

Table des matières

Remerciements.	4
Introduction.	5
1 PRÉLIMINAIRE.	7
1.1 Intégrale de Lebesgue :	7
1.2 Fonction continue par morceaux :	8
1.3 Application Lipschitzienne :	9
1.4 Application absolument continue :	10
1.5 Lemme de Gronwall :	10
1.6 Théorème de Cauchy Lipschitz :	11
1.7 sous-variétés de \mathbb{R}^n :	11
2 PRINCIPE DU MAXIMUM DE PONTRYAGIN [P.M.P].	14
2.1 L'énoncé du Principe du Maximum de Pontryagin.	14
2.2 Conditions de transversalité :	17
2.2.1 Conditions de transversalité sur le vecteur adjoint :	17
2.2.2 Condition de transversalité sur le Hamiltonien :	18
2.3 La preuve du principe du maximum de Pontryagin.	18
3 EXEMPLES D'APPLICATION DU P.M.P .	24
3.1 Exemple :n° :01. Contrôle Optimal D'un Ressort Non Linéaire.	24
3.2 Exemple :n° :02. Problème de la brachistochrone : le toboggan optimal :	27
3.3 Exemple :n° :03. Contrôle optimal de la pollution par engrais.	38
3.4 Exemple :n° :04. Contrôle optimal d'une épidémie.	43
Conclusion.	46
Bibliographie.	47

Remerciements.



On remercie DIEU le tout puissant de nous avoir donné la santé et la volonté d'entamer et de terminer ce projet.

Tout d'abord, ce travail ne serait pas aussi riche et n'aurait pas pu avoir le jour sans l'aide et l'encadrement de Mr EL AYADI Rachid, qui a proposé ce sujet, et qui a bien voulu encadrer ce modeste travail, je le remercie pour la qualité de son encadrement exceptionnel, pour sa patience, sa rigueur dans l'analyse, et aussi ses conseils ; malgré ses charges académiques et professionnels.

Je tiens à remercier aussi messieurs les membres de jury :

- EL AYADI Rachid.
- EL BARAKA Azzedine.
- OUADGHIRI Anisse.
- HILALI Abdelmajid.

Mes remerciements vont également tous mes professeurs du département de mathématiques.

En fin, je tiens à exprimer vivement mes remerciements avec une profonde gratitude à ma petite famille (mes parents [Belaid AMHAMDI et Milouda HAMOUDI], mes deux frères et ma sœur) qui m'ont encouragé durant toute ma vie de continuer et aller plus loin dans mes études ; et qui m'ont enseigné les plus durs leçons : la patience et le respect ; j'adresse en fin un grand amour à MOI.

Introduction.



FIGURE 1 – Lev Semionovitch Pontriaguine (à gauche).

Dans les industries modernes, la notion de rendement est prépondérante, autrement la notion d'optimisation est primordiale pour améliorer le gain ou minimiser le coût ; pour réaliser les besoins de ses industries, on a besoin d'étudier la théorie du contrôle optimal.

Qu'est ce que la théorie du contrôle optimal ?

La théorie du contrôle optimal a pour objectif de contrôler (ou commander) un système, de manière à lui faire quelque chose de façon optimale.

Cette théorie est une partie d'un domaine plus vaste appelé théorie du contrôle (ou commande) qui se rapproche de l'automatique.

La théorie du contrôle optimal étudie les propriétés des systèmes commandés (ou contrôlés) ; c'est à dire, des systèmes dynamiques dépendent d'une variable t qui représente le plus souvent le temps , sur lesquelles on peut agir au moyen d'une commande (ou contrôle).

En mathématiques, en chimie ou en physique, un système dynamique est la donnée d'un système et d'une loi décrivant l'évolution de ce système. Ce peut être l'évolution d'une réaction chimique au cours du temps, le mouvement des planètes dans le système solaire (régé par la loi universelle de la gravitation de Newton) ou encore l'évolution de la mémoire d'un ordinateur sous l'action d'un programme informatique. Formellement on distingue les systèmes dynamiques à temps discrets (comme un programme informatique), des systèmes dynamiques à temps continu (comme une réaction chimique). le but est alors d'amener le système d'un état initial donné à un certain état final, en respectant éventuellement certaines critères.

Les applications sont très nombreuses et dans des domaines très divers, comme la mécanique, l'électricité, la biologie, la chimie, l'économie, etc...

L'objectif de la théorie du contrôle peut être :

1. de stabiliser le système , c'est à dire , le rendre insensible à des perturbations ; c'est ce qu'on appelle la stabilisation.
2. de déterminer des solutions optimales pour un certain critère d'optimisation ; c'est ce qu'on appelle le contrôle optimal, et c'est l'objectif principal de ce projet.

De point de vue mathématique un système contrôlé est un système dynamique dont l'état est décrit par une fonction inconnue dite fonction d'état (ou variable d'état), qui vérifie une ou plusieurs lois d'évolution (très souvent ce sont des équations différentielles, équations intégrales, etc...)

On supposera qu'on peut agir sur le système (en fait sur l'état du système) via une ou plusieurs fonctions qu'on appelle des contrôles (ou commandes).

Et qu'elle est la relation entre le PMP et tout ce qu'on a raconté en avant ?

Le Principe du Maximum de Pontryagin est central en théorie du contrôle optimal, il fournit les "techniques" optimales permettant de conduire un système dynamique contrôlé optimalement vers sa cible.

Ce rapport sera réparti comme suit :

Nous rappelons en premier chapitre des notions préliminaire comme le théorème de Cauchy-Lipschitz ; lemme de Gronwall ; la continuité absolu, etc...

Dans le deuxième chapitre on expose le principe du maximum de Pontryagin, et sa preuve dans des cas bien particuliers. On pourra se baser sur [3],[4],[6] pour effectuer une preuve de ce principe.

En fin dans le dernier chapitre, on applique ce principe dans des problèmes réels , et bien dans des domaines différents :

*La physique : ex : Contrôle Optimal D'un Ressort Non Linéaire.

*L'industrie : ex : Problème de la brachistochrone : le toboggan optimal.

*L'agriculture : ex : Contrôle optimal de la pollution par engrais.

*La médecine : ex : Contrôle optimal d'une épidémie.

Chapitre 1

PRÉLIMINAIRE.

Dans ce chapitre , on va rappeler tout les théorèmes et les définitions qu'on aura besoin dans les deux chapitres suivants.

1.1 Intégrale de Lebesgue :

En mathématiques, l'intégrabilité d'une fonction numérique est sa capacité à pouvoir être intégrée, c-à-d à avoir une intégrale définie (qui a un sens) et finie (qui ne vaut pas l'infini). la notion d'intégrabilité dépend de la notion d'intégrale que l'on considère ; il existe plusieurs types d'intégrales, les plus connues et utilisées étant l'intégrale de Riemann et l'intégrale de Lebesgue.

Dans ce projet, on va rappeler le dernier intégrale.

Généralisant l'intégrale de Riemann, l'intégrale de Lebesgue joue un rôle important en analyse, en théorie des probabilités et dans beaucoup d'autres domaines des mathématiques.

Dans les cas simples, l'intégrale d'une fonction positive f peut être vue comme l'aire comprise entre l'axe des x (l'axe horizontal) et la courbe de la fonction f . En étendant cette notion, la construction de l'intégrale de Lebesgue s'applique à un ensemble plus riche de fonctions définies sur des espaces plus-généraux que \mathbb{R} ou \mathbb{R}^n . [voir [7]]

Intérêt pratique de l'intégrale de Lebesgue :

Après la construction de l'intégrale de Cauchy-Riemann, l'intérêt s'est porté sur des extensions du théorème fondamental du calcul intégrale :

Soit f une fonction à valeurs réelles, définie sur l'axe réel et supposée **continue par morceaux**. Alors, pour tout intervalle fermé $[a, b]$, f est Riemann-intégrable et elle admet une **primitive** continue sur $[a, b]$. si F désigne une primitive de f sur $[a, b]$ alors pour tout x dans $[a, b]$:

$$\int_a^x f(u)du = F(x) - F(a).$$

Les études réalisées sur l'intégrale de Riemann aboutissent au théorème suivant qui est le « meilleur qu'on sache démontrer » :

Si F est différentiable sur $[a, b]$ et si sa dérivée F' est Riemann-intégrable sur $[a, b]$, alors pour tout x dans $[a, b]$:

$$\int_a^x F'(u) du = F(x) - F(a)$$

Cependant, il existe des fonctions F dérivables sur $[a, b]$ sans que leur dérivée soit Riemann-intégrable.

L'objectif premier de l'intégrale de Lebesgue est de lever cette restriction afin de satisfaire à l'énoncé :

Si F est différentiable sur $[a, b]$ et si sa dérivée F' est bornée sur $[a, b]$, alors pour tout x dans $[a, b]$, elle est Lebesgue-intégrable sur $[a, x]$ et :

$$\int_a^x F'(u) du = F(x) - F(a)$$

Par la suite, d'autres constructions d'une intégrale ont été élaborées (intégrale de Kurzweil-Henstock, Denjoy, etc ...) et elles satisfont à l'énoncé plus générale :

Si F est différentiable sur $[a, b]$, alors pour tout x dans $[a, b]$, F' est intégrable sur $[a, x]$ et :

$$\int_a^x F'(u) du = F(x) - F(a)$$

1.2 Fonction continue par morceaux :

Sur la droite réelle :

Une fonction f est continue par morceaux sur le segment $[a, b]$ s'il existe une subdivision $\sigma : a = a_0 < \dots < a_n = b$ telle que les restrictions de f à chaque intervalle ouvert $]a_i, a_{i+1}[$ admettent un prolongement continu à l'intervalle fermé $[a_i, a_{i+1}]$. [voir [9]]

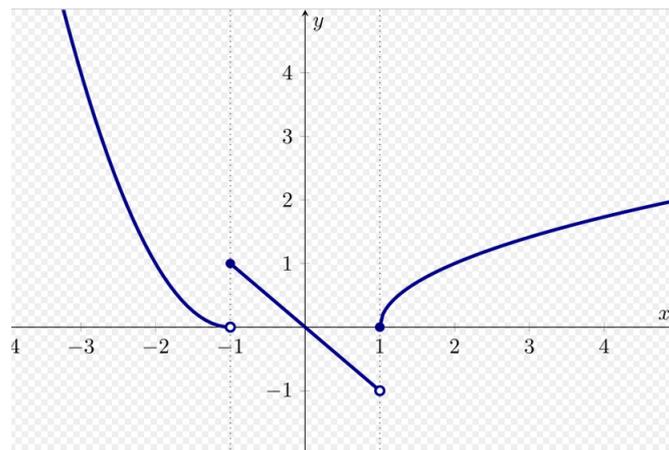


FIGURE 1.1 – Cette fonction n'est pas continue sur \mathbb{R} . En revanche, elle y est continue par morceaux.

