كلية العلوم و التقنيات فاس
ⵜⴰⵖⵉⵡⴰⵏⵜ ⵏ ⵜⵎⴰⵙⵙⴰⵏⵉⵏ ⴷ ⵜⵙⵏⵉⵜⵉⵏ
Faculté des Sciences et Techniques de Fès

جامعة سيدي محمد بن عبد الله
ⵜⴰⵙⴷⴰⵡⵉⵜ ⵙⵉⴷⵉ ⵎⵓⵃⵎⵎⴰⴷ ⴱⵏ ⵄⴰⴱⴷⵍⵍⴰⵀ
Université Sidi Mohamed Ben Abdellah

Licence Mathématiques et Applications

(MA)

MEMOIRE DE FIN D'ETUDES

Pour l'obtention du Diplôme de Licence Sciences et Techniques (LST)

Les équations intégrales et leurs applications

Réalisé par : SELLIOUI SOUKAINA

Encadré par : Pr. EL AYADI RACHID

Soutenu le 10/07/2021

Devant le jury composé de :

-Pr. AZZEDINE EL BARAKA	FST FES
-Pr. EL AYADI RACHID	FST FES
-Pr. HILALI ABDELMAJID	FST FES
-Pr. OUADGHIRI ANISSE	FST FES

Année Universitaire 2020/ 2021

FACULTE DES SCIENCES ET TECHNIQUES FES – SAISS

B.P. 2202 – Route d'Imouzzer – FES

☎ 212 (0)5 35 61 16 86 – Fax : 212 (0)5 35 60 82 14

Site web : http://www.fst-usmba.ac.ma

Remerciement

Tout d'abord, je remercie Allah le tout puissant de m'avoir donné le courage et la patience nécessaires à mener ce travail à son terme.
Je tiens à remercier tout particulièrement mon encadrant **Mr.EL AYADI RACHID**, pour l'aide compétente qu'il m'a apporté, pour sa patience et son encouragement. Son œil critique m'a été très précieux pour structurer le travail et pour améliorer la qualité des différentes sections.
Que **Mr.EL AYADI RACHID**,**Mr.OUADGHIRI ANISSE** ,**Mr.AZZEDINE EL BARAKA** et **Mr.ABDELMAJID HILALI** les membres de jury trouvent, ici, l'expression de mes sincères remerciements pour l'honneur qu'ils me font en prenant le temps de lire et d'évaluer ce travail.
Je désire remercier également **Mr.LAHOUSSINE SELLIOUI** mon père, **Mr.HAMZA** , **FATIMA**, **mon frère** et **mes sœurs** pour les renseignements précieux qu'ils m'ont fournis ainsi que pour leurs encouragements.
Pour finir, je souhaite remercier toute personne ayant contribué de prés ou de loin à la réalisation de ce travail.

Table des matières

Chapitre 1

Introduction générale

1.1 Concepts préliminaires des équations intégrales

Une équation intégrale est définie comme une équation dans laquelle la fonction inconnue $u(x)$ à déterminer apparaît sous le signe intégral. Le sujet des équations intégrales est l'un des outils les plus utiles en mathématiques pures et appliquées.
Il a d'énormes applications dans de nombreux problèmes physiques.
Nombreux problèmes de valeur initiale associés à l'équation différentielle ordinaire (ODE) et partielle (PDE) peuvent être transformés en problèmes de résolution de certaines équations intégrales approximatives.
Le développement de la science a conduit à la formation de nombreuses lois physiques, lorsqu'ils sont reformulées sous forme mathématique, apparaissent souvent comme des équations différentielles.
Les problèmes d'ingénierie peuvent être décrits mathématiquement par des équations différentielles.
Par exemple, la loi de Newton, selon laquelle le taux de variation de l'impulsion d'une particule est égale à la force agissante sur elle, peut être traduite en langage mathématique comme équation différentielle.
De même, les problèmes survenant dans les circuits électriques, la cinétique chimique et le transfert de chaleur dans un milieu peuvent tous être représentés mathématiquement sous forme d'équations différentielles.
Une forme typique d'une équation intégrale dans $u(x)$ est la fonction inconnue ci-dessous :

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_{\beta(x)}^{\alpha(x)} K(x,t)u(t)\,dt \tag{1.1}$$

Où $K(x,t)$ est appelée le noyau de l'équation intégrale (1.1), et $\alpha(x)$ et $\beta(x)$ sont les limites d'intégration.

On observe facilement que la fonction inconnue $u(x)$ apparaît sous le signe intégral.
A noter ici que le noyau $K(x,t)$ et la fonction $f(x)$ dans l'équation (1.1) sont des fonctions connues,et λ est une constante.

L'objectif premier de ce cours est déterminer la fonction inconnue $u(x)$ qui satisfera l'équation (1.1) en utilisant un certain nombre de techniques de résolution.

On doit consacrer des efforts considérables à l'exploration de ces méthodes afin de résoudre ces équations.

1.2 Contexte historique des équations intégrales et illustrations mécaniques

En 1825, Abel, mathématicien italien, produisit pour la première fois une équation intégrale en connexion avec le fameux problème de la tautochrone.
Le problème est lié à la détermination d'une courbe le long de laquelle une particule glissant sans frottement, descend de sa position la plus haute, ou plus généralement, tel que le temps de descente est une fonction donnée de sa position initiale.
Pour être plus spécifique, considérons une courbe lisse située dans un plan vertical. Une particule lourde part du repos à n'importe quelle position P (voir Figure 1.1).

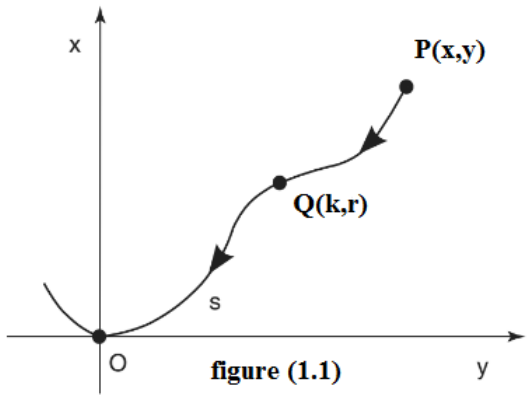


figure (1.1)

Trouvons sous l'action de la gravité, le temps $\boldsymbol{T}$ de descente à la plus basse position $\boldsymbol{O}$. En choisissant $\boldsymbol{O}$ comme origine des coordonnées, l'axe des $\boldsymbol{x}$ verticalement vers le haut, et l'axe $\boldsymbol{y}$ horizontal. Soit les coordonnées de $\boldsymbol{P(x,y)}$, de $\boldsymbol{Q(k,r)}$, et $\boldsymbol{s}$ l'arc $\boldsymbol{OQ}$.

À tout instant, la particule atteindra une énergie potentielle et une énergie cinétique à Q tel que la somme est constante, et mathématiquement, elle peut être énoncée comme :

$$\boldsymbol{E_c + E_p = constante}$$
$$\boldsymbol{1/2mv^2 + mgk = constante}$$
$$\boldsymbol{1/2v^2 + gk = C} \tag{1.2}$$

Où $\boldsymbol{m}$ est la masse de la particule, $\boldsymbol{v(t)}$ la vitesse de la particule à $\boldsymbol{Q}$, $\boldsymbol{g}$ l'accélération due à la gravité, et $\boldsymbol{k}$ la coordonnée verticale de la particule à $\boldsymbol{Q}$. Initialement, $\boldsymbol{v(0) = 0}$ en $\boldsymbol{P}$, la coordonnée verticale est $\boldsymbol{x}$, et donc la constante $\boldsymbol{C}$ peut être déterminée comme $\boldsymbol{C = gx}$.
Ainsi, nous avons :

$$\boldsymbol{1/2v^2 + gk = gx}$$

$$\boldsymbol{v^2 = 2g(x-k)}$$

$$\boldsymbol{v = \pm 2g(x-k)}$$

Mais $\boldsymbol{v = ds/dt =}$ vitesse le long de la courbe $\boldsymbol{s}$. Par conséquent,

$$\boldsymbol{ds/dt = \pm\sqrt{2g(x-k)}}$$

Compte tenu la valeur négative de $\boldsymbol{ds/dt}$ et intégrant de $\boldsymbol{P}$ à $\boldsymbol{Q}$ en séparant les variables, nous obtenons :

$$\int_P^Q dt = -\int_P^Q \frac{1}{(\sqrt{2g(x-k)})}\, ds$$

$$t = -\int_P^Q \frac{1}{(\sqrt{2g(x-k)})}\, ds$$

Le temps total de descente est donc :

$$\int_P^O dt = -\int_P^O \frac{1}{\sqrt{2g(x-k)}}\, ds$$

$$T = \int_O^P \frac{1}{(\sqrt{2g(x-k)})}\, ds \tag{1.3}$$

Si la forme de la courbe est donnée, alors $\boldsymbol{s}$ peut être exprimé en termes de $\boldsymbol{k}$. Soit $\boldsymbol{ds = u(k)dk}$, l'équation $\mathbf{(1.3)}$ prend la forme :

$$T = \int_0^x \frac{u(k)}{(\sqrt{2g(x-k)})}\, dk$$

Abel s'est posé le problème de trouver la courbe pour laquelle le temps $\boldsymbol{T}$ de descente est une fonction de $\boldsymbol{x}$donnée, disons $\boldsymbol{f(x)}$. Notre problème alors est de trouver la fonction inconnue $\boldsymbol{u(x)}$ de l'équation

$$f(x) = \int_0^x \frac{u(k)}{(\sqrt{2g(x-k)})}\, dk$$

$$f(x) = \int_0^x K(x,k)u(k)\, dk \tag{1.4}$$

Il s'agit d'une équation intégrale linéaire du premier type pour la détermination de $\boldsymbol{u(x)}$.

Ici, $\boldsymbol{K(x,k) = \dfrac{1}{\sqrt{2g(x-k)}}}$ est le noyau de l'équation intégrale.
Abel a résolu ce problème déjà en 1825, essentiellement de la même manière que nous utiliserons.

Chapitre 2

Préliminaire

Une équation intégrale est une équation dans laquelle la fonction inconnue $\boldsymbol{u(x)}$ apparaît sous le signe intégrale est de la forme :

$$\mathbf{u}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{\lambda} \int_{\boldsymbol{g(x)}}^{\boldsymbol{h(z)}} \boldsymbol{K}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{t})\boldsymbol{u}(\boldsymbol{t})\boldsymbol{dt}$$

Où $\boldsymbol{g(x)}$ et $\boldsymbol{h(x)}$ sont les bornes de l'intégration , $\boldsymbol{\lambda}$ est un paramètre constant et $\boldsymbol{K(x,t)}$ est une fonction de deux variables $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{t}$ appelée le noyau de l'équation intégrale.
La fonction $\boldsymbol{u(x)}$ qui sera déterminée apparaît sous le signe intégrale et à l'extérieur du signe intégrale. Les fonctions $\boldsymbol{f(x)}$ et $\boldsymbol{K(x,t)}$ sont données à l'avance , à noter que les bornes de l'intégration $\boldsymbol{g(x)}$ et $\boldsymbol{h(x)}$ peuvent être à la fois variables, constantes ou mixtes.

Une équation intégro-différentielle est une équation dans laquelle la fonction inconnue $\boldsymbol{u(x)}$ apparaît sous le signe intégral et contient une dérivée ordinaire $\boldsymbol{u^{(n)}(x), n \in N}$ ainsi une équation Intégro-différentielle standard est de la forme :

$$\boldsymbol{u}^{(n)}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{\lambda} \int_{\boldsymbol{g(x)}}^{\boldsymbol{h(x)}} \boldsymbol{K}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{t})\boldsymbol{u}(\boldsymbol{t})\boldsymbol{dt}$$

Avec $\boldsymbol{g(x), h(x), f(x), \lambda}$ et le noyau $\boldsymbol{K(x,t)}$ sont donnés.
Les équations intégrales et les équations intégro-différentielles seront classées en types distincts selon les bornes d'intégration et le noyau $\boldsymbol{K(x,t)}$.
Les types d'équations intégrales et d'équations intégro-différentielles seront classées et étudiées dans les prochains chapitres.

Dans ce chapitre, nous examinerons les concepts les plus importants pour étudier les équations intégrales .
Les méthodes traditionnelles connues : la méthode de la série Taylor et la méthode de transformation de Laplace, seront utilisées dans ce texte.
En outre, les méthodes récemment développées, qui serait utilisées dans ce texte, détermineront la solution sous la forme d'une série de puissance qui convergera vers une solution exacte si une telle solution existe.

En outre, nous examinerons les concepts de base pour résoudre les équations différentielles ordinaires. D'autres concepts mathématiques, comme la règle de Leibnitz, seront présentés.

2.1 La formule de Taylor-Young

théorème 1. *[4]*

Si l'application $\boldsymbol{f : R \to E}$ admet une dérivée d'ordre $\boldsymbol{n}$ en $\boldsymbol{a}$, alors :

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + o\left((x-a)^n\right)$$

La série de Taylor de $\boldsymbol{f(x)}$ en $\boldsymbol{a = 0}$ est appelée la série de Maclaurin donnée par :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

Cela équivaut à :

$$f(x) = f(0) + \frac{f(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}}{3!}(0)x^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots$$

Dans ce qui suit, nous donnons quelques exemples pour la détermination de la série de Maclaurin en $\boldsymbol{a = 0}$.

2.2 La règle de Leibnitz

Une des méthodes qui sera utilisée pour résoudre les équations intégrales est : la conversion de l'équation intégrale en une équation différentielle équivalente.
La conversion est réalisée en utilisant la règle bien connue de Leibnitz pour la différenciation des intégrales.
Cette règle [2] se résume à l'égalité suivante :

$$\frac{d}{dx}\int_{a(x)}^{b(x)} F(x,t)dt = \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial F(x,t)}{\partial x} dt + \frac{\partial b(x)}{\partial x} F(x, b(x)) - \frac{\partial a(x)}{\partial x} F(x, a(x))$$

2.3 Réduction des intégrales multiples en un intégrale simple

On verra plus tard que nous pouvons convertir les problèmes de valeur initiale et d'autres problèmes en équations intégrales. Il est normal de décrire la formule qui réduira les intégrales multiples en intégrales simples.

théorème 2. *[2]*

$$\int_0^x \int_0^{x_1} \cdots \int_0^{x_{n-1}} F\left(x_n\right) dx_n dx_{n-1} \ldots dx_1 = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x (x-t)^{n-1} F(t) dt$$

cette formule sera utilisée pour convertir les problèmes a valeur initiale en équations intégrales de Volterra.

corollaire 1. *[2]*

$$\underbrace{\int_0^x \int_0^x \cdots \int_0^x (x-t) F(t) dt dt \ldots dt}_{n \text{ intégrales}} = \frac{1}{n!} \int_0^x (x-t)^n F(t) dt.$$

C'est une formule essentielle et utile qui a beaucoup d'applications dans les problèmes d'équations intégrales.

2.4 Fonction analytique

En mathématiques, et plus précisément en analyse, une fonction analytique est une fonction d'une variable réelle ou complexe qui est développable en série entière au voisinage de chacun des points de son domaine de définition, c'est-à-dire que pour tout x_0 de ce domaine il existe une suite (a_n) donnant une expression de la fonction valable pour tout x assez proche de x_0 sous la forme d'une série convergente :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x - x_0)^n.$$

Toute fonction analytique est dérivable de dérivée analytique, ce qui implique que toute fonction analytique est indéfiniment dérivable, mais la réciproque est fausse en analyse réelle. En revanche, en analyse complexe, toute fonction simplement dérivable sur un ouvert est analytique et vérifie de nombreuses autres propriétés.

2.5 Problème aux limites

En analyse, un problème aux limites est constitué d'une équation différentielle (ou plus généralement aux dérivées partielles) dont on recherche une solution prenant de plus des valeurs imposées en des limites du domaine de résolution.

Exemple :

Un exemple de problème aux limites est l'équation différentielle du second ordre suivante :

$$\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}] \qquad y''(x) + y(x) = 0$$

pour laquelle on ne dispose pas de conditions initiales pas comme les problème à valeur initiale mais des valeurs aux bords de l'intervalle de définition :

$$y(0) = 0 \quad y(\frac{\pi}{2}) = 2$$

2.6 La table de la transformée de Laplace

Table de transformées de Laplace

	$f(t)$	$F(s)$
P1	1 ou $u(t)$	$\frac{1}{s}$
P2	t	$\frac{1}{s^2}$
P3	t^n (n entier positif)	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
P4	e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
P5	$t\,e^{-at}$	$\frac{1}{(s+a)^2}$
P6	$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
P7	$\cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
P8	$e^{-at}\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$
P9	$e^{-at}\cos(\omega t)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$
P10	$t\sin(\omega t)$	$\frac{2\omega s}{\left(s^2+\omega^2\right)^2}$
P11	$t\cos(\omega t)$	$\frac{s^2-\omega^2}{\left(s^2+\omega^2\right)^2}$
P12	t^n, $n\in\mathbb{R}$, $n>-1$	$\frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}}$
P13	$u(t-a)$	$\frac{e^{-as}}{s}$

P14	$\delta(t)$	1
P15	$\delta(t-a)$	e^{-as}
P16	$\frac{df}{dt} = f'(t)$	$sF(s) - f(0)$
P17	$\frac{d^2f}{dt^2} = f''(t)$	$s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$
P18	$\frac{d^nf}{dt^n} = f^{(n)}(t)$	$s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0)$
P19	$e^{-at}f(t)$	$F(s+a)$
P20	$t^nf(t)$	$(-1)^n\frac{d^n}{ds^n}F(s)$
P21	$g(t)\,u(t-a)$	$e^{-as}\mathscr{L}\{g(t+a)\}$

P22	$e^{-as}F(s)$	$f(t-a)u(t-a)$
P23	$\frac{F(s)}{s}$	$\int_0^t f(\tau)\,d\tau$
P24	$F(s)\cdot G(s)$	$\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau = f(t)*g(t) = (f*g)(t)$
P25	$\frac{1}{s^n}$	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$
P26	$\frac{1}{(s+a)^n}$	$\frac{t^{n-1}e^{-at}}{(n-1)!}$
P27	$\frac{1}{s^2+\omega^2}$	$\frac{1}{\omega}\sin(\omega t)$
P28	$\frac{1}{(s+a)^2+\omega^2}$	$\frac{1}{\omega}e^{-at}\sin(\omega t)$
P29	$\frac{1}{\left(s^2+\omega^2\right)^2}$	$\frac{1}{2\omega^3}(\sin(\omega t) - \omega t\cos(\omega t))$
P30	$\frac{s}{\left(s^2+\omega^2\right)^2}$	$\frac{1}{2\omega}(t\sin(\omega t))$

Chapitre 3

Classification des équations intégrales

Une équation intégrale peut être classée en une équation intégrale linéaire ou une équation intégrale non linéaire comme nous avons vu dans les équations différentielles ordinaires et partielles.
Dans la section précédente, nous avons remarqué que l'équation différentielle peut être représentée sous forme d'une équation intégrale équivalente. Par conséquent, il existe une bonne relation entre ces deux types d'équations.
Les équations intégrales les plus fréquemment utilisées appartiennent à deux grandes classes, à savoir :
Équations intégrales de Volterra et de Fredholm.
Bien sûr, nous devons les classer comme **homogène ou non homogène** et aussi **linéaire ou non linéaire**.
Dans certains pratiques problèmes, nous rencontrons également des **équations singulières**.
Dans ce texte, nous distinguerons quatre grands types d'équations intégrales. En particulier, les quatre types sont donnés ci-dessous :
•**Équations intégrales de Volterra**.
•**Équations intégrales de Fredholm**.
•**Équations intégro-différentielles**.
•**Équations intégrales singulières**.

Nous décrirons ces équations en utilisant des définitions de base et des propriétés de chaque type.

3.1 Les équations intégrales de Volterra

La forme la plus standard des équations intégrales linéaires de Volterra est de la forme :

$$\boldsymbol{\phi(x)u(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x,t)u(t)\,dt} \tag{3.1}$$

Où on a :

• x et a sont les bornes de l'intégrales.
• K(x,t) le noyau de l'équation.
• u(x) la fonction inconnue.

• Si $\boldsymbol{\phi(x) = 0}$
L'équation (3.1) devient simplement :

$$\boldsymbol{f(x) = \lambda \int_a^x K(x,t)u(t)\, dt} \tag{3.2}$$

Cette équation est connue sous le nom d'**équation intégrale de Volterra du premier type**.

• Si $\boldsymbol{\phi(x) = 1}$
L'équation (3.1) devient simplement :

$$\boldsymbol{u(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x,t)u(t)\, dt} \tag{3.3}$$

Cette équation est connue sous le nom d'**équation intégrale de Volterra du deuxième type**.

3.2 Les équations intégrales de Fredholm

La forme la plus standard des équations intégrales linéaires de Fredholm est donnée par la forme :

$$\boldsymbol{\phi(x)u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)u(t)dt} \tag{3.4}$$

Où on a :
• b et a sont les bornes de l'intégrales "des constantes".
•K(x,t) le noyau de l'équation.
•u(x) la fonction inconnue.

• Si $\boldsymbol{\phi(x) = 0}$
L'équation (3.4) devient simplement :

$$\boldsymbol{f(x) = \lambda \int_a^b K(x,t)u(t)dt} \tag{3.5}$$

Cette équation est connue sous le nom d'**équation intégrale de Fredholm du premier type.**

• Si $\boldsymbol{\phi(x) = 1}$
L'équation (1.9) devient simplement :

$$\boldsymbol{\phi(x)u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)u(t)dt} \tag{3.6}$$

Cette équation est connue sous le nom d'**équation intégrale de Fredholm du deuxième type**.

3.3 Remarque

Si la fonction inconnue $\boldsymbol{u(x)}$ apparaissant sous le signe intégral est donnée dans la forme fonctionnelle $\boldsymbol{F(u(x))}$ telle que la puissance de $\boldsymbol{u(x)}$ n'est plus l'unité, par exemple :

$$\boldsymbol{F(u(x)) = u^n(x)} \quad \text{avec} \quad \boldsymbol{n \neq 1}$$

Avec

$$F(u(x)) = sin(u(x)) \qquad etc.....$$

Alors dans ce cas les équations intégrales de Volterra et Fredholm sont classées comme équations intégrales non linéaires.

