d'où  $\text{deg}(p) = 2p - 2$ . Maintenant  $2p.x \equiv 0(\text{mod } 3p)$  a  $p$  solutions  $\{3k : 0 \leq k \leq p - 1\}$  et  $2p.x \equiv 2p(\text{mod } 3p)$  a  $p$  solutions incongrues  $\{3k + 1 : 0 \leq k \leq p - 1\}$ . Mais  $2p.x \equiv 1(\text{mod } 3p)$  et  $2p.x \equiv p + 1(\text{mod } 3p)$  n'ont pas des solutions. D'où  $\text{deg}(2p) = 2p - 2$ , puisque  $2p$  est de la forme  $3i + 1$ , pour certains  $1 \leq i \leq p - 1$ .
- 2) Puisque  $x \equiv a(\text{mod } 3p)$ , n'a qu'une seule solution  $a$ , d'où  $\text{deg}(1) = 2$ . Aussi  $(3p - 1).x \equiv c(\text{mod } 3p)$  n'a qu'une seule solution  $(3p - 1)a$ , donc  $\text{deg}(3p - 1) = 2$ , comme  $0 \notin V(G_N(\mathbb{Z}_{3p}))$  et  $3p - 1 \in U(\mathbb{Z}_{3p})$ . Équation  $(p - 1).x \equiv 1(\text{mod } 3p)$  et  $(2p + 1).x \equiv c(\text{mod } 3p)$  ont des solutions uniques, où  $c \in \{0, 1, 2p, p + 1\}$ . Puisque  $p - 1, 2p + 1 \in U(\mathbb{Z}_{3p})$ , donc  $\text{deg}(p - 1) = \text{deg}(2p + 1) = 2$ .
- 3) Soit  $a \in \mathbb{Z}_{3p} \setminus L$ . Comme  $\text{pgcd}(a, 3p) = 1$ , donc  $ax \equiv 0(\text{mod } 3p)$  a une solution unique  $x = 0$ . Aussi  $ax \equiv c(\text{mod } 3p)$ , où  $c \in \{1, 2p, p + 1\}$  a une solution unique. D'où  $\text{deg}(a) = 3$ .  $\square$

D'après le lemme 2.3.4 et le lemme 2.3.5, pour tout nombre premier  $p > 3$  avec  $p \equiv 2(\text{mod } 3)$ , le graphe nil clean de division de  $\mathbb{Z}_{3p}$  est le suivant :



**Figure 4.** Graphe nil clean de division de  $\mathbb{Z}_{3p}$ , où  $p \equiv 2(\text{mod } 3)$

Dans la figure 3,  $\{l_i, k_i\} \subseteq \{3k : 1 \leq k \leq p - 1\}$ ,  $a_i c_i \equiv 1(\text{mod } 3p)$ ,  $b_i d_i \equiv 1(\text{mod } 3p)$  et  $a_i k_i \equiv c_i l_i \equiv b_i k_i \equiv d_i l_i \equiv p + 1(\text{mod } 3p)$ , pour  $1 \leq i \leq \frac{p-3}{2}$ . Aussi  $a_i \equiv c_i \equiv 1(\text{mod } 3)$  et  $b_i \equiv d_i \equiv 2(\text{mod } 3)$ , pour  $1 \leq i \leq \frac{p-3}{2}$

**Théorème 2.3.2** *Pour tout nombre premier  $p$ , où  $p \equiv 2(\text{mod } 3)$ , Alors on a les assertions suivantes :*

- 1)  $Gr(G_N(\mathbb{Z}_{3p})) = 3$ .
- 2)  $\omega G_N(\mathbb{Z}_{3p}) = 3$ .
- 3)  $\text{diam}(G_N(\mathbb{Z}_{3p})) = 3$ .
- 4)  $\{p, 2p\}$  est le plus petit et l'unique ensemble dominant pour  $G_N(\mathbb{Z}_{3p})$ , c'est-à-dire le nombre dominant du graphe est 2.

**Preuve** Clairement  $NC(\mathbb{Z}_{3p}) = \{0, 1, p+1, 2p\}$ .

- 1) Puisque  $p - (p+1) - (2p+1) - p$  est un cycle de  $G_N(\mathbb{Z}_{3p})$ , donc  $Gr(G_N(\mathbb{Z}_{3p})) = 3$ .
- 2) Si possible, soit  $\omega((G_N(\mathbb{Z}_{3p}))) = 4$ . Alors il existe  $A = \{z_i : 1 \leq i \leq 4\} \subset V(G_N(\mathbb{Z}_{3p}))$  tel que  $A$  forme un sous-graphe complet de  $G_N(\mathbb{Z}_{3p})$ . Si  $x \in \mathbb{Z}_{3p} \setminus \{p, 2p, 3k : 1 \leq k \leq p-1\}$ , alors  $\text{deg}(x) \leq 3$ , sinon  $x$  est adjacent à  $p$  ou à  $2p$ ,  $x-1$  et  $3i$ , pour un certain  $1 \leq i \leq p-1$ . Mais  $x-1$  est également adjacent à  $3j$ , pour certains  $1 \leq j \leq p-1$  tel que  $i \neq j$ . Donc  $A \subseteq \{p, 2p, 3k : 1 \leq k \leq p-1\}$ . Supposons que  $z_1 = 3k$ , pour un certains  $1 \leq k \leq p-1$ . D'après la figure 3,  $A_{z_1} \subseteq \{p, 2p, 3i+1, 3j+2, 3s\}$ , où  $1 \leq i, j, s \leq p-1$ , également  $3s \notin A_{3i+1}$ ,  $3s \notin A_{3j+2}$ ,  $3i+1 \notin A_{3j+2}$ ,  $p \notin A_{2p}$ ,  $2p \notin A_{3j+2}$  et  $p \notin N_{3i+1}$ . Donc  $z_i \notin \{3k : 1 \leq k \leq p-1\}$ , contradiction. D'où  $\omega((G_N(\mathbb{Z}_{3p}))) = 3$ , comme  $\{p, 2p, 3p-1\}$  forme un sous-graphe complet de  $G_N(\mathbb{Z}_{3p})$ .
- 3) D'après la figure 3; 1 et 2 sont reliés par le chemin  $1 - (p+1) - p - 2$ , donc par le théorème 2.2.6,  $\text{diam}(G_N(\mathbb{Z}_{3p})) = 3$ .
- 4) Puisque chaque élément de  $G_N(\mathbb{Z}_{3p}) \setminus \{p, 2p\}$  est adjacent à  $p$  ou à  $2p$ . D'où la preuve découle de la figure 3.  $\square$

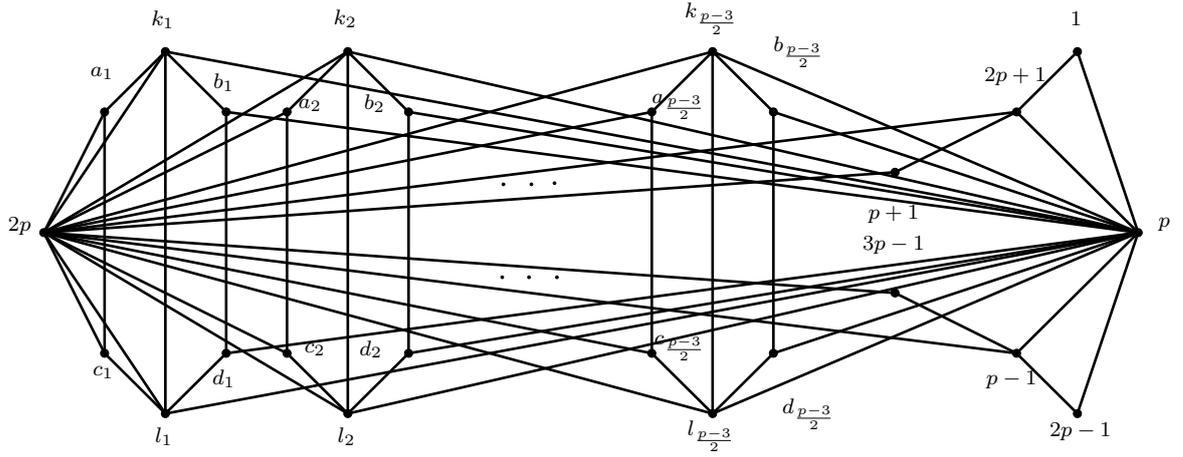
**Lemme 2.3.4** *Dans  $G_N(\mathbb{Z}_{3p})$ , où  $p \equiv 1(\text{mod } 3)$ , Alors on a les assertions suivantes :*

- 1)  $\text{deg}(3k) = 5$  si  $3k \notin \{p-1, 2p+1\}$ , pour  $1 \leq k \leq p-1$ .
- 2)  $\text{deg}(p-1) = \text{deg}(2p+1) = 4$ .

**Lemme 2.3.5** *Dans  $\mathbb{Z}_{3p}$ , où  $p \equiv 1(\text{mod } 3)$ , alors on a les assertions suivantes :*

- 1)  $\text{deg}(p) = \text{deg}(2p) = 2p-2$ .
- 2) Pour  $x \in \{1, p+1, 3p-1, 2p-1\}$ ,  $\text{deg}(x) = 2$ .
- 3) Pour  $x \in \mathbb{Z}_{3p} \setminus L$ ,  $\text{deg}(x) = 3$ , où  $L = \{3k : 1 \leq k \leq p-1\} \cup \{1, p, 2p, p+1, 2p-1, 3p+1\}$

D'après le lemme 2.3.4 et le lemme 2.3.5, le graphe nil clean de division de  $\mathbb{Z}_{3p}$  où  $p \equiv 1(\text{mod } 3)$  est le suivant :



**Figure 5.** Graphe nil clean de division de  $\mathbb{Z}_{3p}$ , où  $p \equiv 1 \pmod{3}$

Dans la figure 3,  $\{l_i, k_i\} \subseteq \{3k : 1 \leq k \leq p-1\}$ ,  $a_i c_i \equiv 1 \pmod{3p}$ ,  $b_i d_i \equiv 1 \pmod{3p}$  et  $a_i k_i \equiv c_i l_i \equiv b_i k_i \equiv d_i l_i \equiv 2p+1 \pmod{3p}$ , pour  $1 \leq i \leq \frac{p-3}{2}$ . Aussi  $a_i \equiv c_i \equiv 2 \pmod{3}$  et  $b_i \equiv d_i \equiv 1 \pmod{3}$ , pour  $1 \leq i \leq \frac{p-3}{2}$ . Par conséquent, nous obtenons le théorème suivant :

**Théorème 2.3.3** Si  $p \equiv 1 \pmod{3}$  alors on a les assertions suivantes :

- 1)  $Gr(G_N(\mathbb{Z}_{3p})) = 3$ .
- 2)  $\omega(G_N(\mathbb{Z}_{3p})) = 3$ .
- 3)  $diam(G_N(\mathbb{Z}_{3p})) = 3$ .
- 4)  $\{p, 2p\}$  est le plus petit et l'unique ensemble dominant pour  $G_N(\mathbb{Z}_{3p})$ , c'est-à-dire le nombre domination du graphe  $G_N(\mathbb{Z}_{3p})$  est 2.

**Preuve** Puisque la figure 3 et la figure 5 sont similaires, la preuve est donc similaire à la preuve de théorème 2.3.6.  $\square$

---

# Graphe d'idempotents d'un anneau

---

## 3.1 Introduction

L'étude des graphes associés aux structures algébriques est très importante. De nombreux articles fondamentaux consacrés aux graphes affectés à un anneau ont apparu récemment. Cvetko-Vah et Dolzan ont attribué un graphe  $G(R)$ , pour les éléments idempotents d'un anneau. Les sommets de  $G(R)$  sont des éléments idempotents non triviaux ( $\neq 0, 1$ ) et deux idempotents  $e$  et  $f$  sont adjacents si et seulement si :  $(ef = fe = 0)$  et  $(eRf \neq 0$  ou  $fRe \neq 0)$ . Ils ont étudié l'indécomposition des anneaux sur la base de la connexité de ce graphe. Ils ont également déterminé le diamètre de  $G(R)$ , où  $R$  est un anneau artinien simple. Si les idempotents de  $R$  sont centraux, alors la seconde condition dans la définition implique que  $G(R)$  n'a pas d'arêtes. Akbari et al. introduit le graphe d'idempotents  $I(R)$  pour un anneau  $R$ . Les sommets de  $I(R)$  sont des éléments idempotents non triviaux ( $\neq 0, 1$ ) et deux idempotents  $e$  et  $f$  sont adjacents si et seulement si  $e$  et  $f$  sont orthogonaux. Dans ce chapitre, nous supposons que  $V(I(R))$  est un ensemble non vide. En utilisant ce graphe, nous étudions le rôle des éléments idempotents dans la structure des anneaux. Il présente également plusieurs résultats sur certains paramètres de la théorie des graphes de ce graphe tels que la connexité, le diamètre, le nombre clique et le nombre chromatique. Remarquez que si  $e$  et  $f$  sont deux idempotents orthogonaux, alors  $e + f$  est un idempotent de  $R$ . Par conséquent, la condition introduite pour l'adjacence est une propriété précieuse en théorie des anneaux. Cette définition montre que le graphe d'idempotents d'un anneau est un sous-graphe du graphe zéro diviseur et du graphe de commutation d'un anneau. Aussi  $G(R)$  est un sous-graphe de  $I(R)$ . Les auteurs ont prouvé que le diamètre de  $G(M_n(F))$  est égal à 5, où  $F$  est un corps pour  $n \geq 3$ . Aussi on montre que le graphe d'idempotents de chaque anneau réduit est connexe et si  $n \geq 3$  et  $D$  est un anneau division, alors  $I(M_n(D))$  est connexe et de plus le diamètre de  $I(M_n(D))$  est au plus 5. Dans ce chapitre, nous définissons le graphe de sommation directe d'un  $R$ -module et l'utiliser pour présenter une preuve plus courte de la connexité du  $I(M_n(D))$  et de déterminer précisément le diamètre du  $I(M_n(D))$ . Nous montrons que pour un anneau de division  $D$ , le diamètre de  $I(M_3(D))$  est égal à 5 et celui de  $I(M_n(D))$  est égal à 4, pour  $n \geq 4$ . Notez que les deux graphes  $G(M_n(D))$  et  $I(M_n(D))$  coïncident. De plus, dans ce chapitre, la régularité, le nombre clique et le nombre chromatique du

graphe d'idempotents ont été étudiés. Nous montrons que les idempotents primitifs sont dans un 1 – 1 correspondance avec les sommets de degré un. Tout d'abord, nous voudrions rappeler quelques notions et notations liés à ce chapitre. Tout le long de ce chapitre,  $R$  désigne un anneau associatif avec unité. Si  $e^2 = e \in R$ , on dit que  $e$  est un idempotent. Une paire d'idempotents  $e$  et  $f$  sont dit orthogonaux si  $ef = fe = 0$ . Un idempotent  $e$  est primitif si et seulement si ce n'est pas la somme de deux idempotents orthogonaux non triviaux. Si un idempotent commute avec chaque élément de  $R$ , on dit que  $e$  est un idempotent centré. Notons que si  $e \in R$  est un idempotent centré, on a  $R \cong Re \times R(1 - e)$ . Nous notons l'ensemble de tous les idempotents de  $R$  par  $E(R)$ . Un anneau  $R$  est dit local, si  $R$  a un unique idéal maximal à gauche. Un anneau sans éléments nilpotents non nul est appelé un anneau réduit.  $M_n(R)$  désigne l'ensemble des matrices  $n \times n$ ; et  $J(R)$  désigne le radical de Jacobson du  $R$ . Pour un espace vectoriel  $V$ , on note dimension de  $V$  par  $\dim(V)$ . Soit  $G$  un graphe, on note l'ensemble des sommets et l'ensemble d'arêtes de  $G$  respectivement par  $V(G)$  et  $E(G)$ . Le degré de  $v \in V(G)$  est noté  $d(v)$ . Pour deux sommets  $x$  et  $y$  de  $G$ , soit  $d(x, y)$  la longueur du plus court chemin de  $x$  à  $y$  et s'il n'y a pas un tel chemin, nous définissons  $d(x, y) = \infty$ . Le diamètre de  $G$  est  $\text{diam}(G) = \sup\{d(x, y) \mid x \text{ et } y \text{ sont deux sommets de } G\}$ . Le nombre clique de  $G$ , noté  $\omega(G)$ , est  $\sup\{|V(H)| \mid H \text{ est un sous-graphe complet de } G\}$ . Une  $k$ -coloration de  $G$  est une affectation de  $k$  couleurs  $1, \dots, k$ , aux sommets de  $G$ . La coloration est dite propre si deux sommets adjacents n'ont pas la même couleur. Le graphe  $G$  est  $k$ -colorable si  $G$  a une  $k$ -coloration propre. Le nombre chromatique de  $G$ ,  $\chi(G)$ , est le minimum des entiers  $k$  pour lesquels  $G$  est  $k$ -colorable.