1.3 Application Lipschitzienne :

Une application Lipschitzienne est une application possédant une certaine propriété de régularité qui est plus forte que la continuité. Intuitivement, c'est une fonction qui est limitée dans sa manière d'évoluer. [voir [2]]

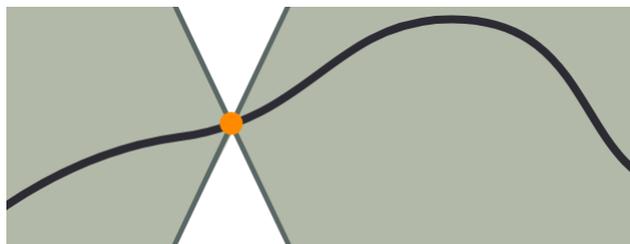


FIGURE 1.2 – Une fonction est k -lipschitzienne si le double cône blanc peut se déplacer le long de son graphe sans que jamais la courbe de la fonction ne passe à l'intérieur. Plus le k est petit, plus le cône blanc s'élargit et moins la fonction peut être abrupte.

Définition 1. *Cas réel :*

Soient E une partie de \mathbb{R} ; $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ une application et k un réel positif.
On dit que f est k -lipschitzienne si :

$$\forall (x, y) \in E^2, |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$$

Cas des espaces métriques :

Soient (E, d_E) et (F, d_F) des espaces métriques, $f : E \rightarrow F$ une application et k un réel positif.

On dit que f est k -lipschitzienne si :

$$\forall (x, y) \in E^2, d_F(f(x), f(y)) \leq kd_E(x, y)$$

De plus

* f est dite contractante s'il existe un $k \in [0, 1[$ tel que f soit k -lipschitzienne .

* f est localement lipschitzienne si pour tout point x de E , il existe un voisinage V de x tel que la restriction de f à V soit lipschitzienne (pour une certaine constante k qui peut dépendre de V , donc de x).

Propriétés

- Une fonction f dérivable sur un intervalle réel est Lipschitzienne si et seulement si sa dérivée est bornée.

Corollaire

- Toute fonction réelle continûment dérivable sur un intervalle fermé borné est lipschitzienne.

- Par conséquent, toute fonction continûment dérivable sur un intervalle est localement lipschitzienne.
- Toute fonction lipschitzienne est uniformément continue et toute fonction localement lipschitzienne est continue.
- Sur un espace compact, toute fonction localement lipschitzienne est lipschitzienne.

Exemple :

* Une application est $\mathbf{0}$ -lipschitzienne si et seulement si elle est constante.

* La fonction g définie sur l'intervalle fermé borné $[0, 1]$ par $g(x) = x^{3/2} \sin(1/x)$ si $x \neq 0$ et $g(0) = 0$ est dérivable sur tout son domaine, mais non lipschitzienne car de dérivée non bornée.

1.4 Application absolument continue :

On définit, pour des fonctions définies sur un intervalle borné, la notion de fonction absolument continue, un peu plus forte que la notion de fonction uniformément continue, et garantissant de bonnes propriétés d'intégration ;[voir [5]]

Définition 2. Soit I un intervalle réel, on dit qu'une fonction $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ est *absolument continue* si, pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un $\delta > 0$ tel que, pour toute suite finie $([a_n, b_n])_{n \leq N}$ de sous-intervalles de I d'intérieurs disjoints,

$$\sum_{n \geq 0} (b_n - a_n) < \delta \Rightarrow \sum_{n \geq 0} |F(a_n) - F(b_n)| < \varepsilon$$

Propriétés :

* F est absolument continue sur $[a, b]$ si et seulement s'il existe une fonction f intégrable sur $[a, b]$ (au sens de Lebesgue) telle que pour tout $x \in [a, b]$:

$$F(x) - F(a) = \int_a^x f(t) dt$$

* Si (sur $[a, b]$) F est dérivable partout et de dérivée intégrable, alors F est absolument continue.

* Si F est absolument continue sur $[a, b]$ alors :

- elle est continue.
- elle est à variation bornée (donc dérivable presque partout)

* Toute fonction Lipschitzienne sur $[a, b]$ est absolument continue.

1.5 Lemme de Gronwall :

Le lemme de Gronwall permet l'estimation d'une fonction qui vérifie une certaine inégalité différentielle.

Lemme 1. Soit z une fonction absolument continue, positive telle que

$$z(t_0) \leq \gamma, \dot{z} \leq \alpha(t)z + \beta(t)$$

où $\gamma \geq 0$, et α, β sont deux fonctions intégrables sur $[t_0, T]$. Alors on a :

$$z(t) \leq \gamma e^{\int_{t_0}^t \alpha(s) ds} + \int_{t_0}^t \beta(s) e^{\int_t^s \alpha(\tau) d\tau} ds$$

1.6 Théorème de Cauchy Lipschitz :

Théorème 1. (Cauchy Lipschitz)(Existence locale)

Soit \mathbf{E} un espace de Banach, soit $\underset{\text{ouvert}}{\mathbf{U}} \subset \mathbb{R} \times \mathbf{E}$

$f : \mathbf{U} \rightarrow \mathbf{E}$

$(t, \mathbf{x}) \mapsto f(t, \mathbf{x})$ continue et localement lipschitzienne (en \mathbf{x}).

soit $(t_0, \mathbf{x}_0) \in \mathbf{U}$ et l'équation différentielle :

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = f(t, \mathbf{x}) \quad (+)$$

alors :

a) Existence locale :

$\exists r > 0$, et $\exists \varphi : [t_0 - r, t_0 + r] \rightarrow \mathbf{E}$ solution de (+) qui vérifie $\varphi(t_0) = \mathbf{x}_0$.

b) Unicité de la solution :

Si φ_1 et φ_2 sont deux solutions de (+) définies de $\mathbf{I} \rightarrow \mathbf{E}$ (\mathbf{I} intervalle) et qui vérifient $\varphi_1(t_0) = \varphi_2(t_0) = \mathbf{x}_0$, alors $\varphi_1 = \varphi_2$ sur \mathbf{I} .

c) Solution maximale :

Il existe un plus grand intervalle \mathbf{J} (intervalle maximal) ($t_0 \in \mathbf{J}$) tq $\varphi : \mathbf{J} \rightarrow \mathbf{E}$ est solution de (+) et vérifie : $\varphi(t_0) = \mathbf{x}_0$.

Théorème 2. (Cas où f lipschitzienne, solution globale)

Soit \mathbf{E} un espace de Banach et $f : \mathbb{R} \times \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{E}$ continue et k -lipschitzienne (en \mathbf{x}) sur $\mathbb{R} \times \mathbf{E}$. soit le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = f(t, \mathbf{x}) \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \end{cases} \quad (+)$$

avec $(t_0, \mathbf{x}_0) \in \mathbb{R} \times \mathbf{E}$ alors (+) possède une solution unique définie sur \mathbb{R} .

1.7 sous-variétés de \mathbb{R}^n :

Une partie de \mathbb{R}^n est une sous-variété de dimension p , si elle ressemble au voisinage de chacun de ses points à un sous-espace affine¹ de dimension p . Le sous-espace en question sera appelé plan tangent à la sous-variété en ce point.

Maintenant, on va donner des définitions rigoureuses pour donner un sens précis à l'idée intuitive.[voir [1]]

Définition 3. On dit que $M \subset \mathbb{R}^n$ est une sous-variété de \mathbb{R}^n de dimension p si pour tout $\mathbf{a} \in M$ il existe un ouvert U de \mathbb{R}^n contenant \mathbf{a} et une application \mathbf{F} de classe C^∞ de U dans \mathbb{R}^{n-p} telle que $d_{\mathbf{a}}\mathbf{F}$ est de rang $n - p$ et :

$$M \cap U = \{\mathbf{x} \in U \mid \mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\}.$$

Définition par coordonnée rectifiante :

Une partie M de \mathbb{R}^n est une sous-variété de dimension p si on peut tordre (via un difféomorphisme) le voisinage de chacun de ses points de sorte que M soit envoyé localement sur un morceau d'un sous-espace de dimension p .

Proposition :

Une partie $M \subset \mathbb{R}^n$ est une sous-variété de \mathbb{R}^n de dimension p si et seulement si pour tout $a \in M$ il existe un C^∞ -difféomorphisme φ entre un voisinage U de a dans \mathbb{R}^n et un voisinage V de 0 dans \mathbb{R}^n tel que $\varphi(a) = 0$ et :

$$\varphi(M \cap U) = \{(y_1, \dots, y_n) \in V \mid y_{p+1} = \dots = y_n = 0\}$$

Dans ce cas φ est appelée une coordonnée rectifiant M en a .



FIGURE 1.3 – φ «redresse» M au voisinage de a .

Exemple :

* Un ouvert V de \mathbb{R}^n est une sous-variété de \mathbb{R}^n de dimension n (considérer l'application $F : V \rightarrow \{0\}$ constante égale à 0).

* Un hyperplan affine de \mathbb{R}^n est une sous-variété de \mathbb{R}^n de dimension $n - 1$ (il est donné par une équation de la forme $L(x) - b = 0$ où L est une forme linéaire non nulle et $b \in \mathbb{R}^n$).

Plus généralement tout sous-espace affine de \mathbb{R}^n de dimension p est une sous-variété de dimension p . par exemple une droite est une sous-variété de dimension 1 .

* Les courbes de \mathbb{R}^2 sont des sous-variétés de dimension 1 . En effet le cercle C de centre $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ et de rayon $r > 0$ est l'ensemble des $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que :

$$F(x, y) = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - r^2 = 0$$

or pour $(x, y) \in C$, on a $\nabla F(x, y) = (2(x - x_0); 2(y - y_0)) \neq 0$, donc $d_{(x,y)}F$ est nécessairement de rang 1 .

Autrement dit une sous-variété de dimension 1 est une partie de \mathbb{R}^n telle que si on " zoome " sur n'importe lequel de ses points, on finit par avoir l'impression qu'il s'agit d'un morceau de droite, d'où une courbe est une sous-variété de dimension 1 .