Ces équations intégrales sont des équations intégrales non linéaires :

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x,t)u^2(t)\,dt$$

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x,t)sin(u(t))\,dt$$

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x,t)\ln(u(t))\,dt$$

Ensuite, si nous posons $f(x) = 0$ dans les équations intégrales de Volterra ou de Fredholm, alors le résultat est une équation appelée **équation intégrale homogène**, **sinon elle est appelée équation intégrale non homogène**.

3.4 Les équations intégrales singulières

Une équation intégrale singulière est définie comme une intégrale avec les limites infinies ou lorsque le noyau de l'intégrale devient illimité à un certain point de l'intervalle. Par exemple :

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} u(t)\,dt$$

$$f(x) = \int_0^x \frac{1}{(x-t)^\alpha} u(t)\,dt \quad 0 < \alpha < 1 \tag{3.7}$$

3.5 Les équations intégro-différentielles

Au début des années 1900, Vito Volterra a étudié le phénomène de la croissance démographique, et de nouveaux types d'équations ont été développés et appelés équations intégro-différentielles. Dans ce type d'équations, la fonction inconnue $u(x)$ apparaît comme une combinaison du dérivées ordinaires et sous le signe intégrale.
Prenant par exemple les équations suivantes :

$$u''(x) = f(x) + \lambda \int_0^x (x-t)u(t)\,dt \quad u(0) = 0, u'(0) = 1 \tag{3.8}$$

$$u'(x) = f(x) + \lambda \int_0^1 (x-t)u(t)\,dt \quad u(0) = 1 \tag{3.9}$$

L'équation **(3.8)** est une équation intégro-différentielle de Volterra, alors que l'équation **(3.9)** est une équation intégro-différentielle de Fredholm.
Cette terminologie a été conclue en raison de la présence des bornes d'intégration indéfinis et définis.

Chapitre 4

Relations importantes

4.1 Convertir des équations de Volterra en EDO

Dans cette section, on va présenter la technique qui convertit les équations intégrales de Volterra du second type aux équations différentielles ordinaires équivalentes. Cela peut être obtenu simplement en utilisant **la règle de Leibnitz** qu'on a annoncé avant.

La règle de Leibnitz :

Pour différencier par rapport à x l'intégrale :

$$\int_{a(x)}^{b(x)} F(x,t)\, dt$$

On applique la règle de Leibnitz qui se résume à l'égalité suivante :

$$\frac{d}{dx}\int_{a(x)}^{b(x)} F(x,t)dt = \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial F(x,t)}{\partial x}\, dt + \frac{\partial b(x)}{\partial x} F(x, b(x)) - \frac{\partial a(x)}{\partial x} F(x, a(x))$$

Exemple : Calculons la dérivée par rapport a x de l'intégral

$$\int_0^x sin(x-t)u(t)\, dt$$

Solution :
En appliquant la règle de Leibnitz on a :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \int_0^x sin(x-t)u(t)\, dt}{\partial x} &= \int_0^x cos(x-t)u(t)\, dt + \frac{\partial x}{\partial x}(sin(x-x)u(x)) - \frac{\partial 0}{\partial x}(sin(x-0)u(0)) \\ &= \int_0^x cos(x-t)u(t)\, dt\end{aligned}$$

Application :
Convertir l'équation de Volterra suivante en équation différentielle ordinaire "EDO" :

$$u(x) = x^3 + \int_0^x (x-t)^2 u(t)\, dt$$

Solution :
Pour convertir cette équation différentielle on dérive les deux termes de l'équation.
Soit l'équation intégrale :

$$\boldsymbol{u(x) = x^3 + \int_0^x (x-t)^2 u(t)\, dt}$$

Alors

$$\boldsymbol{u'(x) = 3x^2 + \frac{\partial \int_0^x (x-t)^2 u(t)\, dt}{\partial x}} \tag{4.1}$$

En utilisant la règle de Leibnitz on a :

$$\boldsymbol{\frac{\partial \int_0^x (x-t)^2 u(t)\, dt}{\partial x} = \int_0^x 2(x-t)u(t)\, dt + \frac{\partial x}{\partial x}(x-x)^2 u(x) - \frac{\partial 0}{\partial x}(x-0)^2 u(0)}$$

On a

$$\boldsymbol{\frac{\partial x}{\partial x}(x-x)^2 u(x) = 0}$$

et

$$\boldsymbol{\frac{\partial 0}{\partial x}(x-0)^2 u(0) = 0}$$

Donc

$$\boldsymbol{\frac{\partial \int_0^x (x-t)^2 u(t)\, dt}{\partial x} = \int_0^x 2(x-t)u(t)\, dt} \tag{4.2}$$

Donc on a en remplaçant (4.1) dans (4.2) on obtient :

$$\boldsymbol{u'(x) = 3x^2 + \int_0^x 2(x-t)u(t)\, dt} \tag{4.3}$$

Dérivant (4.3) on obtient :

$$\boldsymbol{u''(x) = 6x + \frac{\partial \int_0^x 2(x-t)u(t)\, dt}{\partial x}} \tag{4.4}$$

En utilisant la règle de Leibnitz on a :

$$\boldsymbol{(\frac{\partial \int_0^x 2(x-t)u(t)\, dt}{\partial x}) = (\int_0^x 2u(t)\, dt) + \frac{\partial x}{\partial x}2(x-x)u(x) - \frac{\partial 0}{\partial x}2(x-0)u(0)} \tag{4.5}$$

De même on a :

$$\boldsymbol{\frac{\partial x}{\partial x}(x-x)^2 u(x) = 0}$$

et

$$\boldsymbol{\frac{\partial 0}{\partial x}(x-0)^2 u(0) = 0}$$

Et donc :

$$\frac{\partial \int_0^x 2(x-t)u(t)\,dt}{\partial x} = \int_0^x 2u(t)\,dt \tag{4.6}$$

Dérivant (4.6) on obtient :

$$u^{(3)}(x) = 6 + \frac{\partial \int_0^x 2u(t)\,dt}{\partial x} \tag{4.7}$$

De même qu'avant à l'aide de la règle de Leibnitz on a :

$$\frac{\partial \int_0^x 2u(t)\,dt}{\partial x} = \int_0^x 0\,dt + \frac{\partial x}{\partial x}2u(x) - \frac{\partial 0}{\partial x}u(0)$$

Donc on a :

$$\frac{\partial \int_0^x 2u(t)\,dt}{\partial x} = 2u(x) \tag{4.8}$$

En remplaçant (4.8) dans (4.7) on obtient finalement :

$$u^{(3)}(x) = 6 + 2u(x) \tag{4.9}$$

(4.9) est équivalente à :

$$u^{(3)}(x) - 2u(x) = 6 \tag{4.10}$$

Et comme ça on a réussi à convertir une équation intégrale de Volterra à une équation différentielle ordinaire.

4.2 Convertir des problèmes à valeur initiale en équations intégrales de Volterra

On reprend qu'un problème de valeur initiale (IVP) est une équation différentielle ordinaire avec une condition initiale qui spécifie la valeur de la fonction inconnue à un point donné du domaine.
Dans cette section, On va présenter la technique qui convertit les problèmes à valeur initiale en équations intégrales de Volterra. Cela peut devenir assez simple si on utilise la formule suivante :

soit

$$y(t) = \int\int ... \int f(t)dt \qquad \text{on intègre f(x) n fois}$$

Alors

$$y(t) = \int \frac{(x-t)^{(n-1)}}{(n-1)!} f(t)dt \tag{4.11}$$

Considérons l'exemple suivant pour bien comprendre :
Soit le problème suivant :

$$y''(x) + y(x) = \cos(x) \qquad y(0) = 0 \quad y'(0) = 1$$

Dans la section précédente on a dérivé à chaque fois l'équation de Volterra jusqu'à trouver une équation différentielle ordinaire.
Dans cette section on va intégrer en exploitant la formule **(4.11)** jusqu'à trouver une équation intégrale équivalente à notre problème.

Application

Le problème qu'on va résoudre est le suivant :

$$\boldsymbol{y''(x) + y(x) = \cos(x) \qquad y(0) = 0 \quad y'(0) = 1} \tag{4.12}$$

Solution

Posons

$$\boldsymbol{u(x) = \cos(x) - y(x)}$$

Donc

$$\boldsymbol{y''(x) = u(x)} \tag{4.13}$$

En intégrant **(4.13)** sur le domaine $[\boldsymbol{0, x}]$ on obtient :

$$\boldsymbol{\int_0^x y''(t)\, dt = \int_0^x u(t)\, dt} \tag{4.14}$$

Donc

$$\boldsymbol{y'(x) = y'(0) + \int_0^x u(t)\, dt}$$

On a $\boldsymbol{y'(0) = 1}$ Alors

$$\boldsymbol{y'(x) = 1 + \int_0^x u(t)\, dt} \tag{4.15}$$

En intégrant (4.15) on obtient :

$$\boldsymbol{\int_0^x y'(t)\, dt = \int_0^x (1 + \int_0^x u(t)\, dt)\, dt}$$

On obtient :

$$\boldsymbol{y(x) = y(0) + x - 0 + \int_0^x \int_0^x u(t)\, dt\, dt}$$

Puisque $\boldsymbol{y(0) = 0}$ donc on a :

$$\boldsymbol{y(x) = x + \int_0^x \int_0^x u(t)\, dt\, dt} \tag{4.16}$$

En utilisant la formule (4.11) pour calculer le double intégral dans (4.16) on obtient comme résultat :

$$\boldsymbol{y(x) = x + \int_0^x (x-t)u(t)\, dt} \tag{4.17}$$

En remplaçant (4.17),(4.13) dans(4.12) on obtient :

$$\boldsymbol{u(x) = \cos(x) - x - \int_0^x (x-t)u(t)\, dt}$$

Et comme ça on a transformé un $\boldsymbol{(IVP)}$ en équation intégrale de Volterra.

4.3 Convertir des problèmes aux limites en équations de Fredholm

Rappel :

En analyse, un problème aux limites est constitué d'une équation différentielle (ou plus généralement aux dérivées partielles) dont on recherche une solution prenant de plus des valeurs imposées en des limites du domaine de résolution.

Exemple :

Un exemple de problème aux limites est l'équation différentielle du second ordre suivante :

$$\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}] \qquad y''(x) + y(x) = 0$$

pour laquelle on ne dispose pas de conditions initiales mais des valeurs aux bords de l'intervalle de définition :

$$y(0) = 0$$
$$y(\frac{\pi}{2}) = 2$$

Dans la dernière section, nous avons montré comment un IVP peut être transformé en une équation intégrale équivalente de Volterra. Nous présentons dans cette section comment un problème aux limites peut être converti en une équation intégrale équivalente de Fredholm. La méthode est similaire à celle décrite dans la section précédente à quelques exceptions qui sont liés aux conditions aux limites. Il est à noter ici que la méthode de réduire un problème aux limites à une équation intégrale de Fredholm est compliquée et rarement utilisée.
Nous démontrons cette méthode avec une illustration.

Exemple :

Considérons le problème du second ordre suivant avec les conditions aux limites suivantes :

$$y''(x) + P(x)y'(x) + Q(x)y(x) = f(x) \tag{4.18}$$

Avec les conditions aux limites suivantes :

$$x = a \qquad y(a) = \alpha$$

$$y = b \qquad y(b) = \beta$$

Posons $\qquad y''(x) = u(x)$

Donc

$$y'(x) = y'(a) + \int_a^x u(t)\, dt$$

$$y(x) = \alpha + y'(a)(x-a) + \int_a^x \int_a^x u(t)\, dt\, dt \tag{4.19}$$

Donc d'après (4.19) on a :

$$\boldsymbol{y(b) = \alpha + y'(a)(b-a) + \int_a^b \int_a^b u(t)\,dt\,dt}$$

Alors

$$\boldsymbol{y'(a) = -\frac{\alpha - \beta + \int_a^b \int_a^b u(t)\,dt\,dt}{(b-a)}} \tag{4.20}$$

Donc y(x) peut s'écrire en remplaçant (4.20) dans (4.19) sous la forme suivante :

$$\boldsymbol{y(x) = \alpha + (x-a)\frac{\alpha - \beta + \int_a^b \int_a^b u(t)\,dt\,dt}{(b-a)} + \int_a^x \int_a^x u(t)\,dt\,dt}$$

Donc

$$\boldsymbol{y(x) = \alpha + (x-a)(\frac{\beta-\alpha}{b-a} - \frac{1}{(b-a)}\int_a^b \int_a^b u(t)\,dt\,dt) + \int_a^x \int_a^x u(t)\,dt\,dt} \tag{4.21}$$

Donc on a

$$\boldsymbol{u(x) = f(x) - P(x)(y'(a) + \int_a^x u(t)\,dt) - Q(x)(\alpha + y'(a)(x-a) + \int_a^x \int_a^x u(t)\,dt\,dt)}$$

on a $\boldsymbol{u(x) = y''(x)}$ et donc$\boldsymbol{y(x)}$peut être obtenu de l'équation (4.21). c'est une procédure compliquée pour convertir un problème aux limites à une équation intégrale de Fredholm.

Cas particulier :

Si $\boldsymbol{a = 0}$ et $\boldsymbol{b = 1}$ et soit $\boldsymbol{0 < x < 1}$
donc

$$\boldsymbol{y(x) = \alpha + xy'(0) + \int_0^x \int_0^x u(t)\,dt\,dt}$$

Donc

$$\boldsymbol{y(x) = \alpha + xy'(0) + \int_0^x (x-t)u(t)\,dt} \tag{4.22}$$

D'après l'équation (4.22) on peut calculer$\boldsymbol{y(b)}$ et après on peut trouver $\boldsymbol{y'(0)}$.
On a

$$\boldsymbol{y(1) = \alpha + by'(0) + \int_0^1 (1-t)u(t)\,dt}$$

Donc

$$\boldsymbol{y'(0) = \beta - \alpha - \int_0^1 (1-t)u(t)\,dt}$$

Donc

$$\boldsymbol{y'(0) = \beta - \alpha - \int_0^x (1-t)u(t)\,dt - \int_x^1 (1-t)u(t)\,dt} \tag{4.23}$$

On a d'après (4.21)

$$u(x) = f(x) - P(x)(y'(0) + \int_0^x u(t)\,dt) - Q(x)(\alpha + xy'(0) + \int_0^x (x-t)u(t)\,dt) \quad (4.24)$$

En remplaçant $y'(0)$ par sa valeur donnée par **(4.23)** dans**(4.24)** on obtient

$$u(x) = f(x) - P(x)(\beta - \alpha - \int_0^x (1-t)u(t)\,dt - \int_x^1 (1-t)u(t)\,dt + \int_0^x u(t)\,dt)$$

$$-Q(x)(\alpha + x(\beta - \alpha - \int_0^x (1-t)u(t)\,dt - \int_x^1 (1-t)u(t)\,dt) + \int_0^x (x-t)u(t)\,dt)$$

Après avoir simplifier **(4.24)** on trouve :

$$u(x) = f(x) - P(x)(\beta - \alpha) - Q(x)(\alpha + x(\beta - \alpha) +$$
$$(P(x) + xQ(x)) \int_x^1 (1-t)u(t)\,dt + (Q(x)(1-x) - P(x)) \int_0^x tu(t)\,dt$$

Soit

$$F(x) = f(x) - P(x)(\beta - \alpha) - Q(x)(\alpha + x(\beta - \alpha)$$

Et

$$K(x,t) = (P(x) + xQ(x))(1-t) \qquad \text{si} \qquad 1 < t < x$$

Et

$$K(x,t) = (Q(x)(1-x) - P(x))t \qquad \text{si} \qquad 0 < t < x$$

Donc on obtient :

$$u(x) = F(x) + \int_0^1 K(x,t)u(t)\,dt$$

Comme ça on a transformé un problème aux limites à une équation intégrale de Fredholm.

Application :

Convertir ce problème en équation de Fredholm :

$$y''(x) + \lambda y = xy(0) = 0 \qquad y(1) = 1$$

On a :

$$y''(x) + \lambda y = x \quad (4.25)$$

Soit $y''(x) = u(x)$

Donc

$$y'(x) = y'(0) + \int_0^x u(t)\,dt$$

Soit $y'(0) = C$

$$y(x) = y(0) + Cx + \int_0^x \int_0^x u(t)\,dt\,dt$$

Donc

$$y(x) = Cx + \int_0^x \int_0^x u(t)\,dt\,dt \qquad (y(0) = 0)$$

Alors

$$y(x) = Cx + \int_0^x (x-t)u(t)\,dt \qquad (y(0) = 0) \tag{4.26}$$

D'après (4.26) on a :

$$y(1) = C + \int_0^1 (1-t)u(t)\,dt$$

Donc

$$C = 1 - \int_0^1 (1-t)u(t)\,dt$$

Donc

$$C = 1 - \int_0^x (1-t)u(t)\,dt - \int_x^1 (1-t)u(t)\,dt \tag{4.27}$$

On a d'après (4.25)

$$u(x) = x - \lambda y(x)$$

Alors d'après (4.26) et (4.27)

$$u(x) = x - \lambda(x(1 - \int_0^x (1-t)u(t)\,dt - \int_x^1 (1-t)u(t)\,dt) + \int_0^x (x-t)u(t)\,dt)$$

Après la simplification :

$$u(x) = x - \lambda x + \lambda \int_0^x t(1-x)u(t)\,dt - \lambda \int_x^1 x(1-t)u(t)\,dt$$

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_0^1 k(x,t)u(t)\,dt$$

Avec $K(x,t) = t(1-x)$ si $0 < t < x$
Et $K(x,t) = x(1-t)$ si $x < t < 1$

Méthode 2

On a

$$\boldsymbol{y''(x) + \lambda y = x}$$

$$\boldsymbol{y'(x) = y'(0) + \frac{x^2}{2} - \lambda \int_0^x y(t)\,dt}$$

Soit $\boldsymbol{y'(0) = C}$

$$\boldsymbol{y(x) = \frac{x^3}{6} + Cx + \lambda \int_0^x \int_0^x y(t)\,dt\,dt}$$

$$\boldsymbol{y(x) = \frac{x^3}{6} + Cx + \lambda \int_0^x (x-t)y(t)\,dt}$$

Donc

$$\boldsymbol{y(1) = \frac{1}{6} + C + \lambda \int_0^1 (1-t)y(t)\,dt}$$

Donc

$$\boldsymbol{C = 1 - \frac{1}{6} - \lambda \int_0^1 (1-t)y(t)\,dt}$$

$$\boldsymbol{C = \frac{5}{6} - \lambda \int_0^x (1-t)y(t)\,dt - \lambda \int_1^x (1-t)y(t)\,dt}$$

Donc

$$\boldsymbol{y(x) = \frac{x^3}{6} + x(\frac{5}{6} - \lambda \int_0^x (1-t)y(t)\,dt - \lambda \int_x^1 (1-t)y(t)\,dt) + \lambda \int_0^x (x-t)y(t)\,dt}$$

$$\boldsymbol{y(x) = \frac{x^3+5x}{6} + x(-\lambda \int_0^x (1-t)y(t)\,dt - \lambda \int_x^1 (1-t)y(t)\,dt) + \lambda \int_0^x (x-t)y(t)\,dt}$$

Après simplification on obtient cette équation comme résultat final :

$$\boldsymbol{y(x) = \frac{x^3+5x}{6} + \lambda(\int_0^x t(1-x)y(t)\,dt + \int_x^1 x(1-t)y(t)\,dt)}$$

Donc

$$\boldsymbol{y(x) = \frac{x^3+5x}{6} + \lambda \int_0^1 K(x,t)y(t)\,dt}$$

Avec

$$\boldsymbol{K(x,t) = t(1-x)} \quad \text{si} \quad \boldsymbol{0 < t < x}$$

Et

$$\boldsymbol{K(x,t) = x(1-t)} \quad \text{si} \quad \boldsymbol{x < t < 1}$$

Chapitre 5

Les équations intégrales de Volterra

5.1 Introduction

Dans le chapitre précédent, nous avons clairement défini les équations intégrales avec quelques illustrations utiles. Ce chapitre traite les équations intégrales de Volterra et leurs techniques de solution.
Donc nous nous intéresserons aux équations intégrales de Volterra du deuxième type non homogènes de la forme :

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_0^x k(x,t)u(t)\,dt$$

et on va s'intéresser aussi aux équations intégrales de Volterra du premier type non homogènes qui prennent la forme :

$$f(x) = \lambda \int_0^x k(x,t)u(t)\,dt$$

Et donc pour résoudre ces équations on va traiter les méthodes suivantes :
La méthode des approximations successives.
La méthode de la transformation da Laplace.
La méthode des substitutions successives.
La méthode de la décomposition d'Adomian.
La méthode des séries.

5.2 La méthode des approximations successives

Soit l'équation de Volterra suivante sous sa forme générale :

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_0^x k(x,t)u(t)\,dt \tag{5.1}$$

Dans cette méthode, on remplace la fonction inconnue $u(x)$ sous le signe intégrale de l'équation de Volterra (5.1) par une fonction continue arbitraire à valeur réelle noté $u_0(x)$ appelé l'approximation zéro.

Cette substitution donnera la première approximation $\boldsymbol{u_1(x)}$ par :

$$\boldsymbol{u_1(x) = f(x) + \lambda \int_0^x k(x,t)u_0(t)\, dt} \tag{5.2}$$

Il est évident que $\boldsymbol{u_1(x)}$ est continue si $\boldsymbol{f(x)}$, $\boldsymbol{K(x,t)}$ et $\boldsymbol{u_0(x)}$ sont continues. La seconde approximation$\boldsymbol{u_2(x)}$peut être obtenue de manière similaire en remplaçant $\boldsymbol{u_0(x)}$ dans l'équation (5.2) par $\boldsymbol{u_1(x)}$ obtenue ci-dessus :

$$\boldsymbol{u_2(x) = f(x) + \lambda \int_0^x k(x,t)u_1(t)\, dt}$$

En continuant de cette manière on trouve les expressions de

$$\boldsymbol{u_3(x), u_4(x), ..., u_n(x), ...}$$

Par récurrence on trouve :

$$\boldsymbol{u_n(x) = f(x) + \lambda \int_0^x k(x,t)u_{(n-1)}(t)\, dt \qquad \forall n > 0}$$

Si $\boldsymbol{n = 0}$ $\boldsymbol{u_0(x)}$ est égale à une fonction continue réelle arbitraire on pose généralement $\boldsymbol{u_0(x) = 0}$.