## 3.2 Connexité et le diamètre du graphe d'idempotents

**Définition 3.2.1** *Un anneau  $(D, +, \cdot)$  est dit anneau de division si  $(D^*, \cdot)$  est un groupe.*

**Définition 3.2.2** *Le graphe d'idempotents d'un anneau  $R$ , noté  $I(R)$ , est un graphe dont les sommets sont tous les idempotents non triviaux de  $R$  et deux sommets  $x$  et  $y$  sont adjacents si et seulement si  $xy = yx = 0$ .*

**Définition 3.2.3** *Soit  $M$  un  $R$ -module. Nous définissons le graphe de sommation directe de  $M$ , noté  $DS(M)$  comme suit : Les sommets de  $DS(M)$  sont les paires ordonnées  $(M_1, M_2)$  telles que  $M_1$  et  $M_2$  sont des sous-modules non triviaux de  $M$  et  $M_1 \oplus M_2 = M$ . Deux sommets  $(M_1, M_2)$  et  $(N_1, N_2)$  sont adjacents si et seulement si  $N_2 \subseteq M_1$  et  $M_2 \subseteq N_1$ .*

**Remarque 3.2.1** *On considère l'application suivante :*

$$\begin{aligned} \phi : V(I(\text{End}_R(M))) &\longrightarrow V(DS(M)) \\ f &\longmapsto \phi(\text{Ker}(f), \text{Img}(f)) \end{aligned}$$

$$1) \ 1)I(\text{End}_R(M)) \stackrel{\phi}{\cong} DS(M)$$

- 2) 2) Si  $V$  est un  $D$ -espace vectoriel où  $D$  est un anneau de division. Alors  $\text{End}_D(V) \cong M_n(D)$  et par conséquent  $I(M_n(D)) \cong DS(V)$

**Théorème 3.2.1** Soient  $V$  un espace vectoriel de dimension finie sur un anneau de division  $D$ ,  $v_1 = (M_1, M_2)$  et  $v_2 = (N_1, N_2)$  sont deux sommets distincts de  $DS(V)$ . Alors, nous avons les assertions suivantes :

- 1)  $d(v_1, v_2) = 1$  si et seulement si  $N_2 \subseteq M_1$  et  $M_2 \subseteq N_1$ .
- 2) Si  $N_1 \cap M_1 \not\subseteq M_2 + N_2$ , alors  $d(v_1, v_2) \leq 2$ .
- 3) Si  $d(v_1, v_2) = 2$ , alors  $N_1 \cap M_1 \not\subseteq M_2 + N_2$ .
- 4) Si  $\dim(M_1) = 1$ , alors le seul sommet adjacent à  $v_1$  est  $(M_2, M_1)$ .
- 5) Soit  $\dim(V) = 3$  et  $\{x, y, z\}$  une base de  $V$ . Fixer  $M_1 = \langle x + y, z \rangle$ ,  $M_2 = \langle x \rangle$ ,  $N_1 = \langle x + y, z - x \rangle$  et  $N_2 = \langle y \rangle$ . Alors,  $d(v_1, v_2) \geq 3$ .
- 6) Si  $\dim(V) = 3$  et  $\dim(M_1) = \dim(N_1) = 2$ , alors  $d(v_1, v_2) \leq 3$ .
- 7) Si  $\dim(N_1) = 1$  et  $N_2 \cap M_1 = 0$ , alors  $d(v_1, v_2) \geq 4$ .
- 8) Si  $\dim(M_2) = \dim(N_2) = 1$  et  $\dim(V) \geq 4$ , alors  $d(v_1, v_2) \geq 2$ .
- 9) Si  $\dim(V) = 3$ , alors  $\text{diam}(DS(V)) = 5$ .
- 10) Si  $\dim(V) \geq 4$ , alors  $\text{diam}(DS(V)) = 4$ .

### Preuve

- 1) Trivial.
- 2) Soit  $a \in N_1 \cap M_1 \setminus M_2 + N_2$ ,  $L_2 = \langle a \rangle$  et  $L_1$  un supplémentaire de  $L_2$  tels que  $M_2 + N_2 \subseteq L_1$ . Alors,  $v_3 = (L_1, L_2)$  est adjacent aux deux sommets  $v_1$  et  $v_2$ .
- 3) Soit  $v_3 = (L_1, L_2)$  un sommet adjacent aux deux sommets  $v_1, v_2$ . Puis,  $L_2 \subseteq M_1, M_2 \subseteq L_1, N_2 \subseteq L_1, L_2 \subseteq N_1$ . Donc  $L_2 \subseteq N_1 \cap M_1$  et  $M_2 + N_2 \subseteq L_1$ . Parce que  $L_1 \cap L_2 = 0$ , cela implique que  $N_1 \cap M_1 \not\subseteq M_2 + N_2$ .
- 4) Il est clair que  $M_1$  et  $M_2$  sont respectivement des sous-espaces minimaux et maximaux de  $V$ . Supposons que  $(L_1, L_2)$  est adjacent à  $(M_1, M_2)$ . Puis  $M_2 \subseteq L_1$  et  $L_2 \subseteq M_1$ . Par minimalité et maximalité de  $M_1$  et  $M_2$ , on a  $M_2 = L_1$  et  $M_1 = L_2$ .
- 5) Il est facile de voir que  $d(v_1, v_2) = 1$ . Dans ce cas,  $N_1 \cap M_1 \subseteq M_2 + N_2$ , donc  $d(v_1, v_2) = 2$  ce qui implique que  $d(v_1, v_2) \geq 3$ .
- 6) Supposons que  $d(v_1, v_2) \geq 3$ . Alors,  $N_1 \cap M_1 \subseteq M_2 + N_2$  et ainsi,  $\dim(N_1 \cap M_1) = 1$  et  $\dim(M_2 + N_2) = 2$ . Soit  $\{x, y\}$  une base de  $M_1$  et  $\{x, z\}$  une base de  $N_1$ . De plus, soit  $M_2 = \langle ax + by + cz \rangle$  et  $N_2 = \langle a'x + b'y + c'z \rangle$ . Puisque  $M_1 \cap M_2 = 0$  et  $N_1 \cap N_2 = 0$ , on a  $c = 0$  et  $b' = 0$ . Aussi,  $x \in M_2 + N_2 = \langle ax + by + cz, a'x + b'y + c'z \rangle$  ce qui implique  $b = 0$  et  $c' = 0$ . Supposons que  $L_1 = \langle x, by + cz \rangle$ ,  $L_2 = \langle ax + by \rangle$ ,  $K_1 = \langle ax + by, a'x + b'y + c'z \rangle$ ,  $K_2 = \langle x \rangle$ . Ensuite,  $v_1, v_3, v_4, v_2$  est un chemin de longueur trois, où  $v_3 = (L_1, L_2)$ ,  $v_4 = (K_1, K_2)$ .
- 7) Il est clair que  $\dim(M_1) = 1$ . Ainsi, le seul sommet adjacent à  $v_1$  est  $v_3 = (M_2, M_1)$  et de  $v_2$  est  $v_4 = (N_2, N_1)$ , par (4). On peut voir que  $d(v_3, v_4) \geq 2$ .

- 8) Dans ce cas, nous montrons que  $N_1 \cap M_1 \not\subseteq M_2 + N_2$ . Si  $N_1 \cap M_1 \subseteq M_2 + N_2$ , alors  $2 \leq \dim(M_1 \cap N_1) \leq \dim(M_2 + N_2) \leq 2$  ce qui implique que  $\dim(V) \leq 4$ . Donc,  $\dim(V) = 4$  et  $M_2 \subseteq M_2 + N_2 = N_1 \cap M_1 \subseteq M_1$ , contradiction. Ainsi,  $N_1 \cap M_1 \not\subseteq M_2 + N_2$  et  $d(v_1, v_2) \leq 2$ .
- 9) Soit  $S_1 = \langle x + y, z \rangle$ ,  $S_2 = \langle x \rangle$ ,  $T_1 = \langle x + y, z - x \rangle$  et  $T_2 = \langle y \rangle$  où  $\{x, y, z\}$  est une base de  $V$ . Ainsi, le seul adjacent de  $u_3 = (S_2, S_1)$  est  $u_1 = (S_1, S_2)$  et de  $u_4 = (T_2, T_1)$  est  $u_2 = (T_1, T_2)$ , par (4). Aussi, (5) et (6),  $d(u_1, u_2) = 3$ . Ainsi,  $d(u_3, u_4) = 5$ . Soit  $(L_1, L_2)$  un sommet de  $DS(V)$  et  $K_2 = \langle a \rangle$ , où  $0 \neq a \in L_1$ . Clairement, il existe un supplémentaire  $K_1$  de  $K_2$  qui contient  $L_2$ . Ainsi, chaque sommet de  $DS(V)$  est adjacent à un sommet dont la deuxième composante est de dimension 1 et ainsi, par (6), on obtient le résultat désiré.
- 10) Soit  $S_1$  et  $T_1$  deux supplémentaires distincts de  $S_2 = T_2 = \langle x \rangle$ , où  $x$  est un élément non nul de  $V$ . Alors,  $d((S_2, S_1), (T_2, T_1)) = 4$ , par (4), (7) et (8). par le même argument de la partie (9), chaque sommet de  $DS(V)$  est adjacent à un sommet dont la deuxième composante est de dimension 1 et ainsi, par (8) nous avons le résultat désiré.  $\square$

**Corollaire 3.2.1** *Soit  $D$  un anneau de division. Alors,  $\text{diam}(I(M_3(D))) = 5$  et  $\text{diam}(I(M_n(D))) = 4$ , pour  $n \geq 4$*

**Remarque 3.2.2** 1) *Dans le théorème suivant, nous fournissons des conditions suffisantes sur un anneau  $R$  sous lequel  $I(R)$  est connexe. Dans [5], les auteurs montrent que le graphe d'idempotents d'un anneau avec un idempotent centrée non trivial est connexe.*

- 2) *Si  $e$  est un idempotent, alors  $\text{Ann}_l(e) = R(1 - e)$  et  $\text{Ann}_r(e) = (1 - e)R$ . Une inclusion est claire. Inversement, si  $x \in \text{Ann}_l(e)$ , alors  $x = x - xe = x(1 - e) \in R(1 - e)$ .*

**Lemme 3.2.1** *Soit  $e$  un idempotent dans un anneau  $R$ . Alors, les assertions suivantes sont équivalentes :*

- 1)  $\text{Ann}_l(e) = \text{Ann}_r(e)$ .
- 2)  $R(1 - e) = (1 - e)R$ .
- 3)  $e$  est un idempotent centrée.
- 4)  $Re = eR$ .

**Preuve**

(1)  $\Rightarrow$  (2) Trivial.

(2)  $\Rightarrow$  (3) Soit  $x \in R$ . Alors, il y a  $y, z \in R$  tel que  $x(1 - e) = (1 - e)y$  et  $(1 - e)x = z(1 - e)$ . Donc  $ex - exe = ex(1 - e) = e(1 - e)y = 0$  et  $xe - exe = (1 - e)xe = z(1 - e)e = 0$  ce qui implique que  $xe = ex = exe$ .

(3)  $\Rightarrow$  (4) Trivial.

(4)  $\Rightarrow$  (1) Puisque  $Re = eR$ , pour tout  $x \in R$  il existe  $y \in R$  tel que  $xe = ey$  et donc  $xe = exe$ . De même,  $exe = ex$  et  $e$  est un idempotent.  $\square$

### 3.3 Quelques propriétés du graphe d'idempotent d'un anneau

**Théorème 3.3.1** *Soit  $R$  un anneau. Si  $R$  satisfait l'une des conditions suivantes, alors chaque idempotent de  $R$  est centrée et donc  $I(R)$  est connexe.*

- 1)  $R$  est un anneau duo ( c'est-à-dire  $Ra = aR$  pour chaque élément  $a \in R$  ).
- 2)  $R$  est réversible ( c'est-à-dire que  $xy = 0$  implique que  $yx = 0$  ).
- 3)  $R$  est un anneau réduit.

**Preuve**

- 1) Dans ce cas,  $Re = eR$ . Donc par le lemme 3.2.8, nous avons conclut.
- 2) Puisque  $Ann_l(e) = Ann_r(e)$ , la démonstration est complète par le lemme 3.2.8.
- 3) Si  $R$  est réduit, alors  $xy = 0$  implique que  $(yx)^2 = yxyx = 0$ . Par conséquent,  $yx = 0$  et par (2) le résultat désiré.  $\square$

Après, les graphes d'idempotents avec un sommet de degré un sont étudiés. La proposition suivante montre que pour un idempotent primitif  $e$ ,  $Re$  est un élément minimal de l'ensemble  $\{Ra : a^2 = a\}$ .

**Proposition 3.3.1** *[[6], Proposition 1.1.21]. Un idempotent  $e$  d'un anneau  $R$ , est primitive si et seulement si il n'y a pas d'idempotent  $e_1 \neq 0$  tel que  $Re_1 \subseteq Re$ . D'autre part, si  $Re_1 \subseteq Re$ , alors il existe un idempotent  $e'_1$  tel que  $Re_1 = Re'_1$  et  $e'_1(e - e_1) = (e - e'_1)e'_1 = 0$ .*

**Théorème 3.3.2** 1) *Soit  $R$  un anneau. Si  $Re$  est un élément maximal de l'ensemble  $\{Ra : a \in R, a^2 = a \neq 1\}$ , alors le degré de  $e$  est un. ( Argument similaire est vrai pour  $eR$  ).*

- 2) *Le degré de  $e$  est un si et seulement si  $1 - e$  est un idempotent primitif.*

**Preuve**

- 1) Soit  $f$  un idempotent tel que  $ef = fe = 0$ . Alors,  $e \in Ann_l(f) = R(1-f)$ . Par conséquent,  $Re \subseteq R(1-f)$ . Par maximalité de  $Re$ , nous avons  $Re = R(1-f)$ . Donc  $1 - f = te$  ce qui implique que  $e = e - fe = (1 - f)e = te^2 = te = 1 - f$ . Ainsi,  $f = 1 - e$ .
- 2) Supposons que le degré de  $e$  est égal à un. Si  $1 - e$  n'est pas primitif alors  $1 - e = e_1 + e_2$ , où  $e_1, e_2$  sont deux idempotents orthogonaux. Donc  $ee_1 = (1 - e_1 - e_2)e_1 = 0$ . De même,  $e_1e = ee_2 = e_2e = 0$  ce qui montre que le degré de  $e$  est plus grand que un, contradiction. Inversement, supposons que  $1 - e$  est primitif. Si  $f = 1 - e$  est un idempotent non nul tel que  $ef = fe = 0$ , alors  $1 - e = 1 - (e + f) + f$ . De plus,  $1 - (e + f)$  et  $f$  sont deux idempotents non triviaux orthogonaux, contradiction. Ainsi, le degré de  $e$  est un.  $\square$

**Définition 3.3.1** *Un idéal  $I$  d'un anneau  $R$  est principal si  $\exists a \in R : I = \langle a \rangle$ .*

**Corollaire 3.3.1** *Soit  $R$  un anneau satisfaisant l'une des conditions suivantes. Alors,  $I(R)$  a un sommet de degré un.*

- 1) ACC sur les idéaux principaux à gauche ( droite ) ;
- 2) ACC sur les annulateurs à gauche ( droite ) ;
- 3) DCC sur les idéaux principaux à gauche ( droite ) ;
- 4) DCC sur les annulateurs de gauche ( droite ) .

**Corollaire 3.3.2** *Pour un anneau  $R$ ,  $I(R)$  est 1-régulier si et seulement si tout idempotent de  $R$  est primitif.*

### 3.4 Régularité des graphiques idempotents

L'Akbari et al. dans [5] montrent que chaque graphe d'idempotents régulier est un graphe 1-régulier. Dans cette section, nous introduisons une condition nécessaire et suffisante sur certaines classes d'anneaux sous lesquelles les graphes d'idempotents sont 1-réguliers. Avant d'énoncer le théorème principal, nous avons besoin de quelques lemmes.

**Lemme 3.4.1** *Soit  $R$  un anneau. Si  $E(R) \setminus \{1\} \subseteq G_1 \cup G_2$  où  $G_1, G_2$  sont des sous-groupes additifs de  $R$  et  $G_1 \cup G_2$  ne contient pas 1, alors  $I(R)$  est 1-régulier.*

**Preuve** Soient  $e, f$  deux sommets adjacents. Alors,  $ef = fe = 0$  et donc  $e + f \in E(R)$ . Supposons que  $e + f = 1$ . Ainsi, deux des  $e, f, e + f$  sont contenus dans  $G_i$  ce qui implique que le troisième élément est contenu dans  $G_i$ , pour  $1 \leq i \leq 2$ . Par conséquent,  $1 - e, 1 - f, 1 - e - f$  et  $1 = 1 - e + 1 - f - (1 - e - f)$  appartiennent à  $G_j, j \neq i$ , contradiction. Donc  $e + f = 1$ .  $\square$

**Lemme 3.4.2** *Pour un anneau  $R$ ,  $I(R)$  est un graphe 1-régulier si et seulement si  $I(R)$  ne contient aucun triangle.*

**Preuve** Soit  $e, f$  deux sommets adjacents et  $g = 1 - e - f$ . Il est clair que  $eg = ge = fg = gf = 0$ . Donc si  $g \neq 0$ , alors  $\langle e, f, g \rangle_{I(R)}$  est un triangle, contradiction. Donc,  $g = 0$  et  $f = 1 - e$ .  $\square$

**Définition 3.4.1** *Soient  $R$  un anneau et  $M$  un  $R$ -module.*

- 1)  $M$  est dit simple si  $M \neq 0$  et si ne contient pas des sous modules propres.
- 2)  $M$  est dit semi-simple si  $M$  est produit fini des modules simples.
- 3) Un anneau  $R$  est dit semi-simple s'il est un module semi-simple.

**Définition 3.4.2** 1) *Un idéal  $A$  d'un anneau  $R$  est un idempotent à gauche si et seulement si  $A \subseteq J(R)$  et tout idempotent de  $R/A$  a la forme  $x + A$ , où  $x$  est un idempotent de  $R$ .*

- 2) *Un anneau  $R$  est semi-local si et seulement si  $R/J(R)$  est artinien semi-simple.*
- 3) *Un anneau semi-local  $R$  est semi-parfait si et seulement si  $J(R)$  est un idempotent à gauche.*

**Proposition 3.4.1** [[6], proposition 1.1.25]. Soit  $T$  un anneau,  $A \triangleleft T$  un idempotent à gauche et  $R = T/A$ . Ensuite, nous avons les assertions suivantes :

- 1) Si  $x_1 \in T$  est un idempotent et  $e \in R$  idempotent orthogonal à  $x_1 + A$ , alors  $e$  peut être élevé à un idempotent de  $T$  orthogonal à  $x_1$ .
- 2) Chaque ensemble dénombrable ( des paires ) d' idempotents orthogonaux de  $R$  peut être élevé à un ensemble d'idempotents orthogonaux de  $T$ .
- 3) Chaque ensemble de  $n \times n$  unités matricielles de  $R$  peut être élevé en un ensemble de  $n \times n$  unités matricielles de  $T$ .

**Proposition 3.4.2** [[6], proposition 2.7.21]. Si  $R$  est semi-parfait et  $R/J(R) \cong M_n(D)$ , alors on a  $R \cong M_n(T)$  pour un anneau local  $T$  tel que  $T/J(T) \cong D$ . (Les anneaux ayant cette propriété sont parfois appelés quasi-locaux )

**Lemme 3.4.3** Soit  $R$  un anneau et  $A \triangleleft R$  est un idéal idempotent à gauche. Puis,  $I(R)$  est 1-régulier si et seulement si  $I(R/A)$  est 1-régulier.