On vérifie de même que les sphères de \mathbb{R}^3 sont des sous-variétés de dimension 2 .

par exemple : La terre est (grosso-modo) une sphère, mais à notre échelle où n'en voit qu'une toute petite partie on a l'impression de marcher sur un plan (à tel point qu'on a longtemps pensé que la terre était effectivement plate...).

¹[Définition : sous-espace affine :

Un ensemble $A \subset \mathbb{R}^n$, $A \neq \emptyset$; On dit que A est un sous-espace affine de \mathbb{R}^n si :

$$\forall x, y \in A, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda x + (1 - \lambda)y \in A$$

Par exemple : Les droites et les plans de l'espace, sont des sous espaces affines.]

Espace tangent à une sous-variété :

Soit M une sous-variété de classe C^1 de \mathbb{R}^n de dimension p , et a un point de M .

On dit qu'un vecteur $v \in \mathbb{R}^n$ est **tangent** à M en a s'il existe $\delta > 0$ et $\gamma :]-\delta, \delta[\rightarrow \mathbb{R}^n$ une courbe de classe C^1 , tracée sur M (i.e $\gamma(] - \delta, \delta[) \subset M$) et telle que $\gamma(0) = a$; $\gamma'(0) = v$.

On démontre que l'ensemble des vecteurs tangents à M en a est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n de dimension p , appelé **espace tangent à M en a** , et noté $T_a M$.

Suivant la façon dont est définie la sous-variété, on peut donner la valeur de $T_a M$.

Définition 4. Si U et V sont des voisinages respectifs de a dans \mathbb{R}^n et de 0 dans \mathbb{R}^n , si $f : U \rightarrow V$ un C^k -difféomorphisme envoyant a sur 0 et tel que $f(U \cap M) = V \cap (\mathbb{R}^p \times \{0\})$; alors :

$$T_a M = (df_a)^{-1}(\mathbb{R}^p \times \{0\})$$

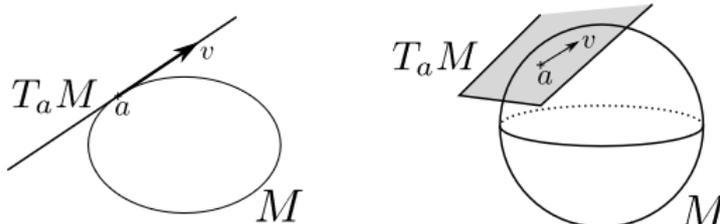


FIGURE 1.4 – Plan tangent.

Chapitre 2

PRINCIPE DU MAXIMUM DE PONTYAGIN [P.M.P].

Introduction.

Posant un petit problème pour faciliter la compréhension de l'objectif principale de ce principe ; par exemple, on veut trouver une route optimale entre Fès et Dakhla, c-à-d on cherche une **trajectoire** ; en minimisant un critère soit le temps, soit la distance, soit la quantité de carburant dépensée.

Chercher la trajectoire optimale est équivalent à chercher un angle $\mathbf{u}(t)$ qu'on va l'appeler le **contrôle**.

Dans cette section, on va énoncer le principe du maximum de Pontryagin dans sa version générale, ce dernier donne des conditions nécessaires d'optimalité qui permettent de calculer les trajectoires optimales ; notons que cette version affirme que cet extremum est un maximum.

2.1 L'énoncé du Principe du Maximum de Pontryagin.

On considère le système de contrôle dans \mathbb{R}^n :

$$\text{(Pb de Cauchy)} \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 (\in \mathbb{R}^n) \end{cases} \quad (2.1)$$

$\mathbf{u}(t)$ s'appelle le contrôle.

$\mathbf{x}(\cdot)$ est la trajectoire solution de (2.1) associée au contrôle \mathbf{u} .

$\mathbf{f} : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ est de classe \mathbf{C}^1 et où les contrôles sont des applications mesurables et bornées définies sur un intervalle $[0, t_e(\mathbf{u})[$ de \mathbb{R}^+ et à valeurs dans $\Omega \subset \mathbb{R}^m$.

Notre objectif est de :

conduire le système dynamique contrôlé (2.1) :

- d'une configuration donnée à une configuration souhaitée ;
- tout en minimisant ou en maximisant un certain critère ;
- et en respectant certaines contraintes ;

Soient \mathbf{M}_0 et \mathbf{M}_1 deux sous-ensembles de \mathbb{R}^n . On note \mathcal{U} l'ensemble des contrôles admissibles \mathbf{u} dont les trajectoires associées relient un point initial $\mathbf{x}(0)$ de \mathbf{M}_0 à un point final de \mathbf{M}_1 en temps $t(\mathbf{u}) < t_e(\mathbf{u})$.

$$\mathcal{U} := \{u : [0, t_e(u)[\rightarrow \Omega; u \text{ mesurable, bornée.} \}$$

Par ailleurs on définit le coût d'un contrôle u sur $[0, t]$ par :

$$C(t, u) = \int_0^t f^0(s, x(s), u(s)) ds + g(t, x(t)). \quad (2.2)$$

avec $u \in \mathcal{U}$ et $t \in [0, t(u)]$
et x solution de l'équation contrôlé (2.1) $x(0) \in M_0$ et $x(t(u)) \in M_1$.

Où $f^0 : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ sont C^1 .

Bien entendu pour un problème de contrôle optimal à temps final fixé on impose $t(u) = T$ (et en particulier on suppose que la cible M_1 est accessible depuis M_0 en temps T).

On considère le problème de contrôle optimal suivant :

Déterminer une trajectoire reliant un point $x(0)$ de M_0 à un point final de M_1 en minimisant le coût. Le temps final peut être fixé ou non.

Pour se faire , on doit déterminer tout d'abord le contrôle u .

Le principe du maximum de Pontryagin va nous aider à trouver ce dernier, il s'énonce dans ce cadre de la manière suivante :

Théorème 3. Si le contrôle $u \in \mathcal{U}$ associé à la trajectoire $x(\cdot)$ est *optimal* sur $[0, T]$, alors :

* Il existe une application $p(\cdot) : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ absolument continue (voir (1.4)) appelée **vecteur adjoint**, et un réel $p^0 \leq 0$, tels que le couple $(p(\cdot), p^0)$ est non trivial, (c-à-d le couple doit être différent de zéro).

* Pour presque tout $t \in [0, T]$,

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \frac{\partial H}{\partial p}(t, x(t), p(t), p^0, u(t)) \\ \dot{p}(t) &= -\frac{\partial H}{\partial x}(t, x(t), p(t), p^0, u(t)) \end{aligned} \quad (2.3)$$

où $H(t, x, p, p^0, u) = \langle p, f(t, x, u) \rangle + p^0 f^0(t, x, u)$ est le Hamiltonien du système, (où \langle, \rangle désigne le produit scalaire usuel de \mathbb{R}^n).

* On a la **condition de maximisation** presque partout sur $[0, T]$

$$H(t, x(t), p(t), p^0, u(t)) = \max_{v \in \Omega} H(t, x(t), p(t), p^0, v). \quad (2.4)$$

* Si de plus le temps final pour joindre la cible M_1 n'est pas fixé, on a la condition au temps final T

$$\max_{v \in \Omega} H(T, x(T), p(T), p^0, v) = -p^0 \frac{\partial g}{\partial t}(T, x(T)). \quad (2.5)$$

* Si de plus M_0 et M_1 (ou juste l'un des deux ensembles) sont des variétés de \mathbb{R}^n ayant des espaces tangents en $x(0) \in M_0$ et $x(T) \in M_1$, [voir (1.7)] alors le vecteur adjoint peut être

construit de manière à vérifier les conditions de transversalité aux deux extrémités (ou juste l'une des deux)

$$\mathbf{p}(0) \perp T_{\mathbf{x}(0)}M_0 \quad (2.6)$$

et,

$$\mathbf{p}(T) - \mathbf{p}^0 \frac{\partial g}{\partial \mathbf{x}}(T, \mathbf{x}(T)) \perp T_{\mathbf{x}(T)}M_1 \quad (2.7)$$

Remarque 1. La convention $\mathbf{p}^0 \leq \mathbf{0}$ conduit au principe du *maximum*.

La convention $\mathbf{p}^0 \geq \mathbf{0}$ conduirait au principe du *minimum* .i.e la condition (2.4) serait une condition de minimum.

Définition 5. Une extrémale du problème de contrôle optimal est un quadruplet $(\mathbf{x}(\cdot), \mathbf{p}(\cdot), \mathbf{p}^0, \mathbf{u}(\cdot))$ solution des équations (2.3),(2.4).

Si $\mathbf{p}^0 = \mathbf{0}$, on dit que l'extrémale est anormale.et si $\mathbf{p}^0 \neq \mathbf{0}$ l'extrémale est dite normale.

Définition 6. Les conditions (2.6) et (2.7) sont appelées *conditions de transversalité* sur le vecteur adjoint.La condition (2.5) est appelée condition de transversalité sur le Hamiltonien . Elles sont ici écrites de manière très générale, et dans la section suivante nous allons les réécrire dans des cas plus simples.

Remarque 2. Le problème important du *temps minimal* correspond à $\mathbf{f}^0 = \mathbf{1}$ et $\mathbf{g} = \mathbf{0}$. ou bien à $\mathbf{f}^0 = \mathbf{0}$ et $\mathbf{g}(\mathbf{t}, \mathbf{x}) = \mathbf{t}$ Dans les deux cas les conditions de transversalité obtenues sont bien les mêmes.

Remarque 3. Si le contrôle \mathbf{u} est continue au temps T , la condition (2.5) peut s'écrire :

$$\mathbf{H}(T, \mathbf{x}(T), \mathbf{p}(T), \mathbf{p}^0, \mathbf{u}(T)) = -\mathbf{p}^0 \frac{\partial g}{\partial \mathbf{t}}(T, \mathbf{x}(T)). \quad (2.8)$$

Remarque 4. Dans le cas où $\Omega = \mathbb{R}^m$, i.e lorsqu'il n'ya pas de contrainte sur le contrôle, la condition de maximum (2.4) devient $\frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} = \mathbf{0}$ (c'est le principe du maximum faible.)