Ainsi la solution de (5.1) est obtenue comme :

$$\boldsymbol{u(x) = \lim_{n \to +\infty} u_n(x)}$$

Application

Résoudre l'équation suivante en utilisant la méthode des approximations successives :

$$\boldsymbol{u(x) = x + \int_0^x (t - x)u(t)\, dt} \tag{5.3}$$

Solution :

Soit $\boldsymbol{u_0(x) = 0}$
D'après (5.3) on a :

$$\boldsymbol{u_1(x) = x + \int_0^x (t - x)u_0(t)\, dt}$$
$$\boldsymbol{u_1(x) = x}$$

De même calculons $\boldsymbol{u_2(x)}$

$$\boldsymbol{u_2(x) = x + \int_0^x (t - x)u_1(t)\, dt}$$

Alors

$$\boldsymbol{u_2(x) = x + \int_0^x t(t - x)\, dt}$$

Après la simplification on obtient :

$$\boldsymbol{u_2(x) = x - \frac{x^3}{3!}}$$

Calculons de même façons $\boldsymbol{u_3(x)}$ on trouve :

$$u_2(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$$

Par récurrence :

$$u_n(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + ... + (-1)^n \frac{x^{(2n+1)}}{(2n+1)!}$$

Et on a

$$u(x) = \lim_{n \to +\infty} u_n(x)$$

Donc

$$u(x) = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} (-1)^n \frac{x^{(2n+1)}}{(2n+1)!}$$

Donc

$$u(x) = \sin(x)$$

La méthode des approximations successives de Picard :

Dans cette méthode on pose $\quad u_0(x) = f(x)$
On a par suite :

$$u_1(x) = f(x) + \lambda \int_0^x k(x,t) f(t)\, dt$$

$$u_2(x) = f(x) + \lambda \int_0^x k(x,t) u_1(t)\, dt$$

$$u_3(x) = f(x) + \lambda \int_0^x k(x,t) u_2(t)\, dt$$

$$u_4(x) = f(x) + \lambda \int_0^x k(x,t) u_3(t)\, dt$$

$$u_5(x) = f(x) + \lambda \int_0^x k(x,t) u_4(t)\, dt$$

.

.

.

.

$$u_n(x) = f(x) + \lambda \int_0^x k(x,t) u_{(n-1)}(t)\, dt$$

On considère :

$$u_2(x) - u_1(x) = \lambda \int_0^x k(x,t) u_1(t)\, dt - \lambda \int_0^x k(x,t) f(t)\, dt$$

Ceci est équivalent à :

$$u_2(x) - u_1(x) = \lambda \int_0^x k(x,t)(f(t) + \int_0^t k(t,\tau) f(\tau)\, d\tau)\, dt - \lambda \int_0^x k(x,t) f(t)\, dt$$

Donc

$$u_2(x) - u_1(x) = \lambda^2 \int_0^x k(x,t) \int_0^t k(t,\tau) f(\tau)\, d\tau\, dt$$

$$u_2(x) - u_1(x) = \lambda^2 \psi_2 \tag{5.4}$$

sachant que :

$$\psi_2 = \int_0^x k(x,t) \int_0^t k(t,\tau) f(\tau)\, d\tau\, dt \tag{5.5}$$

on a

$$u_0(x) + u_1(x) - u_0(x) + u_2(x) - u_1(x) + ... + u_n(x) - u_{n-1}(x) = u_n(x)$$

puisqu'on a :

$$u_0(x) = \psi_0(x)$$
$$u_1(x) - u_0(x) = \lambda \psi_1(x)$$
$$.$$
$$.$$
$$.$$
$$.$$
$$u_n(x) - u_{n-1}(x) = \lambda^n \psi_n(x)$$

Donc

$$u_n(x) = \sum_{m=0}^{n} \lambda^m \psi_m(x)$$

D'autre part on a :

Si

$$\psi_0(x) = f(x)$$

et on a

$$\psi_1(x) = \int_0^x k(x,t) f(t)\, dt$$

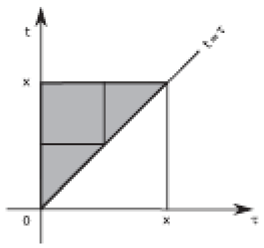
$$\psi_2(x) = \int_0^x k(x,t) \int_0^t k(t,\tau) f(\tau)\, d\tau\, dt$$

$$\psi_3(x) = \int_0^x k(x,t) \int_0^t k(t,\tau) \int_0^\tau k(\tau,t_3) f(t_3)\, dt_3\, d\tau\, dt$$

Par récurrence on a en général :

$$\psi_n(x) = \int_0^x k(x,t) \psi_{n-1}(t)\, dt \tag{5.6}$$

On peut considérer l'intégral double représenté dans (5.5) par la figure suivante :



En changeant l'ordre de l'intégral dans (5.5)on a :

$$\psi_2 = \int_0^x f(\tau)\, d\tau \int_\tau^x k(x,t) k(t,\tau)\, dt$$

$$\psi_2 = \int_0^x K_2(x,\tau) f(\tau)\, d\tau$$

$$\vdots$$

$$\psi_n = \int_0^x K_n(x,\tau) f(\tau)\, d\tau$$

Avec

$$K_2(x,\tau) = \int_\tau^x k(x,t) k(t,\tau)\, dt$$

Et puisqu'on a :

$$K_1(x,t) = K(x,t) K_2(x,t) = \int_t^x k(x,\tau) k_1(\tau,t)\, d\tau K_3(x,t) = \int_t^x k(x,\tau) k_2(\tau,t)\, d\tau \tag{5.7}$$

Montrons (5.7)
On sait que

$$\psi_3(x,t) = \int_0^x K(x,t) \int_0^t k(t,\tau) \int_0^\tau k(\tau,t_1) f(t_1)\, dt_1\, d\tau\, dt$$

$$\psi_3(x) = \int_0^x K(x,t) \int_0^t f(t_1)\, dt_1 \int_\tau^t k(t,t_1)k(t_1,\tau)\, dt_1\, dt$$

On a

$$k_2(t,\tau) = \int_\tau^t k(t,t_1)k(t_1,\tau)\, dt_1$$

Donc on a

$$\psi_3(x) = \int_0^x K(x,t) \int_0^t k_2(t,\tau)f(t_1)\, dt_1\, dt$$

Après un changement de l'ordre d'intégration on obtient :

$$\psi_3(x) = \int_0^x f(t_1)\, dt_1 \int_t^x k(x,\tau)k_2(\tau,t)\, d\tau$$

Donc

$$K_3(x,t) = \int_t^x k(x,\tau)k_2(\tau,t)\, d\tau$$

Donc d'une manière générale on a

$$K_n(x,t) = \int_t^x k(x,\tau)k_{n-1}(\tau,t)\, d\tau \qquad n = 2,3,4..... \tag{5.8}$$

On sait que :

$$u_n(x) = \sum_{m=0}^{n} \lambda^m \psi_m$$

Donc

$$u_n(x) = f(x) + \sum_{m=1}^{n} \lambda^m \psi_m(x) \qquad \text{puisque } \psi_0(x) = f(x)$$

On sait que

$$\psi_m = \int_0^x K_m(x,\tau)f(\tau)\, d\tau$$

Donc

$$u_n(x) = f(x) + \int_0^x \sum_{m=1}^{n} \lambda^m K_m(x,\tau)f(\tau)\, d\tau$$

Donc

$$u_n(x) = f(x) + \lambda \int_0^x \sum_{m=1}^{n} \lambda^{m-1} K_m(x,\tau)f(\tau)\, d\tau$$

Soit

$$H(x,\tau;\lambda) = \sum_{m=1}^{\infty} \lambda^{m-1} K_m(x,\tau) \tag{5.9}$$

Donc
$$\lim_{n\to+\infty} u_n(x) = f(x) + \lambda \int_0^x H(x,\tau;\lambda) f(\tau)\, d\tau$$
Et après la solution $u(x)$ est donnée par :
$$u(x) = \lim_{n\to+\infty} u_n(x)$$
Et H s'appelle la résolvante noyau.

Application :

Résoudre l'équation intégrale suivante en utilisant la méthode des approximations successives de picard
$$u(x) = \exp(x^2) + \int_0^x \exp(x^2 - t^2) u(t)\, dt$$

Solution

On a $\quad f(x) = \exp(x^2) \quad$ et $\quad \lambda = 1 \quad$ et $\quad K(x,t) = exp(x^2 - t^2)$
On a d'après (5.8)
$$K_n(x,t) = \int_t^x k(x,\tau) k_{n-1}(\tau,t)\, d\tau \qquad n = 2,3,4..... \qquad \text{et} \qquad K_1(x,t) = K(x,t)$$
Donc
$$K_1(x,t) = exp(x^2 - t^2)$$
$$K_2(x,t) = \int_t^x k(x,\tau) k_1(\tau,t)\, d\tau$$
$$K_2(x,t) = \int_t^x exp(x^2 - \tau^2) exp(\tau^2 - t^2)\, d\tau$$
$$K_2(x,t) = exp(x^2 - t^2) \int_t^x d\tau$$
Donc
$$K_2(x,t) = exp(x^2 - t^2)(x - t)$$
Calculons $K_3(x,t)$
On a
$$K_3(x,t) = \int_t^x k(x,\tau) k_2(\tau,t)\, d\tau$$
$$K_3(x,t) = \int_t^x exp(x^2 - \tau^2) exp(x^2 - t^2)(x - t)\, d\tau$$
Ceci est équivalent à
$$K_3(x,t) = \int_t^x exp(x^2 - t^2)(x - t)\, d\tau$$
Après le calcule de cette intégrale on obtient :
$$K_3(x,t) = \frac{exp(x^2 - t^2)}{2!}(x - t)^2$$

De la même manière on calcule $\boldsymbol{K_4(x,t)}$ on trouve :

$$\boldsymbol{K_4(x,t) = \frac{exp(x^2 - t^2)}{3!}(x-t)^3}$$

Donc par récurrence on peut généraliser que :

$$\boldsymbol{K_n(x,t) = \frac{exp(x^2 - t^2)}{(n-1)!}(x-t)^{(n-1)}} \tag{5.10}$$

D'après (5.9) on a

$$\boldsymbol{H(x,\tau;\lambda) = \sum_{m=1}^{\infty} \lambda^{m-1} K_m(x,\tau)}$$

$$\boldsymbol{H(x,t;\lambda) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{exp(x^2 - t^2)}{(n-1)!}(x-t)^{(n-1)}}$$

Ceci est équivalent à :

$$\boldsymbol{H(x,t;\lambda) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{exp(x^2 - t^2)}{n!}(x-t)^n}$$

Donc

$$\boldsymbol{H(x,t;\lambda) = exp(x^2 - t^2) exp(x-t)}$$

Maintenant on sait que la solution est donnée par

$$\boldsymbol{u(x) = \lim_{n \to +\infty} u_n(x)}$$

Sachant que

$$\boldsymbol{\lim_{n \to +\infty} u_n(x) = f(x) + \lambda \int_0^x H(x,\tau;\lambda) f(\tau)\, d\tau}$$

Donc on a

$$\boldsymbol{u(x) = \exp(x^2) + \int_0^x exp(x^2 - t^2) exp(x-t) \exp(t^2)\, dt}$$

$$\boldsymbol{u(x) = \exp(x^2) + exp(x^2 + x) \int_0^x \exp(-t)\, dt}$$

$$\boldsymbol{u(x) = \exp(x^2) + \exp(x^2 + x)(-\exp(-x) + 1)}$$

$$\boldsymbol{u(x) = \exp(x^2) - \exp(-x)\exp(x^2 + x) + \exp(x^2 + x)}$$

$$\boldsymbol{u(x) = \exp(x^2) - \exp(x^2) + \exp(x^2 + x)}$$

Donc on a comme solution de l'équation donnée , la fonction suivante :

$$\boldsymbol{u(x) = \exp(x^2 + x)}$$

5.3 La méthode de la transformation de Laplace

La méthode de transformation de Laplace est une technique puissante qui peut être utilisée pour résoudre des problèmes á valeur initiale et des équations intégrales .
La transformée de Laplace change les équations différentielles et les équations intégrales en équations polynomiales qui peuvent être facilement résolues, et donc en utilisant la transformation inverse de Laplace nous obtenons la solution de l'équation en question.
On rappelle que la transformée de Laplace d'une fonction $\boldsymbol{u(x)}$ est définit par :

$$\boldsymbol{L(u(x)) = \int_0^{+\infty} \exp(sx) u(x)\, dx}$$

Soit l'équation intégrale de Volterra du second type définit par sa forme générale suivante :

$$\boldsymbol{u(x) = f(x) + \lambda \int_0^x k(x,t) u(t)\, dt}$$

On utilise cette méthode lorsqu'on a le noyau de l'équation dépend de la différence $\boldsymbol{(x-t)}$,il est sous la forme $\boldsymbol{K(x-t)}$ en passant par **le théorème de convolution de la transformation de Laplace**.

Le théorème de convolution :
le produit de convolution $\boldsymbol{f * g}$ de 2 fonctions intégrables f et g est définit par la relation suivante :

$$\boldsymbol{(f * g)(t) = \int_R f(t') g(t-t')\, dt'} \tag{5.11}$$

Donc on va appliquer tout ça sur l'équation intégrale donnée dont $\boldsymbol{k(x,t) = k(x-t)}$:
On a

$$\boldsymbol{u(x) = f(x) + \lambda \int_0^x k(x-t) u(t)\, dt}$$

On introduit la transformée de Laplace aux deux termes de l'équation on obtient.

$$\boldsymbol{L(u(x)) = L(f(x)) + \lambda \int_0^x k(x-t) u(t)\, dt}$$

En considérant les propriétés de la transformée de Laplace on trouve :

$$\boldsymbol{L(u(x)) = L(f(x)) + \lambda L(\int_0^x k(x-t) u(t)\, dt)} \tag{5.12}$$

En se basant sur le théorème de convolution donné avant on a :

$$\boldsymbol{\int_0^x k(x-t) u(t)\, dt = (k * u)(x)}$$

donc $\boldsymbol{(5.12)}$ devient :

$$\boldsymbol{L(u(x)) = L(f(x)) + \lambda L((k * u)(x))} \tag{5.13}$$

Soit la propriété suivante suivant :

$$\boldsymbol{L((f * g)(x)) - - - - - - - - - L(f(x)).L(g(x))}$$

Donc **(5.13)** devient :

$$\boldsymbol{L(u(x)) = L(f(x)) + \lambda L(k(x))L(u(x))}$$

Après résoudre l'équation précédente d'inconnu $\boldsymbol{L(u(x))}$ on obtient :

$$\boldsymbol{L(u(x)) = \frac{L(f(x))}{1 - \lambda L(k(x))}}$$

Donc

$$\boldsymbol{u(x) = f(x) * L^{-1}(\frac{1}{1 - \lambda L(k(x))})}$$

Soit

$$\boldsymbol{\psi(x) = L^{-1}(\frac{1}{1 - \lambda L(k(x))})}$$

Donc on a

$$\boldsymbol{u(x) = f(x) * \psi(x)}$$

Donc

$$\boldsymbol{u(x) = \int_0^x \psi(x - t) f(t)\, dt} \tag{5.14}$$

(5.14) présente la solution de l'équation de Volterra du second type en utilisant la méthode de Laplace.

Application :

Résoudre l'équation de Volterra suivante en utilisant la méthode de la transformation de Laplace :

$$\boldsymbol{u(x) = f(x) + \lambda \int_0^x \exp(x - t) u(t)\, dt}$$

Solution

$$\boldsymbol{L(u(x)) = L(f(x)) + \lambda L(\int_0^x \exp(x - t) u(t)\, dt)}$$

$$\boldsymbol{L(u(x)) = L(f(x)) + \lambda L(\exp(x)) L(u(x))}$$

$$\boldsymbol{L(u(x)) = \frac{L(f(x))}{1 - \lambda L(\exp(x))}}$$

$$\boldsymbol{u(x) = f(x) L^{-1}(\frac{1}{1 - \lambda L(\exp(x))})}$$

Soit

$$\psi(x) = L^{-1}(\frac{1}{1-\lambda L(\exp(x))})$$

Alors puisque $\quad L(\exp(x)) = \dfrac{1}{s-1}$

$$\psi(x) = L^{-1}(\frac{s-1}{s-1-\lambda})$$

$$\psi(x) = L^{-1}(1+\frac{\lambda}{s-1-\lambda})$$

$$\psi(x) = \delta(x) + \lambda \exp((1+\lambda)x)$$

On a

$$u(x) = f(x) * \psi(x)$$

$$u(x) = \int_0^x \psi(x-t) f(t)\, dt$$

Sachant que

$$f(x) = \int_0^x \psi(x-t) f(t)\, dt$$

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_0^x \exp((1+\lambda)(x-t)) f(t)\, dt \tag{5.15}$$

(5.15) est la solution de l'équation donnée en utilisant la méthode de Laplace.

5.4 La méthode des substitutions successives

Soit l'équation intégrale suivante :

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_0^x k(x,t) u(t)\, dt$$

Dans cette méthode, nous substituons successivement $u(x)$ par sa valeur donnée par l'équation ci-dessus.
Nous trouvons :

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_0^x K(x,t) \left[f(t) + \lambda \int_0^t K(t,t_1)\, u(t_1)\, dt_1 \right] dt$$

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_0^x K(x,t) f(t) dt + \lambda^2 \int_0^x K(x,t) \int_0^t K(t,t_1)\, u(t_1)\, dt_1 dt$$

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x,t) f(t) dt + \lambda^2 \int_0^x K(x,t) \int_0^t K(t,t_1)\, f(t_1)\, dt_1 dt + \dots$$

$$+\lambda^n \int_0^t K(x,t) \int_0^t K(t,t_1) \dots \times \int_0^{1_{n-2}} K(t_{n-1}, f_{n-1})\, f(t_{\hbar-1})\, dt_{n-1} \dots dt_1 dt + R_{n+1}(x)$$

Avec

$$R_{n+1}=\lambda^{n+1}\int_0^z K(x,t)\int_0^t K\left(t,t_1\right)\ldots\int_0^{t_{n-1}} K\left(t_{n-1},t_n\right)u\left(t_n\right)dt_n....dt_1dt$$

est le reste après n termes. Il est facile de montrer que $\lim_{n\to\infty} R_{n+1}=0$.
En conséquence, la série générale $u(x)$ s'écrit :

$$u(x)=f(x)+\lambda\int_0^x K(x,t)f(t)dt+\lambda^2\int_0^x\int_0^t K(x,t)K\left(t,t_1\right)f\left(t_1\right)dt_1dt$$
$$+\lambda^3\int_0^x\int_0^t\int_0^{t_1} K(x,t)K\left(t,t_1\right)K\left(t_1,t_2\right)f\left(t_2\right)dt_2dt_1dt+\ldots$$
$$+\lambda^n\int_0^x\int_0^t\ldots\int_0^{t_{n-2}} K(x,t)K\left(t,t_1\right)K\left(t_{n-2},t_{n-1}\right)f\left(t_{n-1}\right)dt_{n-1}\ldots dt_1dt \quad (5.16)$$

Notons ici que dans cette méthode la fonction inconnue $u(x)$ est substituée par la fonction donnée $f(x)$ qui rend l'évaluation des intégrales multiples facilement calculable.

théorème 3. *[1]*

(a). $u(x)=f(x)+\lambda\int_a^x K(x,t)u(t)dt,$ *oú a est une constante.*

(b). $K(x,t)$ *est une fonction de valeurs réelles, continue dans le rectangle*

$$R=\{(x,t):a\leq x\leq b,a\leq t\leq b\},$$
$$|K(x,t)|\leq M \qquad \textit{dans } R, K(x,t)\neq 0$$

(c). $f(x)\neq 0$, *est réelle et continue dans* $I=\{x:a\leq x\leq b.\}$.
(d). λ *une constante.*

Alors l'équation $u(x)=f(x)+\lambda\int_0^x K(x,t)u(t)dt$ *possède une seule solution continue* $u(x)$ *dans l'intervalle I, et cette solution est donnée par une série absolument et uniformément convergente .*

Les résultats de ce théorème restent sans changement pour l'équation

$$u(x)=f(x)+\int_0^x K(x,t)u(t)dt, \ \textit{pour } \lambda=1$$

Application

Résoudre l'équation intégrale suivante en utilisant la méthode des substitutions successives :

$$u(x)=1+\int_0^x u(t)dt$$

Solution

On a $k(x,t)=1$, $\lambda=1$ et $f(x)=1$

En utilisant (5.16) on obtient :

$$u(x)=1+\int_0^x dt+\int_0^x\int_0^x dt^2+\int_0^x\int_0^x\int_0^x dt^3+\cdots$$
$$u(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots$$
$$u(x)=e^x.$$

5.5 La méthode de décomposition d'Adomian

La méthode de décomposition d'Adomian semble fonctionner pour les équations différentielles linéaires et non linéaires, équations intégrales, équations intégro-différentielles. La méthode est essentiellement une méthode de série de puissances. Nous démontrerons la méthode en exprimant $\boldsymbol{u(x)}$ sous la forme d'une série comme suit :

$$\boldsymbol{u(x) = \sum_{n=0} u_n(x)} \tag{5.17}$$

Avec

$$\boldsymbol{u_0(x) = f(x)}$$

Soit l'équation intégrale suivante :

$$\boldsymbol{u(x) = f(x) + \lambda \int_0^x K(x,t)u(t)dt} \tag{5.18}$$

Prenant

$$\boldsymbol{u_0(x) = f(x)}$$

La substitution de (5.17) dans (5.18) donne :

$$\boldsymbol{\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) = f(x) + \lambda \int_0^x K(x,t) \left[\sum_{n=0}^{\infty} u_n(t) \right] dt}$$

Les termes $\boldsymbol{u_0(x), u_1(x), u_2(x), \ldots, u_n(x), \ldots}$ de la fonction inconnue $\boldsymbol{u(x)}$, seront complètement déterminés de manière récurrente, en effet

$$\boldsymbol{u_0(x) = f(x)}$$

$$\boldsymbol{u_1(x) = \lambda \int_0^x K(x,t)u_0(t)dt}$$

$$\boldsymbol{u_2(x) = \lambda \int_0^x K(x,t)u_1(t)dt}$$

$$\vdots$$

$$\boldsymbol{u_n(x) = \lambda \int_0^x K(x,t)u_{n-1}(t)dt}$$

.