**Preuve** On montre que  $I(R)$  contient un triangle si et seulement si  $I(R/A)$  contient un triangle. Si  $I(R/A)$  contient un triangle, par (2) de la proposition 3.4.5 peut être élevé en un triangle en  $I(R)$ . Inversement, si  $e, f, g$  forment un triangle dans  $I(R)$ , alors  $\bar{e}, \bar{f}, \bar{g}$  forment un triangle dans  $I(R/A)$ .  $\square$

**Théorème 3.4.1** Soit  $R$  un anneau semi-parfait. Alors,  $I(R)$  est 1-régulier si et seulement si  $R \cong M_2(T)$  ou  $R/J(R) \cong D_1 \times D_2$ , où  $T$  est un anneau local,  $D_1$  et  $D_2$  sont des anneaux de division.

**Preuve** Tout d'abord, nous supposons que  $I(R)$  est 1-régulier. Notez que  $J(R)$  est un idempotent à gauche et donc  $I(R)$  est 1-régulier si et seulement si  $I(R/J(R))$  est 1-régulier, par lemme 3.4.7. Ainsi  $R/J(R)$  est un anneau semi-simple, par Wedderburn – Artin Théorème [[7], théorème 3.5],  $R/J(R) \cong M_{n_1}(D_1) \times \dots \times M_{n_k}(D_k)$ , où  $D_1, \dots, D_k$  sont des anneaux de division. Nous affirmons que  $k \leq 2$ . Parce que sinon,  $I(R/J(R))$  contient un triangle, contradiction. Maintenant, soit  $k = 1$ . Dans ce cas, si  $n_1 \geq 3$  alors  $I(R/J(R))$  contient un triangle et donc  $R/J(R) \cong D$  ou  $M_2(D)$ . Puisque  $R$  a un idempotent non trivial, on a  $R \cong M_2(T)$  pour un anneau local  $T$ , par la proposition 3.4.6. Si  $k = 2$  et  $n_1 \geq 2$  ou  $n_2 \geq 2$ , alors  $M_{n_1}(D_1) \times M_{n_2}(D_2)$  contient un triangle. Donc  $R/J(R) \cong D_1 \times D_2$  où  $D_1$  et  $D_2$  sont des anneaux de division. Inversement, supposons que  $R \cong M_2(T)$  ou  $R/J(R) \cong D_1 \times D_2$ , où  $T$  est un anneau local,  $D_1$  et  $D_2$  sont des anneaux de division. Si  $R \cong M_2(T)$ , alors  $R/J(R) \cong M_2(T/J(T)) = M_2(D)$ , où  $D$  est un anneau de division. Puisque tout idempotent de  $M_2(D)$  est primitif,  $M_2(D)$  est 1-régulier (tout idempotent de  $M_2(D)$  est conjugué à  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  ou  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  et ces idempotents sont primitifs). Maintenant, soit  $R/J(R) \cong D_1 \times D_2$ , dont le graphe d'idempotents est une arête et donc  $I(R)$  est 1-régulier.  $\square$

### 3.5 Clique maximal et nombre chromatique du graphe d'idempotent

Dans cette section, nous voulons déterminer le cardinal de la clique maximale et le nombre chromatique du graphe d'idempotents. Tout d'abord, nous commençons par la remarque suivante.

**Remarque 3.5.1** Soit  $e_1$  et  $e_2$  deux idempotents orthogonaux et  $e = e_1 + e_2$ . Clairement,  $e$  est un idempotent et  $Ann_l(e_1) \cap Ann_l(e_2) \subseteq Ann_l(e)$ . Maintenant, supposons que  $r \in Ann_l(e)$ , alors  $re_1 = re_2e_1 + re_1^2 = ree_1 = 0$  et de même  $re_2 = 0$ . Donc,  $Ann_l(e_1) \cap Ann_l(e_2) = Ann_l(e)$ . par argument similaire, nous avons  $Ann_r(e_1) \cap Ann_r(e_2) = Ann_r(e)$ .

**Théorème 3.5.1** Si  $I(R)$  ne contient pas de sommet de degré un, alors  $\omega(I(R)) = \infty$ .

**Preuve** Puisque  $I(R)$  n'a pas de sommet de degré un,  $R$  n'a pas d'idempotents primitives, par le théorème 3.3.3. Donc, par la remarque 3.5.1, chaque idempotent de  $R$  est somme d'un nombre arbitraire supérieure ou égal au nombre des paires d'idempotents orthogonaux.  $\square$

**Théorème 3.5.2** Soit  $R$  un anneau et  $\omega(I(R)) = n$ . Alors, il existe  $n$  idempotents primitifs deux à deux orthogonaux,  $e_1, \dots, e_n$ , tels que  $\sum_{i=1}^n e_i = 1$ .

**Preuve** Il existe  $n$  idempotents deux à deux orthogonaux  $e_1, \dots, e_n$ . montrons que  $\sum_{i=1}^n e_i = 1$ . On procède un raisonnement par l'absurde, supposons que  $\sum_{i=1}^n e_i = t \neq 1$ . Alors,  $1 - t$  est un idempotent qui appartient à  $Ann_l(e_i)$  et  $Ann_r(e_i)$ , pour  $1 \leq i \leq n$ . Puisque  $e_1 t = e_1 \neq 0$ ,  $1 - t$  est idempotent non trivial. Par conséquence,  $\langle e_1, \dots, e_n, 1 - t \rangle$  est une clique de  $I(R)$ , contradiction et donc,  $t = 1$ . Nous prouvons maintenant que chacun des  $e_i$  est primitive. En effet, supposons au contraire qu'il exist un idempotent non primitif,  $e_j$ , pour un certain  $j$ ,  $1 \leq j \leq n$ . Alors,  $e_j = e_{j_1} + e_{j_2}$ . Par application de la remarque remarque 3.5.1, on peut voir que  $\langle e_1, \dots, e_{j-1}, e_{j_1}, e_{j_2}, e_{j+1}, \dots, e_n \rangle$  est une clique de  $I(R)$ , contradiction.  $\square$

**Corollaire 3.5.1** Soit  $R$  un anneau et  $\omega(I(R)) = n$ . Alors,  $I(R)$  contient au moins un sommets de degré un.

**Corollaire 3.5.2** Soit  $R$  un anneau tel que  $\omega(I(R)) < \infty$ . Si tous les idempotents de  $R$  sont centraux, alors  $\chi(I(R)) = \omega(I(R))$ .

**Preuve** Supposons que  $\omega(I(R)) = n$ . Par le théorème 3.5.3, on a  $\sum_{i=1}^n e_i = 1$ , où  $e_1, \dots, e_n$  sont des idempotents centraux primitifs. Donc,  $R \cong Re_1 \times \dots \times Re_n$ . Puisque chaque  $e_i$  est primitif,  $Re_i$  n'a pas d'idempotent non trivial. Donc, chaque idempotent de  $R$  correspond à un  $(0, 1)$ -vecteur de longueur  $n$  et inversement. Maintenant, pour chaque idempotent non trivial  $e$ , colorions  $e$  par  $j$ , où  $j$  est le plus petit entier naturel tel que  $ee_j = 0$ . Il n'est pas difficile de voir que cette coloration est une  $k$ -coloration propre de  $I(R)$ . Par conséquent,  $\chi(I(R)) = n$ .  $\square$

---

# Quelque graphe des idéaux premiers d'un anneau commutative

---

## 4.1 Introduction

Récemment, l'étude des graphes associés aux structures algébriques est un domaine de recherche. En 1988, Istvan Beck a proposé l'étude des anneaux commutatifs en les représentant sous forme des graphes. Il a défini le graphe zéro diviseur d'un anneau ayant pour ensemble des sommets les éléments de l'anneau, et une arête entre deux sommets  $v$  et  $w$  si  $vw$  est égal à zéro. Ces graphes de zéro diviseur ont marqué le début d'une démarche d'étude des anneaux commutatifs avec des graphes. Le graphe zéro diviseur est largement étudié par de nombreux auteurs. De nombreuses autres classes des graphes associés à des structures algébriques sont également étudiées par des nombreux chercheurs. Beaucoup des propriétés algébriques sont étudiées en termes d'idéaux des anneaux, il est intéressant d'associer la structure du graphe à l'ensemble des idéaux et d'étudier les propriétés associées à la théorie des graphes. Sharma et Bhatwadekar ont proposé une nouvelle approche qui a construit un autre graphe pour l'anneau commutatif  $R$  connu sous le nom du graphe comaximal : les sommets sont toujours les éléments de l'anneau, et il y a une arête entre deux sommets  $x$  et  $y$  si  $xR + yR = R$ . Ye et Wu définissent les graphes comaximaux sur l'ensemble des idéaux qui ne sont pas contenus dans le radical de Jacobson de l'anneau, deux idéaux sont adjacents si et seulement si ils sont comaximaux. Dans ce chapitre, nous définissons le graphe de somme  $S$ -propre sur l'ensemble des idéaux premiers d'un anneau commutatif. Soit  $R$  un anneau commutatif avec identité. On note respectivement par  $Spec(R)$  et  $Max(R)$ , l'ensemble de tous les idéaux premiers et l'ensemble de tous les idéaux maximaux de  $R$ . Soit  $S$  un sous-ensemble non vide de  $Max(R)$ . On définit le graphe de somme  $S$ -propre sur l'ensemble des idéaux premiers de  $R$ , noté  $\Gamma_S(Spec(R), S)$ , comme le graphe dont l'ensemble des sommets est l'ensemble de tous les idéaux premiers de  $R$  et pour deux sommets distincts  $P$  et  $Q$ , il existe une arête de  $P$  à  $Q$ , noté  $P \sim Q$ , chaque fois que  $P + Q \subseteq M$ , pour un idéal maximal  $M$  dans  $S$ . Dans le cas où  $S = Max(R)$ , on note le graphe de somme  $S$ -propre  $\Gamma_S(Spec(R), S)$  par  $\Gamma(Spec(R), S)$  et nous l'appelons simplement le graphe de somme propre. Dans la section deux, nous étudions quelques propriétés de base du graphe  $\Gamma_S(Spec(R), S)$  telles que la connexité, circonférence et le nombre

clique. Dans la section trois, nous étudions le graphe de somme propre du produits d'anneaux et nous étudions la relation entre le graphe complémentaire du graphe de somme propre et le produit d'anneaux. Tout le long de ce chapitre, tous les anneaux sont supposées commutatifs avec une identité non nulle. De plus,  $V(I)$  est l'ensemble de tous les idéaux premiers de  $R$  contenant l'idéal  $I$ . Rappelons maintenant quelques définitions et notations sur les graphes. Soit  $G = (V, E)$  un graphe, où  $V$  est l'ensemble des sommets et  $E$  est l'ensemble des arêtes. Le graphe  $H = (V_0, E_0)$  est un sous-graphe de  $G$  si  $V_0 \subseteq V$  et  $E_0 \subseteq E$ . La distance entre deux sommets distincts  $v_1$  et  $v_2$  dans  $G$ , noté  $d(v_1, v_2)$ , est la longueur du plus court chemin reliant  $v_1$  et  $v_2$ , si un tel chemin existe ; sinon, on pose  $d(v_1, v_2) := \infty$ . Le diamètre d'un graphe  $G$  noté  $diam(G)$  est  $diam(G) = Sup\{d(v_1, v_2) : v_1 \text{ et } v_2 \text{ deux sommets distincts de } G\}$ . La circonférence de  $G$  est la longueur du plus court cycle dans  $G$ , noté  $Gr(G)$  ( $Gr(G) := \infty$  si  $G$  n'a pas des cycles). Aussi, pour deux sommets distincts  $v_1$  et  $v_2$  dans  $G$ , la notation  $v_1 \sim v_2$  signifie que  $v_1$  et  $v_2$  sont adjacents. Un graphe  $G$  est dit connexe s'il existe un chemin entre n'importe qu'ils deux sommets distincts, et il est complet s'il est connexe avec un diamètre qui égal un. Pour un sommet  $v$  dans  $G$ , le degré de  $v$  est le nombre des sommets adjacents à  $v$  et il est noté  $deg(v)$ . Un sommet  $v$  est un sommet isolé si  $deg(v) = 0$ . Une clique d'un graphe est un sous-graphe complet et le nombre clique est le nombre des sommets dans la plus grande clique de  $G$  est noté  $\omega(G)$ . Un ensemble indépendant de  $G$  est un sous-ensemble des sommets de  $G$  tel qu'il n'y a pas deux sommets dans le sous-ensemble qui sont adjacents dans  $G$ . Le nombre d'indépendance de  $G$ , noté  $\alpha(G)$ , est le cardinal de la plus grande ensemble indépendante de  $G$ . Un sous-ensemble  $S$  non vide des sommets de  $G$  est un ensemble dominant si chaque sommet de  $V \setminus S$  est adjacent à un sommet de  $S$ . Le nombre de domination noté  $\gamma(G)$  est défini comme étant le nombre des sommets dans le plus petit ensemble dominant dans  $G$ . Un plus petit ensemble dominant est appelé  $\gamma$ -ensemble. Pour un entier positif  $r$ , un graphe  $r$ -parti est celui dont l'ensemble des sommets peut être partitionné en  $r$  sous-ensembles deux à deux disjointes, de sorte qu'aucune arête n'ait les deux extrémités dans la même sous-ensemble.

## 4.2 Propriétés basic du graphe de somme propre

**Définition 4.2.1** *Un ensemble  $S$  est dit minimal par rapport à l'intersection et on le note par m.r.i, si pour tous  $m_1, m_2 \in S$ , l'intersection  $m_1 \cap m_2$  ne contiennent pas un idéal premier non trivial.*

**Exemple 4.2.1** *Soit  $R = \mathbb{Z}$ , alors  $Spec(R) = \{(0), (p), \text{ où } p \text{ est premier}\}$ . Soit  $S = Max(R)$ . Alors clairement  $S$  est minimal par rapport à l'intersection.*

**Exemple 4.2.2** *Soit  $R$  un domaine ,principal qui n'est pas un corps et soit  $S = Max(R)$ . Alors  $S$  est minimal par rapport à l'intersection.*

**Remarque 4.2.1** *Si  $R$  est un anneau commutatif d'identité non nulle, alors  $Max(R) \neq \emptyset$ . De plus, pour tout idéal propre  $I$  non nul, il existe un idéal maximal  $M$  tel que  $I \subseteq M$ .*

**Proposition 4.2.1** *Si le graphe de somme  $S$ -propre  $\Gamma_S(\text{Spec}(R), S)$  est connexe et  $S$  est m.r.i, alors  $R$  est un domaine ou un anneau local.*

**Preuve** Si  $(0)$  est un idéal premier alors clairement  $R$  est un domaine d'intégration. Si  $(0)$  n'est pas un idéal premier, on montre que  $R$  est un anneau local. Soit  $M_1, M_2$  deux idéaux maximaux quelconques de  $R$ , on montre que  $M_1 = M_2$ . Puisque le graphe  $\Gamma_S(\text{Spec}(R), S)$  est connexe, nous avons un chemin joignant  $M_1$  et  $M_2$ , disons  $M_1 \sim P_1 \sim \dots \sim P_n \sim M_2$ . Noter que tous les idéaux premiers  $P_i$  sont non triviaux, pour  $1 \leq i \leq n$ . Puisque  $M_1$  est adjacent à  $P_1$ , et  $P_1$  est adjacent à  $P_2$ , il existe un idéal  $M \in S$  tel que  $P_1 + P_2 \subseteq M$ . Clairement,  $M_1 \cap M$  contient l'idéal premier  $P_1$ . Puisque  $S$  est minimal par rapport à l'intersection, on a  $P_1 = (0)$  ou  $M_1 = M$ . Par les mêmes arguments, on a  $M_1 = M_2$ . Donc  $R$  est un anneau local.  $\square$

**Proposition 4.2.2** *Si  $R$  est un domaine d'intégration ou un anneau local, alors le graphe de somme propre  $\Gamma(\text{Spec}(R), S)$  est connexe.*

**Preuve** Si  $R$  est un domaine, alors  $(0)$  est un idéal premier. Donc pour tout deux idéaux non triviaux premiers  $P$  et  $Q$ , nous avons un chemin joignant  $P$  à  $Q$  est donné par  $P \sim (0) \sim Q$ . Si  $R$  est un anneau local avec un idéal maximal  $M$ , alors pour deux idéaux premiers  $P$  et  $Q$ ,  $P + Q \subseteq M$ . Donc  $P \sim Q$ . Donc le graphe de somme propre  $\Gamma(\text{Spec}(R), S)$  est connexe.  $\square$

**Corollaire 4.2.1** *Si  $R$  est un domaine d'intégration ou un anneau local, alors  $\text{diam}(\Gamma(\text{Spec}(R), S)) \leq 2$ .*

**Théorème 4.2.1** *Le graphe de somme propre  $\Gamma(\text{Spec}(R), S)$  est complet si et seulement si  $R$  est un anneau local.*

**Preuve** Supposons que  $R$  ne soit pas un anneau local. Soient  $M_1$  et  $M_2$  deux idéaux maximaux distincts quelconques de  $R$ . Puisque  $\Gamma(\text{Spec}(R), S)$  est complet, on a  $M_1 \sim M_2$ . Contradiction, car  $M_1 + M_2 = R$ , donc notre hypothèse est fautive, donc  $R$  est un anneau local. Inversement, puisque  $R$  est un anneau local d'idéal maximal  $M$ , pour tous deux idéaux premiers  $P$  et  $Q$ ,  $P + Q \subseteq M$ . Donc  $P \sim Q$ , donc le graphe est complet.  $\square$

**Théorème 4.2.2** *Si  $R$  est un domaine principal, alors  $\Gamma(\text{Spec}(R), S)$  est un graphe étoilé. L'inverse est vrai si  $R$  est un domaine de factorisation unique.*