Remarque 5. Lorsque $\Omega = \mathbb{R}^m$, i.e. lorsqu'il n'ya pas de contrainte sur le contrôle, alors la trajectoire $\mathbf{x}(\cdot)$, associée au contrôle $\mathbf{u}(\cdot)$, est une trajectoire singulière du système (2.1),si et seulement si elle est projection d'une extrémale anormale $(\mathbf{x}(\cdot), \mathbf{p}(\cdot), \mathbf{0}, \mathbf{u}(\cdot))$.

Ceci résulte en effet de la caractérisation hamiltonienne des trajectoires singulières ; remarquons que puisque $\mathbf{p}^0 = \mathbf{0}$, ces trajectoires ne dépendent pas du coût. Elles sont intrinsèques au système. Le fait qu'elles puissent pourtant être optimales s'explique de la manière suivante : en général, une trajectoire singulière a une propriété de rigidité, i.e. c'est la seule trajectoire joignant ses extrémités, et donc en particulier elle est optimale, ceci indépendamment du critère d'optimisation choisi.

Remarque 6. Si la variété M_1 s'écrit sous la forme

$$M_1 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{F}_1(\mathbf{x}) = \dots = \mathbf{F}_p(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\}$$

où les F_i sont des fonctions de classe C^1 sur \mathbb{R}^n (indépendantes puisque M_1 est une variété), alors la condition (2.7) se met sous la forme

$$\exists \lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R} \mid p(T) = \sum_{i=1}^p \lambda_i \nabla F_i(x(T)) + p^0 \frac{\partial g}{\partial x}(T, x(T))$$

Remarque 7. Dans les conditions du théorème, on a de plus pour presque tout $t \in [0, T]$

$$\frac{d}{dt} \max_{v \in \Omega} H(t, x(t), p(t), p^0, v) = \frac{\partial H}{\partial t}(t, x(t), p(t), p^0, u(t))$$

En particulier si le système augmenté est *autonome*, i.e. si f et f^0 ne dépendent pas de t , alors H ne dépend pas de t , et on a :

$$\forall t \in [0, T] \quad \max_{v \in \Omega} H(x(t), p(t), p^0, v) = \text{Cste.}$$

On dit que le Hamiltonien est conservé le long d'une extrémale. Notons que cette égalité est valable partout sur $[0, T]$ (car la fonction $t \mapsto \max_{v \in \Omega} H(t, x(t), p(t), p^0, v)$ est lipschitzienne (voir(1.3)).)

2.2 Conditions de transversalité :

2.2.1 Conditions de transversalité sur le vecteur adjoint :

Dans ce paragraphe le temps final pour atteindre la cible peut être fixé ou non. Réécrivons les conditions (2.6) et (2.7) dans les deux cas importants suivants :

Problème de Lagrange :

Dans ce cas le coût s'écrit :

$$C(t, u) = \int_0^t f^0(s, x(s), u(s)) ds.$$

i.e. $g = 0$.

Les conditions de transversalité sur le vecteur adjoint s'écrivent alors :

$$p(0) \perp T_{x(0)} M_0. \tag{2.9}$$

$$p(T) \perp T_{x(T)} M_1. \tag{2.10}$$

Remarque 8. Si par exemple $M_0 = \{x_0\}$, la condition (2.9) devient *superflu*. Si au contraire $M_0 = \mathbb{R}^n$, i.e. si le point initial n'est pas fixé, on obtient :

$$p(0) = 0.$$

De même, si $M_1 = \mathbb{R}^n$, on obtient :

$$p(T) = 0 .$$

Autrement dit si le point final est libre alors le vecteur adjoint au temps final est nul.

Problème de Mayer :

Dans ce cas le cout s'écrit :

$$C(t, u) = g(t, x(t))$$

i.e $f^0 = 0$.

Les conditions de transversalité ne se simplifient pas a priori, Mais dans le cas particulier important où $M_1 = \mathbb{R}^n$, autrement dit le point final $x(T)$ est libre, la condition (2.7) devient :

$$p(T) = p^0 \frac{\partial g}{\partial x}(T, x(T)).$$

et alors forcément $p^0 \neq 0$, (car le couple $(p(\cdot), p^0)$ est non-trivial) ; (on prend alors $p^0 = -1$), [dans la cas de minimisation, on prend $p^0 = 1$].

Si de plus g ne dépend pas du temps, on a coutume d'écrire $p(T) = -\nabla g(x(T))$.

2.2.2 Condition de transversalité sur le Hamiltonien :

La condition (2.5) n'est valable que si le temps final pour atteindre la cible n'est pas fixé ; Dans ce paragraphe nous nous plaçons donc dans ce cas.

La seule simplification notable de cette condition est le cas où la fonction g ne dépend pas du temps t (ce qui est vrai par exemple pour un problème de Lagrange), et la condition de transversalité sur le Hamiltonien (2.5) devient alors

$$\max_{v \in \Omega} H(T, x(T), p(T), p^0, v) = 0.$$

Ou encore, si u est continu au temps T , (2.8) devient :

$$H(T, x(T), p(T), p^0, u(T)) = 0$$

Autrement dit le Hamiltonien s'annule au temps final.

Remarque 9. Si le système augmenté est de plus autonome, i.e. si f et f^0 ne dépendent pas de t , alors on a le long d'une extrémale :

$$\forall t \in [0, T] \quad \max_{v \in \Omega} H(x(t), p(t), p^0, v) = 0.$$

2.3 La preuve du principe du maximum de Pontryagin.

La démonstration de ce théorème (dans le cas de dimension finie) occupe près de 40 pages dans l'ouvrage de Pontryagin et ses collaborateurs.

Dans cette section, on démontre le principe du maximum de Pontryagin pour le cas des équations différentielles autonomes.

De plus, on suppose que l'état initial est fixé et que l'état final est libre.

Notons que cette preuve affirme que cet extremum est un minimum.

Remarque 10. A l'aide de (2.4), on peut théoriquement calculer un contrôle extrémal, et ramener le problème initial à la résolution d'un système différentiel *état adjoint aux deux bouts* (condition initial fixée pour l'état, condition final fixée pour l'adjoint) de dimension $2n$.

Soit les hypothèses suivantes sur le système :

La fonction f vérifie :

$$\exists c_1 > 0, |f(x_1, u) - f(x_2, u)| \leq c_1 |x_1 - x_2|, \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \forall u \in \mathcal{U}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \exists \alpha(x) \geq 0, |f(x, u) - f(x, v)| \leq \alpha(|x|) |u - v|, \forall (u, v) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m,$$

où $r \mapsto \alpha(r)$ est une fonction croissante de \mathbb{R}_+ à valeurs dans \mathbb{R}_+ .

De plus, on suppose que $f_x(x, u)$ existe pour tout $(x, u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ et que :

$$\exists c_2 > 0 |f_x(x, u)| \leq c_2(1 + |u|), \forall (x, u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m,$$

Et que $f_x(x, u)$ est localement Lipschitz.

La fonction f^0 est de classe C^1 et f_x^0 est localement Lipschitz.

La fonction g est de classe C^1 .

Remarque 11. Les hypothèses sur f impliquent existence et unicité du problème de Cauchy. voir [1.6]

Dans la suite, on supposera qu'il existe un contrôle optimal \bar{u} solution du problème de minimisation.

* L'estimation suivante est une conséquence du lemme de Gronwall. voir [1.5].

Lemme 2. Soient u et \bar{u} deux contrôles fixés dans \mathcal{U} ; et x, \bar{x} les deux états associées à u et \bar{u} tels que : $x(0) = \bar{x}(0) = x_0$.

Alors, il existe une constante $C = \alpha(\|\bar{x}\|_\infty) e^{c_1 T}$ telle que :

$$\|x - \bar{x}\|_\infty \leq C \|u - \bar{u}\|_1. \quad (2.11)$$

Démonstration :

Soit $\varphi := x - \bar{x}$ et $\psi = |\varphi|$.

La fonction φ vérifie l'équation différentielle

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} &= f(x, u) - f(\bar{x}, \bar{u}) \\ &= f(x, u) - f(\bar{x}, u) + f(\bar{x}, u) - f(\bar{x}, \bar{u}). \end{aligned}$$

En utilisant les hypothèses sur la dynamique f , on obtient :

$$\begin{aligned} \dot{\psi} &\leq |\dot{\varphi}| \leq |f(x, u) - f(\bar{x}, u)| + |f(\bar{x}, u) - f(\bar{x}, \bar{u})| \\ &\leq c_1 |x - \bar{x}| + \alpha(\|\bar{x}\|_\infty) |u - \bar{u}| \end{aligned}$$

ou encore

$$\dot{\psi} \leq c_1 \psi + a |u - \bar{u}|$$

où on a noté $a = \alpha(\|\bar{x}\|_\infty)$.

Si on pose $z(t) = \psi(t) e^{-c_1 t}$,

alors $\dot{z}(t) = \left(\dot{\psi}(t) - c_1 \psi(t) \right) e^{-c_1 t} \leq a |u(t) - \bar{u}(t)| e^{-c_1 t}$,

et donc $z(t) \leq z(0) + a \int_0^t |u(s) - \bar{u}(s)| e^{-c_1 s} ds$.

Comme $z(0) = \psi(0) = |\varphi(0)| = |x(0) - \bar{x}(0)| = 0$, on obtient :

$$\begin{aligned} |\varphi(t)| &= z(t) e^{c_1 t} \\ &\leq a \int_0^t |u(s) - \bar{u}(s)| e^{c_1(t-s)} ds \\ &\leq a e^{c_1 T} \|u - \bar{u}\|_1 \end{aligned}$$

D'où le résultat en posant $C = a e^{c_1 T}$.

Notons que $p(T) = p^0 \nabla g(x(T))$; car l'état final est supposé libre, et alors forcément $p^0 \neq 0$ (on prend alors $p^0 = 1$)

Dans le cas présent, le système est autonome, donc le Hamiltonien est conservé le long d'une extrémale.

Dans la suite, on utilisera les notations suivantes :

$$\begin{aligned} \delta H(t) &:= H(\bar{x}(t), p(t), u(t)) - H(\bar{x}(t), p(t), \bar{u}(t)). \\ \delta f^0(t) &:= f^0(\bar{x}(t), u(t)) - f^0(\bar{x}(t), \bar{u}(t)). \end{aligned}$$

On définit d'abord la linéarisation de Pontryagin au premier ordre.

Définition 7. Soit z l'unique solution sur $[0, T]$ de :

$$\begin{aligned} \dot{z} &= f_x(\bar{x}(t), \bar{u}(t))z + f(\bar{x}(t), u(t)) - f(\bar{x}(t), \bar{u}(t)). \\ z(0) &= 0. \end{aligned}$$

On dit que z est la linéarisation de Pontryagin au premier ordre.