Cet ensemble d'équations peut être écrit sous la forme :

$$\boldsymbol{u_0(x) = f(x)}$$

$$\boldsymbol{u_{n+1}(x) = \lambda \int_0^x K(x,t)u_n(t)dt, n \geq 0.}$$

Nous illustrons la méthode par quelques exemples.

Application :

Résoudre l'équation intégrale suivante :

$$u(x) = x + \int_0^x (t-x)u(t)dt \tag{5.19}$$

Solution :

Considérant la solution sous la forme d'une série comme suit

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(x) \tag{5.20}$$

En substituant (5.20) dans (5.19) on obtient :

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) = x + \int_0^x (t-x) \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t)dt$$

Maintenant décomposons les termes de la série :

$$u_0(x) = x$$
$$u_1(x) = \int_0^x (t-x)u_0(t)dt$$
$$u_1(x) = \int_0^x (t-x)tdt$$
$$u_1(x) = -\frac{x^3}{3!}$$
$$u_2(x) = \int_0^x (t-x)u_1(t)dt$$
$$u_2(x) = \int_0^x (t-x)\left(-\frac{t^3}{3!}\right)dt$$
$$u_2(x) = \frac{x^5}{5!}$$

En continuant de cette manière on trouve :

$$u(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots = \sin x$$

Application 2 : Résoudre l'équation intégrale

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_0^x e^{x-t}u(t)dt$$

Solution :

Considérons la solution sous forme d'une série $u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ nous obtenons :

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) = f(x) + \lambda \int_0^x e^{x-t} \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t) dt$$

D'oú en identifiant les termes similaires , nous avons

$$u_0(x) = f(x)$$
$$u_1(x) = \lambda \int_0^x e^{x-t} f(t) dt$$
$$u_2(x) = \lambda \int_0^x e^{x-t} u_1(t) dt$$
$$u_2(x) = \lambda \int_0^x e^{x-t} \left[\lambda \int_0^t e^{t-t_1} f(t_1) \, dt_1 \right] dt$$
$$u_2(x) = \lambda^2 \int_0^x f(t_1) \, dt_1 \int_{t_1}^x e^{x-t} e^{t-t_1} dt$$
$$u_2(x) = \lambda^2 \int_0^x (x - t_1) \, e^{x-t_1} f(t_1) \, dt_1$$
$$u_2(x) = \lambda^2 \int_0^x (x-t) e^{x-t} f(t) dt$$

De même en faisant des calculs ,nous obtenons

$$u_3(x) = \lambda^3 \int_0^x \frac{(x-t)^2}{2!} e^{x-t} f(t) dt$$

Ainsi, la série de décomposition devient :

$$u_0(x) + u_1(x) + \ldots = f(x) + \lambda \int_0^x \mid 1 + \lambda(x-t) + \lambda^2 \frac{(x-t)^2}{2!} + \ldots \cdot \mid e^{x-t} f(t) dt$$
$$u_0(x) + u_1(x) + \ldots = f(x) + \lambda \int_0^x e^{x-t} e^{\lambda(x-t)} f(t) dt$$
$$u_0(x) + u_1(x) + \ldots = f(x) + \lambda \int_0^x e^{(\lambda+1)(x-t)} f(t) dt$$
$$u(x) = f(x) + \lambda \int_0^x e^{(\lambda+1)(x-t)} f(t) dt$$

Et comme ça on a trouvé la solution finale de l'équation intégrale donnée en appliquant la méthode de la décomposition d'Adomian.

5.6 La méthode de série solution

Soit l'équation intégrale suivante :

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_0^x K(x,t)u(t)dt \tag{5.21}$$

Dans cette section, nous présentons une méthode utile, qui provient principalement de la série de Taylor pour les fonctions analytiques, pour résoudre les équations intégrale de Volterra. Nous supposons que la solution $u(x)$ de l'équation intégrale de Volterra est analytique, et possède donc une série de Taylor de la forme

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \tag{5.22}$$

Oú les coefficients a_n sont déterminés par récurrence.
Substituons (5.22) dans les deux membres de (5.21) nous obtenons :

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = T(f(x)) + \lambda \int_0^x K(x,t) \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n dt$$

Avec $T(f(x))$ est la série de Taylor pour $f(x)$.
Développons cette méthode à l'aide d'une application :

Application

Utiliser la méthode de série solution pour résoudre l'équation de Volterra.

$$u(x) = 1 + 2\sin x - \int_0^x u(t)dt$$

Solution

Nous supposons la solution peut s'écrire sous forme de série

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Après substitution de $u(x)$ par sa valeur dans l'équation, nous obtenons :

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_0 x^n = 1 + 2\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} - \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n dt$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_0 x^n = 1 + 2\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{(n+1)}$$

En identifiant les coefficients,nous obtenons :

$$\begin{aligned}a_0 &= 1\\ a1 &= 2 - a_0\\ a_2 &= \frac{a_1}{2}\\ a_3 &= -\frac{2}{3!} - \frac{a_2}{3}\\ a_4 &= -\frac{a_3}{4!}\dots\end{aligned}$$

Donc la solution est donnée par :

$$u(x) = \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!}\dots\right) + \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}\dots\right)$$
$$u(x) = \cos x + \sin x.$$

5.7 Les équations intégrales de Volterra du premier type

Conversion à une équation du deuxième type de Volterra

Soit l'équation de Volterra du premier type suivante :

$$f(x) = \lambda \int_0^x K(x,t)u(t)\,dt$$

Dans cette section, nous présenterons une méthode qui converti les équations intégrales du premier type de Volterra en équations intégrales du second type de Volterra.
Une différenciation des deux membres de l'équation intégrale de Volterra du premier type et en utilisant la règle de Leibnitz définie avant, présentent la fameuse clé pour atteindre notre but.

Rappelons la règle de Leibnitz :

$$\frac{d}{dx}\int_{a(x)}^{b(x)} F(x,t)dt = \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial F(x,t)}{\partial x}\,dt + \frac{\partial b(x)}{\partial x}F(x,b(x)) - \frac{\partial a(x)}{\partial x}F(x,a(x))$$

Nous obtenons donc

$$f'(x) = K(x,x)u(x) + \lambda \int_0^x K_x(x,t)u(t)\,dt$$

Résolue en $u(x)$, á condition que $K(x,x) \neq 0$ donc nous obtenons l'équation intégrale du second type de Volterra donnée par :

$$u(x) = \frac{f'(x)}{K(x,x)} - \int_0^x \frac{1}{K\,(x,x)}K_x(x,t)u(t)dt$$

Notons que le terme non-homogène et le noyau ont changé en :

$$g(x) = \frac{f'(x)}{K(x,x)}$$

$$G(x,t) = -\frac{1}{K\,(x,x)} K_x(x,t)$$

Et comme ça on a transformé une équation du 1^{er} type de Volterra en une du second type donnée par :

$$u(x) = g(x) + \lambda \int_0^x G(x,t)u(t)dt$$

Ainsi, nous pouvons utiliser les méthodes déjà indiquées avant.

Remarque

Si $K(x,x)$ s'annule en un point de l'intervalle de base $(0 \leq x \leq b)$, par exemple en $x = 0$, alors l'équations obtenue aura un caractère particulier, essentiellement différente de celle de l'équation du second genre. Ces équations sont appelées par les équations de Picard du troisième genre. Cependant,et il est parfois possible d'obtenir une équation du second type en suivant les étapes précédentes .

Cas spécial des équations intégrales de Volterra

Dans les équations de Volterra du second type si le noyau $K(x,t)$ est sous la forme

$$K(x,t) = \frac{A(x)}{A(t)}$$

tel que l'équation prend la forme :

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_0^x \frac{A(x)}{A(t)} u(t)dt$$

En divisant l'équation par $A(x)$ on obtient

$$\frac{u(x)}{A(x)} = \frac{f(x)}{A(x)} + \lambda \int_0^x \frac{u(t)}{A(t)} dt \tag{5.23}$$

Maintenant soit

$$u_1(x) = \frac{u(x)}{A(x)}$$

et

$$f_1(x) = \frac{f(x)}{A(x)}$$

L'équation (5.23) devient :

$$u_1(x) = f_1(x) + \lambda \int_0^x u_1(t)dt$$

Soit

$$u_2(x) = \int_0^x u_1(t)dt$$

Donc on peut transformer l'équation (5.23) en équation différentielle ordinaire définie comme suit :

$$\frac{du_2}{dx} - \lambda u_2 = f_1(x)$$

On va résoudre cette équation :

Soit l'équation suivante :

$$\frac{du_2}{dx} = \lambda u_2$$
$$u_2(x) = ke^{\lambda x} + C$$

Par la méthode de la variation de la constante on obtient :

$$u_2(x) = k(x)e^{\lambda x} \tag{5.24}$$
$$\frac{du_2}{dx} = k'(x)e^{\lambda x} + \lambda k(x)e^{\lambda x} \tag{5.25}$$

Donc on remplaçant (5.25) dans notre équation différentielle on trouve

$$k'(x)e^{\lambda x} + \lambda k(x)e^{\lambda x} - \lambda k(x)e^{\lambda x} = f_1(x)$$
$$f_1(x) = k'(x)e^{\lambda x}$$
$$k'(x) = \frac{f_1(x)}{e^{\lambda x}}$$
$$k'(x) = f_1(x)e^{-\lambda x}$$

$$k(x) = \int_0^x f_1(t)e^{-\lambda t}dt$$

En remplaçant $k(x)$ dans (5.24) on obtient la solution générale de cette équation différentielle donnée par :

$$u_2(x) = \int_0^x e^{\lambda(x-t)}f_1(t)dt$$

Avec la condition initiale $\quad u_2(0) = 0$

Mais $u_1(x) = \dfrac{du2}{dx}$ donc l'équation ci-dessus peut être réduite à une équation intégrale en termes de $u_1(x)$ en différenciant $u_2(x)$ selon la règle de Leibnitz pour obtenir :

$$u_1(x) = \lambda \int_0^x e^{\lambda(x-t)}f_1(t)dt + f_1(x)$$

La solution du problème original est donc obtenue en multipliant par $A(x)$:

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_0^x e^{\lambda(x-t)} f(t) dt$$

5.8 Les équations intégrales de Volterra et les équations différentielles ordinaires

Il existe une relation fondamentale entre les équations intégrales de Volterra et les équations différentielles. En effet, la solution de toute équation différentielle de type :

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_n(x) = F(x) \tag{5.26}$$

Avec des coefficients continus, ainsi que les conditions initiales suivantes :

$$y(0) = c_0, y'(0) = c_1, y''(0) = c_2, ..., y^{(n-1)}(0) = c_{n-1}$$

peut être réduit à la solution d'une certaine équation intégrale de Volterra du deuxième type :

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_0^x k(x,t) u(t) dt$$

Pour y parvenir, faisons la transformation :

$$\frac{d^n y}{dx^n} = u(x)$$

Donc intégrant par rapport à $x$de0à x

$$\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} = \int_0^x u(t) dt + c_{n-1}$$

Ainsi, les intégrales successives sont

$$\frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} = \int_0^x \int_0^x u(t) dt dt + c_{n-1} x + c_{n-2}$$

$$\frac{d^{n-3} y}{dx^{n-3}} = \int_0^x \int_0^x \int_0^x u(t) dt dt dt + c_{n-1} \frac{x^2}{2!} + c_{n-2} x + c_{n-3}$$

$$\ldots\ldots = \ldots\ldots$$

On procédant de cette manière on obtient :

$$y(x)=\underbrace{\int_0^x\int_0^x\int_0^x\cdots\int_0^x u(t)dtdtdt\ldots dt}_{n\text{ -integrations}}+c_{n-1}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}+c_{n-2}\frac{x^{n-2}}{(n-2)!}+\cdots+c_1x+c_0$$

$$y(x)=\int_0^x\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}u(t)dt+c_{n-1}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}+c_{n-2}\frac{x^{n-2}}{(n-2)!}+\cdots+c_1x+c_0$$

L'équation (5.26)devient :

$$u(x)+\int_0^x\left\{a_1(x)+a_2(x)(x-t)+a_3(x)\frac{(x-t)^2}{2!}+\cdots+a_n(x)\frac{(x-t)^{e-1}}{(n-1)!}\right\}u(t)dt$$

$$=F(x)-c_{n-1}a_1(x)-\left(c_{e-1}+c_{n-2}\right)a_2(x)-\cdots-\left(c_{n-1}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}+\cdots+c_1x+c_0\right)a_n(x)$$

Et ça se réduit à :

$$u(x)=f(x)+\lambda\int_0^x k(x,t)u(t)dt$$

Avec

$$k(x,t)=\sum_{v=1}^{n}a_v(x)\frac{(x-t)^{v-1}}{(v-1)!}$$

Et

$$f(x)=F(x)-c_{n-1}a_1(x)-\left(c_{n-1}+c_{n-2}\right)a_2(x)-\cdots-\left(c_{n-1}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}+\cdots+c_1x+c_0\right)a_n(x)$$

$$u(x)=f(x)-\int_0^x k(x,t)u(t)dt$$

Et comme ça on a transformé une équation différentielle en une équation de Volterra. Sachant que si on trouve la solution de l'équation intégrale équivalente on peut trouver facilement la solution de l'équation différentielle donnée.

Application

Transformer ce problème en équation intégrale du second type et trouver sa solution :

$$y''(x)+4y(x)=\sin x;\quad \text{et}\quad \text{en}\quad x=0,y(0)=0,y'(0)=0$$

Solution

posons

$$y''(x) = u(x) \tag{5.27}$$

En intégrant les deux termes de (5.27) on trouve :

$$y'(x) = \int_0^x u(t)dt$$

Donc

$$y(x) = \int_0^x (x-t)u(t)dt$$

Remplaçant y(x) et y''(x) dans le problème donné on obtient :

$$u(x) = \sin(x) - 4\int_0^x (x-t)u(t)dt$$

En utilisant la méthode de Laplace pour résoudre l'équation intégrale trouvée on obtient :

$$L[u(x)] + 4L[x]L[u(x)] = \frac{1}{s^2+1}$$

$$L[u(x)] = \frac{s^2}{(s^2+1)(s^2+4)} \tag{5.28}$$

En décomposant la fraction en éléments simples on obtient :

$$L[u(x)] = -\frac{1}{3}\frac{1}{s^2+1} + \frac{2}{3}\frac{2}{s^2+4}$$

En calculons Laplace inverse de cette équation à l'aide du tableau donné avant on trouve simplement :

$$u(x) = -\frac{1}{3}\sin x + \frac{2}{3}\sin 2x \tag{5.29}$$

Et enfin (5.29) est la solution de notre équation différentielle donnée.

Chapitre 6

Les équations intégrales de Fredholm

6.1 Introduction

Dans Ce chapitre on va traiter les équations intégrales de Fredholm et leurs techniques de solution.
Donc nous nous intéresserons aux équations intégrales de Fredholm du deuxième type non homogènes de la forme :

$$\boldsymbol{u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)u(t)\,dt}$$

et on va s'intéresser aussi aux équations intégrales de Volterra du premier type non homogènes qui prennent la forme :

$$\boldsymbol{f(x) = \lambda \int_a^b k(x,t)u(t)\,dt}$$

Et donc pour résoudre ces équations on va traiter les méthodes suivantes :
La méthode des approximations successives.
La méthode des substitutions successives.
La méthode de la décomposition d'Adomian .
La méthode des séries.

6.2 La méthode des approximations successives :les séries de Neumann

La méthode des approximations successives, qui a été appliquée avec succès aux équations intégrales de Volterra du second type, s'appliquent encore plus facilement aux équations intégrales de Fredholm du deuxième type :

$$\boldsymbol{u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)u(t)\,dt}$$

On pose $\boldsymbol{u_0(x) = f(x)}$.
Notez que l'approximation zéro peut être n'importe quelle fonction réelle sélectionnée $\boldsymbol{u_0(x)}$, $\boldsymbol{(a \leq x \leq b)}$

Par conséquent,la première approximation $\boldsymbol{u_1(x)}$ de la solution de $\boldsymbol{u(x)}$ est définie par :

$$\boldsymbol{u_1(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)u_0(t)\,dt}$$

Ce processus peut être poursuivi de la même manière pour obtenir la énième approximation. En d'autres termes, les différentes approximations peuvent être mises dans un schéma récursif donné par :

$$\boldsymbol{u_0(x)} = \text{une} \quad \text{fonction} \quad \text{réelle} \quad \text{arbitraire}$$

$$\boldsymbol{u_n(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)u_{n-1}(t)\,dt \qquad \forall n > 0}$$

La solution finale est donnée par :

$$\boldsymbol{u(x) = \lim_{n\to+\infty} u_n(x)}$$

La série de Neumann est obtenue quand $\boldsymbol{u_0(x) = f(x)}$

Sachant que :

$$\boldsymbol{u_1(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)u_0(t)\,dt}$$

$$\boldsymbol{u_1(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)f(t)\,dt}$$

$$\boldsymbol{u_1(x) = f(x) + \lambda\psi_1(x)}$$

$$\boldsymbol{u_2(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)(f(t) + \lambda\psi_1(t))\,dt}$$

$$\boldsymbol{u_2(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)f(t)\,dt + \lambda^2 \int_a^b k(x,t)\psi_1(t)\,dt}$$

$$\boldsymbol{u_2(x) = f(x) + \lambda\psi_1(x) + \lambda^2\psi_2(x)}$$

Avec

$$\boldsymbol{\psi_2(x) = \int_a^b k(x,t)\psi_1(t)\,dt}$$

En continuant de cette manière on peut généraliser que :

$$\boldsymbol{u_n(x) = f(x) + \lambda\psi_1(x) + \lambda^2\psi_2(x) + \ldots + \lambda^n\psi_n(x) + \ldots}$$

Et

$$\boldsymbol{\psi_n(x) = \int_a^b k(x,t)\psi_{n-1}(t)\,dt} \tag{6.1}$$

$$\boldsymbol{u_n(x) = f(x) + \sum_{v=1}^{n} \lambda^v \psi_v} \tag{6.2}$$

$$\boldsymbol{u(x) = f(x) + \lim_{n\to+\infty} \sum_{v=1}^{n} \lambda^v \psi_v}$$

Application :

Résoudre l'équation intégrale de Fredholm suivante en utilisant la méthode des approximation successive et après en trouvant la série de Neumann correspondante :

$$\boldsymbol{u(x) = 1 + \int_0^1 xu(t)\,dt}$$

Soit $\boldsymbol{u_0(x) = 0}$
On a :

$$\boldsymbol{u_1(x) = 1 + \int_0^1 xu_0(t)\,dt}$$

On trouve que :

$$\boldsymbol{u_1(x) = 1}$$

En continuant de la même manière on trouve que :

$$\boldsymbol{u_2(x) = 1 + \int_0^1 xu_1(t)\,dt}$$

Donc

$$\boldsymbol{u_2(x) = 1 + x}$$

Après

$$\boldsymbol{u_3(x) = 1 + \int_0^1 xu_2(t)\,dt}$$

Après avoir remplacer $\boldsymbol{u_2(t)}$ par sa valeur trouver on trouve que :

$$\boldsymbol{u_3(x) = 1 + x + \frac{x}{2}}$$

De même on trouve que :

$$u_4(x) = 1 + x + \frac{x}{2} + \frac{x}{4}$$

En continuant de cette manière on obtient :

$$u_n(x) = 1 + x + \frac{x}{2} + \frac{x}{4} + ... + \frac{x}{2^{(n-2)}}$$

$$u_n = 1 + x \sum_{k=0}^{n-2} (\frac{1}{2})^k$$

On a

$$u(x) = \lim_{n \to +\infty} u_n(x)$$

$$u(x) = 1 + x \sum_{k=0}^{\infty} (\frac{1}{2})^k$$

Puisque

$\sum_{k=0}^{\infty} (\frac{1}{2})^k$ est une série géométrique égale à 2.

$$u(x) = 1 + 2x$$

Trouvons la solution en cherchant la série de Neumann correspondante à notre équation intégrale :

$$u(x) = 1 + \int_0^1 x u(t)\, dt$$

Solution
On remarque que $\lambda = 1, f(x) = 1, k(x,t) = x$

Pour arriver à la série de Neumann correspondante à l'équation intégrale donnée on pose $u_0(x) = f(x) = 1$

On a :

$$u_1(x) = 1 + \int_0^1 x u_0(t)\, dt$$

On a :

$$u_1(x) = f(x) + \lambda \psi_1(x)$$

$$u_1(x) = 1 + \psi_1(x)$$

Avec

$$\psi_1(x) = \int_0^1 x u_0(t)\, dt$$

Donc

$$\psi_1(x) = x \tag{6.3}$$

Donc

$$u_1(x) = 1 + x$$

On sait que

$$u_2(x) = 1 + \psi_2(x)$$

et d'après (6.1) on a

$$\psi_2(x) = \int_0^1 x \psi_1(t)\, dt \tag{6.4}$$

En remplaçant (6.3) dans (6.4) on obtient :

$$\psi_2(x) = \frac{x}{2}$$

$$\psi_3(x) = \int_0^1 x \psi_2(t)\, dt$$

$$\psi_3(x) = \frac{x}{4}$$

En continuant de cette manière on trouve que :

$$\psi_n(x) = x(\frac{1}{2})^{(n-1)}$$

et d'après le cours on a démontré que

$$u(x) = f(x) + \lim_{n\to+\infty} \sum_{v=1}^{n} \lambda^v \psi_v$$

Alors

$$u(x) = 1 + x \lim_{n\to+\infty} \sum_{v=0}^{n-1} (\frac{1}{2})^v$$

Après le calcul on trouve que :

$$u(x) = 1 + 2x$$

6.3 La méthode des substitutions successives

Cette méthode est presque analogue à la méthode d'approximation successive sauf qu'il s'agit là d'une série d'intégrales.
Soit l'équation intégrale suivante :

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)u(t)\,dt \tag{6.5}$$

Soit

$$u(t) = f(t) + \lambda \int_a^b k(t,t_1)u(t_1)\,dt_1 \tag{6.6}$$

On remplace **(6.6)** dans **(6.5)** on trouve :

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)f(t)dt + \lambda^2 \int_a^b K(x,t) \int_a^b K\,(t,t_1) \tag{6.7}$$

De même on remplace $u(t_1)$ par sa valeur donnée par (6.5) dans (6.7) on obtient

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)f(t)dt + \lambda^2 \int_a^b K(x,t) \int_a^b K\,(t,t_1)\,f\,(t_1)\,dt_1dt$$
$$+\lambda^3 \int_a^b K(x,t) \int_a^b K\,(t,t_1) \int_a^b K\,(t_1,t_2)\,u\,(t_2)\,dt_2dt_1dt$$

En continuant de cette manière on trouve :

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)f(t)dt + \lambda^2 \int_a^b K(x,t) \int_a^b K\,(t,t_1)\,f\,(t_1)\,dt_1dt$$
$$+\lambda^3 \int_a^b K(x,t) \int_a^b K\,(t,t_1) \int_a^b K\,(t_1,t_2)\,f\,(t_2)\,dt_2dt_1dt + ...$$
$$+\lambda^n \int_a^b K(x,t) \int_a^b K\,(t,t_1) \int_a^b K\,(t_1,t_2) .... \int_a^b K\,(t_{n-2},t_{n-1})\,f(t_{n-1})dt_{n-1}.....dt+....$$

Et maintenant il reste juste un simple calcul d'intégrales et on trouve la solution $u(x)$.