**Preuve** Puisque  $R$  est un domaine,  $(0)$  est un idéal premier. Comme  $R$  est un domaine d'idéal principal, tous les idéaux premiers non triviaux sont maximaux. On a donc  $(0) \sim P$  pour tout idéal premier non trivial  $P$ . De plus, deux idéaux premiers non triviaux sont comaximaux, ils ne sont pas adjacents. Donc  $\Gamma(\text{Spec}(R), S)$  est un graphe étoilé. Supposons maintenant que  $\Gamma(\text{Spec}(R), S)$  est un graphe étoilé et  $R$  est un domaine de factorisation unique. Depuis  $\Gamma(\text{Spec}(R), S)$  qu'est un graphe étoilé, tous les idéaux premiers non triviaux sont maximaux. Il suffit de montrer que tout idéal premier non nul est engendré par un élément. Supposons qu'un idéal premier  $P$  soit généré au minimum par deux éléments, disons  $x$  et  $y$ . Puisque  $R$  est UFD, on peut supposer que  $x$  et  $y$  sont des éléments irréductibles. Clairement  $(x)$  est un idéal premier non nul de  $R$  et donc il existe une chaîne  $(0) \sim (x) \sim (x, y) \sim (0)$  dans  $\Gamma(\text{Spec}(R), S)$ . Contradiction car  $\Gamma(\text{Spec}(R), S)$  est un graphe étoilé et donc chaque idéal premier non nul est généré par un seul élément.  $\square$

**Théorème 4.2.3** *Soit  $R$  un anneau non local. Si le graphe de somme propre  $\Gamma_S(\text{Spec}(R), S)$  est un graphe étoilé, avec  $S$  est m.r.i, alors  $R$  est un domaine d'intégration de dimension  $\leq 1$ .*

**Preuve** Soit  $P$  un sommet tel que  $P \smile Q$  pour tout  $Q \in \text{Spec}(R)$ . Premièrement, nous montrons que  $(0)$  est un idéal premier. Soient  $M_1, M_2$  deux idéaux maximaux tels que  $P \smile M_1$  et  $P \smile M_2$ . Comme  $P + M_1 = M_1$  et  $P + M_2 = M_2$ , nous avons  $P \subseteq M_1 \cap M_2$ . Puisque  $S$  est minimal par rapport à l'intersection,  $P = (0)$ . Par conséquent  $(0)$  est un idéal premier et donc  $R$  est un domaine. Supposons que  $\dim R \geq 2$ . Il existe une chaîne d'idéaux premiers de longueur au moins deux comme suit :

$$P_0 \subsetneq P_1 \subsetneq P_2$$

. Clairement,  $P_0 = (0)$ . Puisque  $\Gamma_S(\text{Spec}(R), S)$  est un graphe étoilé,  $P_0 \smile P_1$ , c'est-à-dire qu'il est un idéal maximal  $M$  tel que  $P_0 + P_1 \subseteq M$ . Si  $P_1 \neq M$ , alors on a un cycle  $P_0 \smile P_1 \smile M \smile \dots \smile P_0$ , ce qui est une contradiction car  $\Gamma_S(\text{Spec}(R), S)$  est un graphe étoilé. Supposons que  $P_1 = M$ . Puisque  $M$  est un idéal maximal,  $P_1 \subsetneq P_2$  n'est pas possible. Il n'existe donc pas de chaîne d'idéaux premiers de longueur deux ou plus. Donc  $\dim R \leq 1$ .  $\square$

**Proposition 4.2.3** *Si le graphe de somme propre  $\Gamma_S(\text{Spec}(R), S)$  est un graphe étoilé, alors  $S = \text{Max}(R)$ .*

**Preuve** Soit  $P$  un sommet fixé tel que  $P \smile Q$  pour tout sommet  $Q$ . Soit  $M$  n'importe quel idéal maximal de  $R$ . Puisque  $P \smile M$ , on a  $M \in S$ .  $\square$

**Proposition 4.2.4** *Si  $R$  est un anneau de dimension  $\geq 2$ , alors  $\text{Gr}(\Gamma(\text{Spec}(R), S)) = 3$ .*

**Preuve** Puisque  $\dim R \geq 2$ , il existe une chaîne d'idéaux premiers tels que  $P_0 \subsetneq P_1 \subsetneq P_2$ . Puisque  $R$  est un anneau commutatif avec identité, il existe un idéal maximal  $M$  tel que  $P_2 \subseteq M$ . On a donc le cycle  $P_0 \smile P_1 \smile M \smile P_0$ .  $\square$

**Proposition 4.2.5** *Si  $\dim R = 1$  et le graphe de somme propre  $\Gamma(\text{Spec}(R), S)$  a un cycle, alors  $R$  n'est pas un domaine d'intégration.*

**Preuve** Nous montrons que  $(0)$  n'est pas un idéal premier. Par contradiction, supposons que  $(0)$  est un idéal premier. Soit  $P_0 \smile P_1 \smile P_2 \smile P_0$  un cycle dans  $\Gamma(\text{Spec}(R), S)$ . Il existe un idéal maximal  $M \in S$  tel que  $P_0 + P_1 \subseteq M$ . Soit  $P_0$  ou  $P_1$  est un idéal premier, disons que  $P_0$  n'est pas trivial. Puisque  $(0)$  est un idéal premier et  $\dim R = 1$ ,  $P_1$  est un idéal maximal. Comme  $P_0$  et  $P_1$  sont adjacents,  $P_0 + P_1 \subseteq M$  et donc  $P_1 = M$ . Puisque  $\dim R = 1$  et  $P_2$  est un idéal premier non trivial,  $P_2$  est aussi un idéal maximal. Par conséquent  $P_1$  et  $P_2$  sont comaximaux, ce qui n'est pas possible car  $P_1 \smile P_2$ . Donc  $(0)$  n'est pas un idéal premier et  $R$  n'est pas un domaine d'intégration.  $\square$

**Proposition 4.2.6** *Soit  $R$  un anneau tel que  $|\text{Min}(R)| < \infty$ . Alors on a les assertions suivantes :*

a)  $Spec(R)$  est connexe si et seulement si  $\Gamma(Spec(R), S)$  est connexe et  $diam(\Gamma(Spec(R), S)) \leq 2|Min(R)|$ .

b)  $\gamma(\Gamma(Spec(R), S)) \leq |Min(R)|$ .

### Preuve

(a) Par contradiction, supposons que  $Spec(R)$  n'est pas connexe. Il existe deux ensembles non vides  $V(I)$  et  $V(J)$  tels que  $V(I) \cup V(J) = Spec(R)$  et  $V(I) \cap V(J) = \emptyset$  pour certains idéaux  $I$  et  $J$ . Soient  $P \in V(I)$  et  $Q \in V(J)$ . Puisque  $\Gamma(Spec(R), S)$  est connexe, il existe un chemin comme suit :

$$P \sim P_1 \sim P_2 \dots P_n \sim Q$$

Puisque  $P \sim P_1$ , il existe un idéal maximal  $M$  tel que  $P + P_1 \subseteq M$ . Puisque  $P \in V(I)$ ,  $M \in V(I)$  et donc  $P_1 \in V(I)$ . En appliquant les mêmes arguments, nous pouvons montrer que  $P_n \in V(I)$ . Puisque  $P_n \sim Q$  il existe un idéal maximal  $N$  tel que  $P_n + Q \subseteq N$ . Puisque  $P_n \subseteq N$ ,  $N \in V(I)$  aussi comme  $Q \subseteq N$ ,  $N \in V(J)$ , contradiction car  $V(I) \cap V(J) = \emptyset$ . Soit  $Min(R) = \{P_1, P_2, \dots, P_r\}$ . Supposons d'abord  $r = 2$ . Soient  $P$  et  $Q$  deux idéaux premiers quelconques de  $R$ . Nous montrons qu'il existe un chemin de longueur au plus quatre joignant  $P$  à  $Q$ . Il existe des idéaux premiers minimaux  $P_1$  et  $Q_1$  tels que  $P_1 \subseteq P$  et  $Q_1 \subseteq Q$ . Puisque  $Spec(R)$  est connexe, nous avons  $V(P_1) \cap V(Q_1) \neq \emptyset$ . Il existe un idéal premier  $P_2 \in V(P_1) \cap V(Q_1)$ . Puisque  $R$  est un anneau commutatif avec identité, nous avons un chemin  $P \sim P_1 \sim P_2 \sim Q_1 \sim Q$ . Maintenant, supposons que  $r > 2$ . Soit  $1 \leq i \leq l_1$  tel que  $P \in V(P_i)$ , pour  $l_1 < i \leq l_2$  tel que  $Q \in V(P_i)$  et  $l_2 < i \leq r$  tel que  $P, Q \notin V(P_i)$ . Puisque  $Spec(R)$  est connexe, il existe  $1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_k \leq r$  tel que  $V(P_{i_l}) \cap V(P_{i_{l+1}}) \neq \emptyset$  pour  $1 \leq l \leq k$  et  $(\cup_{i=1}^{l_1} V(P_i)) \cap V(P_{i_1}) \neq \emptyset, (\cup_{i=l_2+1}^{l_2} V(P_i)) \cap V(P_{i_k}) \neq \emptyset$ . Par conséquent, il est facile de voir qu'il existe un chemin entre  $P$  et  $Q$  de longueur au plus  $2|Min(R)|$ .

(b) Soit  $S = \{P_1, P_2, \dots, P_n\}$  un ensemble dominant dans  $\Gamma(Spec(R), S)$ . Par conséquent, pour tout  $Q \in Spec(R) \setminus S$  il existe un  $P_i \in S$  tel que  $Q \sim P_i$  pour un certain  $1 \leq i \leq n$ . Soient  $Q_1, Q_2, \dots, Q_r$  les idéaux premiers minimaux distincts de  $R$  tels que chaque idéal premier  $P_i$  contient au moins un  $Q_j$  pour  $1 \leq j \leq r$ . Donc  $r \leq n$ . Nous montrons que  $T = \{Q_1, Q_2, \dots, Q_r\}$  est aussi un ensemble dominant. Soit  $P'$  un idéal premier quelconque qui n'est pas dans  $T$ . Supposons que  $P' \notin S$ . Puisque  $S$  est un ensemble dominant, il existe un idéal premier  $P_i \in S$  tel que  $P' \sim P_i$ . Il existe un idéal maximal  $M$  tel que  $P + P_i \subseteq M$ . Par construction de l'ensemble  $T$ , il existe un  $Q_j \in T$  tel que  $Q_j \subseteq P_i$  pour un certain  $1 \leq j \leq r$ . Donc  $P' + Q_j \subseteq M$ , et donc  $P' \sim Q_j$ . Donc  $T$  est un ensemble dominant. Supposons maintenant  $P' \in S$ . Il existe  $Q_j \in T$  tel que  $Q_j \subseteq P'$ . Puisque  $R$  est un anneau commutatif avec unité, il existe un idéal maximal  $M_1$  tel que  $P' \subseteq M_1$ . Donc  $P' \sim Q_j$ , donc  $T$  est un ensemble dominant.  $\square$

### 4.3 Graphe de la somme propre du produit direct des anneaux

Dans cette section, nous étudions le graphe de somme propre du produit d'anneaux  $R_i$  pour  $1 \leq i \leq n$ . Nous relierons le nombre clique, le nombre d'indépendance et le nombre de domination de  $\Gamma(\text{Spec}(R), S)$  et celle de  $\Gamma(\text{Spec}(R_i), S_i)$  pour  $1 \leq i \leq n$ .

**Théorème 4.3.1** *Soient  $R_1, R_2, \dots, R_n$  des anneaux commutatifs avec des identités et  $R = R_1 \times R_2 \times \dots \times R_n$ . Alors  $\Gamma(\text{Spec}(R), S) = \coprod_{i=1}^n \Gamma(\text{Spec}(R_i), S_i)$ , où  $S_i = \text{Max}(R_i)$  pour  $1 \leq i \leq n$ , où  $\coprod$  désigne l'union disjointe d'ensembles.*

**Preuve** Tout idéal premier  $P$  de  $R$  est de la forme  $R_1 \times R_2 \times \dots \times R_{i-1} \times P_i \times R_{i+1} \times \dots \times R_n$ , où  $P_i$  est un idéal premier dans  $R_i$  et tout idéal maximal de  $R$  est de la forme  $R_1 \times R_2 \times \dots \times R_{i-1} \times M_i \times R_{i+1} \times \dots \times R_n$  pour un idéal maximal  $M_i$  de  $R_i$ . Par conséquent, nous pouvons associer chaque idéal premier  $P_i$  de  $R_i$  à l'idéal premier  $R_1 \times R_2 \times \dots \times R_{i-1} \times P_i \times R_{i+1} \times \dots \times R_n$  de  $R$ . Clairement, si  $P_i$  et  $Q_i$  sont adjacents dans  $\Gamma(\text{Spec}(R_i), S_i)$ , alors on a  $R_1 \times R_2 \times \dots \times R_{i-1} \times P_i \times R_{i+1} \times \dots \times R_n$  et  $R_1 \times R_2 \times \dots \times R_{i-1} \times Q_i \times R_{i+1} \times \dots \times R_n$  sont adjacents dans  $\Gamma(\text{Spec}(R), S)$  et vice versa.  $\square$

**Corollaire 4.3.1** *Si  $R$  est un anneau artinien, alors le graphe de somme propre  $\Gamma(\text{Spec}(R), S)$  est non connexe ou c'est un sommet isolé.*

**Corollaire 4.3.2** *Si  $R$  est un anneau artinien non local, alors le graphe complémentaire du graphe de somme propre  $\Gamma(\text{Spec}(R), S)$  est un graphe complet.*

**Corollaire 4.3.3** *Soient  $R_1, R_2, \dots, R_n$  des anneaux commutatifs unitaires et  $R = R_1 \times R_2 \times \dots \times R_n$ . Alors on a les assertions suivantes :*

- (a)  $\gamma(\Gamma(\text{Spec}(R), S)) \leq |\text{Min}(R_1)| + |\text{Min}(R_2)| + \dots + |\text{Min}(R_n)|$ .
- (b)  $\alpha(\Gamma(\text{Spec}(R), S)) = |\text{Max}(R_1)| + \dots + |\text{Max}(R_n)|$ .
- (c)  $\omega(\Gamma(\text{Spec}(R), S)) = \text{Max}\{\omega(\Gamma(\text{Spec}(R_1), S_1)), \dots, \omega(\Gamma(\text{Spec}(R_n), S_n))\}$

**Théorème 4.3.2** *Soit  $R$  un anneau noethérien réduit. Le graphe complémentaire du graphe de somme propre  $\Gamma(\text{Spec}(R), S)$  est multi-parti complet si et seulement si  $R$  est un produit direct des anneaux locaux.*

**Preuve** Supposons que le graphe complémentaire de  $\Gamma(\text{Spec}(R), S)$  est multi-parti complet avec les ensembles des sommets  $V_1, V_2, \dots, V_n$ . Clairement, l'ensemble des sommets de  $V_i$  forme un sous-graphe de  $\Gamma(\text{Spec}(R), S)$  pour  $1 \leq i \leq n$ . Puisque le sous-graphe sur  $V_i$  est complet,  $V_i$  a un idéal maximal. De plus, il est facile de voir que  $V_i$  a un unique idéal maximal, disons  $M$ . Considérons maintenant un ensemble  $A$ , constitué de tous les idéaux premiers de  $R$  contenus dans  $M$ . Montrons maintenant que  $A = V_i$ . Soit  $P$  tout idéal premier de  $R$  tel que  $P \subseteq M$ . Clairement,  $P \sim M$ . Par conséquent, dans le graphe complémentaire,  $P$  et  $M$  ne sont pas adjacents. Supposons que  $P \in V_j$  pour certains  $i \neq j$ . Puisque le graphe complémentaire de  $\Gamma(\text{Spec}(R), S)$  est complet multi-parti,  $P \sim M$  dans le graphe complémentaire. Puisque  $P \sim M$  dans  $\Gamma(\text{Spec}(R), S)$ , contradiction. Donc  $A = V_i$ . Puisque  $R$

est un anneau noethérien,  $R$  a un nombre fini d'idéaux premiers minimaux. Soient  $P_1, P_2, \dots, P_m$  les idéaux premiers minimaux de  $R$ . Clairement, pour chaque  $i$ , il existe au moins un  $j$  tel que  $P_j \in V_i$ . Soient  $P_{i_1}, \dots, P_{i_r}$  des idéaux premiers minimaux tels que  $P_{i_1}, \dots, P_{i_r} \in V_i$ . Puisque  $V(P_{i_1}) \cup V(P_{i_2}) \cup \dots \cup V(P_{i_r}) = V(P_{i_1} P_{i_2} \cap \dots \cap P_{i_r})$ , on peut montrer que  $V(P_{i_1} \cap P_{i_2} \cap \dots \cap P_{i_r}) = V_i$ . Soit  $P$  un idéal premier de  $R$  tel que  $P \in V_i$ , c'est-à-dire  $P \subseteq M$ . Si  $P$  est un idéal premier minimal de  $R$ , alors clairement  $P \in V(P_{i_1} \cap P_{i_2} \cap \dots \cap P_{i_r})$ . Supposons que  $P$  n'est pas un idéal premier minimal de  $R$ . Puisque  $P$  n'est pas un idéal premier minimal, il existe un idéal premier de  $R$ , soit  $Q$  tel que  $Q \subsetneq P$ . Si  $Q \in \{P_{i_1}, \dots, P_{i_r}\}$ , alors clairement  $P \in V(P_{i_1} \cap P_{i_2} \cap \dots \cap P_{i_r})$ . Supposons  $Q \notin \{P_{i_1}, \dots, P_{i_r}\}$ . Comme  $Q \subseteq M$  et  $Q$  est minimale, donc  $Q = P_{i_k}$  pour quelque  $1 \leq k \leq r$  ce qui est une contradiction. Donc  $P \in V(P_{i_1} \cap P_{i_2} \cap \dots \cap P_{i_r})$ . Soit  $P$  un idéal premier quelconque contenant  $P_{i_k}$  pour certains  $1 \leq k \leq r$ . On montre que  $P \subseteq M$  i.e  $P \sim M$  dans le graphe  $\Gamma(\text{Spec}(R), S)$ . Supposons que  $P$  n'est pas adjacent à  $M$  dans  $\Gamma(\text{Spec}(R), S)$ . Puisque  $R$  est un anneau commutatif avec unité, il existe un idéal maximal disons  $M_1$  de  $R$  tel que  $P_{i_r} \subseteq P \subseteq M_1$ . Puisque  $P \subseteq M_1$  il existe un chemin  $M \sim P_{i_k} \sim M_1$  dans  $\Gamma(\text{Spec}(R), S)$ . Comme le complémentaire du graphe  $\Gamma(\text{Spec}(R), S)$  est multi-parti complet,  $M, M_1$  et  $P_{i_k}$  appartiennent au même ensemble des sommets  $V_i$ . Puisque  $V_i$  a un unique idéal maximal  $M$ , contradiction. Donc  $V(P_{i_1} \cap P_{i_2} \cap \dots \cap P_{i_r}) = V_i$ . Soit  $I_i = P_{i_1} \cap P_{i_2} \cap \dots \cap P_{i_r}$  pour  $1 \leq i \leq n$ . Puis clairement  $\text{Spec}(R)$  est une union disjointe d'un nombre fini des sous-ensembles fermés. C'est facile de voir que chacun des  $I_i$  sont des idéaux comaximaux de  $R$ . Puisque  $R$  est un anneau réduit, nous avons  $R \cong R/I_1 \times \dots \times R/I_n$ . Clairement,  $R/I_i$  est un anneau local.