Soit $u \in \mathcal{U}$, et x l'état associé.

Notons que $\delta u = u - \bar{u}$; $\delta x = x - \bar{x}$.

On montre d'abord l'estimation suivante :

Lemme 3. La fonction z vérifié :

$$\|z - \delta x\|_\infty = O(\|\delta u\|_1^2)$$

Démonstration :

La fonction $\zeta := z - \delta x$ vérifie l'équation différentielle :

$$\begin{aligned} \dot{\zeta} &= f_x(\bar{x}(t), \bar{u}(t))z + f(\bar{x}(t), u(t)) - f(\bar{x}(t), \bar{u}(t)) - (f(x(t), u(t)) - f(\bar{x}(t), \bar{u}(t))). \\ &= f_x(\bar{x}(t), \bar{u}(t))\zeta + f_x(\bar{x}(t), \bar{u}(t))\delta x + f(\bar{x}(t), u(t)) - f(x(t), u(t)). \\ &= f_x(\bar{x}(t), \bar{u}(t))\zeta - (f(x(t), u(t)) - f(\bar{x}(t), u(t)) - f_x(\bar{x}(t), u(t))\delta x) - (f_x(\bar{x}(t), u(t)) \\ &\quad - f_x(\bar{x}(t), \bar{u}(t)))\delta x. \end{aligned}$$

Par le théorème des accroissements finis, on a :

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) - \mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}(t), \mathbf{u}(t)) = \mathbf{f}_x(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}(t))\delta\mathbf{x}(t), \text{ pour un certain } \mathbf{x}^* \in [\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}]$$

Comme \mathcal{U} est compact et que \mathbf{f}_x est localement Lipschitz, il existe \mathbf{c}_3 tel que :

$$|\mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) - \mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}(t), \mathbf{u}(t)) - \mathbf{f}_x(\bar{\mathbf{x}}(t), \mathbf{u}(t))\delta\mathbf{x}(t)| \leq \mathbf{c}_3|\delta\mathbf{x}(t)|^2 \leq \mathcal{O}(\|\delta\mathbf{u}\|_1^2).$$

On a également :

$$|(\mathbf{f}_x(\bar{\mathbf{x}}(t), \mathbf{u}(t)) - \mathbf{f}_x(\bar{\mathbf{x}}(t), \bar{\mathbf{u}}(t)))\delta\mathbf{x}(t)| \leq |\delta\mathbf{u}(t)|\mathcal{O}(\|\delta\mathbf{x}\|_\infty) \leq |\delta\mathbf{u}(t)|\mathcal{O}(\|\delta\mathbf{u}\|_1).$$

Ainsi on peut réécrire l'équation vérifiée par ζ :

$$\dot{\zeta} = \mathbf{f}_x(\bar{\mathbf{x}}(t), \bar{\mathbf{u}}(t))\zeta + \mathbf{A}|\delta\mathbf{u}(t)| + \mathbf{B}$$

où $\mathbf{A} = \mathcal{O}(\|\delta\mathbf{u}\|_1)$ et $\mathbf{B} = \mathcal{O}(\|\delta\mathbf{u}\|_1^2)$. On conclut ensuite par le lemme de Gronwall que :

$$\|\zeta - \delta\mathbf{x}\|_\infty = \mathcal{O}(\|\delta\mathbf{u}\|_1^2)$$

On montre maintenant l'estimation suivante qui constitue un développement du coût au premier ordre.

Lemme 4. *On a l'estimation suivante :*

$$\mathbf{C}(\mathbf{u}) - \mathbf{C}(\bar{\mathbf{u}}) = \int_0^T \delta\mathbf{H}(t)dt + o(\|\delta\mathbf{u}\|_1).$$

Démonstration :

Comme \mathbf{g} est de \mathbf{C}^1 et que \mathcal{U} est compact, on a :

$$|\mathbf{g}(\mathbf{x}(T)) - \mathbf{g}(\bar{\mathbf{x}}(T)) - \nabla\mathbf{g}(\bar{\mathbf{x}}(T))\delta\mathbf{x}(T)| \leq \eta(\delta\mathbf{x}(T))|\delta\mathbf{x}(T)|,$$

où $\mathbf{w} \mapsto \eta(\mathbf{w})$ est une fonction qui converge uniformément vers $\mathbf{0}$ quand \mathbf{w} tend vers $\mathbf{0}$.

On en déduit :

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}(T)) - \mathbf{g}(\bar{\mathbf{x}}(T)) - \nabla\mathbf{g}(\bar{\mathbf{x}}(T))\delta\mathbf{x}(T) = o(\|\delta\mathbf{u}\|_1).$$

Comme \mathbf{f}^0 est de classe \mathbf{C}^1 et que \mathcal{U} est compact, on a également pour tout $t \in [0, T]$:

$$|\mathbf{f}^0(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) - \mathbf{f}^0(\bar{\mathbf{x}}(t), \mathbf{u}(t)) - \mathbf{f}_x^0(\bar{\mathbf{x}}(t), \mathbf{u}(t))\delta\mathbf{x}(t)| \leq \varepsilon(\delta\mathbf{x}(t))|\delta\mathbf{x}(t)|,$$

où $\mathbf{w} \mapsto \varepsilon(\mathbf{w})$ est une fonction qui converge uniformément vers $\mathbf{0}$ lorsque \mathbf{w} tend vers $\mathbf{0}$.

On déduit que :

$$\begin{aligned} \mathbf{C}(\mathbf{u}) - \mathbf{C}(\bar{\mathbf{u}}) &= \int_0^T [\mathbf{f}^0(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) - \mathbf{f}^0(\bar{\mathbf{x}}(t), \bar{\mathbf{u}}(t))]dt + \mathbf{g}(\mathbf{x}(T)) - \mathbf{g}(\bar{\mathbf{x}}(T)). \\ &= \int_0^T [\mathbf{f}^0(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) - \mathbf{f}^0(\bar{\mathbf{x}}(t), \mathbf{u}(t)) + \mathbf{f}^0(\bar{\mathbf{x}}(t), \mathbf{u}(t)) - \mathbf{f}^0(\bar{\mathbf{x}}(t), \bar{\mathbf{u}}(t))]dt \\ &\quad + \mathbf{g}(\mathbf{x}(T)) - \mathbf{g}(\bar{\mathbf{x}}(T)). \\ &= \int_0^T [\delta\mathbf{f}^0(t) + \mathbf{f}_x^0(\bar{\mathbf{x}}(t), \mathbf{u}(t))\delta\mathbf{x}(t)] dt + \nabla\mathbf{g}(\bar{\mathbf{x}}(T))\delta\mathbf{x}(T) + o(\|\delta\mathbf{u}\|_1) \end{aligned}$$

En utilisant que f_x^0 est localement Lipschitz, on a :

$$|f_x^0(\bar{x}(t), u(t)) - f_x^0(\bar{x}(t), \bar{u}(t))| = O(|\delta u(t)|),$$

et on obtient :

$$C(u) - C(\bar{u}) = \int_0^T [\delta f^0(t) + f_x^0(\bar{x}(t), \bar{u}(t))\delta x(t)] dt + \nabla g(\bar{x}(T))\delta x(T) + o(\|\delta u\|_1)$$

On introduit maintenant la linéarisation de Pontryagin.

On a donc en utilisant $z(0) = 0$ et le lemme (3) :

$$C(u) - C(\bar{u}) = \int_0^T [\delta f^0(t) + f_x^0(\bar{x}(t), \bar{u}(t))z(t)] dt + p(T)z(T) - p(0)z(0) + o(\|\delta u\|_1).$$

On peut écrire $p(T)z(T) - p(0)z(0) = \int_0^T [\dot{p}(t)z(t) + p(t)\dot{z}(t)] dt$.

On a donc :

$$\begin{aligned} C(u) - C(\bar{u}) &= \int_0^T [\delta f^0(t) + f_x^0(\bar{x}(t), \bar{u}(t))z(t) + p(t)(f_x(\bar{x}(t), \bar{u}(t))z + f(\bar{x}(t), u(t)) \\ &\quad - f(\bar{x}(t), \bar{u}(t))) - (p(t) \cdot f_x(\bar{x}(t), \bar{u}(t)) + f_x^0(\bar{x}(t), \bar{u}(t)))z(t)] dt + o(\|\delta u\|_1). \\ &= \int_0^T [\delta f^0(t) + p(t)(f(\bar{x}(t), u(t)) - f(\bar{x}(t), \bar{u}(t)))] dt + o(\|\delta u\|_1). \end{aligned}$$

Ce qui montre le lemme (4)

Remarque 12. Si on suppose que f^0 et g sont de classe C^2 , alors on peut montrer que

$$C(u) - C(\bar{u}) = \int_0^T \delta H(t) dt + O(\|\delta u\|_1^2)$$

Montrons maintenant le théorème (2.4).

Soit $\varepsilon > 0$, $t \in [0, T]$, $v \in \mathcal{U}$ et u_ε le contrôle défini par :

$$\begin{cases} u_\varepsilon(s) = \bar{u}(t), & \text{si } s \in [0, T] \setminus [t, t + \varepsilon] \\ u_\varepsilon(s) = v, & \text{sinon} \end{cases}$$

On dit que u_ε est une perturbation en aiguille du contrôle \bar{u} .

Notons que $\|u_\varepsilon - \bar{u}\|_1 = \int_t^{t+\varepsilon} |v - \bar{u}(s)| ds = O(\varepsilon)$.

Appliquons le lemme (4) avec u_ε .

On a donc :

$$C(u_\varepsilon) - C(\bar{u}) = \int_t^{t+\varepsilon} \delta H(s) ds + o(\varepsilon) \geq 0$$

On obtient en divisant par $\varepsilon > 0$:

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_t^{t+\varepsilon} \delta H(s) ds + o(1) \geq 0$$

où $\mathbf{o}(1)$ est une fonction qui tend vers $\mathbf{0}$ quand ε tend vers $\mathbf{0}$.