On va bien illustrer cette méthode par un exemple.

Application

En utilisant la méthode des substitutions successives résoudre l'équation de Fredholm suivante :

$$u(x) = \cos(x) + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)u(t)\,dt$$

Solution

On a $\quad f(x) = \cos(x) \quad$ et $\quad \lambda = \frac{1}{2} \quad$ et $\quad k(x,t) = \sin(x)$

$$u(x) = \cos x + \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \sin x \cos t dt + \frac{1}{4}\int_0^{\pi/2} \sin x \int_0^{\pi/2} \sin t \cos t_1 dt_1 dt$$

$$+\frac{1}{8}\int_0^{\pi/2} \sin x \int_0^{\pi/2} \sin t \int_0^{\pi/2} \sin t_1 \cos t_2 df_2 dt_1 dt + \cdots$$

$$u(x) = \cos x + \frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{4}\sin x + \frac{1}{8}\sin x + \cdots$$

donc

$$u(x) = \cos x + \sin(x)(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots)$$

$$u(x) = \cos x + \sin(x)(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots - 1)$$

En effectuant les calculs nécessaire on trouve que :

$$u(x) = \cos x + 2\sin(x) - \sin(x)$$

Donc

$$u(x) = \cos x + \sin(x)$$

6.4 La méthode de décomposition d'Adomian

La méthode de décomposition d'Adomian a été utilisée auparavant au chapitre précédent dans la résolution des équation de Volterra . cette méthode consiste à décomposer la fonction inconnue $u(x)$ de toute équation en une somme d'un nombre infini de composantes définies par la série de décomposition.

$$u(x) = \sum_{n=0} u_n(x) \tag{6.8}$$

Avec $\quad u_0(x) = f(x)$

Soit l'équation intégrale :

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)u(t)\, dt \tag{6.9}$$

La Substitution de (6.8) dans l'équation (6.9) donne :

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t) \left[\sum_{n=0}^{\infty} u_n(t)\right] dt$$

Les termes $u_0(x), u_1(x)_1 u_2(x), \ldots, u_n(x), \ldots$ de la fonction inconnue $u(x)$ sont complètement déterminés par récurrence, si nous prenons

$$u_0(x) = f(x)$$

$$u_1(x) = \lambda \int_a^b K(x,t) u_0(t) dt$$

$$u_2(x) = \lambda \int_a^b K(x,t) u_1(t) dt$$
$$\ldots = \ldots$$

$$u_n(x) = \lambda \int_a^b K(x,t) u_{n-1}(t) dt \tag{6.10}$$

et de proche en proche on calcule les autres termes. Cet ensemble d'équations (6.10) peut s'écrire sous la forme :

$$u_0(x) = f(x)$$
$$u_{n+1}(x) = \lambda \int_a^b K(x,t) u_n(t) dt, n \geq 0 \tag{6.11}$$

On voit clairement que la méthode de décomposition a converti l'équation intégrale en une détermination de termes calculables.

Application

Solution :

Considérons $u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ est la solution de l'équation .
D'oú par substitution dans l'équation donnée on trouve

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) = e^x - x + \lambda \int_0^1 t \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t) dt$$

Nous avons

$$u_0(x) = f(x) = e^x - x$$
$$u_1(x) = x \int_0^1 t \left(e^t - t\right) dt = \frac{2}{3} x,$$
$$u_2(x) = x \int_0^1 t u_1(t) dt$$
$$u_2(x) = x \int_0^1 \frac{2}{3} t^2 dt$$
$$u_2(x) = \frac{2}{9} x$$

$$u_3(x) = x\int_0^1 \frac{2}{9}tdt = \frac{2}{27}x$$

$$u(x) = u_0(x) + u_1(x) + \ldots = e^x - x + \frac{2}{3}x\underbrace{(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \ldots)}_{S}$$

$$u(x) = e^x - x + \frac{2}{3}x \times S$$

La somme S de la série géométrique infinie est donnée par

$$S = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}$$

Donc notre série converge vers la solution exacte $u(x) = e^x$.

6.5 La méthode du calcul direct

Dans cette section, la méthode de calcul direct sera appliquée pour résoudre les équations intégrale de Fredholm . La méthode approche les équations intégrales de Fredholm de manière directe et donne la solution sous une forme exacte et non sous une forme de série. Il est important de souligner que cette méthode sera appliquée pour les noyaux dégénérés ou séparables.

$$k(x,t) = \sum_{k=0}^{n} g_k(x)h_k(t) \tag{6.12}$$

La méthode de calcul direct peut être appliquée comme suit :

1) Nous remplaçons d'abord (6.12) dans l'équation intégrale :

$$u(x) = f(x) + \int_a^b K(x,t)u(t)dt \tag{6.13}$$

2) Cette substitution donne

$$u(x) = f(x) + \int_a^b \sum_{k=1}^{n} g_k(x)h_k(t)u(t)dt \tag{6.14}$$

Basé sur ceci, l'équation (6.14) devient

$$u(x) = f(x) + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k g_k(x), \tag{6.15}$$

Avec

$$\alpha_i = \int_a^b h_i(t)u(t)dt, 1 \leq i \leq n \tag{6.16}$$

3) La substitution de **(6.15)** dans **(6.16)** donne un système de n équations algébriques qui peut être résolu pour déterminer les constantes α_i,$1 \leq i \leq n$. En utilisant les valeurs numériques obtenues de α_i en **(6.16)** ,ainsi la solution $u(x)$ de l'équation intégrale de Fredholm **(6.13)** est obtenue.

On va bien illustrer cette méthode à l'aide d'une application :

Application

Résoudre l'équation intégrale de Fredholm en utilisant la méthode de calcul direct :

$$\boldsymbol{u(x) = 3x + 3x^2 + \frac{1}{2}\int_0^1 x^2 t u(t) dt} \tag{6.17}$$

Solution

Le noyau $\boldsymbol{K(x,t) = x^2 t}$ est séparable. Par conséquent, nous réécrivons (6.17) comme suit :

$$\boldsymbol{u(x) = 3x + 3x^2 + \frac{1}{2}x^2 \int_0^1 t u(t) dt} \tag{6.18}$$

$$\boldsymbol{u(x) = 3x + 3x^2 + \frac{1}{2}\alpha x^2} \tag{6.19}$$

Avec

$$\boldsymbol{\alpha = \int_0^1 t u(t) dt} \tag{6.20}$$

Pour déterminer $\boldsymbol{\alpha}$ nous substituons **(6.19)** dans **(6.20)**, nous avons :

$$\boldsymbol{\alpha = \int_0^1 t \left(3t + 3t^2 + \frac{1}{2}\alpha t^2\right) dt} \tag{6.21}$$

$$\boldsymbol{\alpha = \frac{7}{4} + \frac{1}{8}\alpha} \tag{6.22}$$

ce qui donne $\boldsymbol{\alpha = 2}$. Substituons la valeur de $\boldsymbol{\alpha}$ dans (6.19) , nous obtenons la solution exacte :

$$\boldsymbol{u(x) = 3x + 4x^2}$$

6.6 Les équations intégrales de Fredholm homogène

L'équation intégrale homogène de Fredholm du second type est donnée par :

$$\boldsymbol{u(x) = \lambda \int_a^b K(x,t) u(t) dt} \tag{6.23}$$

Dans cette section, nous concentrerons notre étude seulement sur l'équation intégrale homogène de Fredholm **(6.23)** à noyau séparable $\boldsymbol{K(x,t)}$.
Le but principal de l'étude de l'équation homogène de Fredholm est de trouver une solution non triviale, parce que la solution triviale $\boldsymbol{u(x) = 0}$ est une solution de cette équation. De plus, la méthode de décomposition d'Adomian ne s'applique pas ici parce qu'elle dépend

principalement de l'attribution d'une valeur non nulle pour la composante zéro $u_0(x)$, et dans ce type d'équations $f(x) = 0$.
Sur cette base, la méthode de calcul direct sera utilisée ici pour traiter ce genre d'équations.

6.7 La méthode du calcul direct

La méthode de calcul direct a été déjà utilisée dans ce chapitre. Cette méthode remplace l'équation intégrale homogène de Fredholm par une seule équation algébrique ou par un système d'équations algébriques simultanées selon le nombre de termes du noyau séparable $K(x,t)$. Sans perte de généralité, nous supposons que :

$$K(x,t) = g(x)h(t) \tag{6.24}$$

L'équation **(6.23)** s'écrit :

$$u(x) = \lambda g(x) \int_a^b h(t)u(t)dt \tag{6.25}$$

Posons

$$\alpha = \int_a^b h(t)u(t)dt \tag{6.26}$$

alors l'équation (6.25) devient

$$u(x) = \lambda \alpha g(x) \tag{6.27}$$

Nous remarquons que $\alpha = 0$, donne la solution triviale $u(x) = 0$, ce qui n'est pas notre objectif dans cette étude.
Cependant, pour déterminer la solution non triviale de l'équation (6.27) nous devons déterminer la valeur du paramètre λ en considérant $\alpha \neq 0$.
On peut y parvenir en remplaçant l'équation (6.27) dans l'équation (6.26) pour obtenir :

$$\alpha = \lambda \alpha \int_a^b h(t)g(t)dt \tag{6.28}$$

ce qui est équivalent à :

$$1 = \lambda \int_a^b h(t)g(t)dt \tag{6.29}$$

qui donne une valeur numérique pour $\lambda \neq 0$ en évaluant l'intégrale définie dans l'équation (6.29) . Cependant,en déterminant λ, la solution non triviale donnée par l'équation (6.27) est obtenue.

Application :

Trouver la solution non triviale de l'équation intégrale homogène de Fredholm :

$$u(x) = \frac{2}{\pi}\lambda \int_0^\pi \cos(x-t)u(t)dt.$$

Etant donné que

$$u(x) = \frac{2}{\pi}\lambda \int_0^\pi \cos(x-t)u(t)dt$$
$$u(x) = \frac{2}{\pi}\lambda \int_0^\pi [\cos(x)\cos(t) + \sin(x)\sin(t)]u(t)dt$$
$$u(x) = \frac{2}{\pi}\lambda\alpha\cos x + \frac{2}{\pi}\lambda\beta\sin x$$

Avec

$$\alpha = \int_0^\pi \cos(t)u(t)dt$$

et

$$\beta = \int_0^\pi \sin(t)u(t)dt$$

Par conséquent, en utilisant la valeur de $u(x)$ sous les signes intégrales de α et β , nous obtenons une équation algébrique simultanée donnée par :

$$\alpha = \frac{2\lambda}{\pi}\left[\int_0^\pi \cos(t)(\alpha\cos(t) + \beta\sin(t))dt\right]$$
$$\beta = \frac{2\lambda}{\pi}\left[\int_0^\pi \sin(t)(\alpha\cos(t) + \beta\sin(t))dt\right]$$

Après avoir effectue les intégrations et la réduction, les valeurs de α , et β , sont trouvés $\alpha = 2\lambda\alpha$ et $\beta = 2\lambda\beta$. Si $\alpha \neq 0$ et $\beta \neq 0$, alors $\lambda = 1/2.$ Par conséquent, la solution de l'équation est :

$$u(x) = \frac{1}{\pi}(\alpha\cos x + \beta\sin x)$$

Avec α et β sont des constantes arbitraires.

Chapitre 7

Les équations intégrales non linéaires

7.1 Introduction

Dans les chapitres précédents, nous avons consacré beaucoup de temps et d'efforts à l'étude des techniques de résolution de différents types d'équations intégrales linéaires.
Dans ce chapitre, nous étudierons les techniques de résolution des équations intégrales non linéaires .
Nous avons déjà mentionné que les équations intégrales non linéaires donnent une quantité considérable de difficultés.
Cependant, en raison du développement récent de nouveaux techniques, il est maintenant possible de trouver des solutions de certains types d'équations intégrales non linéaires sinon toutes.
En général, la solution de l'équation intégrale non linéaire n'est pas unique.
Cependant, l'existence d'une solution unique d'équations intégrales non linéaires avec des conditions spécifiques est possible.
Comme nous le savons, il existe une relation étroite entre les équations différentielles et les équations intégrales. Nous verrons dans la section suivante quelques développements classiques de ces deux systèmes et des méthodes de résolution.
Nous définissons d'abord une équation intégrale non linéaire en général, puis citons quelques types particuliers d'équations intégrales non linéaires.
En général, une équation intégrale non linéaire est définie comme suit :

$$\boldsymbol{u(x) = f(x) + \lambda \int_0^x k(x,t)F(u(t))\,dt} \tag{7.1}$$

Et

$$\boldsymbol{u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)F(u(t))\,dt} \tag{7.2}$$

Les équations (7.1) et (7.2) sont appelées équation intégrale de Volterra non linéaires et équations intégrales de Fredholm non linéaire, respectivement. La fonction $\boldsymbol{F(u(x))}$ est non linéaire sauf $\boldsymbol{F(u(x)) = a}$ constante ou$\boldsymbol{F(u(x)) = u(x)}$ auxquels $\boldsymbol{F(u(x))}$ est linéaire.
Si $\boldsymbol{F(u(x)) = u^n(x)}$, pour $\boldsymbol{n > 1}$, la fonction F est non linéaire.
Pour clarifier ce point nous citons quelques exemples ci-dessous :

$$\boldsymbol{u(x) = f(x) + \lambda \int_0^x (x-t)u^2(t)\,dt} \tag{7.3}$$

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_0^1 \cos(x) u^3(t)\, dt \tag{7.4}$$

Les équations **(7.3)** et **(7.4)** sont des équations intégrales non linéaires de Volterra et Fredholm respectivement.

Pour résoudre ce genre d'équations on va traiter les méthodes suivantes :

La méthode des approximations successives de Picard.
La méthode de la décomposition d'Adomian.

Et on va voir un théorème important c'est **le théorème d'existence de Picard**.

7.2 La méthode des approximations successives de Picard

Considérons le problème à la valeur initiale donné par l'équation différentielle non linéaire du premier ordre :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = F(x, u(x))$$

avec la condition initiale $u(a) = b$ en $x = a$. Ce problème à valeur initiale peut être transformé en équation intégrale non linéaire qui s'écrit sous la forme :

$$u(x) = b + \int_a^x F(t, u(t))\, dt$$

Pour une première approximation, on remplace $u(x)$ dans $F(x, u(x))$ par b, pour une seconde approximation, on la remplace par la première approximation, pour la troisième par la seconde, et ainsi de suite.
Nous démontrons cette méthode par une application.
Application

Considérons l'équation différentielle non linéaire du premier ordre où $u(0) = 0$ quand $x = 0$.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = x + u^2$$

Déterminer la solution analytique approximative par la méthode de Picard.

Solution

L'équation différentielle donnée peut être écrite sous forme d'équation intégrale comme :

$$u(x) = \int_0^x (t + u^2(t))\, dt \tag{7.5}$$

D'après le cours on a $\boldsymbol{b=0}$ dans ce cas donc on obtient la première approximation de $\boldsymbol{u(x)}$ si on remplace cette dernière par $\mathbf{0}$ dans$\boldsymbol{F(x,u(x))}$ de (7.5) on obtient :

$$\boldsymbol{u(x)=\frac{x^2}{2}} \tag{7.6}$$

Après afin d'obtenir la $\mathbf{2}^{\text{ème}}$ approximation de $\boldsymbol{u(x)}$ on remplace $\mathbf{(7.6)}$ dans $\boldsymbol{F(x,u(x))}$ de (7.5) on obtient :

$$\boldsymbol{u(x)=\frac{x^2}{2}+\frac{x^5}{20}+\dots} \tag{7.7}$$

De même pour la $\mathbf{3}^{\text{ème}}$ approximation de $\boldsymbol{u(x)}$ on remplace (7.7) dans $\boldsymbol{F(x,u(x))}$ de (7.5) on obtient :

$$\boldsymbol{u(x)=\int_0^x\left\{t+\left(\frac{t^2}{2}+\frac{t^5}{20}\right)^2\right\}dt}$$

$$\boldsymbol{u(x)=\int_0^x\left(t+\frac{t^4}{4}+\frac{t^7}{20}+\frac{t^{10}}{400}\right)dt}$$

$$\boldsymbol{u(x)=\frac{x^2}{2}+\frac{x^5}{20}+\frac{x^8}{160}+\frac{x^{11}}{4400}+\dots}$$

De même pour la $\mathbf{4}^{\text{ème}}$ on obtient :

$$\boldsymbol{u(x)=\frac{x^2}{2}+\frac{x^5}{20}+\frac{x^8}{160}+\frac{7x^{11}}{8800}+\frac{3x^{14}}{49280}+\frac{87x^{17}}{23936000}+\frac{x^{20}}{7040000}+\frac{x^{23}}{445280000}+\dots}$$

......etc. C'est la solution du problème sous forme de série à la $\mathbf{4}^{\text{ème}}$ itération .

7.3 Le théorème d'existence de Picard

La question qui se pose c'est de savoir si une équation différentielle en général à une solution et si c'est le cas, elle est de quelle nature.
Il y a deux manières distinctes de discuter cette question, mais ici nous allons discuter une seule.
La première méthode due à Picard a déjà été illustrée par des exemples dans la section précédente. On obtient des approximations successives, qui tendent apparemment vers une limite. Nous allons maintenant prouver que ces approximations tendent vraiment vers une limite et que cette limite donne la solution. Ainsi, nous prouvons l'existence de la solution d'une équation différentielle d'un type assez général.
Un théorème de ce genre est appelé **le théorème d'existence de Picard**.
Et puisque la méthode des approximations successives de picard est simple on va l'utiliser pour annoncer et montrer ce théorème.

Alors Notre objectif est maintenant de prouver que les hypothèses faites pour obtenir ces solutions des équations données comme applications étaient correctes, et d'énoncer exactement les conditions suffisantes pour assurer l'exactitude des solutions des équations.

Rappelons la méthode des approximations successives de Picard :

Si on a comme équation :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f(x, u(x)) \quad u(a) = b$$

Alors les approximations successives des valeurs de $u(x)$ sont données par :

$$u_1(x) = b + \int_a^x f(t, b)dt$$
$$u_2(x) = b + \int_a^x f(t, u_1(t))\, dt$$
$$u_3(x) = b + \int_a^x f(t, u_2(t))\, dt$$
$$\ldots.. = \cdots\ldots$$
$$u_{n+1}(x) = b + \int_a^x f(t, u_n(t))\, dt$$

etc...... Nous avons déjà expliqué les applications de cette méthode dans l'exemple de la section précédente.
Nous reproduisons la solution de l'exemple où $f(x, u(x)) = x + u^2(x)$ avec $b = a = 0$, et obtenir :

$$u_1(x) = \frac{x^2}{2}$$
$$u_2(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{x^5}{20} + \ldots$$
$$u_3(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{x^5}{20} + \frac{x^8}{160} + \frac{x^{11}}{4400} + \ldots$$
$$u_4(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{x^5}{20} + \frac{x^8}{160} + \frac{7x^{11}}{8800} + \frac{3x^{14}}{49280} + \frac{87x^{17}}{23936000} + \frac{x^{20}}{7040000} + \frac{x^{23}}{445280000} + \ldots$$

Ces fonctions semblent tendre vers une limite. C'est notre but de cette section,de prouver que c'est le cas, et non simplement dans cet exemple particulier, mais chaque fois que $f(x, u)$ obéit à certaines conditions pour être spécifié. Ces conditions sont que, après choix convenable du nombre positif h et k, on peut affirmer que, pour toutes les valeurs de x entre $a-h$ et $a+h$, et pour toutes les valeurs de u entre $b - k$ et $b + k$, on peut trouver des nombres positifs M et A tels que,$(i)|f(x, u)| < M$, et $(ii)|f(x, u) - f(x, u')| < A|u - u'|$, $u$et u' étant deux valeurs quelconques de u dans la gamme considérée. Dans notre exemple $f(x, u) = x + u^2$, la condition (i) est évidemment satisfaite, en prenant pour M tout nombre positif supérieur à $|a| + h + (|b| + k)2$.

Aussi,

$$|(x + u^2) - (x + u'^2)| = |u^2 - u'^2| = |u + u'||u - u'| \leq 2(|b| + k)|u - u'|$$

.