Maintenant inversement, d'après le théorème 4.3.1, le graphe  $\Gamma(\text{Spec}(R), S)$  est une union disjointe des sous-graphes  $\Gamma(\text{Spec}(R_i), S_i)$  pour  $1 \leq i \leq n$ . Puisque chaque  $R_i$  est un anneau local, d'après le théorème 4.2.8, chaque  $\Gamma(\text{Spec}(R_i), S_i)$  est un graphe complet. Par conséquent, le graphe complémentaire de  $\Gamma_S(\text{Spec}(R), S)$  est un multi-parti complet.  $\square$

**Corollaire 4.3.4** *Le graphe complémentaire du graphe de somme propre  $\Gamma(\text{Spec}(R), S)$  est complet si et seulement si  $R$  est un anneau artinien.*

---

# Graphe d'idempotents de division d'un anneau commutatif

---

## 5.1 Introduction

Soit  $R$  un anneau commutatif. Le graphe zéro diviseur  $\Gamma_0(R)$  d'un anneau  $R$  est le graphe dont les sommets sont les éléments de  $R$  tels que les sommets distincts  $x$  et  $y$  sont adjacents si et seulement si  $xy = 0$ . Le sous-graphe  $\Gamma(R)$  de  $\Gamma_0(R)$  induit par les diviseurs de zéro non nuls de  $R$  a été étudié largement depuis qu'il a été considéré pour la première fois afin d'éclairer l'interaction entre la théorie des graphes et la théorie des anneaux. Ce concept a ensuite été étendu aux semi-groupes, anneaux non commutatifs, ensembles partiellement ordonnés et groupoïdes, et a suscité un intérêt notable à travers un large segment de la littérature pour les études sur des graphes zéro diviseur avec des bibliographies. On peut étudier la " structure des diviseurs " plus générale dans les anneaux  $R$  en remplaçant  $0$  par un élément arbitraire de  $R$ . Soit  $e$  un élément idempotent d'un anneau commutatif  $R$ . Dans ce chapitre, la notion du graphe zéro diviseur est généralisé en définissant le graphe d'idempotents de division  $\Gamma_e(R)$  de  $R$  associé à  $e$ . L'ensemble des sommets du graphe  $\Gamma(R)$  était restreint aux zéro diviseurs non nuls de  $R$  puisque Les relations algébriques (multiplicatives) impliquant  $0$  et des non zéro diviseurs sont parfaitement étudiées. Les relations impliquant des éléments idempotents plus généraux ne sont pas triviaux, il semble donc judicieux de définir  $\Gamma_e(R)$  comme le graphe avec l'ensemble des sommets  $V(\Gamma_e(R)) = \{a \in R \mid \text{il existe } b \in R \text{ avec } ab = e\}$  tels que deux sommets distincts  $a, b \in V(\Gamma_e(R))$  sont adjacents si et seulement si  $ab = e$ . Notons que  $\Gamma_e(R)$  est le graphe zéro diviseur habituel lorsque  $e = 0$ . De plus, il est clair que  $e = 1$  si et seulement si  $V(\Gamma_e(R)) = U(R)$ , où  $U(R)$  désigne le groupe d'unités de  $R$ . Plus généralement, l'inclusion  $U(R) \subseteq V(\Gamma_e(R))$  est valable pour tout élément idempotent  $e \in R$  (Proposition 5.2.3). Il existe de nombreuses propriétés fondamentales du graphe zéro diviseur qui ne se vérifient pas toujours dans les plus généraux graphes d'idempotents de division. Par exemple, rappelons que  $\Gamma(R)$  est connexe, et la Littérature montre que si  $\Gamma(R)$  n'est pas nul alors  $R$  est fini si et seulement si  $\Gamma(R)$  est fini (bien sûr, ces résultats sont valables de manière triviale si  $\Gamma(R)$  est remplacé par  $\Gamma_0(R)$ ). De plus, si  $T(R)$  est l'anneau quotient total d'un anneau  $R$  avec identité alors  $\Gamma(R) \cong \Gamma(T(R))$ , et on observe dans la proposition 5.4.4 que

$\Gamma_0(R) \cong \Gamma_0(T(R))$ . Cependant, notez que  $\Gamma_1(\mathbb{Z})$  se compose de deux sommets et pas d'arêtes, et  $\Gamma_1(T(\mathbb{Z})) = \Gamma_1(\mathbb{Q})$  est l'union disjointe de deux exemplaires de  $K_1$  et d'une infinité d'exemplaires de  $K_2$  (i.e proposition 5.2.1). Rappelons qu'un anneau  $R$  est un anneau booléen si  $x^2 = x$  pour tout  $x \in R$ . Plus généralement, un anneau régulier de von Neumann est tout anneau commutatif  $R$  tel que, pour tout  $x \in R$ , il existe  $y \in R$  avec  $x = x^2y$  (donc chaque anneau booléen est régulier de von Neumann en fixant  $y = x$ ). Si  $R$  a une identité alors, de manière équivalente,  $R$  est un anneau régulier de von Neumann si et seulement si pour tout  $x \in R$  il existe une unité  $u$  et un (unique) idempotent  $e_x$  de  $R$  tel que  $x = ue_x$ . Les Graphes zéro diviseur des anneaux réguliers de von Neumann ont été étudiés pour la première fois où les auteurs ont comparé les anneaux réguliers de von Neumann  $R$  et  $S$  tels que  $\Gamma(R) \cong \Gamma(S)$ . Cette affirmation s'est poursuivie où, par exemple, il a été observé que la " compression " d'un graphe zéro diviseur d'un anneau régulier de von Neumann est isomorphe au graphe zéro diviseur d'un anneau booléen. Plus tard, les graphes zéro diviseur des anneaux booléens ont été caractérisés et les graphes qui sont réalisables en tant que graphes zéro diviseur d'anneaux booléens ont été classés. Le présent travail vise à exploiter l'interaction entre les propriétés algébriques des anneaux commutatifs et les structures théoriques de leurs graphes d'idempotents de division. Section 2 consiste en quelques résultats préliminaires, dont l'observation que la composante contenant de  $\Gamma_e(R)$  est isomorphe au graphe zéro diviseur d'un anneau commutatif (Proposition 5.2.5). Cette observation est prolongée dans la section 3, où il est prouvé qu'une composante  $G$  de  $\Gamma_e(R)$  est isomorphe au graphe zéro diviseur d'un anneau commutatif si et seulement si soit  $G \cong K_2$  soit s'il existe  $x \in V(G)$  tel que  $x^2 = e$  (i.e Corollaire 5.3.5). Les caractérisations complètes des composantes de  $\Gamma_e(R)$  sont données dans le théorème 5.3.1 et le corollaire 5.3.2, et il est prouvé dans le corollaire 5.3.3 qu'il existe une composante de  $\Gamma_e(R)$  qui est fini si et seulement si toute composante de  $\Gamma_e(R)$  est fini, si et seulement si  $\text{ann}_R(e)$  est fini. Puisque les graphes zéro diviseur sont connexe et  $\text{ann}_R(0) = R$ , cela généralise le fait que  $\Gamma_0(R)$  est fini si et seulement si  $R$  est fini. De plus, si  $R$  a une identité alors  $\Gamma_e(R)$  est fini si et seulement si  $R(1 - e)$  et  $U(R)$  sont tous les deux finis (Corollaire 5.3.4). La section 4 considère la connexité et les anneaux quotients totaux. Soit  $e$  un élément idempotent d'un anneau commutatif  $R$  avec identité. Il est prouvé que si  $G_R$  et  $G_{T(R)}$  sont des composantes de  $\Gamma_e(R)$  et  $\Gamma_e(T(R))$ , respectivement, tels que  $V(G_R) \cap V(G_{T(R)}) = \emptyset$  alors  $G_R \cong G_{T(R)}$  (Théorème 5.4.6). En particulier, si  $\Gamma_e(T(R))$  est connexe alors  $\Gamma_e(R) \cong \Gamma_e(T(R))$  (Corollaire 5.4.7). Le théorème 5.4.1 montre que si  $Re$  est un anneau booléen alors  $\Gamma_e(R)$  est connexe. Dans la section 5, il est montré que l'inverse est également vrai dans le cas particulier où  $R$  est régulier de von Neumann (théorème 5.5.7). De plus, les structures des graphes d'idempotents de division des anneaux booléens sont considérées, et un résultat bien connu est généralisée dans le corollaire 5.5.10 en enchaînant les " compressions " des composantes des graphes d'idempotents de division des anneaux réguliers de von Neumann commutatifs au graphes zéro diviseur d'anneaux booléens. Tout le long de ce chapitre, les entiers positifs, les entiers, les nombres rationnels, l'anneau des entiers modulo  $n$ , le corps fini de cardinal  $q$ , l'ensemble des diviseurs de zéro de  $R$ , l'anneau quotient total de  $R$  et le groupe d'unités de  $R$  seront désignées respectivement par  $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}_n, \mathbb{F}_q, Z(R), T(R)$  et  $U(R)$ . De plus, si  $m$  et  $n$  sont des nombres

cardinaux alors  $K_m$  désignera le graphe complet de  $m$  sommets, et  $K_{m,n}$  désignera le graphe bipartit complet sur des ensembles partiels d'ordres  $m$  et  $n$ . Étant donné  $n \in \mathbb{N}$  et  $k \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ , le produit  $\mathbb{Z}_n \times \dots \times \mathbb{Z}_n$  ( $k$  facteurs) sera noté  $\mathbb{Z}_n^k$  (où  $\mathbb{Z}_n^0$  est l'anneau trivial). De plus,  $N_G(v)$  l'ensemble de tous les sommets d'un graphe  $G$  adjacents au sommet  $v \in V(G)$  (la notation  $N(v)$  sera être utilisé lorsque le graphe sous-jacent  $G$  est évident), et si  $x$  est un élément d'un anneau commutatif  $R$  alors  $\text{ann}_R(x) = \{y \in R \mid xy = 0\}$ . Soit  $G_1$  et  $G_2$  deux graphes. Le produit direct  $G_1 \times G_2$  est le graphe dont les sommets sont les éléments de  $V(G_1) \times V(G_2)$  tel que deux sommets  $(a, b)$  et  $(x, y)$  sont adjacents si et seulement si  $a$  est adjacent à  $x$  dans  $G_1$  et  $b$  est adjacent à  $y$  dans  $G_2$ . De plus, il n'y aura aucun mal à laisser  $G_i$  représente  $V(G_i)$  dans la notation  $f : G_1 \rightarrow G_2$ . Sauf indication contraire, la terminologie " graphe zéro diviseur d'un anneau commutatif  $R$  " sera toujours être utilisé en référence au graphe  $\Gamma_0(R)$ . Aussi,  $\Gamma_0^*(R)$  désignera la restriction du graphe zéro diviseur de  $R$  avec  $V(\Gamma_0^*(R)) = V(\Gamma_0(R))$  tel que (pas nécessairement distinct)  $a, b \in V(\Gamma_0^*(R))$  sont adjacentes si et seulement si  $ab = 0$ .

## 5.2 Résultats préliminaire

Cette section fournit plusieurs premiers résultats pour servir d'introduction à la structure générale des graphes d'idempotents de division. Graphes d'idempotents de division des domaines d'intégration et les graphes d'idempotents de division associés à  $e = 1$  sont facilement caractérisés. Ceci est fait dans les deux premières propositions, et les autres résultats examinent certaines des interactions fondamentales (qui seront toutes nécessaires dans la sections suivantes) entre la structure algébrique des anneaux et les propriétés théoriques des graphes d'idempotents de division.

**Proposition 5.2.1** *Soit  $e$  un élément idempotent d'un domaine d'intégration  $R$  (donc  $e \in \{0, 1\}$ ), et soit  $B$  tout ensemble tel que  $|B| = \frac{|U(R) \setminus \{1, -1\}|}{2}$ . Alors on a les assertions suivantes :*

- 1) *Si  $e = 0$  alors  $\Gamma_e(R) \cong K_{1, |R \setminus \{0\}|}$ .*
- 2) *Si  $e = 1$  et  $\text{char}(R) = 2$  alors  $\Gamma_e(R) \cong K_1 \cup (\cup_B K_2)$ .*
- 3) *Si  $e = 1$  et  $\text{char}(R) \neq 2$  alors  $\Gamma_e(R) \cong K_1 \cup K_1 \cup (\cup_B K_2)$ .*

**Preuve** L'énoncé en (1) est clair, tandis que (2) et (3) suivent l'unicité des inverses avec l'observation que  $x^2 = 1$  si et seulement si  $x \in \{1, -1\}$ .  $\square$

*Maintenant, il est facile d'étendre (2) et (3) du résultat précédent à des anneaux plus généraux avec identité, comme il est proposer par la proposition suivante.*

**Proposition 5.2.2** *Soit  $R$  un anneau commutatif avec identité. Soit  $A = \{u \in U(R) \mid u^2 = 1\}$ , et soit  $B$  tout ensemble tel que  $|B| = \frac{|U(R) \setminus A|}{2}$ . Alors  $\Gamma_1(R) \cong (\cup_A K_1) \cup (\cup_B K_2)$ .*

*Soit  $e$  un élément idempotent d'un anneau commutatif  $R$ . Il a été noté dans l'introduction que  $V(\Gamma_1(R)) = U(R)$ . Cette observation est généralisée ci-dessous en montrant que  $U(R)$  est toujours un sous-ensemble de  $V(\Gamma_e(R))$ .*

**Proposition 5.2.3** *Soit  $e$  un élément idempotent d'un anneau commutatif  $R$ . Si  $f \in R$  un idempotent tel que  $fe = e$  alors  $V(\Gamma_f(R)) \subseteq V(\Gamma_e(R))$ . En particulier, si  $R$  a une identité alors  $U(R) \subseteq V(\Gamma_e(R))$ . Dans ce cas,  $U(R) \cap V(G) \neq \emptyset$  pour chaque composante  $G$  de  $\Gamma_e(R)$ .*

**Preuve** Si  $x \in V(\Gamma_f(R))$  alors  $xy = f$  pour un certain  $y \in R$ . Donc,  $x(ye) = (xy)e = fe = e$ , et donc  $x \in V(\Gamma_e(R))$ . Cela prouve la première affirmation, et l'instruction "en particulier" suit en définissant  $f = 1$ .

Pour vérifier la dernière affirmation, soit  $G$  une composante de  $\Gamma_e(R)$ . Si  $x \in V(G)$  et  $y \in R$  tels que  $xy = e$  alors  $(xe + (1 - e))(ye + (1 - e)) = 1$ . De plus, les égalités  $x(ye) = e = (ye)(xe + (1 - e))$  impliquent  $x$  et  $xe + (1 - e)$  appartiennent à la même composante de  $\Gamma_e(R)$ . Donc,  $xe + (1 - e) \in U(R) \cap V(G)$ .  $\square$

*Il sera commode d'inclure le lemme bien connu suivant, et une preuve est fournie pour l'amour de l'exhaustivité.*

**Lemme 5.2.1** *Si  $e$  est un élément idempotent d'un anneau commutatif  $R$  avec identité alors  $\text{ann}_R(e) = R(1 - e)$ .*

**Preuve** L'inclusion  $R(1 - e) \subseteq \text{ann}_R(e)$  est vraie puisque  $1 - e \in \text{ann}_R(e)$ . Inversement, supposons qu'un  $a \in \text{ann}_R(e)$ . Alors  $ae = 0$ , ce qui implique que  $a = a(1 - e) \in R(1 - e)$ . Par conséquent,  $\text{ann}_R(e) = R(1 - e)$ .  $\square$

*Soit  $e$  un élément idempotent d'un anneau commutatif  $R$ . Alors  $V(\Gamma_e(R))$  est un (multiplicatif) sous-semi groupe de  $R$  (puisque si  $a, b \in V(\Gamma_e(R))$ , disons  $ax = by = e$  pour un certain  $x, y \in R$ , alors  $(ab)(xy) = (axe)(par) = ee = e$ ). Ci-dessous, cette observation est faite pour la composante de  $\Gamma_e(R)$  contenant  $e$ . En outre, L'énoncé (1) implique que  $e$  se comporte comme un zéro par rapport aux éléments par lesquels il est divisible. Pour (3), la définition d'un graphe d'idempotents de division d'un anneau est étendue à  $\Gamma_e(V(G))$  pour le semi-groupe  $V(G)$  de manière évidente.*

**Proposition 5.2.4** *Soit  $e$  un élément d'un anneau commutatif  $R$ . Si  $G$  est la composante de  $\Gamma_e(R)$  contenant  $e$ , alors on a les assertions suivantes :*

- (1)  $V(G)$  est un sous-semi-groupe (multiplicatif) de  $R$  tel que  $e$  est un zéro élément de  $V(G)$ . En particulier,  $V(G) = \{x \in R \mid xe = e\}$ .
- (2)  $V(G) \cong \text{ann}_R(e)$  (en semi-groupes multiplicatifs).
- (3)  $G = \Gamma_e(V(G)) \cong \Gamma_0(\text{ann}_R(e))$ . En particulier,  $G$  est isomorphe au graphe zéro diviseur d'un anneau commutatif.
- (4) Si  $R$  a une identité alors  $V(G)$  est un monoïde avec  $V(G) \cong R(1 - e)$  (en monoïdes multiplicatifs), et  $G \cong \Gamma_0(R(1 - e))$ . En particulier,  $G$  est isomorphe au graphe zéro diviseur d'un anneau commutatif avec identité.