Maintenant, $t \mapsto \mathbf{H}(\bar{\mathbf{x}}(t), \mathbf{p}(t), \mathbf{u}(t)) - \mathbf{H}(\bar{\mathbf{x}}(t), \mathbf{p}(t), \bar{\mathbf{u}}(t))$ est Lebesgue intégrable (voir (1.1)), et donc pour presque tout $t \in [0, T]$. on a lorsque $\varepsilon \rightarrow \mathbf{0}$:

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_t^{t+\varepsilon} \delta \mathbf{H}(s) ds \rightarrow \mathbf{H}(\bar{\mathbf{x}}(t), \mathbf{p}(t), \mathbf{u}(t)) - \mathbf{H}(\bar{\mathbf{x}}(t), \mathbf{p}(t), \bar{\mathbf{u}}(t))$$

Par définition des points de Lebesgue d'une fonction mesurable. On obtient donc (2.4).

Chapitre 3

EXEMPLES D'APPLICATION DU P.M.P .

Les applications sont très nombreuses et dans des domaines très divers, comme la mécanique, l'industrie, l'agriculture, l'informatique, la biologie, la médecine, la chimie, l'économie, etc...

3.1 Exemple :n° :01.

Contrôle Optimal D'un Ressort Non Linéaire.

Pour expliquer et motiver la théorie nous allons partir d'un problème concret simple : le contrôle optimal d'un ressort.

***Présentation du problème :**

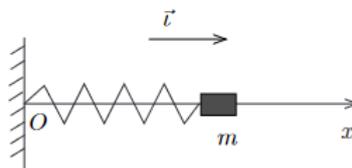


FIGURE 3.1 – Le ressort.

Considérons une masse ponctuelle m , astreinte à se déplacer le long d'un axe (Ox) , attachée à un ressort . On applique à cette masse ponctuelle une force extérieure horizontale $\mathbf{u}(t) \vec{i}$. De plus on impose une contrainte à la force extérieure : $|\mathbf{u}(t)| \leq 1$; Cela signifie qu'on ne peut pas appliquer n'importe quelle force extérieur horizontale à la masse ponctuelle : le module de la force est borné, ce qui traduit le fait que notre puissance d'action est limitée et rend ainsi compte des limitations techniques de l'expérience .

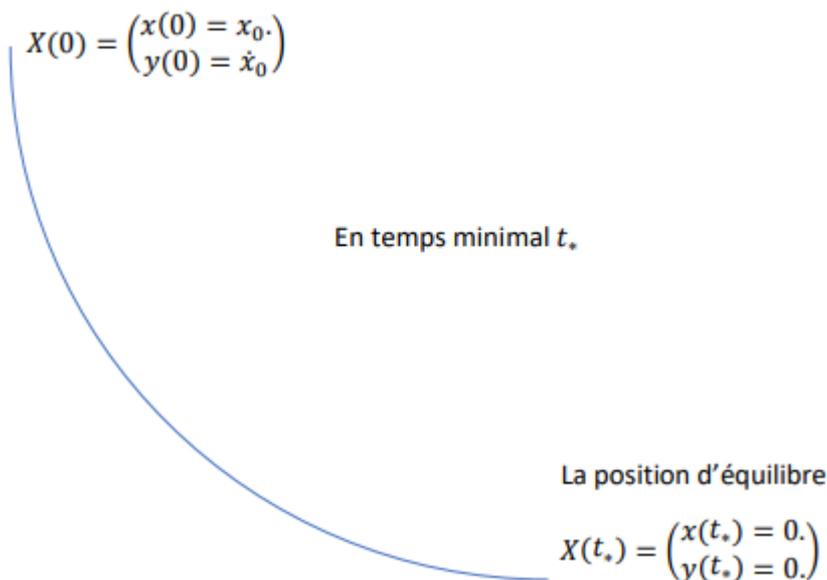
Supposons que la position et la vitesse initiales de l'objet soient $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ et $\dot{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{y}_0$. Le problème est d'amener la masse ponctuelle à la position d'équilibre $\mathbf{x} = \mathbf{l}$ (où l est la longueur du ressort au repos) en un temps minimal en contrôlant la force externe $\mathbf{u}(t)$ appliquée à cet objet, et en tenant compte de la contrainte $|\mathbf{u}(t)| \leq 1$. La fonction \mathbf{u} est appelée le contrôle. Des conditions initiales étant données, le but est donc de trouver une fonction $\mathbf{u}(t)$ qui permet d'amener la masse ponctuelle à sa position d'équilibre en un temps minimal.

*Application du Principe du Maximum :

Notre problème est modélisé par le système de contrôle :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{y}(t), \\ \dot{\mathbf{y}}(t) = -\mathbf{x}(t) - 2\mathbf{x}(t)^3 + \mathbf{u}(t), \end{cases} \quad (3.1)$$

où on autorise comme contrôles toutes les fonctions $\mathbf{u}(t)$ continues par morceaux (voir (1.2)) telles que $|\mathbf{u}(t)| \leq 1$. L'objectif est d'amener le ressort d'une position initiale quelconque $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0 = \dot{\mathbf{x}}_0)$ à sa position d'équilibre $(\mathbf{0}, \mathbf{0})$ en temps minimal t_* .



La question qui se pose est : qui est le contrôle \mathbf{u} permettant de résoudre notre problème???

$$\mathbf{u} : \mathbb{R}^+ \longrightarrow [-1, 1] = \Omega; \quad \text{continues par morceaux}$$

$$t \mapsto \mathbf{u}(t)$$

On cherche à minimiser le temps, ça vaut dire que : $c(t, \mathbf{u}) = t$, en prenant $f^0(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) = 1$ et $g(t, \mathbf{x}(t)) = 0$. $[c(t, \mathbf{u}) = \int_0^t 1 ds + 0 = t]$.

Le Hamiltonien du système précédent s'écrit :

$$\begin{aligned} H(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}, p^0, \mathbf{u}) &= \langle \mathbf{p}, \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) \rangle + p^0 f^0(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}). \\ &= p_x \mathbf{y} + p_y (-\mathbf{x} - 2\mathbf{x}^3 + \mathbf{u}) + p^0. \end{aligned}$$

Et si $(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \mathbf{u})$ est une extrémale, alors on doit avoir :

$$\begin{aligned}\dot{p}_x &= -\frac{\partial H}{\partial x} = p_y(1 + 6x^2). \\ \dot{p}_y &= -\frac{\partial H}{\partial y} = -p_x.\end{aligned}$$

Rappelons que le principe du maximum conduit à la convention $\mathbf{p}^0 \leq \mathbf{0}$; prenant $\mathbf{p}^0 = \mathbf{0}$. Notons que le couple $(\mathbf{p}(\cdot), \mathbf{p}^0)$ doit être non trivial, d'où le vecteur adjoint (p_x, p_y) doit être non nul, donc p_y ne peut s'annuler sur un intervalle (sinon on aurait également $p_x = \dot{p}_y = 0$.) Par ailleurs la condition de maximisation :

$$H(t, x(t), p(t), p^0, u(t)) = \max_{v \in \Omega} H(t, x(t), p(t), p^0, v).$$

nous donne :

$$\begin{aligned}p_y(t)u(t) &= \max_{|v| \leq 1} p_y(t)v. \\ \max_{|v| \leq 1} (p_y(t)v) &= \begin{cases} p_y(t) \times \max_{|v| \leq 1}(v) & \text{si } p_y(t) \geq 0. \\ p_y(t) \times \min_{|v| \leq 1}(v) & \text{si } p_y(t) \leq 0. \end{cases} \\ &= \begin{cases} +p_y(t) & \text{si } p_y(t) \geq 0. \\ -p_y(t) & \text{si } p_y(t) \leq 0. \end{cases} \\ &= |p_y(t)|.\end{aligned}$$

D'où :

$$p_y(t)u(t) = |p_y(t)| = \text{signe}(p_y(t))p_y(t).$$

Comme p_y ne s'annule sur aucun intervalle, on en déduit que, presque partout :

$$u(t) = \text{signe}(p_y(t))$$

En particulier les contrôles optimaux sont successivement égaux à ± 1 .

Plus précisément le vecteur adjoint au temps final t_* étant défini à scalaire multiplicatif près, on peut affirmer :

$u(t) = \text{signe}(p_y(t))$ où p_y est la solution de :

$$\begin{cases} \ddot{p}_y(t) + p_y(t)(1 + 6x(t)^2) = 0. \\ p_y(t_*) = \cos(\alpha); \dot{p}_y(t_*) = -\sin(\alpha). \end{cases}$$

Le paramètre $\alpha \in [0, 2\pi[$ étant indéterminé.

Notre système devient comme suit : Problème au temps minimal :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = y(t). \\ \dot{y}(t) = -x(t) - 2x(t)^3 + \text{signe}(p_y(t)). \\ \dot{p}_y(t) = -p_x(t). \\ \dot{p}_x(t) = p_y(t)(1 + 6x(t)^2). \end{cases}$$

avec $x(t_*) = y(t_*) = 0$; $x(0) = x_0$; $y(0) = \dot{x}_0$; $p_y(t_*) = \cos(\alpha)$;
 $p_x(t_*) = -\dot{p}_y(t_*) = \sin(\alpha)$.
où $\alpha \in [0, 2\pi[$ est à déterminer.

3.2 Exemple :n° :02.

Problème de la brachistochrone : le toboggan optimal :

*Historiquement :

Historiquement, on pourrait dire que le premier problème du contrôle optimal qui a été posé par des mathématiciennes à la fin du 17^{me} siècle est le fameux problème de la brachistochrone ; les méthodes imaginées pour sa résolution amenèrent à développer la branche des mathématiques qu'on appelle le calcul des variations.

Ce problème mathématique peut se poser sous la forme suivante : la question est très simple : [Qu'il est le toboggan optimal?](#)

Dans ce paragraphe, on a deux mots clés : toboggan et brachistochrone ; on va donner ses définitions avant d'aborder l'analyse mathématique de ce problème amusant.

*Toboggan :

Un toboggan ou glissoire est une structure qui permet de descendre en glissant d'un point à un autre. Ce dispositif peut être constitué de divers matières (plastique, bois, métal) et destiné à des usages divers tels que le jeu, le transport de matériaux ...



FIGURE 3.2 – image d'un toboggan pour le jeu.

***brachistochrone :**

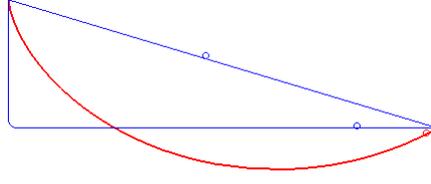


FIGURE 3.3 – courbe brachistochrone.