Donc, la condition (ii) est également satisfaite, en prenant $A = 2(|b| + k)$.
Revenant maintenant au cas général, considérons la différence entre les approximations successives. On sait que :

$$u_1(x) - b = \int_a^x f(t,b)dt$$

mais$|f(x,b)| < M$ par la condition (i), donc

$$u_2(x) - u_1(x) = \int_a^x f(t,u_1(t)) - f(t,b)dt$$

mais on a

$|f\,(x,u_1) - f(x,b)| < A\,|u_1 - b| < AM|x-a|$ (conditions (i) et (ii)).
on obtient donc

$$|u_2 - u_1| < \left|\int_a^x AM|x-a|dx\right|$$

Donc

$$|u_2 - u_1| < \frac{1}{2}AM|x-a|^2$$

$$|u_2 - u_1| < \frac{1}{2}AMh^2$$

Avec $h = |x-a|$
en procédant de cette manière on peut écrire :

$$|u_n - u_{n-1}| < \frac{1}{n!}MA^{n-1}h^n$$

alors la série correspondante est :

$$\begin{aligned} b + Mh + \frac{1}{2}MAh^2 + \cdots + \frac{1}{n!}MA^{n-1}h^n + \cdots \\ = b + \frac{M}{A}\left\{Ah + \frac{1}{2}(Ah)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}(Ah)^n + \cdots\right\} \\ = b + \frac{M}{A}\left[e^{Ah} - 1\right] \end{aligned}$$

Cette série est convergente pour toutes les valeurs de h, A et M.

Par conséquent, la série infinie

$$b + (u_1 - b) = (u_2 - u_1) + (u_3 - u_2) + \; + (u_n - u_{n-1}) + \ldots\ldots..$$

dont chaque terme est inférieur ou égal en valeur absolue au terme correspondant du précédent, est encore plus convergente.

C'est à dire que la séquence :

$$u_1 = b + (u_1 - b)$$
$$u_2 = b + (u_1 - b) + (u_2 - u_1), ...$$

Et ainsi de suite, tend vers une limite définie,disons $U(x)$ ce que nous voulions prouver. Il faut maintenant prouver que $U(x)$ vérifie l'équation différentielle. D'abord cela semble évident, mais c'est pas vrai, car il ne faut pas supposer sans preuve que :

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^x f\left(t, u_{n-1}\right) dt = \int_a^x f\left(t, \lim_{n\to\infty} u_{n-1}\right) dt$$

Ce qui comprend l'idée de convergence uniforme remarquera que le inégalités associées à cette preuve que nous avons utilisée pour prouver la convergence de notre série prouve vraiment sa convergence uniforme aussi. Si $f(x,u)$ est continue, $u_1, u_2, ...etc.$, sont continues aussi, et U est une série uniformément convergente de fonctions continues ; c'est-à-dire que U est elle-même continu, et $U - u_{n-1}$ tend uniformément vers zéro lorsque n augmente.

Ainsi, la condition (ii), $f(x,U) - f(x, u_{n-1})$ tend uniformément vers zéro.
Donc on en déduit que :

$$\int_a^x \left[f(t,U) - f\left(t, u_{n-1}\right)\right] dt \to 0$$

Ainsi,la limite de :

$$u_n = b + \int_a^x f\left(t, u_{n-1}\right) dt$$

est

$$U = b + \int_a^x f(t,U)dt$$

Donc

$$\frac{dU}{dx} = f(x,U),$$

et $U(x) = b$ quand $x = a$. ce qui achève la preuve.

7.4 La méthode de la décomposition d'Adomian

La méthode de décomposition d' Adomian est similaire à la méthode d'approximation successive de Picard. Dans la méthode de décomposition, nous exprimons généralement la solution $u(x)$ de l'équation intégrale.

$$u(x) = b + \int_a^x f(t,u)dt \tag{7.8}$$

sous forme d'une série.

$$\boldsymbol{u(x)=\sum_{n=0}^{\infty}u_n(x)} \tag{7.9}$$

La substitution de l'équation de décomposition (7.9) dans les deux côtés de l'équation (7.8) on obtient :

$$\boldsymbol{\sum_{n=0}^{\infty}u_n(x)=b+\int_a^x f\left(t,\sum_{n=0}^{\infty}u_n(t)\right)dt}$$

Les composants $\boldsymbol{u_0(x)}$, $\boldsymbol{u_1(x)}$,$\boldsymbol{u_2(x)}$, ... de la fonction inconnue $\boldsymbol{u(x)}$ sont complètement déterminées de manière récurrente si on pose :

$$\boldsymbol{u_0(x)=b}$$

$$\boldsymbol{u_1(x)=\int_a^x f(t,b)dt}$$

$$\boldsymbol{u_2(x)=\int_a^x f\left(t,u_1\right)dt}$$

$$\boldsymbol{u_3(x)=\int_a^x f\left(t,u_2\right)dt}$$

etc. Le schéma de décomposition ci-dessus pour la détermination des composants $\boldsymbol{u_0(x),u_1(x),u_2(x),}$ ... de la solution $\boldsymbol{u(x)}$ de l'équation (7.8) peut s'écrire sous la forme :

$$\boldsymbol{u_0(x)=b}$$

$$\boldsymbol{u_{n+1}(x)=\int_a^x f\left(t,u_n\right)dt}$$

Une fois ces composantes soient connues, la solution $\boldsymbol{u(x)}$ de notre équation est facilement connue.

Il est important de noter que la série obtenue pour $\boldsymbol{u(x)}$ fournit fréquemment la solution exacte.

Cependant, pour certains problèmes, où l'équation ne peut pas être évaluée, une série tronquée $\boldsymbol{\sum_{n=0}^{k}u_n(x)}$ est généralement utilisée pour approximer la solution $\boldsymbol{u(x)}$ si une solution numérique est souhaitée. C'est exactement ce que nous avons décrit dans la méthode de Picard.

Cependant, avec ce type de décomposition, nous avons trouvé quelques inconvénients C'est pourquoi nous proposons dans ce qui suit une méthode de décomposition simple pas exactement comme la méthode de Picard.

Dans ce nouveau processus de décomposition, nous développons la fonction de solution dans une série infinie simple

$$\boldsymbol{u(x)=u_0(x)+u_1(x)+u_2(x)+\cdots+u_n(x)+\cdots}$$

$$\boldsymbol{u(x)=\sum_{n=0}^{\infty}u_n(x)} \tag{7.10}$$

Ensuite, nous développons la fonction $\boldsymbol{f(x, u(x))}$ qui contient la fonction solution $\boldsymbol{u(x)}$ par le développement de Taylor en $\boldsymbol{u_0(x)}$ en gardant $\boldsymbol{x}$ comme il est tel que :

$$\begin{aligned} f(x,u) &= f\left(x,u_0\right)+\left(u-u_0\right) f_u\left(x,u_0\right)+\frac{\left(u-u_0\right)^2}{2!} f_{uu}\left(x,u_0\right) \\ &+\frac{\left(u-u_0\right)^3}{3!} f_{\text{uuu}}\left(x,u_0\right)+\frac{\left(u-u_0\right)^4}{4!} f_{\text{uuuu}}\left(x,u_0\right)+\cdots \end{aligned} \tag{7.11}$$

On sait que le développement de Taylor est absolument et uniformément convergent dans un domaine donné. Maintenant, en utilisant l'équation (7.9) dans l'équation (7.11),Donc

$$\begin{aligned} f(x,u) &= f\left(x,u_0\right)+\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) f_u\left(x,u_0\right) \\ &+\frac{1}{2!}\left\{\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right\}^2 f_{uu}\left(x,u_0\right) \\ &+\frac{1}{3!}\left\{\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right\}^3 f_{uuu}\left(x,u_0\right) \\ &+\frac{1}{4!}\left\{\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right\}^4 f_{uuuu}\left(x,u_0\right)+\cdots \end{aligned}$$

qui peut s'écrire par la suite comme

$$f(x,u)=A_0(x)+A_1(x)+A_2(x)+A_3(x)+\cdots+A_n(x)+\cdots$$

$$f(x,u)=\sum_{n=0}^{\infty} A_n(x) \tag{7.12}$$

Nous définissons les différents termes de $\boldsymbol{A(x,u)}$ comme suit :

$$\begin{aligned} A_0 &= f\left(x,u_0\right) \\ A_1 &= u_1 f_u\left(x,u_0\right) \\ A_2 &= u_2 f_u\left(x,u_0\right)+\frac{1}{2} u_1^2 f_{uu}\left(x,u_0\right) \\ A_3 &= u_3 f_u\left(x,u_0\right)+\frac{1}{2}\left(2 u_1 u_2\right) f_{uu}\left(x,u_0\right)+\frac{1}{6} u_1^3 f_{uuu}\left(x,u_0\right) \\ A_4 &= u_4 f_u\left(x,u_0\right)+\frac{1}{2}\left(2 u_1 u_3+u_2^2\right) f_{uu}\left(x,u_0\right) \\ &+\frac{1}{6}\left(3 u_1^2 u_2\right) f_{uuu}\left(x,u_0\right)+\frac{1}{24} u_1^4 f_{uuuu}\left(x,u_0\right) \end{aligned}$$

Substitution l'équation (7.12) et de l'équation (7.11) dans l'équation intégrale :

$$u(x)=b+\int_a^x f(t,u) dt \tag{7.13}$$

On obtient

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) = b + \int_a^x \sum_{n=0}^{\infty} A_n(t) dt$$

$$u_0(x) + u_1(x) + u_2(x) + \cdots = b + \int_a^x [A_0(t) + A_1(t) + A_2(t) + \cdots] \, dt$$

les composantes

$$u_0(x), u_1(x), u_2(x), \ldots$$

sont complètement déterminées en utilisant le schéma de récurrence suivant :

$$\begin{aligned} u_0(x) &= b \\ u_1(x) &= \int_a^x A_0(t) dt \\ u_2(x) &= \int_a^x A_1(t) dt \\ u_3(x) &= \int_a^x A_2(t) dt \\ u_4(x) &= \int_a^x A_3(t) dt \\ \ldots\ldots &= \cdots\cdots \\ u_{n+1}(x) &= \int_a^x A_n(t) dt \qquad n \geq 1 \end{aligned}$$

Par conséquent, la solution de l'équation (7.8) sous forme de série est immédiatement déterminée en utilisant l'équation (7.9). Comme indiqué précédemment, la série peut donner la solution exacte,ou une série tronquée $\sum_{n=1}^{k} u_n(x)$ peut être utilisée si une approximation numérique est souhaitée. Dans l'exemple suivant, nous allons illustrer la méthode de décomposition telle qu'elle est établie précédemment par la méthode d'approximation successive de Picard.

Application

Résoudre l'équation intégrale suivante :

$$u(x) = \int_0^x \left(x + u^2\right) dt = \frac{x^2}{2} + \int_0^x u^2(t) dt$$

avec la méthode de décomposition d'Adomian.

Solution

Avec la méthode de décomposition, nous pouvons écrire l'équation sous forme de série :

$$u(x)=\sum_{s=0}^{\infty}u_n(x)=\frac{x^2}{2}+\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}A_n(t)dt$$

dans lequel nous pouvons décomposer notre solution en :

$$u_0(x)=\frac{x^2}{2}$$
$$u_1(x)=\int_0^x A_0(t)dt$$
$$u_2(x)=\int_0^x A_1(t)dt$$
$$\cdots\cdots=\cdots\cdots$$
$$u_n(x)=\int_0^x A_{n-1}(t)dt$$

on sait que $f(u)=u^2$, et donc $f'(u)=2u$ et $f''(u)=2$. Toutes les dérivées d'ordre supérieur seront nulles. Ainsi, on obtient :

$$f\left(u_0\right)=u_0^2=\frac{x^4}{4}$$
$$f'\left(u_0\right)=2u_0=x^2$$
$$f''\left(u_0\right)=2$$

Ainsi, avec ces informations, on obtient

$$A_0(x)=\frac{x^4}{4}$$
$$A_1(x)=u_1x^2$$
$$A_2(x)=u_2x^2+u_1^2$$
$$A_3(x)=u_3x^2+2u_1u_2$$

Par conséquent, les différentes composantes de la série peuvent être obtenues comme :

$$u_1(x)=\int_0^x A_0(t)dt=\int_0^x\frac{t^4}{4}dt=\frac{x^5}{20}$$
$$u_2(x)=\int_0^x A_1(t)dt=\int_0^x u_1(t)dt=\int_0^x u_1(t)t^2dt$$
$$u_2(x)=\int_0^x\left(\frac{t^5}{2}\right)t^2dt=\frac{x^8}{160}$$
$$u_3(x)=\int_0^x A_2(t)dt=\int_0^x\left[u_2(t)t^2+u_1^2(t)\right\}dt$$
$$u_3(x)=\int_0^x\left\{\left(\frac{t^8}{160}\right)t^2+\frac{t^{10}}{400}\right\}dt=\frac{7x^{11}}{8800}$$

la solution jusqu'au troisième ordre est donnée par :

$$\boldsymbol{u(x) = u_0(x) + u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \cdots}$$
$$\boldsymbol{u(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{x^5}{20} + \frac{x^8}{160} + \frac{7x^{11}}{8800} + \cdots}$$

Chapitre 8

Les équations intégrales singulières

8.1 Introduction

Ce chapitre traite les équations intégrales singulières qui ont d'énormes applications dans les problèmes appliqués, notamment la mécanique des fluides, la biomécanique et la théorie électromagnétique.
Une équation intégrale est appelée équation intégrale singulière si une ou les deux limites d'intégration deviennent infinies, ou si le noyau $\boldsymbol{K(x,t)}$ de l'équation devient infini en un ou plusieurs points de l'intervalle d'intégration. Pour être précis, l'équation intégrale du premier type :

$$\boldsymbol{f(x) = \lambda \int_{\alpha(x)}^{\beta(t)} K(x,t)u(t)dt} \tag{8.1}$$

l'équation intégrale de deuxième type :

$$\boldsymbol{u(x) = f(x) + \lambda \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} K(x,t)u(t)dt} \tag{8.2}$$

sont dites singulières si $\boldsymbol{\alpha(x)}$, ou $\boldsymbol{\beta(x)}$, ou les deux sont infinies. De plus, l'équation (8.1) ou (8.2) sont aussi appelées équations singulières si le noyau $\boldsymbol{K(x,t)}$ devient infini en un ou plusieurs points du domaine d'intégration. Des exemples du premier genre d'équations intégrales singulières sont donnés ci-dessous :

$$\boldsymbol{u(x) = e^{x} + \int_{0}^{+\infty} K(x,t)u(t)dt} \tag{8.3}$$

$$\boldsymbol{F(u(x)) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega x}u(x)dx} \tag{8.4}$$

$$\boldsymbol{L(u(x)) = \int_{0}^{+\infty} e^{-sx}u(x)dx} \tag{8.5}$$

Les équations intégrales **(8.4)** et **(8.5)** sont respectivement la transformée de Fourier et la transformée de Laplace de la fonction $\boldsymbol{u(x)}$.

On suppose que le lecteur est familiarisé avec l'utilisation des transformées de Fourier et de Laplace pour résoudre les équations différentielles ordinaires à coefficients constants. Les équations **(8.4)** et **(8.5)** peuvent également être définies comme des intégrales impropres car les limites d'intégration sont infinies.

Des exemples d'équations intégrales singulières du deuxième type sont donnés ci-dessous :

$$f(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{x-t}} u(t) dt \tag{8.6}$$

$$f(x) = \int_0^x \frac{1}{(x-t)^n} u(t) dt \tag{8.7}$$

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_0^x \frac{1}{\sqrt{x-t}} u(t) dt \tag{8.8}$$

où le comportement singulier dans ces exemples est attribué au noyau $K(x,t)$ devenant infini quand $t \to x$

remarque

Il est important de noter que les équations intégrales (8.6) et (8.7) sont appelées respectivement problème d'Abel et équation intégrale d'Abel généralisée.
L'équation singulière (8.8) est généralement appelée équation intégrale de Volterra du second type faiblement singulière.

Nous proposons d'étudier dans ce chapitre les trois types d'équations suivants :
- **Le problème d'Abel**,
- **les équations intégrales d'Abel généralisées,**
- **Les équations intégrales faiblement singulières du second type de Volterra**

8.2 Les problèmes d' Abel

Nous avons déjà établi l'équation intégrale du problème d'Abel, nous la reproduisons ici pour plus de clarté.

$$\int_0^x \frac{u(t)}{\sqrt{x-t}} dt = f(x)$$

La solution de cette équation est attribuée en utilisant la méthode de transformation de Laplace. Prendre la transformée de Laplace des deux côtés de l'équation ci-dessus donne

$$L\left\{\int_0^x \frac{u(t)}{\sqrt{x-t}} dt\right\} = L[f(x)]$$

En utilisant le théorème de convolution et après une petite réduction, l'équation transformée peut être écrite sous une forme simple :

$$L[u(x)] = \frac{\sqrt{s}}{\sqrt{\pi}} L[f(x)]$$

Ici, nous avons utilisé le résultat [5] de $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$. La transformation ci-dessus ne peut pas être inversée telle qu'elle est actuellement. On réécrit l'équation comme suit :

$$L[u(x)] = \frac{s}{\sqrt{\pi}} \left[\frac{1}{\sqrt{s}} L[f(x)]\right]$$

En utilisant le théorème de convolution, il peut être immédiatement inversé pour donner :

$$u(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} L^{-1}\left\{ s\left[\frac{1}{\sqrt{s}} L[f(x)]\right]\right\}$$

$$u(x) = \frac{1}{\pi}\frac{d}{dx}\int_0^x \frac{f(t)}{\sqrt{x-t}}dt$$

Notez que la règle de différenciation de Leibnitz ne peut pas être utilisée dans l'intégrale ci-dessus. Donc, intégrez d'abord l'intégrale, puis prenez la dérivée par rapport à x. Puis,cela donne :

$$u(x) = \frac{1}{\pi}\frac{d}{dx}\left\{-2(\sqrt{x-t})f(t)_{10}^{x} + 2\int_0^x \sqrt{x-t}f'(t)dt\right\}$$

$$u(x) = \frac{1}{\pi}\left\{\frac{f(0)}{\sqrt{x}} + \int_0^x \frac{f'(t)}{\sqrt{x-t}}dt\right\}$$

C'est la solution souhaitée du problème d'Abel.

Application

Résoudre le problème d'Abel :

$$4\sqrt{x} = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{x-t}}u(t)dt$$

Solution

Prendre la transformée de Laplace des deux côtés de l'équation donne :

$$4L[\sqrt{x}] = L\left\{\frac{1}{\sqrt{x}}\right\}L[u(x)],$$

qui se réduit à :

$$4\frac{\Gamma(3/2)}{s^{3/2}} = \frac{\Gamma(1/2)}{s^{1/2}}L[u(x)].$$

Après avoir simplifié, il devient :

$$L[u(x)] = 2/s,$$

dont l'inversion donne $u(x) = 2$. C'est le résultat souhaité.

8.3 Les équations intégrales d'Abel généralisées du premier genre

L'équation intégrale est donnée par :

$$\int_0^x \frac{u(t)dt}{(x-t)^\alpha} = f(x), \quad 0 < \alpha < 1 \tag{8.9}$$

En prenant la transformée de Laplace des deux côtés à l'aide du théorème de convolution, on obtient :

$$L\left[x^{-\alpha}\right] L(u(x)) = L[f(x)]$$

or

$$\frac{\Gamma(1-\alpha)}{s^{1-a}} L[u(x)] = L[f(x)] \tag{8.10}$$

Ainsi, en réarrangeant les termes que nous avons :

$$L[u(x)] = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} s \left\{ \frac{1}{s^\alpha} L[f(x)] \right\} \tag{8.11}$$

En utilisant le théorème de convolution de la transformée de Laplace l'équation (8.11) peut être obtenue comme :

$$u(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \left\{ \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt \right\}$$

$$u(x) = \frac{sin(\pi\alpha)}{\pi} \frac{d}{dx} \left\{ \frac{(x-t)^\alpha}{-\alpha} f(t)_0^x + \frac{1}{\alpha} \int_0^x (x-t)^\alpha f'(t) dt \right\}$$

$$u(x) = \frac{sin(\pi\alpha)}{\pi} \frac{d}{dx} \left\{ \frac{x^\alpha}{\alpha} f(0) + \frac{1}{\alpha} \int_0^x (x-t)^\alpha f'(t) dt \right\}$$

$$u(x) = \frac{sin(\pi\alpha)}{\pi} \left\{ \frac{f(0)}{x^{1-a}} + \int_0^x \frac{f'(t)}{(x-t)^{1-a}} dt \right\} \tag{8.12}$$

C'est la solution désirée de l'équation intégrale. Ici, il est à noter que [5]

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \frac{\pi}{sin(\pi\alpha)}$$

La définition de la fonction Gamma est :

$$\Gamma(n) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{n-1} dx$$

Application

Résoudre l'équation intégrale suivante :

$$\int_0^x \frac{u(t)dt}{(x-t)^{1/2}} = x, \quad 0 < x < 1$$

Solution

$$L\left[x^{-1/2}\right]L[u(x)] = L[f(x)]$$

$$\frac{\Gamma(1/2)}{s^{1/2}}L[u(x)] = Lf(x)$$

Ainsi, en réarrangeant les termes que nous avons :

$$L[u(x)] = \frac{1}{\Gamma(1/2)}s\left\{\frac{1}{s^{1/2}}L[f(x)]\right\}$$

En utilisant le théorème de convolution de la transformée de Laplace l'équation précédente peut être obtenue comme :

$$u(x) = \frac{1}{\Gamma(1/2)\Gamma(1/2)}\frac{d}{dx}\left\{\int_0^x (x-t)^{-1/2}tdt\right\}$$

On sait que [5]

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \frac{\pi}{sin(\pi\alpha)}$$

Donc

$$\Gamma(1/2)\Gamma(1/2) = \frac{\pi}{sin((1/2)\pi)}$$

$$\Gamma(1/2)\Gamma(1/2) = \pi.$$

Donc notre équation devient :

$$u(x) = \frac{1}{\pi}\frac{d}{dx}\left\{\int_0^x (x-t)^{-1/2}tdt\right\}$$

Après le calcul de cette intégral en utilisant l'intégration par parties $(f(t) = t$ et $g'(t) = (x-t)^{-1/2})$ on trouve le résultat :

$$u(x) = \frac{1}{\pi}\frac{d}{dx}\left[\int_0^x \frac{tdt}{(x-t)^{1/2}}\right] = \frac{2\sqrt{x}}{\pi}$$

8.4 Le problème d'Abel des équations intégrales du second type

L'équation de Volterra du second type en termes d'équation intégrale d'Abel s'écrit sous la forme :

$$u(x) = f(x) + \int_0^x K(x,t)u(t)dt$$

$$u(x) = f(x) + \int_0^x \frac{u(t)dt}{\sqrt{x-t}} \tag{8.13}$$

La solution de cette intégrale est attribuée par le théorème de convolution de la transformée de Laplace. Prendre la transformée de Laplace des deux côtés de l'équation donne :

$$\boldsymbol{L[u(x)] = L[f(x)] + L\left\{\frac{1}{\sqrt{x}}\right\}L[u(x)]}$$

$$\boldsymbol{L[u(x)] = L[f(x)] + \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{s}}L[u(x)]} \tag{8.14}$$

et après simplification cela peut être exprimé comme :

$$\boldsymbol{L[u(x)] = \left\{\frac{\sqrt{s}}{\sqrt{s}-\sqrt{\pi}}\right\}L[f(x)]}$$

$$\boldsymbol{L[u(x)] = L[f(x)] + \left\{\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{s}-\sqrt{\pi}}\right\}L[f(x)]} \tag{8.15}$$

L'inversion de l'équation (8.15) est donnée par :

$$\boldsymbol{u(x) = f(x) + \int_0^x g(t)f(x-t)dt} \tag{8.16}$$

Avec

$$\boldsymbol{g(x) = L^{-1}\left|\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{s}-\sqrt{x}}\right|}$$

l'inverse de Laplace de $\boldsymbol{\left\{\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{s}-\sqrt{\pi}}\right\}}$ peut être obtenu à partir de la formule :

$$\boldsymbol{L^{-1}\left\{\frac{1}{\sqrt{s-a}-b}\right\} = e^{\pi}\left\{\frac{1}{\sqrt{\pi x}} + be^{b^2x}erfc(-b\sqrt{x})\right\}}$$

Dans notre problème, $\boldsymbol{a = 0, b = \sqrt{\pi}}$ et ainsi de suite :

$$\boldsymbol{L^{-1}\left\{\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{s}-\sqrt{\pi}}\right\} = \sqrt{\pi}\left\{\frac{1}{\sqrt{\pi x}} + \sqrt{\pi}e^{-t}erfc(-\sqrt{\pi x})\right\}} \tag{8.17}$$

Ici, il est noté que $\boldsymbol{erfc(-\sqrt{\pi x}) = erfc(\sqrt{\pi x})}$. Et donc :

$$\boldsymbol{g(x) = L^{-1}\left\{\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{s}-\sqrt{\pi}}\right\} = \sqrt{\pi}\left\{\frac{1}{\sqrt{\pi x}} + \sqrt{\pi}e^{-x}erfc(\sqrt{\pi x})\right\}} \tag{8.18}$$

Ainsi, la solution du problème est donnée par l'équation (8.18).