**Preuve**

- (1) S'il existe  $x \in V(G)$  tel que  $xe \neq e$  alors soit  $a \in V(G)$  tel que la distance de  $a$  à  $e$  dans  $G$  est deux. Choisissons  $b \in V(G)$  tel que  $a \in N(b)$  et  $b \in N(e)$ . Alors  $ae = a(be) = (ab)e = ee = e$ , ce qui contredit que la distance de  $a$  à  $e$  est supérieure à un. Cela prouve  $xe = e$  pour tout  $x \in V(G)$ , et "en

particulier" on a la déclaration qui suit. Par conséquent, si  $a, b \in V(G)$  alors  $(ab)e = a(be) = ae = e$ , ce qui montre que  $ab \in V(G)$ . Ainsi,  $V(G)$  est un semi-groupe avec un zéro élément  $e$ .

- (2) Soit  $\phi : V(G) \longrightarrow \text{ann}_R(e)$  définie par  $\phi(x) = x - e$ . Il résulte de (1) que  $(x - e)e = xe - e^2 = e - e = 0$ . Par conséquent,  $x - e \in \text{ann}_R(e)$ , donc  $\phi$  est bien défini. Si  $\phi(x) = \phi(y)$  pour un certain  $x, y \in V(G)$  alors  $x = x - e + e = \phi(x) + e = \phi(y) + e = y - e + e = y$ . Cela prouve que  $\phi$  est injectif. Pour montrer qu'il est surjectif, soit  $x \in \text{ann}_R(e)$ . Alors  $(x + e)e = e^2 = e$ . Ainsi,  $x + e \in V(G)$ , et  $\phi(x + e) = x + e - e = x$ . Pour prouver que  $\phi$  est un homomorphisme, soit  $x, y \in V(G)$ . Notez que  $\phi(xy) = xy - e = xy - e - e + e = xy - xe - ye + e^2 = (x - e)(y - e) = \phi(x)\phi(y)$ . Par conséquent,  $V(G) \cong \text{ann}_R(e)$ .
- (3) Notons que  $G = \Gamma_e(V(G))$  est trivial. Aussi, il résulte de (2) que le semi-groupe  $V(G)$  et  $\text{ann}_R(e)$  est isomorphe à un graphe zéro diviseur. Mais  $e$  et  $0$  sont des zéro éléments respectivement de  $V(G)$  et  $\text{ann}_R(e)$ , et donc  $\Gamma_e(V(G)) \cong \Gamma_0(\text{ann}_R(e))$ . La déclaration " en particulier " tient puisque  $\text{ann}_R(e)$  est un anneau commutatif.
- (4) Supposons que  $R$  a une identité. L'égalité  $1e = e$  implique que  $1 \in V(G)$ , donc  $V(G)$  est un monoïde par (1). En fait, (2) et (3) avec le lemme 5.2.4 impliquent  $V(G) \cong R(1 - e)$  et  $G \cong \Gamma_0(R(1 - e))$ . L'énoncé "en particulier" est vrai puisque  $R(1 - e)$  est un anneau commutatif d'élément identité  $1 - e$ .

□

*Une caractérisation des graphes d'idempotents de division qui sont isomorphes aux graphes zéro diviseur est maintenant disponible.*

**Corollaire 5.2.1** *Si  $e$  est un élément idempotent d'un anneau commutatif  $R$  alors  $\Gamma(R)$  est isomorphe à un graphe zéro diviseur d'un anneau commutatif si et seulement si  $\Gamma_e(R)$  est connexe.*

**Preuve** L'instruction "seulement si" est triviale, et l'instruction "si" est vérifiée par la proposition 5.2.5(3). □

*Notez que le semi-groupe  $V(G)$  dans la proposition 5.2.5 n'a pas besoin d'être un anneau (par exemple, si  $e = (1, 0) \in \mathbb{Z}_2^2$  puisque  $e, (1, 1) \in V(\Gamma_e(\mathbb{Z}_2^2))$  avec  $e(1, 1) = e$ , mais  $e + (1, 1) \notin V(\Gamma_e(\mathbb{Z}_2^2))$ ). Aussi, si  $G$  est une composante de  $\Gamma_e(R)$  avec  $e \in V(G)$  alors  $V(G)$  n'est pas un semi-groupe (car si  $x \in V(G)$  alors il existe  $y \in V(G)$  tel que  $xy = e \notin V(G)$ ). Néanmoins, la proposition suivante étend la proposition 5.2.5(1).*

**Proposition 5.2.5** *Soit  $e$  un élément idempotent d'un anneau commutatif  $R$ , et supposons que  $G$  est la composante de  $\Gamma_e(R)$  qui contient  $e$ . Alors le semi-groupe  $V(G)$  agit sur l'ensemble  $V(H)$  pour chaque composante  $H$  de  $\Gamma_e(R)$ .*

**Preuve** Soit  $g \in V(G)$  et  $h \in V(H)$ . Si  $x \in R$  tel que  $hx = e$  alors  $x \in V(H)$  et  $(gh)x = g(hx) = ge = e$ , où la dernière égalité est vérifiée par la proposition 5.2.5(1). Par conséquent,  $gh \in V(H)$ . □

### 5.3 La structure de $\Gamma_e(R)$

Les résultats de cette section examinent les structures des composantes générales des graphes d'idempotents de division des anneaux commutatifs. En particulier, des conditions sont prévues dans lesquelles un composant d'un graphe d'idempotent de division est isomorphe à un graphe zéro diviseur d'un anneau commutatif. Notez que la proposition 5.2.5(3) et (4) sont immédiatement récupérés de l'énoncé (1) du théorème suivant (voir corollaire 5.3.2).

**Théorème 5.3.1** *Soit  $e$  un élément idempotent d'un anneau commutatif  $R$ . Si  $G$  est une composante de  $\Gamma_e(R)$  alors on a les assertions suivantes :*

- (1)  $x^2 = e$  pour un certain  $x \in V(G)$  si et seulement si  $G \cong \Gamma_0(\text{ann}_R(e))$ . Dans ce cas,  $(ye)z = e$  pour tout  $y, z \in V(G)$ .
- (2)  $x^2 = e$  pour tout  $x \in V(G)$  si et seulement si  $G \cong K_2 \times \Gamma_0^*(\text{ann}_R(e))$ . En particulier, si  $x^2 = e$  pour un certain  $x \in V(G)$  alors  $G$  est isomorphe à un graphe zéro diviseur d'un anneau commutatif.

#### Preuve

Si  $\text{ann}_R(e) = \{0\}$  alors  $\Gamma_0(\text{ann}_R(e)) = K_1 \not\cong K_2 \cong K_2 \times \Gamma_0^*(\text{ann}_R(e))$ . Pour le cas où  $|\text{ann}_R(e)| > 1$ , il est clair que l'égalité  $N_{\Gamma_0 \text{Ann}_R(e)} \setminus \{0\} = V(\Gamma_0(\text{ann}_R(e))) \setminus \{0\}$  détient, tandis que  $(\alpha, x) \in N_{K_2 \times \Gamma_0^*}((\alpha, y))$  pour tout  $\alpha \in V(K_2)$  et  $x, y \in V(\Gamma_0^*(\text{ann}_R(e)))$ . Ceci montre que  $\Gamma(\text{ann}_R(e)) \not\cong K_2 \times \Gamma_0^*(\text{ann}_R(e))$ . Par conséquent, il suffit de vérifier simplement les parties " seulement si " de (1) et (2).

Rappelons que  $R \cong Re \times \text{ann}_R(e)$  via l'application  $r \mapsto (re, r - re)$ . Sous cette application, notez que  $e \mapsto (e, 0)$ . Par conséquent, sans perte de généralité, supposons que  $G$  est une composante de  $\Gamma_{(e,0)}(Re \times \text{ann}_R(e))$ .

Soit  $x = (a, b) \in V(G)$  tel que  $x^2 = (e, 0)$ . Alors  $a^{-1} = a$  dans l'anneau  $Re$ , donc  $(c, d) \in V(G)$  est adjacent à  $x$  si et seulement si  $c = a$ , et  $d \neq b$  avec  $bd = 0$ . Étant donné tout  $v \in V(G)$ , puisque  $G$  est connexe, le même argument peut être réitérée pour montrer que  $v \in \{a\} \times \text{ann}_R(e)$ . Par conséquence,  $V(G) \subseteq \{a\} \times \text{ann}_R(e)$ . Mais  $(a, 0)t = (e, 0)$  pour tout  $t \in \{a\} \times \text{ann}_R(e)$  (de sorte que tout élément de  $\{a\} \times \text{ann}_R(e)$  appartient à la même composante de  $\Gamma_e(R)$ ), et il s'ensuit que  $V(G) = \{a\} \times \text{ann}_R(e)$ . Par conséquent, l'application  $\Psi : G \rightarrow \Gamma_e(\text{ann}_R(e))$  donné par  $\Psi((a, r)) = r$  est une bijection bien définie, et il est simple de vérifier qu'il s'agit d'un isomorphisme des graphes.

Le deuxième énoncé de (1) est maintenant clair puisque si  $y, z \in V(G) = \{a\} \times \text{ann}_R(e)$  alors  $(y(e, 0))z = (ae, 0)z = (a, 0)z = (e, 0)$  (où la seconde égalité est vérifiée puisque  $a \in Re$ ). Pour prouver (2), supposons que  $x^2 = (e, 0)$  pour tout  $x \in V(G)$ , et soit  $(a, b), (c, d) \in V(G)$  tels que  $(a, b)(c, d) = (e, 0)$ . Puis  $(a, 0)(c, 0) = (e, 0)$ , et les égalités  $(a, 0)(c, d) = (e, 0) = (a, b)(c, 0)$  montrent que  $(a, 0), (c, 0) \in V(G)$ . Par conséquent, l'hypothèse implique  $a \neq c$ . En particulier,  $|V(G)| \geq 2$ .

Puisque  $a^{-1} = c$  dans  $Re$ , un sommet  $(r, s)$  de  $G$  est adjacent à  $(a, b)$  (respectivement,  $(c, d)$ ) dans  $G$  si et seulement si  $r = c$  (respectivement,  $r = a$ ), et  $sb = 0$  (respectivement,  $sd = 0$ ). Étant donné tout  $v \in V(G)$ , puisque  $G$  est connexe, le même argument peut être itéré pour montrer que  $v \in \{a, c\} \times \text{ann}_R(e)$ . Aussi, pour

tout  $t \in \{a, c\} \times \text{ann}_R(e)$ , soit  $(a, 0)t = (e, 0)$  ou  $(c, 0)t = (e, 0)$ , et il s'ensuit que  $V(G) = \{a, c\} \times \text{ann}_R(e)$ . Ainsi, en fixant  $V(K_2) = \{a, c\}$ , il est simple de vérifier que l'application identité  $I : G \rightarrow K_2 \times \Gamma_0^*(\text{ann}_R(e))$  est un isomorphisme des graphes.

"En particulier" il est clair puisque  $\text{ann}_R(e)$  est un anneau commutatif.  $\square$

*Le corollaire suivant fournit l'analogie du théorème 5.3.1 pour un anneau  $R$  avec identité. Dans ce cas, les conditions concernant  $x^2$  pour  $x \in V(G)$  peuvent être remplacées par des conditions sur l'ensemble "plus petit"  $U(R) \cap V(G)$ .*

**Corollaire 5.3.1** *Soit  $E$  un élément idempotent d'un anneau commutatif  $R$  avec identité. Si  $G$  est une composante de  $\Gamma_e(R)$  alors on a les assertions suivantes :*

(1) *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- (i)  $x^2 = e$  pour un certain  $x \in V(G)$ .
- (ii)  $u = u^{-1}$  pour un certain  $u \in U(R) \cap V(G)$ .
- (iii)  $G \cong \Gamma_0(R(1 - e))$ .

(2) *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- (i)  $x^2 \neq e$  pour tout  $x \in V(G)$ .
- (ii)  $u \neq u^{-1}$  pour tout  $u \in U(R) \cap V(G)$ .
- (iii)  $G \not\cong K_2 \times \Gamma_0^*(R(1 - e))$ .

*En particulier, si l'une des affirmations de (1) est vérifiée, alors  $G$  est isomorphe à un graphe zéro diviseur d'un anneau commutatif avec identité.*

**Preuve**

(1) et (2) sont claires à partir du théorème 5.3.1 et du lemme 5.2.4 que (i) et (iii) sont équivalents. De plus, si  $u = u^{-1}$  pour un certain  $u \in U(R) \cap V(G)$  alors  $(ue)^2 = e$ , et  $ue \in V(G)$  d'après la proposition 5.2.7. Ceci vérifie que (ii) implique (i) dans (1), et (i) implique (ii) dans (2).

Supposons que  $x^2 = e$  pour un certain  $x \in V(G)$ . Alors  $xe \in V(G)$  d'après la proposition 5.2.7, et donc l'égalité  $(xe + (1 - e))xe = e$  implique que  $xe + (1 - e) \in V(G)$ . De plus,  $(xe + (1 - e))^2 = 1$ , c'est-à-dire  $xe + (1 - e) = (xe + (1 - e))^{-1}$ . Cela montre que (i) implique (ii) dans (1), et (ii) implique (i) dans (2).

L'énoncé "en particulier" est clair puisque  $R(1 - e)$  est un anneau commutatif avec élément d'identité  $1 - e$ .  $\square$

*Le corollaire suivant généralise le fait que le graphe zéro diviseur d'un anneau  $R$  est fini si et seulement si  $R$  est fini.*

**Corollaire 5.3.2** *Soit  $e$  un élément idempotent d'un anneau commutatif  $R$ . Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- 1) *Il existe une composante de  $\Gamma_e(R)$  qui est fini.*
- 2) *Toute composante de  $\Gamma_e(R)$  est fini.*
- 3)  *$\text{ann}_R(e)$  est fini.*

En particulier, si  $R$  a une identité alors ces affirmations sont vraies si et seulement si  $R(1 - e)$  est fini.

**Preuve** Les énoncés (1), (2) et (3) sont équivalents par le théorème 5.3.1 puisque  $\Gamma_0(\text{ann}_R(e))$  est fini si et seulement si  $K_2 \times \Gamma_0^*(\text{ann}_R(e))$  est fini, si et seulement si  $\text{ann}_R(e)$  est fini. L'énoncé "en particulier" tient de même par le corollaire 5.3.2.  $\square$

Les conditions du corollaire 5.3.3 n'impliquent pas que  $\Gamma_e(R)$  est fini (par exemple,  $\Gamma_1(\mathbb{Q})$  est infini même si  $\text{ann}_{\mathbb{Q}}(1) = \{0\}$  est fini), mais le résultat suivant complète la caractérisation fini  $\Gamma_e(R)$  dans le cas où  $R$  a une identité en imposant la condition supplémentaire " $U(R)$  est fini". Notons que l'hypothèse "avec identité" ne peut pas être supprimée, même si la condition " $U(R)$  est fini" est renforcée en " $R \setminus Z(R)$  est finie" (par exemple, si  $R = \mathbb{Q} \times \{0, 2\} \subseteq \mathbb{Q} \times \mathbb{Z}_4$  et  $e = (1, 0) \in R$  alors  $\text{ann}_R(e) = \{(0, 0), (0, 2)\}$  est fini et  $R \setminus Z(R) = \emptyset$ , mais  $(x, 0) \in V(\Gamma_e(R))$  pour tout  $x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ ).

**Corollaire 5.3.3** Soit  $e$  un élément idempotent d'un anneau commutatif  $R$  avec identité. Alors  $\Gamma_e(R)$  est fini si et seulement si  $R(1 - e)$  est fini et  $U(R)$  est fini.

**Preuve** L'énoncé "seulement si" est clair par le corollaire 5.3.2 et la partie " $U(R) \subseteq V(\Gamma_e(R))$ " de la Proposition 5.2.3. L'énoncé "si" découle du corollaire 5.3.2 puisque " $U(R) \cap V(G) \neq \emptyset$  pour chaque composante  $G$ " de la proposition 5.2.3 implique que  $\Gamma_e(R)$  n'a qu'un nombre fini des composantes.  $\square$

Soit  $e$  un élément idempotent d'un anneau commutatif  $R$ , et soit  $x \in V(\Gamma_e(R))$  tel que  $x^2 = e$ . Par le corollaire 5.3.2, si  $R$  a une identité alors la composante de  $\Gamma_e(R)$  contenant  $x$  est isomorphe à un graphe zéro diviseur d'un anneau commutatif qui a une identité. Cependant, il est clair que l'inverse n'a pas besoin d'exister (par exemple, posez  $x = e = 0$  et notez que  $\Gamma_e(2\mathbb{Z})$  est isomorphe au graphe zéro diviseur  $\Gamma_0(\mathbb{Z})$ ). De plus, l'inverse de l'énoncé "en particulier" du théorème 5.3.1 peut échouer. Par exemple, si  $r \in \mathbb{Q} \setminus \{0, 1, -1\}$  et  $G$  est la composante de  $\Gamma_1(\mathbb{Q})$  contient  $r$  alors  $x^2 \neq 1$  pour tout  $x \in V(G)$  mais  $G \cong K_2 \cong \Gamma_0(\mathbb{Z}_2)$ . D'autre part, le résultat suivant montre que des exemples comme celui-ci sont les seuls contre-exemples, et il caractérise les composantes des graphes d'idempotents de division qui sont isomorphes à des graphes zéro diviseur des anneaux commutatifs.

**Corollaire 5.3.4** Soit  $e$  un élément idempotent d'un anneau commutatif  $R$ . Si  $G$  est une composante de  $\Gamma_e(R)$  tel que  $G \not\cong K_2$  alors  $G$  est isomorphe au graphe zéro diviseur d'un anneau commutatif si et seulement si  $x^2 = e$  pour un certain  $x \in V(G)$ .