***Descriptif :**

L'expérience présentée ici comporte **3** courbes dans le plan vertical ainsi que **3** billes différentes parcourent ; on remarque qu'il existe une courbe pour laquelle la bille atteint l'arrivée plus rapidement et cette courbe est de type cycloïde inversée.[voir (??)]

Il s'agit de la courbe brachistochrone.

Le mot 'brachistochrone' (du grec 'brakhistos' signifiant "le plus court", et de 'chronos' signifiant le "temps") ; désigne une courbe dans le plan vertical sur laquelle un point matériel pesant placé dans un champ de pesanteur uniforme, glissant sans frottement et sans vitesse initiale, présente un temps minimal parmi toutes les courbes joignant deux points fixés (d'où son nom).

***L'énoncé :**

On revient à notre question de début : Qu'il est le toboggan optimal?

On veut trouver la forme optimale d'un toboggan (entre deux altitudes données) pour que, si une bille est lâchée sur ce toboggan (à vitesse initiale nulle). elle arrive à l'autre extrémité en temps minimal.

Ce problème se modélise sous la forme d'un problème de contrôle optimal, comme suit. Dans le plan Euclidien, le toboggan est modélisé par une courbe continue, partant de l'origine et arrivant à un certain point fixé (x_1, y_1) , avec $x_1 > 0$. On considère une bille de masse $m > 0$ roulant sur ce toboggan. On note $(x(t), y(t))$ sa position à l'instant t . La bille est soumise à la force de gravité $m\vec{g}$ et à la force de réaction du toboggan. A l'instant t , on appelle $u(t)$ l'angle (orienté) entre le vecteur unitaire de l'horizontale et le vecteur vitesse $(\dot{x}(t), \dot{y}(t))$ de la bille (qui est colinéaire à la tangente à la courbe) [voir (3.4)].

Chercher la courbe revient à chercher l'angle $u(t)$. On décrète donc que u est un contrôle. En projetant les équations du principe fondamental de la dynamique sur la tangente à la courbe.

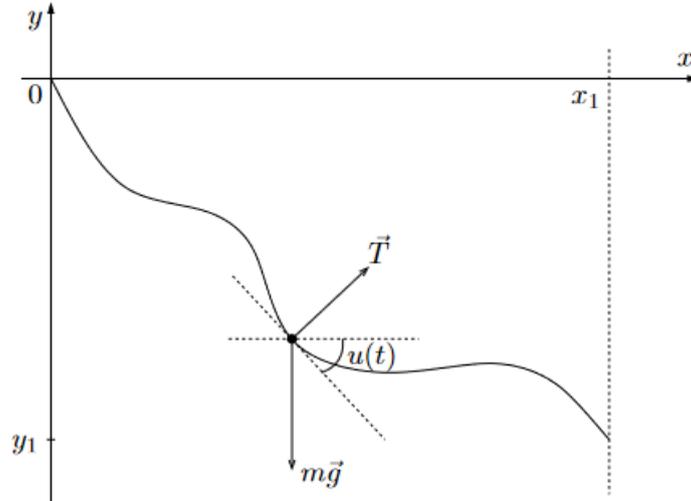


FIGURE 3.4 – Problème de la brachistochrone.

On obtient alors le système de contrôle suivant :

$$\begin{aligned}
 \dot{x}(t) &= v(t) \cos u(t), & x(0) &= 0, & x(t_f) &= x_1. \\
 \dot{y}(t) &= -v(t) \sin u(t), & y(0) &= 0, & y(t_f) &= y_1. \\
 \dot{v}(t) &= g \sin u(t), & v(0) &= 0, & v(t_f) & \text{libre}.
 \end{aligned}
 \tag{3.2}$$

Le contrôle est $u(t) \in \mathbb{R}$, $g > 0$ est une constante. On veut minimiser le temps final t_f .

***corrigé :**

Dans cette étape, on va réduire le problème (3.2) à fin d'obtenir un problème moins difficile, autrement dit a moins de variables.

Pour tout contrôle u , on a :

$$y(t) = -\frac{1}{2g}v(t)^2.$$

En effet,

D'après le système de contrôle, on a :

$$\dot{y}(t) = -v(t) \sin u(t),$$

Et :

$$\dot{v}(t) = g \sin u(t),$$

\Rightarrow

$$\sin u(t) = \frac{\dot{v}(t)}{g}; [g > 0]$$

D'où :

$$\dot{y} = -\frac{1}{g}v\dot{v}.$$

En intégrant, on trouve :

$$\begin{aligned}y(t) &= -\frac{1}{2g} \int_0^t 2v(s)\dot{v}(s)ds. \\ &= -\frac{1}{2g}[v^2(s)]_0^t. \\ &= -\frac{1}{2g}(v^2(t) - v^2(0)); [v(0) = 0] \\ &= -\frac{1}{2g}v^2(t).\end{aligned}$$

D'où :

$$y(t) = -\frac{1}{2g}v^2(t).$$

*Remarquons qu'un point tel que $y_1 > 0$ n'est pas accessible. Désormais, on supposera que $y_1 \leq 0$.

En effet,

On a :

$$y(t) = -\frac{1}{2g}v^2(t).$$

\Rightarrow

$$v^2(t)[= -2gy(t).] \geq 0;$$

et $g > 0$

Donc, $-y(t)$ doit être positif.

D'où $y(t) \leq 0$

Par conséquent un point tel que $y_1 > 0$ n'est pas accessible.

D'où : on supposera que : $y_1 \leq 0$.

* Comme $y(t) = -\frac{1}{2g}v^2(t)$, on peut oublier l'équation en y .

D'où on peut réduire notre problème au problème suivant :

$$\dot{x}(t) = v(t) \cos u(t),$$

$$\dot{v}(t) = g \sin u(t),$$

Comme $y(t_f) = y_1$ est fixé ; il s'ensuit que $v(t_f) = \pm\sqrt{-2gy_1}$.(fixé).

D'où les conditions initiales et finales de notre nouveau problème.

$$x(0) = 0, \quad x(t_f) = x_1 > 0 \text{ fixé, [d'après l'énoncé].}$$

$$v(0) = 0, \quad v(t_f) = \pm\sqrt{-2gy_1} \text{ (fixé.)}$$

Dans cette étape qui est importante, on va essayer de trouver l'angle $u(t)$

Appliquons le principe du maximum de Pontryagin au problème de contrôle optimal (3.2) :

* Écrivons le Hamiltonien du problème (on notera les variables adjointes (p_x, p_v) et p^0).

$$H(t, x, p, p^0, u) = \langle p, f(t, x, u) \rangle + p^0 f^0(t, x, u)$$

$$p = (p_x, p_v).$$

$$f(t, x, u) = (v(t) \cos u(t), g \sin u(t))$$

Et le coût s'écrit comme suit :

$$c(t, u) = \int_0^t 1 ds + 0 = t.$$

$$\text{D'où } f^0(t, x, u) = 1 \text{ et } g(t, x(t)) = 0.$$

$$\text{D'où : } H(t, x, p, p^0, u) = p_x v(t) \cos u(t) + p_v g \sin u(t) + p^0.$$

Donc le Hamiltonien du problème est :

$$H = p_x v \cos u + p_v g \sin u + p^0.$$

* Écrivons les équations extrémales.

$$\dot{p}_x = -\frac{\partial H}{\partial x} = 0$$

$$\dot{p}_v = -\frac{\partial H}{\partial v} = -p_x \cos u.$$

En particulier, p_x est constante.

* Montrons que le Hamiltonien est nul le long de toute extrémale.

Le temps final pour atteindre la cible est libre, g ne dépend pas du temps.

Le problème est autonome, car $[f = (v \cos u, g \sin u)$ et $f^0 = 1]$ ne dépendent pas de t .

Donc $H = 0$; le long de toute extrémale.

* Écrivons la condition de maximisation, et déduisons les contrôles extrémaux $\cos u(t)$ et $\sin u(t)$ sous une condition qu'on explicitera sous la forme $\varphi(t) \neq 0$ (préciser la fonction φ).

La condition de maximisation est la suivante :

$$H(t, x(t), p(t), p^0, u(t)) = \max_{w \in \Omega} H(t, x(t), p(t), p^0, w).$$

$$p_x v(t) \cos u(t) + p_v g \sin u(t) = \max_{w \in \Omega} (p_x v(t) \cos w + p_v g \sin w)$$

Soit la fonction :

$$g(w) = p_x v(t) \cos w + p_v g \sin w, \text{ avec } w \in \Omega = \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$$

On a :

$$g'(w) = -p_x v(t) \sin w + p_v g \cos w$$

$$g'(w) = 0 \Leftrightarrow w_1 = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \text{ ou } w_2 = \text{Arctan}\left(\frac{p_v g}{p_x v}\right)$$

Supposons que $w_1 \in \Omega$, alors : $k \in]-1, 0[$. ce qui est absurde , car k est un entier relatif.
On restreint le domaine de définition à $[0, \frac{\pi}{2}[$.

On a :

$$g''(w) = -[p_x v(t) \cos w + p_v g \sin w]$$

Supposons que $p_x > 0$ et $p_v > 0$
alors

$$g''(w) < 0$$

D'où le maximum est atteint lorsque $w = w_2$.

La condition de maximisation devient :

$$\begin{aligned} p_x v(t) \cos u(t) + p_v g \sin u(t) &= g(w_2) \\ &= \sqrt{(p_x v(t))^2 + (gp_v(t))^2} \end{aligned}$$

Soient,

$$\cos u(t) = \frac{p_x v(t)}{\sqrt{(p_x v(t))^2 + (gp_v(t))^2}}, \quad \sin u(t) = \frac{gp_v(t)}{\sqrt{(p_x v(t))^2 + (gp_v(t))^2}}$$

Pourvu que $\varphi(t) = (p_x v(t))^2 + (gp_v(t))^2 \neq 0$.

La condition de maximisation est bien vérifiée .

Dans cette phase on va courir à simplifier l'expression de $\cos u(t)$ et $\sin u(t)$.

* Calculons $\frac{d}{dt}(p_x v(t))$ et $\frac{d}{dt}(gp_v(t))$.

$$\frac{d}{dt}(p_x v(t)) = p_x \dot{v}(t) = p_x g \sin u(t).$$

Et ;

$$\frac{d}{dt}(gp_v(t)) = g\dot{p}_v(t) = -gp_x \cos u(t).$$

* Démontrons que la fonction φ ne s'annule identiquement sur aucun sous-intervalle de $[0, t_f]$.