8.5 L'équation de Volterra faiblement singulière

Les équations intégrales de type Volterra faiblement singulières du second type sont données par :

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_0^x \frac{1}{\sqrt{x-t}} u(t)dt \tag{8.19}$$

apparaissent fréquemment dans de nombreuses applications mathématiques de physique et de chimie telles que la conduction thermique, la croissance cristalline et l'électrochimie. Il est à noter que λ est un paramètre constant.
On suppose que la fonction $f(x)$ est suffisamment lisse pour qu'une solution unique de l'équation **(8.19)** soit garantie. Le noyau $K(x,t) = \dfrac{1}{\sqrt{x-t}}$ est un noyau singulier.

Nous avons déjà vu l'utilisation du théorème de convolution de la méthode de transformation de Laplace dans la section précédente.
Dans cette section, nous utiliserons la méthode de décomposition pour évaluer cette équation intégrale. Pour déterminer la solution, nous adoptons généralement la décomposition sous forme de série :

$$u(x) = \sum_0^\infty u_n(x) \tag{8.20}$$

dans les deux côtés de l'équation (8.19) pour obtenir :

$$\sum_0^\infty u_n(x) = f(x) + \lambda \int_0^x \frac{1}{\sqrt{x-t}} \left(\sum_0^\infty u_n(t) \right) dt \tag{8.21}$$

Les composantes $u_0, u_1, u_2, \ldots$ sont immédiatement déterminées en appliquant les relations de récurrence suivantes :

$$\begin{aligned}
u_0(x) &= f(x) \\
u_1(x) &= \lambda \int_0^x \frac{1}{\sqrt{x-t}} u_0(t)dt \\
u_2(x) &= \lambda \int_0^x \frac{1}{\sqrt{x-t}} u_1(t)dt \\
\cdots\cdots &= \cdots\cdots \\
u_n(x) &= \lambda \int_0^x \frac{1}{\sqrt{x-t}} u_{n-1}(t)dt
\end{aligned}$$

Après avoir déterminé les composantes $u_0(x), u_1(x), u_2(x), \ldots$, la solution $u(x)$ de l'équation (8.19) sera facilement obtenue sous la forme d'une série de puissances à convergence rapide en substituant les composantes dérivées de l'équation (8.20).

Il est important de noter que les phénomènes des termes similaires avec des signes opposés apparaissent dans des problèmes spécifiques, doivent être observés entre les composants $u_0(x)$ et $u_1(x)$.
L'apparition de ces termes accélère généralement la résolution de la solution et minimise la taille du calcul.

Application

Déterminer la solution de l'équation intégrale de Volterra faiblement singulière de seconde espèce suivante :

$$\boldsymbol{u(x) = \sqrt{x} + \frac{\pi x}{2} - \int_0^x \frac{1}{\sqrt{x-t}} u(t)dt} \tag{8.22}$$

solution :

on pose :

$$\boldsymbol{u_0(x) = \sqrt{x} + \frac{\pi x}{2}} \tag{8.23}$$

ce qui donne :

$$\boldsymbol{u_1(x) = -\int_0^x \frac{\sqrt{t} + \frac{\pi t}{2}}{\sqrt{x-t}} dt} \tag{8.24}$$

La transformation $\boldsymbol{t = x\sin^2\theta}$ porte l'équation (8.24) en

$$\boldsymbol{u_1(x) = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(2x\sin^2\theta + \pi x^{\frac{3}{2}}\sin^3\theta\right) d\theta}$$

$$\boldsymbol{u_1(x) = -\frac{\pi x}{2} - \frac{2}{3}\pi x^{\frac{3}{2}}} \tag{8.25}$$

En observant l'apparition des termes $\boldsymbol{\frac{\pi x}{2}}$ et $\boldsymbol{-\frac{\pi x}{2}}$ entre les composantes $\boldsymbol{u_0(x)}$ et $\boldsymbol{u_1(x)}$, et en vérifiant que le terme non annulable dans $\boldsymbol{u_0(x)}$ vérifie l'équation **(8.22)** donne

$$\boldsymbol{u(x) = \sqrt{x}} \tag{8.26}$$

Et c'est la solution exacte de l'équation intégrale donnée. Ce résultat peut être vérifié par la méthode de la transformée de Laplace. En prenant la transformée de Laplace de l'équation **(8.22)** donne :

$$\boldsymbol{L[u(x)] = L[f(x)] + \frac{\pi}{2}Lx - L\left\{\frac{1}{\sqrt{x}}\right\}\mathcal{L}[u(x)]}$$

$$\boldsymbol{L[u(x)] = \frac{\Gamma(\frac{3}{2})}{s^{\frac{3}{2}}} + \frac{\pi}{2s^2} - \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\sqrt{s}}L[u(x)]} \tag{8.27}$$

et après simplification on a

$$\boldsymbol{L[u(x)] = \frac{\sqrt{\pi}}{2s(\sqrt{s}+\sqrt{\pi})} + \frac{\pi}{2s^{\frac{3}{2}}(\sqrt{s}+\sqrt{\pi})}}$$

$$\boldsymbol{L[u(x)] = \frac{\sqrt{\pi}}{2s^{\frac{3}{2}}}\left[\frac{\sqrt{s}+\sqrt{\pi}}{\sqrt{s}+\sqrt{\pi}}\right]}$$

$$\boldsymbol{L[u(x)] = \frac{\sqrt{\pi}}{2s^{\frac{3}{2}}}} \tag{8.28}$$

L'inversion est simplement :

$$\boldsymbol{u(x) = L^{-1}\left[\frac{\sqrt{\pi}}{2s^{\frac{3}{2}}}\right] = \sqrt{x}} \tag{8.29}$$

C'est la bonne solution souhaitée.

Chapitre 9

Les équations intégro-différentielles

9.1 Introduction

Ce chapitre traite l'un des problèmes les plus appliqués aux sciences de l'ingénieur. Il concerne les équations intégro-différentielles où les opérateurs différentiels et intégrales apparaîtront dans la même équation.
Ce type d' équations a été introduit par Volterra pour la première fois au début des années 1900 . Volterra a étudié la croissance démographique, concentrant son étude sur les influences héréditaires, où à travers ses travaux de recherche le sujet des équations intégro-différentielles a été établi.

Les scientifiques et les ingénieurs découvrent les équations intégro-différentielles grâce à leurs travaux de recherche sur les processus de diffusion de chaleur et de masse, les problèmes de circuits électriques, la diffusion de neutrons et les espèces biologiques coexistant avec des taux de génération croissants et décroissants.
Les applications des équations intégro-différentielles dans la théorie électromagnétique et les ondes dispersives et les circulations océaniques sont énormes. Dans le circuit électrique $\boldsymbol{LRC}$, on rencontre une équation intégro-différentielle pour déterminer le courant instantané circulant dans le circuit avec condition initiale $\boldsymbol{I(0) = I_0}$ à $\boldsymbol{t = 0.}$ Pour résoudre ce problème, nous devons connaître la technique appropriée.
Il est important de noter que dans les équations intégro-différentielles, la fonction inconnue $\mathbf{u(x)}$ et une ou plusieurs de ses dérivées telles que $\boldsymbol{u'(x), u''(x), \ldots}$ apparaissent également à l'extérieur et sous le signe intégral.
Une source rapide d'équations intégro-différentielles peut être clairement vue lorsque nous convertissons l'équation différentielle en une équation intégrale en utilisant la règle de Leibnitz. L'équation intégro-différentielle peut être considérée dans ce cas comme une étape intermédiaire lors de la recherche d'une équation intégrale de Volterra équivalente à l'équation différentielle donnée. Voici les exemples d'équations intégro-différentielles linéaires

$$u'(x) = f(x) - \int_0^x (x-t)u(t)dt, \quad u(0) = 0 \tag{9.1}$$

$$u''(x) = g(x) + \int_0^x (x-t)u(t)dt, \quad u(0) = 0, u'(0) = -1 \tag{9.2}$$

$$u'(x) = e^x - x + \int_0^1 xtu(t)dt, \quad u(0) = 0 \tag{9.3}$$

$$u''(x) = h(x) + \int_0^x tu'(t)dt, \quad u(0) = 0, u'(0) = 1 \tag{9.4}$$

Il ressort des exemples ci-dessus que la fonction inconnue $u(x)$ de l'une de ses dérivées apparaît sous le signe intégral, et les autres dérivées apparaissent également sous le signe intégral. Ces exemples peuvent être classés comme les équations intégro-différentielles de Volterra et Fredholm. Les équations **(9.1)** et **(9.2)** sont de type Volterra alors que les équations **(9.3)** et **(9.4)** sont de type Fredholm.
Il est à noter que ces équations sont des équations intégro-différentielles linéaires. Cependant, des équations intégro-différentielles non linéaires surviennent également dans de nombreux problèmes scientifiques et techniques. Nous nous intéresserons dans ce chapitre aux équations intégro-différentielles linéaires et nous nous intéresserons à leurs différentes techniques de résolution.
Pour obtenir une solution de l'équation intégro-différentielle, nous devons spécifier les conditions initiales pour déterminer les constantes inconnues.

9.2 Équations intégro-différentielles de Volterra

Dans cette section, nous présenterons quelques méthodes mathématiques sophistiquées pour obtenir la solution des équations intégro-différentielles de Volterra. Nous concentrerons notre attention sur l'étude de l'équation intégrale qui fait intervenir le noyau séparable de la forme :

$$K(x,t)=\sum_{k=1}^{n} g_k(x)h_k(t) \tag{9.5}$$

Nous étudierons d'abord le cas où $K(x,t)$ est constitué d'un produit des fonctions $g(x)$ et $h(t)$ tel que $K(x,t)=g(x)h(t)$ seulement lorsque d'autres cas peuvent être généralisés de la même manière. Le noyau non séparable peut être réduit au noyau séparable en utilisant le développement de Taylor. Nous allons d'abord illustrer la méthode et ensuite utiliser la technique pour quelques exemples.

8.2.1 La méthode de résolution en série :

Considérons une forme standard de l'équation intégro-différentielle de Volterra d'ordre n comme indiqué ci-dessous :

$$u^{(k)}(x)=f(x)+g(x)\int_0^x h(t)u(t)dt, \quad u^{(n)}=b_k, \quad 0\leq k\leq (n-1) \tag{9.6}$$

Nous suivrons la méthode de résolution en série de Frobenius utilisée pour résoudre les équations différentielles ordinaires autour d'un point ordinaire. Pour atteindre cet objectif, nous supposons d'abord que la solution $u(x)$ de l'équation (9.6) est une fonction analytique et peut donc être représentée par un développement en série autour du point ordinaire $x=0$ donné par :

$$u(x)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \tag{9.7}$$

où les coefficients a_k sont les constantes inconnues et doivent être déterminées. Il est à noter que les premiers coefficients a_k peuvent être déterminées en utilisant les conditions initiales de sorte que $a_0=u(0), a_1=u'(0), a_2=\dfrac{1}{2}u'(0)$, et ainsi de suite en fonction du nombre de conditions initiales, tandis que les coefficients restants a_k seront déterminé à partir de l'application de la technique, comme nous le verrons plus loin. La substitution de l'équation (9.7) dans les deux côtés de l'équation (9.6) donne :

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k\right)^{(k)} = f(x) + g(x) \int_0^x \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k\right) dt \tag{9.8}$$

Au vu de l'équation (9.8), l'équation (9.6) sera réduite à des intégrales calculables dans la partie droite de l'équation (9.8) qui peuvent être facilement évaluées où nous devons intégrer des termes de la forme $t^n, n \geq 0$ seulement. L'étape suivante consiste à écrire le développement de Taylor pour $f(x)$, à évaluer les intégrales traditionnelles résultantes, c'est-à-dire l'équation (9.8), puis à égaliser les coefficients de puissances similaires de x des deux côtés de l'équation. Cela conduira à une détermination complète des coefficients $a_0, a_1, a_2, \ldots$ de la série de l'équation (9.7). Par conséquent, en substituant les coefficients obtenus $a_k, k \geq 0$ dans l'équation (9.7) produit la solution sous forme de série. Pour donner un aperçu clair de la méthode qui vient d'être décrite et de la façon dont elle doit être mise en œuvre pour les équations intégro-différentielles de Volterra, la méthode des solutions en série sera illustrée en considérant l'exemple suivant :

Exemple :

Résoudre l'équation intégro-différentielle de Volterra suivante :

$$u''(x) = x \cosh x - \int_0^x t u(t) dt, \quad u(0) = 0, \quad u'(0) = 1 \tag{9.9}$$

en utilisant la méthode des solutions en série.

solution :

Remplacer $u(x)$ par la série :

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \tag{9.10}$$

Dans les deux côtés de l'équation (9.9) et en utilisant le développement de Taylor de $\cosh x$, nous obtenons :

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = x \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2t}}{(2k!)}\right) - \int_0^x t \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n\right) dt$$

En utilisant les conditions initiales, nous avons $a_0 = 0$ et $a_1 = 1$. L'évaluation des intégrales impliquant des termes de la forme $t^n, n \geq 0$, et l'utilisation de quelques termes des deux côtés donnent :

$$2a_2 + 6a_3 x + 12a_4 x^2 + 20a_5 x^3 + \cdots = x \left(1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots\right) - \left(\frac{x^3}{3} + \frac{1}{4} a_2 x^4 + \cdots\right)$$

En identifiant les coefficients de puissances similaires de $\boldsymbol{x}$ des deux côtés, nous trouvons $\boldsymbol{a_2 = 0}$, $\boldsymbol{a_3 = \frac{1}{3}, a_4 = 0}$, et en général $\boldsymbol{a_{2n} = 0}$, pour $\boldsymbol{n \geq 0}$ et $\boldsymbol{a_{2n+1} = \frac{1}{(2n+1)}}$, pour $\boldsymbol{n \geq 0}$ Donc , en utilisant les valeurs de ces coefficients, la solution pour $\boldsymbol{u(x)}$ de l'équation (9.10) peut être écrite sous forme de série comme

$$\boldsymbol{u(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots}$$

$$\boldsymbol{u(x) = \sinh x}$$

est la solution exacte de l'équation (9.9)

8.2.2 la méthode de décomposition

Dans cette section, nous présenterons la méthode de décomposition et la méthode de décomposition modifiée pour résoudre les équations intégro-différentielles de Volterra. Cette méthode semble fiable et efficace.

Sans perte de généralité, nous pouvons supposer une forme standard à l'équation intégro-différentielle de Volterra définie par la forme standard :

$$\boldsymbol{u^{(n)} = f(x) + \int_0^x K(x,t)u(t)dt, \quad u^{(k)}(0) = b_k, 0 \leq k \leq (n-1)} \tag{9.11}$$

où $\boldsymbol{u^{(n)}}$ est la dérivée d'ordre n de $\mathbf{u}\boldsymbol{(x)}$ par rapport à $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{b_k}$ sont des constantes qui définissent les conditions initiales. Il est naturel de chercher une expression pour $\boldsymbol{u(x)}$ qui sera dérivée de l'équation (9.11). Cela peut être fait en intégrant les deux membres de l'équation (9.11) de 0 à $\boldsymbol{x}$ autant de fois que l'ordre de la dérivée impliquée. Par conséquent, on obtient

$$\boldsymbol{u(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} b_k x^k + L^{-1}(f(x)) + L^{-1}\left(\int_0^x K(x,t)u(t)dt\right)} \tag{9.12}$$

où $\boldsymbol{\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} b_k x^k}$ est obtenu en utilisant les conditions initiales, et $\boldsymbol{L^{-1}}$ est un opérateur d'intégration $\boldsymbol{n}$ -fois. Maintenant, nous sommes en mesure d'appliquer la méthode de décomposition.

$$\boldsymbol{u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)} \tag{9.13}$$

Substitution de l'équation (9.13) dans les deux côtés de l'équation (9.2) nous obtenons

$$\boldsymbol{\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} b_k x^k + L^{-1}(f(x)) + L^{-1}\left(\int_0^x K(x,t)\left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n(t)\right)dt\right)} \tag{9.14}$$

Cette équation peut s'écrire explicitement sous la forme :

$$\boldsymbol{u_0(x) + u_1(x) + u_2(x) + \cdots = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} b_k x^k + L^{-1}(f(x))}$$

$$
\begin{aligned}
&+L^{-1}\left(\int_0^x K(x,t)u_0(t)dt\right)\\
&+L^{-1}\left(\int_0^x K(x,t)u_1(t)dt\right)\\
&+L^{-1}\left(\int_0^x K(x,t)u_2(t)dt\right)\\
&+L^{-1}\left(\int_0^x K(x,t)u_3(t)dt\right)\\
&+\cdots
\end{aligned}
\tag{9.15}
$$

Les composantes $u_0(x), u_1(x), u_2(x), u_3(x), \ldots$ de la fonction inconnue $u(x)$ sont déterminées de manière récursive, si on pose :

$$
\begin{aligned}
u_0(x) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} b_k x^k + L^{-1}(f(x))\\
u_1(x) &= L^{-1}\left(\int_0^x K(x,t)u_0(t)dt\right)\\
u_2(x) &= L^{-1}\left(\int_0^x K(x,t)u_1(t)dt\right)\\
u_3(x) &= L^{-1}\left(\int_0^x K(x,t)u_2(t)dt\right)\\
u_4(x) &= L^{-1}\left(\int_0^I K(x,t)u_3(t)dt\right)
\end{aligned}
\tag{9.16}
$$

etc. Les équations ci-dessus peuvent être écrites de manière récursive sous la forme

$$
\begin{aligned}
u_0(x) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} b_k x^k + L^{-1}(f(x))\\
u_{n+1}(x) &= L^{-1}\left(\int_0^x K(x,t)u_n(t)dt\right), \quad n \geq 0
\end{aligned}
\tag{9.17}
$$

Au vu des équations (9.16) et (9.17), les composantes $u_0(x), u_1(x), u_2(x), \ldots$ sont immédiatement déterminées. Une fois ces composantes déterminées, la solution $u(x)$ de l'équation (9.11) est alors obtenue sous forme de série en utilisant l'équation (9.13). La solution en série peut être mise dans une solution fermée exacte qui peut être clarifiée par une illustration comme suit.
Il est à noter ici que les phénomènes d'auto-annulation des termes de bruit qui ont été introduits auparavant peuvent être appliqués ici si les termes de bruit apparaissent dans $u_0(x)$ et $u_1(x)$. L'exemple suivant expliquera comment nous pouvons utiliser la méthode de décomposition.

Application :

Résoudre l'équation intégro-différentielle de Volterra suivante :

$$\boldsymbol{u''(x) = x + \int_0^x (x-t)u(t)dt, \quad u(0) = 0, u'(0) = 1} \tag{9.18}$$

en utilisant la méthode de décomposition. Vérifiez le résultat par la méthode de transformation de Laplace.