**Preuve** L'énoncé "si" est vérifié par le théorème 5.3.1. Pour vérifier l'inverse, supposons que  $x^2 = e$  pour chaque  $x \in V(G)$ . Alors  $G \cong K_2 \times \Gamma_0^*(\text{ann}_R(e))$  par le théorème 5.3.1. Par conséquent,  $|\text{ann}_R(e)| \geq 2$  puisque  $G \not\cong K_2$ .

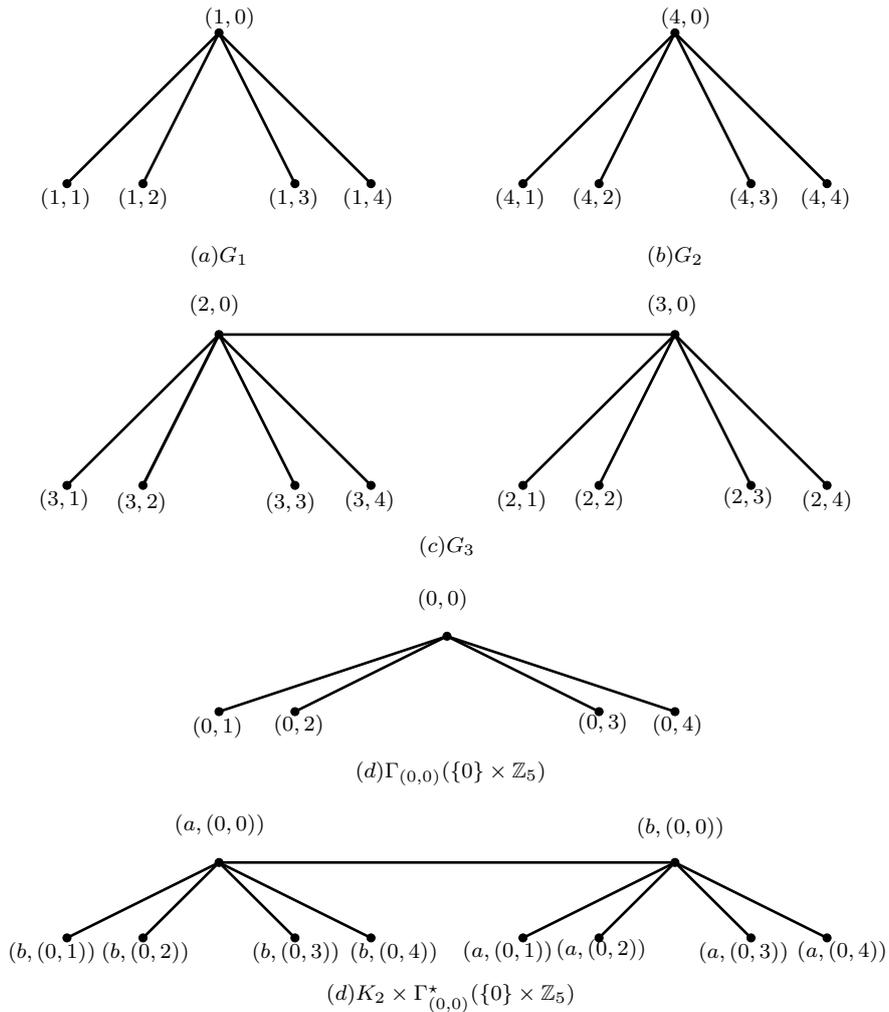
Soit  $V(K_2) = \{a, b\}$ , et choisissons  $0 \neq y \in \text{ann}_R(e)$ . Si  $x \in V(K_2 \times \Gamma_0^*(\text{ann}_R(e)))$  alors soit  $(a, y) \notin N(x)$  ou  $(b, y) \notin N(x)$ . De plus,  $(a, y)$  n'est pas adjacent à  $(a, 0)$ , et  $(b, y)$  n'est pas adjacent à  $(b, 0)$ . Ça suit que pour tout  $v \in V(G)$  il existe  $w \in V(G) \setminus \{v\}$  tel que  $v \notin N_G(w)$ . Cependant, 0 est adjacent à chaque autre sommet dans un graphe zéro diviseur, et donc  $G$  n'est pas isomorphe à un graphe zéro diviseur.  $\square$

**Théorème 5.3.2** Soit  $e$  un élément idempotent d'un anneau commutatif  $R$ . Si  $G$  est une composante de  $\Gamma_e(R)$  alors  $G \cong \Gamma_0(\text{ann}_R(e))$  si et seulement si  $(re)^2 = e$  pour tout  $r \in V(G)$ .

**Preuve** Si  $r \in V(G)$  puis  $re \in V(G)$  par la proposition 5.2.7. Par conséquent, la déclaration "si" tient par le premier énoncé du théorème 5.3.1(1). Inversement, si  $G \cong \Gamma_0(\text{ann}_R(e))$  et  $r \in V(G)$  alors  $(re)^2 = e$  par la deuxième assertion du théorème 5.3.1(1).  $\square$

**Corollaire 5.3.5** Soit  $e$  un élément idempotent d'un anneau commutatif  $R$ . Alors  $G \cong H$  pour toutes les composantes  $G$  et  $H$  de  $\Gamma_e(R)$  si et seulement si  $(re)^2 = e$  pour tout  $r \in V(\Gamma_e(R))$ . Dans ce cas,  $G \cong \Gamma_0(\text{ann}_R(e))$  pour chaque composante  $G$  de  $\Gamma_e(R)$ .

**Preuve** L'instruction "si" et la dernière assertion sont des conséquences immédiates du théorème 5.3.6. Inversement, si  $G \cong H$  pour toutes les composantes  $G$  et  $H$  de  $\Gamma_e(R)$  alors il résulte de la proposition 5.2.5(3) et l'hypothèse que  $G \cong \Gamma_0(\text{ann}_R(e))$  pour toute composante  $G$  de  $\Gamma_e(R)$ . Par conséquent, le résultat est obtenu par le Théorème 5.3.6.  $\square$



**Figure 1.**  $\Gamma_{(1,0)}(\mathbb{Z}_5^2) = G_1 \cup G_2 \cup G_3, G_1 \cong G_2 \cong \Gamma_{(0,0)}(\{0\} \times \mathbb{Z}_5)$ ,  
et  
 $G_3 \cong K_2 \times \Gamma_{(0,0)}(\{0\} \times \mathbb{Z}_5)$

**Corollaire 5.3.6** *Soit  $e$  un élément idempotent d'un anneau commutatif  $R$  avec identité. Si  $G$  est une composante de  $\Gamma_e(R)$  alors  $G \cong \Gamma_0(R(1-e))$  si et seulement si  $(ue)^2 = e$  pour tout  $u \in U(R) \cap V(G)$ . En particulier,  $G \cong H$  pour toutes les composantes  $G$  et  $H$  de  $\Gamma_e(R)$  si et seulement si  $(ue)^2 = e$  pour tout  $u \in U(R)$ .*

**Preuve** La partie "seulement si" de la première instruction suit immédiatement le lemme 5.2.4 et le théorème 5.3.6. Inversement, soit  $G$  une composante de  $\Gamma_e(R)$ , et supposons que  $(ue)^2 = e$  pour tout  $u \in U(R) \cap V(G)$ . Notons que  $U(R) \cap V(G) \neq \emptyset$  d'après la proposition 5.2.3, soit  $u \in U(R) \cap V(G)$ . L'hypothèse implique que  $(ue)^2 = e$ , et  $ue \in V(G)$  est vérifié par la proposition 5.2.7. Par conséquent,  $G \cong \Gamma_0(R(1-e))$  par le Corollaire 5.3.2.

La partie "si" de l'instruction "en particulier" découle immédiatement de la première affirmation. Mais  $U(R) \subseteq V(\Gamma_e(R))$  par la proposition 5.2.3, donc la partie "seulement si" suit le corollaire 5.3.7.  $\square$

**Exemple 5.3.1**  $R = \mathbb{Z}_5^2$  et  $e = (1, 0)$  alors  $\Gamma(R) = G_1 \cup G_2 \cup G_3$ , où  $G_1, G_2$  et  $G_3$  sont les composants donnés dans la figure 1 (a), (b) et (c). Corollaire 5.3.2(1) implique que  $G_1 \cong G_2 \cong \Gamma_{(0,0)}(\{0\} \times \mathbb{Z}_5) \cong K_{1,4}$  puisque  $(1, 0) \in V(G_1)$  avec  $(1, 0)^2 = e$  et  $(4, 0) \in V(G_2)$  avec  $(4, 0)^2 = e$  (voir figure 1(d)). De plus,  $(2, 0) \in V(G_3)$  avec  $((2, 0)e)^2 = (4, 0) = e$ , donc le théorème 5.3.6 et le corollaire 5.3.2 donnent  $G_3 \cong K_2 \times \Gamma_0^*(\{0\} \times \mathbb{Z}_5)$  (voir figure 1(e)).

## 5.4 Connexité et anneaux de quotient total

Deux résultats bien connus de la théorie des graphes des diviseurs de zéro sont considérés pour les graphes d'idempotents de division dans cette section. Premièrement, il est clair que les graphes des diviseurs de zéro  $\Gamma_0(R)$  sont connexes (pour tout sommet non nul adjacent à zéro). Deuxièmement, il est bien connu que si  $R$  a une identité alors  $\Gamma(R) \cong \Gamma(T(R))$ . Une condition suffisante pour que  $\Gamma_e(R)$  soit connexe (en particulier, par le corollaire 5.2.6, pour que  $\Gamma_e(R)$  soit isomorphe à un graphe de diviseur de zéro d'un anneau commutatif) est fourni dans le premier théorème (cf. Exemple 5.5.6 et Théorème 5.5.7), puis le reste est consacré à l'extension du résultat sur les anneaux de quotient total.

**Théorème 5.4.1** *Soit  $e$  un élément idempotent d'un anneau commutatif  $R$ . Si  $Re$  est un anneau booléen alors  $\Gamma_e(R)$  est connexe.*

**Preuve** Soit  $G$  une composante de  $\Gamma_e(R)$ . Puisque  $G$  est choisi arbitrairement, pour prouver que  $\Gamma_e(R)$  est connexe (c'est-à-dire pour montrer que  $\Gamma_e(R) = G$ ), il suffit de vérifier que  $e \in V(G)$ .

Soit  $x \in V(G)$ , et choisissons  $y \in R$  tel que  $xy = e$ . Les égalités  $x^2e = (xe)^2 = xe$  sont vraies puisque  $Re$  est un anneau booléen. Par conséquent,  $e - xe = e - xee = e - x(xy)e = e - (x^2e)y = e - xey = e - (xy)e = e - ee = e - e = 0$ . Autrement dit,  $xe = e$ , et donc  $e \in V(G)$ .  $\square$

Observez que la réciproque du théorème 5.4.1 peut échouer. Par exemple, si  $R = \mathbb{Z}_2[X]$  alors  $\Gamma_1(R) \cong K_1$  est connexe, mais  $R1 = R$  n'est pas un anneau booléen. D'autre part, le théorème 5.5.7 montre que l'inverse est vrai si  $R$  est régulier de von Neumann.

Soit  $e$  un élément idempotent d'un anneau commutatif  $R$ . Si  $\Gamma_e(T(R))$  est connexe alors la Proposition 5.2.5(1) implique que  $xe = e$  pour tout  $x \in V(\Gamma_e(T(R)))$ . Mais il est clair que  $V(\Gamma_e(R)) \subseteq V(\Gamma_e(T(R)))$ , donc  $xe = e$  pour tout  $x \in V(\Gamma_e(R))$ . Ceci vérifie l'observation suivante.

**Lemme 5.4.1** *Soit  $e$  un élément idempotent d'un anneau commutatif  $R$ . Si  $\Gamma_e(T(R))$  est connexe alors  $\Gamma_e(R)$  est connexe.*

La réciproque du lemme 5.4.2 peut être échouer. Par exemple, soit  $R = \mathbb{Z}_2[X]$ . Alors  $\Gamma_1(R) \cong K_1$  est connexe, mais  $\Gamma_1(T(R)) = \Gamma(\mathbb{Z}_2(X))$  est l'union disjointe de  $K_1$  et de nombreuses copies de  $K_2$ .

Soit  $R$  un anneau commutatif avec identité. Pour tout  $a \in R$ , définissons  $[a]_R = \{r \in R \mid \text{ann}_R(r) = \text{ann}_R(a)\}$ . La preuve de [[8], théorème 2.2] montre que  $|[a]_R| = |[a]_R T(R)|$  pour tout  $a \in Z(R) \setminus \{0\}$ , mais il peut être facilement raffiné (en un argument plus simple) pour montrer que  $|R \setminus Z(R)| = |U(T(R))|$  (en particulier,  $|[1]_R| = |[1]T(R)|$  pour  $R$  avec identité).

**Lemme 5.4.2** *Si  $R$  est un anneau commutatif alors  $|R \setminus Z(R)| = |U(T(R))|$ .*

**Preuve** L'inclusion  $R \setminus Z(R) \subseteq U(T(R))$  est claire, il suffit donc de montrer  $|U(T(R))| \leq |R \setminus Z(R)|$ . Supposons que  $R \setminus Z(R)$  soit fini. Si  $a/b \in U(T(R))$  ( $a, b \in R \setminus Z(R)$ ), alors  $ab^i \in R \setminus Z(R)$  pour tout  $i \in \mathbb{N}$ . Il existe donc  $i, j \in \mathbb{N}$  avec  $i < j$  tel que  $ab^i = ab^j$ . Par conséquent,  $a/b = ab^{j-i}/b = ab^{j-i-1} \in R$ , et il s'ensuit que  $R \setminus Z(R) = U(T(R))$ .

Supposons que  $R \setminus Z(R)$  est infini. L'application  $(R \setminus Z(R)) \times (R \setminus Z(R)) \rightarrow U(T(R))$  définie par  $(a, r) \mapsto a/r$  est clairement surjectif, et donc  $|U(T(R))| \leq |R \setminus Z(R)|^2 = |R \setminus Z(R)|$ .  $\square$

Pour le reste de cette section,  $R$  est un anneau commutatif avec identité. Puisque  $\Gamma(R) \cong \Gamma(T(R))$ , il découle du lemme 5.4.3 que  $\Gamma_0(R) \cong \Gamma_0(T(R))$  (en effet, l'union de tout isomorphisme de graphe  $\Gamma(R) \rightarrow \Gamma(T(R))$  avec une bijection entre  $(R \setminus Z(R)) \cup \{0\}$  et  $U(T(R)) \cup \{0\}$  telle que  $0 \mapsto 0$  est un isomorphisme des graphes  $\Gamma_0(R) \rightarrow \Gamma_0(T(R))$ ). En fait, la preuve de [[8], Théorème 2.2] fournit un isomorphisme des graphes  $\Gamma(R) \rightarrow \Gamma(T(R))$  dont la restriction à  $[a]_R$  est une bijection  $[a]_R \rightarrow [a]_{T(R)}$  pour tout  $a \in Z(R) \setminus \{0\}$ . En particulier, l'isomorphisme respecte les "cycles", et il s'ensuit que  $\Gamma_0^*(R) \cong \Gamma_0^*(T(R))$ . Ces observations sont consignés dans la proposition suivante.

**Proposition 5.4.1** *Si  $R$  est un anneau commutatif avec identité alors  $\Gamma_0(R) \cong \Gamma_0(T(R))$  et  $\Gamma_0^*(R) \cong \Gamma_0^*(T(R))$ .*

**Remarque 5.4.1** *Notez que  $T(Re) = T(R)e$  est valable pour tout élément idempotent  $e$  d'un anneau commutatif  $R$  avec identité. (Ceci peut être échouer si  $e$  n'est pas un idempotent; par exemple, si  $R = \mathbb{Z}[X, Y]/(XY, Y^2)$  alors  $T(RX) \cong T(\mathbb{Z}[X]X) \cong \mathbb{Q}(X)$ , mais  $1 \notin T(R)X$  puisque  $X \in Z(R)$ .) Pour*

montrer cela, soit  $re/(se) \in T(Re)$  ( $r, s \in R$  avec  $se \in Re \setminus Z(Re)$ ). Si  $x \in R$  avec  $x(se + 1 - e) = 0$  alors  $(xe)(se) = xe(se + 1 - e) = 0$ , ce qui implique  $xe = 0$ . Donc,  $x = x(se + 1 - e) = 0$ , et ainsi  $se + 1 - e \in R \setminus Z(R)$ . Donc,  $re/(se) = (r/(se + 1 - e))e \in T(R)e$ .

Pour l'inclusion inverse, soit  $(r/s)e \in T(R)e$  ( $r \in R$  et  $s \in R \setminus Z(R)$ ). Si  $xe \in Re$  ( $x \in R$ ) avec  $(xe)(se) = 0$  alors  $xe = 0$  puisque  $(xe)s = (xe)(se) = 0$ . Ainsi,  $se \in Re \setminus Z(Re)$ , et donc  $(r/s)e = (re)/(se) \in T(Re)$ . Par conséquent,  $T(Re) = T(R)e$ .

L'observation de la remarque précédente est utilisée librement (par rapport à l'élément idempotent  $1 - e$ ) dans la preuve du résultat suivant, qui généralise [[8], Théorème 2.2].

**Théorème 5.4.2** *Soit  $e$  un élément idempotent d'un anneau commutatif  $R$  avec identité, et soit  $v \in V(\Gamma_e(R))$ . Si  $G_R$  est la composante de  $\Gamma_e(R)$  contenant  $v$ , et  $G_{T(R)}$  est la composante de  $\Gamma_e(T(R))$  contenant  $v$ , alors  $G_R \cong G_{T(R)}$ .*

**Preuve**

On observe d'abord que  $x^2 = e$  pour un certain  $x \in V(G_R)$  si et seulement si  $y^2 = e$  pour un certain  $y \in V(G_{T(R)})$ . La partie " seulement si " de cette déclaration tient de manière triviale en définissant  $y = x$ . À l'inverse, notez que  $ve \in V(G_R) \subseteq V(G_{T(R)})$  d'après la proposition 5.2.7. Ainsi, si  $y^2 = e$  pour un certain  $y \in V(G_{T(R)})$  alors  $(ve)^2 = e$  par la deuxième assertion du théorème 5.3.1(1), et l'affirmation suit en fixant  $x = ve$ .

Si  $x^2 = e$  pour un certain  $x \in V(G_R)$  alors  $G_R \cong \Gamma_0(R(1 - e)) \cong \Gamma_0(T(R(1 - e))) = \Gamma_0(T(R)(1 - e)) \cong G_{T(R)}$ , où la première et la dernière congruences sont vérifiées par le théorème 5.3.1 et la deuxième congruence est vérifiée par la Proposition 5.4.4. De même, si  $x^2 = e$  pour tout  $x \in V(G_R)$  alors  $G_R \cong K_2 \times \Gamma_0^*(R(1 - e)) \cong K_2 \times \Gamma_0^*(T(R(1 - e))) = K_2 \times \Gamma_0^*(T(R)(1 - e)) \cong G_{T(R)}$ .  $\square$

Le corollaire suivant est une conséquence immédiate du lemme 5.4.2 et du théorème 5.4.6, et cela généralise la première assertion de la proposition 5.4.4.

**Corollaire 5.4.1** *Soit  $e$  un élément idempotent d'un anneau commutatif  $R$  avec identité. Si  $\Gamma_e(T(R))$  est connexe alors  $\Gamma_e(R) \cong \Gamma_e(T(R))$ .*

## 5.5 Anneaux réguliers de von Neumann

Les résultats des sections ci-dessus sont maintenant appliqués pour fournir certaines propriétés des graphes des idempotents de division d'anneaux booléens, ainsi que des anneaux réguliers de von Neumann plus généraux. Le résultat suivant spécialise la proposition 5.2.5 en montrant que  $G$  peut être remplacé par  $\Gamma_e(R)$  si  $R$  est booléen.

**Théorème 5.5.1** *Si  $x$  est un élément d'un anneau booléen  $R$  alors  $\Gamma_x(R)$  est connexe et  $V(\Gamma_x(R)) = \{a \in R \mid ax = x\}$ . En particulier,  $\Gamma_x(R)$  est isomorphe au graphe zéro diviseur d'un anneau booléen.*

**Preuve** Notez que  $\Gamma_x(R)$  est connexe par le théorème 5.4.1, et donc  $V(\Gamma_x(R)) =$

$\{aR \mid ax = x\}$  tient par la proposition 5.2.5(1). Puisque  $\text{ann}_R(x)$  est un anneau booléen, l'énoncé "en particulier" suit par Proposition 5.2.5(3).  $\square$

*Le corollaire suivant est vérifié par le théorème 5.5.1 et la proposition 5.2.5(4) ainsi si un anneau booléen  $R$  a une identité alors  $R(1 - e)$  est un anneau booléen d'identité  $1 - e$ .*

**Corollaire 5.5.1** *Si  $x$  est un élément de l'anneau booléen  $R$  avec identité alors  $\Gamma_x(R)$  est isomorphe au graphe zéro diviseur d'un anneau booléen avec identité.*

*La proposition suivante caractérise la structure algébrique du semi-groupe  $V(\Gamma_x(R))$  lorsque  $R$  est un anneau booléen fini. Rappelons qu'un anneau fini  $R$  est un anneau booléen si et seulement s'il est isomorphe à  $\mathbb{Z}_2^k$ , où  $k$  est le nombre d'idéaux premiers distincts de  $R$  (par exemple, voir [[9], théorème 8.7]).*

**Proposition 5.5.1** *Si  $x$  est un élément d'un anneau booléen fini  $R$  alors  $\text{ann}_R(x) \cong \mathbb{Z}_2^{\log_2|\text{ann}_R(x)|}$  (comme monoïde multiplicatif). En particulier,  $V(\Gamma_x(R)) \cong \mathbb{Z}_2^{\log_2|\text{ann}_R(x)|}$  (sous forme de monoïde multiplicatif).*

**Preuve** Notez que  $\text{ann}_R(x)$  est un anneau booléen fini, donc  $\text{ann}_R(x) \cong \mathbb{Z}_2^k$  pour un certain  $k \in \mathbb{N}$ . Mais  $2^k = |\mathbb{Z}_2^k| = |\text{ann}_R(x)| = 2^{\log_2|\text{ann}_R(x)|}$ , ce qui implique que  $k = \log_2|\text{ann}_R(x)|$ . Ainsi,  $\text{ann}_R(x) = \mathbb{Z}_2^{\log_2|\text{ann}_R(x)|}$ .

L'énoncé "en particulier" tient par le premier énoncé avec le théorème 5.5.1 et la Proposition 5.2.5(2).  $\square$

*Notez que le monoïde  $V(\Gamma_x(R))$  dans la proposition 5.5.3 n'a pas besoin d'être un anneau (par exemple, voir l'exemple donné dans les commentaires antérieurs à la proposition 5.2.7). Le corollaire suivant caractérise les graphes d'idempotents de division des anneaux booléens finis.*

**Corollaire 5.5.2** *Si  $x$  est un élément d'un anneau booléen fini  $R$  alors  $\Gamma_x(R) \cong \Gamma_0(\mathbb{Z}_2^{\log_2|\text{ann}_R(x)|})$ .*

**Preuve** Le graphe  $\Gamma_x(R)$  est connexe par le théorème 5.1, donc le résultat suit immédiatement la proposition 5.3 et le théorème 3.1(1).  $\square$

*L'exemple suivant illustre le corollaire 5.5.4.*

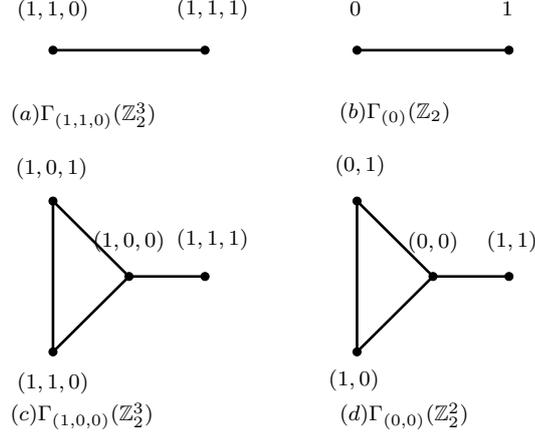
### Exemple 5.5.1

*Soit  $R = \mathbb{Z}_2^3$ . Si  $x = (1, 1, 0)$  alors notez que  $\log_2(|\text{ann}_R(x)|) = \log_2(|\{(0, 0, 0), (0, 0, 1)\}|) = \log_2(2) = 1$  donc, par le corollaire 5.5.4,  $\Gamma_{(1,1,0)}(R) \cong \Gamma_0(\mathbb{Z}_2)$  (voir figure 2(a) et (b)). Si  $x = (1, 0, 0)$  alors  $\log_2(|\text{ann}_R(x)|) = \log_2(|\{(0, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), (0, 1, 1)\}|) = \log_2(4) = 2$  donc, d'après le corollaire 5.5.4,  $\Gamma_{(1,0,0)}(R) \cong \Gamma_{(0,0)}(\mathbb{Z}_2^2)$  (voir la figure 2(c) et (d)).*

*Le reste de cette section est consacré aux anneaux réguliers de von Neumann plus généraux. Le suivant exemple motive le théorème 5.5.7, ce qui montre que la*

réciproque du théorème 5.4.1 est vraie si  $R$  est régulier au sens de von Neumann.

**Exemple 5.5.2** Soit  $R = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ . Alors  $R$  est régulier au sens de von Neumann avec  $\Gamma_{(0,1)}(R) \cong K_2 \cup K_2$  (c'est l'union disjointe des graphes avec les ensembles des sommets  $\{(0, 1), (1, 1)\}$  et  $\{(0, 2), (1, 2)\}$ , respectivement) et  $\Gamma_{(1,0)}(R) \cong K_{1,2}$  (c'est le graphe avec l'ensemble des sommets  $\{(1, 0), (1, 1), (1, 2)\}$ ). Notons que  $R(0, 1) \cong \mathbb{Z}_3$ , tandis que  $R(1, 0) \cong \mathbb{Z}_2$  est un anneau booléen.



**Figure 2.** Les graphes  $\Gamma_{(1,1,0)}(\mathbb{Z}_2^3)$  et  $\Gamma_{(1,0,0)}(\mathbb{Z}_2^3)$  sont isomorphes à  $\Gamma_0(\mathbb{Z}_2)$  et  $\Gamma_{(0,0)}(\mathbb{Z}_2^2)$ , respectivement.

**Théorème 5.5.2** Soit  $e$  un élément idempotent d'un anneau régulier de von Neumann commutatif  $R$ . Alors les assertions suivantes sont équivalentes.

- (1)  $\Gamma_e(R)$  est connexe.
- (2)  $\Gamma_e(R)$  est isomorphe au graphe zéro diviseur d'un anneau régulier de von Neumann commutatif.
- (3)  $Re$  est un anneau booléen.

### Preuve

Rappelons que tout idéal  $I$  d'un anneau régulier de von Neumann  $R$  est régulier de von Neumann (par exemple, si  $x \in I$ , d'où disons  $x = xyx$  pour un certain  $y \in R$ , alors  $xyx \in I$  et  $x(yxy)x = (xyx)yx = xyx = x$ ). En particulier,  $\text{ann}_R(e)$  est un anneau régulier de von Neumann, et donc l'équivalence de (1) et (2) tient par le même raisonnement utilisé pour établir le corollaire 5.2.6.

Notons que (3) implique (1) par le théorème 5.4.1. Inversement, supposons que  $Re$  n'est pas un anneau booléen. Soit  $r \in R$  tel que  $(re)^2 \neq re$ , et choisir  $s \in R$  tel que  $r = r^2s$ .

Puisque  $x = re + e - rse$ ; alors  $xe = x$ . De plus, il est facile de vérifier que  $rse$  est un idempotent, et donc  $re \neq rse$ . Ainsi,  $x \neq e$ .

Notez que  $re(rs2 + e - rs) = (rse)^2 + re - r^2se = rse + re - re = rse$ ,  $e(rs^2 + e - rs) = rs^2e + e - rse$ , et  $rse(rs2 + e - rs) = (rse)^2s + rse - (rse)^2 = rses + rse - rse = rs^2e$ .

Il s'ensuit que  $x(rs^2 + e - rs) = rse + (rs^2e + e - rse) - rs^2e = e$ , ce qui montre  $x \in V(\Gamma_e(R))$ . Cependant,  $xe = x = e$ , donc  $x$  n'appartient pas au même composante que  $e$  par la proposition 5.2.5(1). Par conséquent, si  $Re$  n'est pas un anneau booléen alors  $\Gamma_e(R)$  est non connexe, c'est-à-dire que (1) implique (3).  $\square$

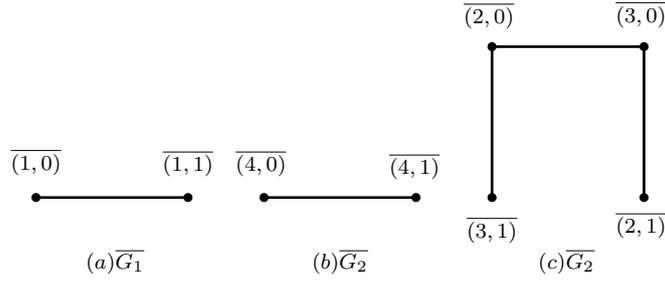
Soit  $G$  un graphe. Une relation d'équivalence sur  $V(G)$  peut être définie telle que la classe d'équivalence  $\bar{a}$  de  $a \in V(G)$  est donné par  $\bar{a} = \{b \in V(G) \mid N_G(a) = N_G(b)\}$ . Soit  $\overline{G}$  le graphe avec ensemble des sommets  $V(\overline{G}) = \{\bar{a} \mid a \in V(G)\}$  tel que les sommets  $\bar{a}$  et  $\bar{b}$  sont adjacents dans  $\overline{G}$  si et seulement si  $a$  et  $b$  sont adjacents dans  $G$ . Notons que si  $G = \Gamma_0^*(R)$  alors  $\bar{a} = [a]_R$  pour tout  $a \in V(G)$ . Étant donné deux graphes  $G$  et  $H$  sans sommets de degré 0, il est un exercice de routine pour vérifier que l'application  $\psi : \overline{G} \times \overline{H} \longrightarrow \overline{G \times H}$  définie par  $\psi((\bar{x}, \bar{y})) = \overline{(x, y)}$  est un isomorphisme. Pour plus de commodité, cette observation est consignée dans le lemme suivant.

**Lemme 5.5.1** *Soient  $G$  et  $H$  des graphes sans sommets de degré 0. Alors  $\overline{G} \times \overline{H} \cong \overline{G \times H}$ .*

Rappelons que si  $R$  est un anneau régulier de von Neumann commutatif avec identité alors  $\overline{\Gamma(R)} \cong \Gamma(B)$  pour un anneau booléen  $B$  [[8], Proposition 4.5]. Ce résultat est facilement étendu comme suit : Soit  $R$  un anneau régulier de von Neumann commutatif (pas nécessairement avec identité), et soit  $B$  l'ensemble de tous les éléments idempotents de  $R$ . Alors  $B$  est un anneau booléen avec multiplication héritée de  $R$ , et addition des éléments  $e, f \in B$  définis par  $e + f - 2ef$ . Si  $x \in R$ , disons  $y \in R$  avec  $x = x^2y$ , alors  $xy \in B$ , et  $\text{ann}_R(x) = \text{ann}_R(xy)$  (en effet, si  $r(xy) = 0$  alors  $rx = rx^2y = r(xy)x = 0$ ). De plus, si  $e, f \in B$  tel que  $\text{ann}_R(e) = \text{ann}_R(f)$  alors les appartenances suivantes  $f - ef \in \text{ann}_R(e)$  et  $e - ef \in \text{ann}_R(f)$  impliquent que  $e(e - ef) = 0 = f(f - ef)$ , c'est-à-dire  $e = ef = f$ . Ceci vérifie que l'application  $\Gamma_0^*(B) \longrightarrow \overline{\Gamma_0^*(R)}$  donné par  $e \mapsto \bar{e}$  est bijectif, et il est facile de voir que c'est un isomorphisme des graphes. Notez que la congruence  $\Gamma_0(B) \cong \overline{\Gamma_0(R)}$  suit immédiatement puisque  $\text{nil}(R) = \{0\}$ . Ces observations sont consignées dans la proposition suivante.

**Proposition 5.5.2** *Si  $R$  est un anneau régulier de von Neumann commutatif alors il existe un anneau booléen  $B$  tel que  $\overline{\Gamma_0(R)} \cong \Gamma_0(B)$  et  $\overline{\Gamma_0^*(R)} \cong \Gamma_0^*(B)$ .*

Le corollaire suivant généralise [[8], Proposition 4.5] aux composantes des graphes d'idempotents de division des anneaux réguliers de von Neumann commutatifs.



**Figure 3.** Les graphes  $\overline{G}_1$  et  $\overline{G}_2$  sont isomorphes à  $\Gamma_0(\mathbb{Z}_2)$ , et  $\overline{G}_3$  est isomorphe à  $K_2 \times \Gamma_0^*(\mathbb{Z}_2)$ .

**Corollaire 5.5.3** *Soit  $e$  un élément idempotent d'un anneau régulier de von Neumann commutatif  $R$ . Il existe un anneau booléen  $B$  tel que les assertions suivantes sont vraies pour chaque composante  $G$  de  $\Gamma_e(R)$ .*

- 1) *Si  $x^2 = e$  pour un certain  $x \in V(G)$  alors  $\overline{G} \cong \Gamma_0(B)$ .*
- 2) *Si  $x^2 \neq e$  pour tout  $x \in V(G)$  alors  $G \cong K_2 \times \Gamma_0^*(B)$ .*

**Preuve** Puisque  $\text{ann}_R(e)$  est un anneau régulier de von Neumann (comme dans la preuve du théorème 5.5.7), Proposition 5.5.9 montre qu'il existe un anneau booléen  $B$  tel que  $\overline{\Gamma_0(\text{ann}_R(e))} \cong \Gamma_0(B)$ . Ainsi, (1) suit par le théorème 5.3.1(1). De même, puisque ni  $K_2$  ni  $\Gamma_0^*(\text{ann}_R(e))$  ont des sommets de degré 0, (2) est vérifié par le théorème 5.3.1(2) et lemme 5.5.8 puisque  $\overline{K_2} \cong K_2$  et  $\overline{\Gamma_0^*(\text{ann}_R(e))} \cong \Gamma_0^*(B)$ .  $\square$

*Cette section se termine par un exemple pour illustrer le corollaire 5.5.10.*

**Exemple 5.5.3** *Considérons l'anneau  $R = \mathbb{Z}_5^2$  et l'élément  $e = (1, 0) \in R$  discuté dans l'exemple 5.3.9 (figure 1). Par le corollaire 5.5.10,  $\overline{G}_1 \cong \overline{G}_2 \cong \Gamma_0(B)$  pour un anneau booléen  $B$ . Dans ce cas,  $B \cong \mathbb{Z}_2$  (voir figure 3(a) et (b)), et donc le corollaire 5.5.10 implique  $\overline{G}_3 \cong K_2 \times \Gamma_0^*(\mathbb{Z}_2)$  (voir figure 3(c)).*

---

# Bibliographie

---

- [1] *B.R. McDonald, Finite Rings with Identity, Marcel Dekker Incorporated, New York, 1974.*
- [2] *D.Kr. Basnet, J. Bhattacharyya, Weak nil clean rings, arXiv :1510.07440.*
- [3] *Basnet D. K., Bhattacharyya J. : Nil clean graphs of rings, Algebra Colloq. 24, 481– 492, (2017).*
- [4] *Li, A., Li, Q. : A kind of graph structure on von-Neumann regular rings, Int. J. Algebra 4, 291–302, (2010).*
- [5] *Akbari, S., Habibi, M., Majidinya, A., Manaviyat, R. : On the idempotent graph of a ring. J. Algebra Appl. 12(6), 1350003 (2013).*
- [6] *Rowen, L.H. : Ring Theory (Student Edition). Academic Press, London (1991).*
- [7] *Lam, T.Y. : A First Course in Noncommutative Rings. Springer, New York(2001).*
- [8] *Anderson, D. F., Levy, R., Shapiro, J. (2003). Zero-divisor graphs, von Neumann regular rings, and Boolean algebras. J. Pure Appl. Algebra 180 :221–241.*
- [9] *Atiyah M. F., and I. G.MacDonald, I. G. (1969). Introduction to Commutative Algebra. Reading, MA :Addison-Wesley.*