Solution :

Application de l'opérateur d'intégration double $\boldsymbol{L^{-1}}$

$$\boldsymbol{L^{-1}(.) = \int_0^x \int_0^x (.)dxdx} \tag{9.19}$$

aux deux côtés de l'équation (6.26), c'est-à-dire en intégrant les deux côtés de l'équation (6.26) deux fois de 0 à $\boldsymbol{x}$, et en utilisant les conditions données on trouve :

$$\boldsymbol{u(x) = x + \frac{x^3}{3!} + L^{-1}\left(\int_0^x (x-t)u(t)dt\right)} \tag{9.20}$$

En suivant le schéma de décomposition, c'est-à-dire l'équation (9.17), on trouve :

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u_0(x)} &= \boldsymbol{x + \frac{x^3}{3!}} \\
\boldsymbol{u_1(x)} &= \boldsymbol{L^{-1}\left(\int_0^x (x-t)u_0(t)dt\right) = \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!}} \\
\boldsymbol{u_2(x)} &= \boldsymbol{L^{-1}\left(\int_0^x (x-t)u_1(t)dt\right) = \frac{x^9}{9!} + \frac{x^{11}}{11!}}
\end{aligned} \tag{9.21}$$

Avec ces informations, la solution finale peut être écrite sous la forme :

$$\boldsymbol{u(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} + \frac{x^{11}}{11!} + \cdots} \tag{9.22}$$

et cela conduit à $\boldsymbol{u(x) = \sinh x}$, la solution exacte sous forme fermée. En utilisant la méthode de transformation de Laplace avec le concept de convolution et en utilisant les conditions initiales, l'équation donnée peut être très facilement simplifiée en

$$\boldsymbol{L[u(x)] = \frac{1}{s^2 - 1}}$$

et en prenant la transformée inverse, on obtient $\boldsymbol{u(x) = \sinh x}$ qui est identique au résultat précédent.

8.2.3 Conversion aux équations intégrales de Volterra

Cette section concerne la conversion en équations intégrales de Volterra. On peut facilement convertir l'équation intégro-différentielle de Volterra en équation intégrale de Volterra équivalente, à condition que le noyau soit un noyau de différence défini par $\boldsymbol{K(x,t)=K(x-t)}$. Cela peut être facilement fait en intégrant les deux côtés de l'équation et en utilisant les conditions initiales.
Pour effectuer la conversion en une équation intégrale de Volterra régulière, nous devons utiliser la formule bien connue décrite avant qui convertit des intégrales multiples en une intégrale simple. Nous illustrons à l'intention du lecteur trois formules spécifiques.
Après avoir établi la transformation en une équation intégrale standard de Volterra, nous pouvons procéder en utilisant l'une des méthodes alternatives discutées précédemment dans les chapitres précédents.
Pour donner un aperçu clair de cette méthode, nous illustrons l'exemple suivant :

Exemple :

Résoudre l'équation intégro-différentielle de Volterra suivante :

$$\boldsymbol{u'(x)=2-\frac{x^2}{4}+\frac{1}{4}\int_0^x u(t)dt,\quad u(0)=0} \tag{9.23}$$

en convertissant en une équation intégrale standard de Volterra.

Solution :

En intégrant les deux membres de 0 à $\boldsymbol{x}$ et en utilisant la condition initiale et en convertissant également l'intégrale double en l'intégrale simple, nous obtenons :

$$\boldsymbol{u(x)=2x-\frac{x^3}{12}+\frac{1}{4}\int_0^x\int_0^x u(t)dtdt}$$

$$\boldsymbol{u(x)=2x-\frac{x^3}{12}+\frac{1}{4}\int_0^x (x-t)u(t)dt} \tag{9.24}$$

On voit clairement que l'équation ci-dessus est une équation intégrale standard de Volterra. Il sera résolu par la méthode de décomposition. En suivant cette technique, nous avons mis :

$$\boldsymbol{u_0(x)=2x-\frac{x^3}{12}} \tag{9.25}$$

Ce qui donne :

$$\boldsymbol{u_1(x)=\frac{1}{4}\int_0^x (x-t)\left(2t-\frac{t^3}{12}\right)dt}$$

$$\boldsymbol{u_1(x)=\frac{x^3}{12}-\frac{x^5}{240}} \tag{9.26}$$

On peut facilement observer que $\mathbf{\frac{x^3}{12}}$ apparaît avec des signes opposés dans les composantes $\mathbf{u_0(x)}$ et $\boldsymbol{u_1(x)}$, et en annulant ce terme de bruit de $\mathbf{u_0}(\boldsymbol{x})$ et en justifiant que $\mathbf{u}(\boldsymbol{x})=\mathbf{2}\boldsymbol{x}$, est la solution exacte de l'équation $\mathbf{(9.23)}$.

Ce résultat peut être facilement vérifié en prenant la transformée de Laplace de l'équation **(9.23)** et en utilisant la condition initiale qui se réduit simplement à $\boldsymbol{L[u(x)] = \frac{2}{s^2}}$ et son inversion est $\boldsymbol{u(x) = 2x}$.

8.2.4 Convertir en un problème à valeur innitiale

Dans cette section, nous étudierons comment réduire l'équation intégro-différentielle de Volterra à un problème à valeur initiale équivalent.
Dans cette étude, nous s'intéresserons principalement au cas où le noyau est un noyau de différence de la forme $\boldsymbol{K(x,t) = K(x-t)}$.
Ceci peut être facilement réalisé en différenciant les deux côtés de l'équation intégro-différentielle autant de fois que nécessaire pour supprimer le signe intégral.
En différenciant l'intégrale impliquée, nous utiliserons la règle de Leibnitz pour atteindre notre objectif.
La règle de Leibnitz a déjà été introduite avant .
Pour référence, la règle est :

Soit

$$\boldsymbol{y(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} f(x,t)dt}$$

ensuite

$$\boldsymbol{\frac{dy}{dx} = \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial}{\partial x} f(x,t)dt + \frac{db(x)}{dx} f(b(x),x) - \frac{da(x)}{dx} f(a(x),x)}$$

Après avoir converti l'équation intégro-différentielle de Volterra en un problème à valeur initiale, les diverses méthodes utilisées dans toute équation différentielle ordinaire peuvent être utilisées pour déterminer la solution. Le concept est facile à mettre en œuvre mais nécessite plus de calculs par rapport à la technique de l'équation intégrale. Pour donner un aperçu clair de cette méthode, nous illustrons l'exemple suivant :

Exemple :

Résoudre l'équation intégro-différentielle de Volterra suivante :

$$\boldsymbol{u'(t) = 1 + \int_0^x u(t)dt, \quad u(0) = 0} \tag{9.27}$$

en la convertissant en un problème de valeur initiale.

Solution :

Différencier les deux membres de l'équation **(9.27)** par rapport à $\boldsymbol{x}$ et utiliser la règle de Leibnitz pour différencier l'intégrale du membre de droite on obtient

$$\boldsymbol{u''(x) = u(x)} \tag{9.28}$$

avec les conditions initiales $\boldsymbol{u(0) = 0, \quad u'(0) = 1}$ où la condition dérivée est obtenue en substituant $\boldsymbol{x = 0}$ des deux côtés de l'équation (9.27).
La solution de l'équation (9.28) est simplement

$$\boldsymbol{u(x) = A\cosh x + B\sinh x}$$

où A et B sont des constantes arbitraires et en utilisant les conditions initiales, nous avons $A = 0$ et $B = 1$ et donc la solution devient :

$$u(x) = \sinh x$$

Cette solution peut être vérifiée par la méthode de la transformée de Laplace. En prenant le Laplace à l'équation (9.27) et en utilisant la condition initiale, on a après réduction :

$$L[u(x)] = \frac{1}{s^2 - 1}$$

et son inversion nous donne $u(x) = \sinh x$ qui est identique au résultat ci-dessus.

9.3 Équations intégro-différentielles de Fredholm

Dans cette section, nous discuterons des méthodes fiables utilisées pour résoudre les équations intégro-différentielles de Fredholm.
Remarquons ici que nous focaliserons notre attention sur les équations faisant intervenir des noyaux séparables où le noyau $K(x,t)$ peut être exprimé comme une somme finie de la forme

$$K(x,t) = \sum_{k=1}^{n} g_x(x) h_k(t) \tag{9.29}$$

Sans perte de généralité, nous ferons notre analyse sur un noyau à un terme $K(x,t)$ de la forme $K(x,t) = g(x)h(t)$, et ceci peut être généralisé pour les autres cas. Le noyau non séparable peut être réduit en noyau séparable en utilisant le développement de Taylor. Précisons que les méthodes qui seront discutées sont introduites auparavant, mais nous nous concentrerons sur la manière dont ces méthodes peuvent être mises en œuvre dans ce type d'équations. Nous commencerons par la méthode la plus pratique.

8.3.1 La méthode du calcul direct

Sans perte de généralité, nous supposons une forme standard de l'équation intégro-différentielle de Fredholm donnée par :

$$u^{(k)}(x) = f(x) + \int_0^1 K(x,t)u(t)dt, \quad u^{(k)} = b_k(0), 0 \leq k \leq (n-1) \tag{9.30}$$

où $u^{[n]}(x)$ est la dérivée énième de $u(x)$ par rapport à x et b_k sont des constantes qui définissent les conditions initiales. La substitution de $K(x,t) = g(x)h(t)$ dans l'équation (9.30) donne

$$u^{(k)}(x) = f(x) + g(x)\int_0^1 h(t)u(t)dt, \quad u^{(k)} = b_k, 0 \leq k \leq (n-1) \tag{9.31}$$

Nous pouvons facilement voir à partir de l'équation (9.31) que l'intégrale définie du membre de droite est une constante α, c'est-à-dire que nous posons :

$$\alpha = \int_0^1 h(t)u(t)dt \tag{9.32}$$

donc l'équation (9.31) peut s'écrire comme

$$\boldsymbol{u^{(n)}(x) = f(x) + \alpha g(x)} \tag{9.33}$$

Il reste à déterminer la constante $\boldsymbol{\alpha}$ pour évaluer la solution exacte $\boldsymbol{u(x)}$.
Pour trouver $\boldsymbol{\alpha}$, nous devons dériver une forme pour $\boldsymbol{u(x)}$ en utilisant l'équation (9.33), suivie de la substitution de la forme dans l'équation (9.32).
Après on obtient :

$$\boldsymbol{u(x) = p(x;\alpha)} \tag{9.34}$$

où $\boldsymbol{p(x;\alpha)}$ est le résultat dérivé de l'intégration de l'équation (9.33) et aussi en utilisant les conditions initiales données.
Substituer l'équation (9.34) dans le membre de droite de l'équation (9.32), intégrer et résoudre l'équation algébrique résultante pour déterminer $\boldsymbol{\alpha}$.
La solution exacte de l'équation (9.31) suit immédiatement la substitution de la valeur de $\boldsymbol{\alpha}$ dans l'équation (9.33). Nous envisageons ici de démontrer la technique avec un exemple.

Exemple :

Résoudre l'équation intégro-différentielle de Fredholm suivante :

$$\boldsymbol{u'''(x) = \sin x - x - \int_0^{\pi/2} xtu'(t)dt} \tag{9.35}$$

sous réserve des conditions initiales $\boldsymbol{u(0) = 1, u'(0) = 0, u''(0) = -1}$.

Solution :

Cette équation peut s'écrire sous la forme :

$$\boldsymbol{u'''(x) = \sin x - (1+\alpha)x, \quad u(0) = 1, \quad u'(0) = 0, \quad u''(0) = -1} \tag{9.36}$$

Avec

$$\boldsymbol{\alpha = \int_0^{\pi/2} tu'(t)dt} \tag{9.37}$$

Pour déterminer $\boldsymbol{\alpha}$, nous devrions trouver une expression pour $\boldsymbol{u'(x)}$ en termes de $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{\alpha}$ à utiliser dans l'équation (9.37). Cela peut être fait en intégrant l'équation (9.36) trois fois de 0 à $\boldsymbol{x}$ et en utilisant les conditions initiales.
par conséquent, nous trouvons :

$$\boldsymbol{u''(x) = -\cos x - \frac{1+\alpha}{2!}x^2 u'(x) = -\sin x - \frac{1+\alpha}{3!}x^3}$$

$$\boldsymbol{u'(x) = \cos x - \frac{1+\alpha}{4!}x^4} \tag{9.38}$$

En substituant l'expression $\boldsymbol{u'(x)}$ dans l'équation **(9.38)**, nous obtenons :

$$\alpha = \int_0^{\pi/2} \left(-t \sin t - \frac{1+\alpha}{3!} t^4 \right) dt = -1. \tag{9.39}$$

Substituer $\alpha = -1$ dans $u(x) = \cos x - \frac{1+\alpha}{4} x^4$ donne simplement $u(x) = \cos x$ qui est la solution requise du problème.

8.3.2 La méthode de décomposition

Dans les chapitres précédents, la méthode de décomposition adomienne a été largement introduite pour résoudre les équations intégrales de Fredholm.
Dans cette section, nous étudierons comment cette puissante méthode peut être mise en œuvre pour déterminer une solution en série des équations intégro-différentielles de Fredholm.
Nous supposerons une forme standard à l'équation intégro-différentielle de Fredholm comme indiqué ci-dessous :

$$u^{(n)}(x) = f(x) + \int_0^1 K(x,f)u(t)dt, \quad u^{(k)}(0) = b_k, 0 \leq k \leq (n-1) \tag{9.40}$$

La substitution de $K(x,t) = g(x)h(t)$ dans l'équation (9.40) donne

$$u^{(n)}(x) = f(x) + g(x) \int_0^1 h(t)u(t)dt \tag{9.41}$$

L'équation (9.41) peut être écrite sous la forme de l'opérateur comme

$$L(u(x)) = f(x) + g(x) \int_0^1 h(t)u(t)dt \tag{9.42}$$

où l'opérateur différentiel est donné par $L = \frac{d^n}{dx^n}$. Il est clair que L est un opérateur inversible , par conséquent, l'opérateur intégral L^{-1} est un opérateur d'intégration n et peut être considéré comme des intégrales définies de 0 à x pour chaque intégrale. L'application de L^{-1} aux deux membres de l'équation **(9.42)** donne :

$$u(x) = b_0 + b_1 x + \frac{1}{2!} b_2 x^2 + \cdots + \frac{1}{(n-1)} b_{n-1} x^{n-1} + L^{-1}(f(x)) + \left(\int_0^1 h(t)u(t)dt \right) L^{-1}(g(x)) \tag{9.43}$$

En d'autres termes, nous intégrons l'équation (9.42) n fois de 0 à x et nous utilisons les conditions initiales à chaque étape d'intégration.
Il est important de noter que l'équation obtenue dans l'équation (9.43) est une équation intégrale de Fredholm standard.
Ces informations seront utilisées dans les sections suivantes.

Dans la méthode de décomposition, nous définissons généralement la solution $u(x)$ de l'équation (9.40) sous la forme d'une série donnée par :

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) \tag{9.44}$$

En substituant l'équation (9.44) aux deux côtés de l'équation (9.43) nous obtenons

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} b_k x^k + L^{-1}(f(x)) + \left(\int_0^1 h(t) \sum_{k=0}^{\infty} u_n(t) dt \right) L^{-1}(g(x)) \tag{9.45}$$

Cela peut s'écrire explicitement comme suit :

$$\begin{aligned} u_0(x) + u_1(x) + u_2(x) + \cdots &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} b_k x^k + L^{-1}(f(x)) \\ &+ \left(\int_0^1 h(t)\mu_0(t) dt \right) L^{-1}(g(x)) + \left(\int_0^1 h(t) u_1(t) dt \right) L^{-1}(g(x)) \\ &+ \left(\int_0^1 h(t) u_2(t) dt \right) L^{-1}(g(x)) + \cdots \end{aligned} \tag{9.46}$$

Les composantes $u_0(x), u_1(x), u_2(x), \ldots$ de la fonction inconnue $u(x)$ sont déterminées de manière récurrente, de manière similaire mode comme discuté précédemment,on a :

$$\begin{aligned} u_0(x) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} b_k x^k + L^{-1}(f(x)) \\ u_1(x) &= \left(\int_0^1 h(f) u_0(t) dt \right) L^{-1}(g(x)) \\ u_2(x) &= \left(\int_0^1 h(t) u_1(t) dt \right) L^{-1}(g(x)) \\ u_3(x) &= \left(\int_0^1 h(t) u_2(f) dt \right) L^{-1}(g(x)) \\ &\cdots \end{aligned} \tag{9.47}$$

Le schéma ci-dessus peut être écrit sous forme compacte comme suit :

$$\begin{aligned} u_0(x) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} b_k x^k + L^{-1}(f(x)) \\ u_{n+1}(x) &= \left(\int_0^1 h(t) u_n(t) dt \right) L^{-1}(g(x)), \quad n \geq 0 \end{aligned} \tag{9.48}$$

Au vu de l'équation (9.48), les composantes de $u(x)$ sont immédiatement déterminées et par conséquent la solution $u(x)$ est déterminée. La solution en série s'avère convergente. Parfois, la série donne une expression exacte pour $u(x)$. La méthode de décomposition évite le travail de calcul massif et les difficultés qui découlent d'autres méthodes. Le travail de calcul peut être minimisé, parfois, en observant les phénomènes de termes de bruit auto-annulés.

Remarque

Au lieu d'évaluer plusieurs composantes, il est utile d'examiner les deux premières composantes.
Si nous observons l'apparition de termes similaires dans les deux composants avec des signes opposés, alors en annulant ces termes, les termes non annulés restants de u_0 peuvent dans les mêmes cas fournir la solution exacte. Cela peut être justifié par la substitution.
Les termes d'auto-annulation entre les composants $u_0(x)$ et $u_1(x)$ sont appelés les termes de bruit.
Cependant, si la solution exacte n'est pas réalisable en utilisant ce phénomène, alors nous devrions continuer à déterminer d'autres composants de $u(x)$ pour obtenir une solution de forme fermée ou une solution approchée. Nous allons maintenant envisager de démontrer cette méthode par un exemple.

Exemple :

Résoudre l'équation intégro-différentielle de Fredholm suivante

$$u'''(x) = \sin x - x - \int_0^{\pi/2} xtu'(t)dt, \quad u(0) = 1, u'(0) = 0, u''(0) = -1 \tag{9.49}$$

en utilisant la méthode de décomposition

Solution

En intégrant trois fois les deux membres de l'équation (9.49) de 0 à x et en utilisant les conditions initiales on obtient :

$$u(x) = \cos x - \frac{x^4}{4!} - \frac{x^4}{4!}\int_0^{\pi/2} tu'(t)dt \tag{9.50}$$

On utilise la série solution donnée par :

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) \tag{9.51}$$

La substitution de l'équation (9.51) dans les deux côtés de l'équation (9.50) donne

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) = \cos x - \frac{x^4}{4!} - \frac{x^4}{4!}\int_0^{\pi/2} t\left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n'(t)\right)dt \tag{9.52}$$

Ceci peut être explicitement écrit comme :

$$\begin{aligned} u_0(x) + u_1(x) + u_2(x) + \cdots = \cos x - \frac{x^4}{4!} - \frac{x^4}{4!}\left(\int_0^{\pi/2} tu_0'(t)dt\right) \\ -\frac{x^4}{4!}\left(\int_0^{-/2} tu_1'(t)dt\right) - \frac{x^4}{4!}\left(\int_0^{\pi/2} u_2'(t)dt\right) + \cdots \end{aligned} \tag{9.53}$$

Laissez-nous définir :

$$u_0(x) = \cos x - \frac{x^4}{4!}$$

$$u_1(x) = -\frac{x^4}{4!}\int_0^{\pi/2} t\left(-\sin t - \frac{t^3}{3!}\right)dt = \frac{x^4}{4!} + \frac{\pi^5}{(5!)(3!)(32)}x^4 \tag{9.54}$$

Considérant les deux premières composantes $u_0(x)$ et $u_1(x)$ dans les équations **(9.54)** , on observe que le terme $\frac{x^4}{4}$ apparaît dans les deux composantes avec des signes opposés. Ainsi, d'après les phénomènes de bruit, la solution exacte est $u(x) = \cos x$.
Et cela peut être facilement vérifié qu'il est vrai.

8.3.3 Convertir équations intégrales de Fredholm

Cette section concerne une technique qui réduira l'équation intégro-différentielle de Fredholm à une équation intégrale de Fredholm équivalente.
Cela peut être facilement fait en intégrant les deux côtés de l'équation différentielle autant de fois que l'ordre de la dérivée impliquée dans l'équation de 0 à x pour chaque fois que nous intégrons, et en utilisant les conditions initiales données. Il est à noter que cette méthode n'est applicable que si l'équation intégro-différentielle de Fredholm fait intervenir la fonction inconnue $u(x)$ uniquement, et aucune de ses dérivées, sous le signe intégral. Après avoir établi la transformation en une équation intégrale de Fredholm standard, nous pouvons procéder en utilisant n'importe quelle méthode alternative, à savoir la méthode de décomposition, la méthode de composition directe, la méthode d'approximation successive ou la méthode des substitutions successives. Nous illustrons un exemple ci-dessous.

Exemple

Résoudre l'équation intégro-différentielle de Fredholm suivante :

$$u''(x) = e^x - x + x\int_0^1 tu(t)dt, \quad u(0) = 1, \quad u'(0) = 1 \tag{9.55}$$

en la réduisant à une équation intégrale de Fredholm.

Solution

En intégrant deux fois les deux membres de l'équation (9.55) de 0 à x et en utilisant les conditions initiales on obtient

$$u(x) = e^x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^3}{3!}\int_0^1 tu(t)dt \tag{9.56}$$

une équation intégrale de Fredholm typique. Par la méthode de calcul direct, cette équation peut être écrite comme :

$$u(x) = e^x - \frac{x^3}{3!} + \alpha\frac{x^3}{3!} \tag{9.57}$$

où la constante α est déterminée par :

$$\alpha = \int_0^1 tu(t)dt \tag{9.58}$$

En substituant l'équation (9.58) à l'équation (9.57) on obtient :

$$\alpha = \int_0^1 t\left(e^t - \frac{t^3}{3!} + \alpha\frac{t^3}{3!}\right)dt \tag{9.59}$$

qui se réduit pour donner $\alpha = 1$. Ainsi, la solution peut être écrite sous la forme $u(x) = e^x$.

Bibliographie

[1] Integral equations and their applications. M.Rahman

[2] Introduction aux équations intégrales linéaires méthodes et applications Faculté de mathématiques et informatique Département de mathématiques

[3] Equations intégrales linéaires ´ et non linéaires Analyse et techniques de résolution de A. Rahmoune ”

[4] ”Mercier, D. J. (2003). Formules de Taylor. Applications. IUMF de Guadeloupe, France”.

[5] Rivoal, T. (2010). Approximations rationnelles des valeurs de la fonction Gamma aux rationnels : le cas des puissances. Acta Arith, 142(4), 347-365.