Par l'absurde,

supposons que $\varphi(t) = 0$ pour tout $t \in I$, alors $(p_x v(t))^2 = 0$ et $(gp_v(t))^2 = 0$.

Donc, $p_x = 0$ et $p_v(t) = 0$ pour tout $t \in I$.

Comme $H = 0$, on déduit que $p^0 = 0$

On a obtenu $(p_x, p_v(t), p^0) = (0, 0, 0)$ ce qui est absurde.

* Réécrivons le Hamiltonien maximisé, et démontrons que $p^0 \neq 0$. Désormais, on prend $p^0 = -1$.

Le hamiltonien maximisée s'écrit :

$$\begin{aligned} H &= p_x v \cos u + p_v g \sin u + p^0. \\ &= \sqrt{\varphi(t)} \cos^2 u + \sqrt{\varphi(t)} \sin^2 u + p^0. \\ &= \sqrt{\varphi(t)} + p^0. \end{aligned}$$

Comme $\mathbf{H} = \mathbf{0}$ le long de toute extrémale, on en déduit par l'absurde que $\mathbf{p}^0 \neq \mathbf{0}$ (sinon on aurait $\varphi \equiv \mathbf{0}$, ce qui est absurde.)

On prend $\mathbf{p}^0 = -\mathbf{1}$.

* Déduisons que $\varphi(t) = 1$, et en déduire une expression plus simple de $\cos u(t)$ et $\sin u(t)$.
 $\mathbf{H} = \mathbf{0}$; $\mathbf{p}^0 = -\mathbf{1}$ donc,

$$\sqrt{(\mathbf{p}_x v(t))^2 + (g \mathbf{p}_v(t))^2} = 1$$

D'où :

$$\varphi(t) = 1.$$

On déduit que :

$$\cos u(t) = \mathbf{p}_x v(t)$$

Et

$$\sin u(t) = g \mathbf{p}_v(t).$$

Finalement, l'angle $u(t)$ est connu, donc pouvant dire qu'on a trouvé la courbe, en cherchant \mathbf{x} et \mathbf{y} .

Allons, cherchons leurs expressions..

* Montrons que $\mathbf{p}_x \neq \mathbf{0}$.

Par l'absurde, si $\mathbf{p}_x = \mathbf{0}$ alors

$$\cos u(t) = 0 [\cos u(t) = \mathbf{p}_x v(t)]$$

Donc

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = 0 [\dot{\mathbf{x}}(t) = v(t) \cos u(t)]$$

D'où \mathbf{x} est une constante pour tout $t \in I$ et on n'atteint jamais le point $\mathbf{x}_1 > \mathbf{0}$.

* Cherchons $\mathbf{x}(t)$ et $\mathbf{y}(t)$:

On a

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= v(t) \cos u(t) \\ &= v(t) \mathbf{p}_x v(t) \\ &= \mathbf{p}_x v^2(t) \end{aligned}$$

Cherchons $v(t)$:

On a

$$\begin{aligned} \dot{v}(t) &= g \sin u(t) \\ &= g^2 \mathbf{p}_v(t). \end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{p}}_v(t) &= -\mathbf{p}_x \cos u \\ &= -\mathbf{p}_x^2 v(t). \end{aligned}$$

Donc,

$$\ddot{v}(t) = -g^2 \mathbf{p}_x^2 v(t).$$

D'où,

$$\ddot{v}(t) + g^2 p_x^2 v(t) = 0$$

Soit l'équation caractéristique : $r^2 + g^2 p_x^2 = 0$

Par suite :

$$r = \pm i g p_x$$

Alors

$$v(t) = \lambda \cos(gp_x t) + \mu \sin(gp_x t) \text{ où } \lambda \text{ et } \mu \text{ réels.}$$

Déterminons λ et μ :

Au pt $t = 0$, $v(0) = \lambda \times 1 + \mu \times 0 = 0 \Rightarrow \lambda = 0$

D'où

$$\begin{aligned} v(t) &= \mu \sin(gp_x t) \\ \Rightarrow \dot{v}(t) &= \mu g p_x \cos(gp_x t). \end{aligned}$$

On a $H = 0$ pour tout t .

Donc au point $t = 0$

$$\begin{aligned} H &= \sqrt{(p_x v(0))^2 + (g p_v(0))^2} - 1 = 0 \\ \Rightarrow g^2 p_v(0)^2 &= 1 \\ \Rightarrow p_v(0) &= \pm \frac{1}{g}. \\ \Rightarrow \frac{\dot{v}(0)}{g^2} &= \pm \frac{1}{g}. \\ \Rightarrow \dot{v}(0) &= \pm g. \end{aligned}$$

Au point $t = 0$,

$$\dot{v}(0) = \mu g p_x \times 1 = \pm g.$$

Donc

$$\mu = \pm \frac{1}{p_x}.$$

D'où

$$v(t) = \pm \frac{1}{p_x} \sin(gp_x t)$$

En remplaçant $v(t)$ dans $\dot{x}(t)$ on trouve :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= p_x \times \frac{1}{p_x^2} \sin^2(gp_x t) \\ &= \frac{1}{p_x} \sin^2(gp_x t) \\ &= \frac{1}{2p_x} (1 - \cos(2gp_x t)). \end{aligned}$$

En intégrant, on obtient :

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2p_x} \left[t - \frac{1}{2gp_x} \sin(2gp_x t) \right]_0^t \\ &= \frac{1}{2p_x} t - \frac{1}{4gp_x^2} \sin(2gp_x t). \end{aligned}$$

Et on sait que : $y(t) = -\frac{1}{2g} v^2(t)$

$$\begin{aligned} y(t) &= -\frac{1}{2gp_x^2} \sin^2(gp_x t) \\ &= -\frac{1}{4gp_x^2} (1 - \cos(2gp_x t)) \end{aligned}$$

*Remarquons que $\dot{x} = p_x v^2$, montrons qu'on a forcément $p_x > 0$.

On a :

$$\dot{x}(t) = v(t) \cos u(t)$$

Pour $u \in [0, \frac{\pi}{2}[\Rightarrow \dot{x}(t) > 0$

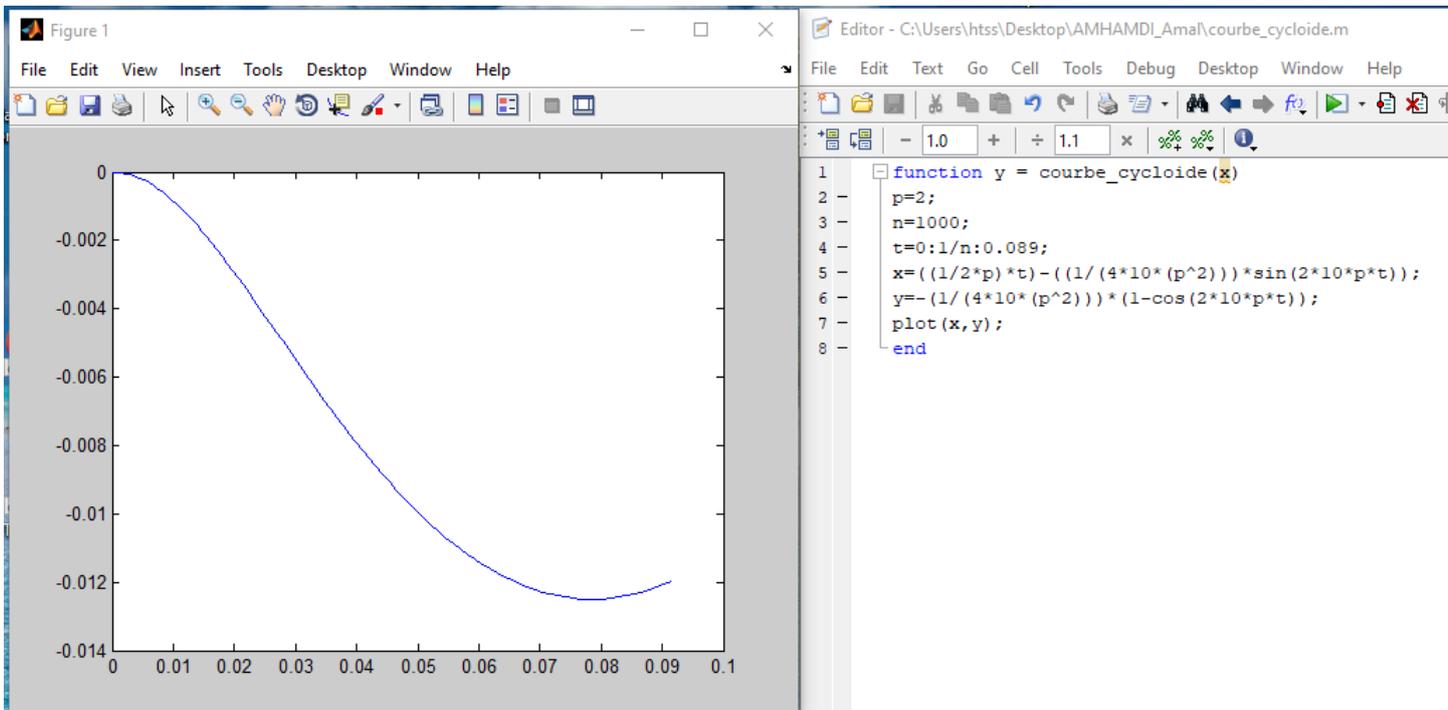
D'où

$$p_x > 0.$$

* Représentons la courbe paramétrée $(x(t), y(t))$ pour des valeurs quelconques de $p_x > 0$.

On appelle ces courbes des courbes cycloïdes. (on pourra s'aider d'un outil informatique)

Ce sont des courbes cycloïdes ; à l'aide de Matlab, on trouve ;



C'est quoi une courbe cycloïde ?

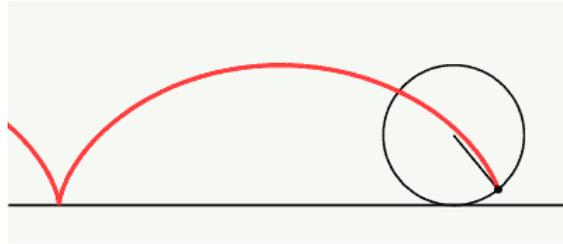


FIGURE 3.5 – Le point fixé à ce cercle engendre une cycloïde droite.

La cycloïde droite, aussi appelée roue d'Aristote, est une courbe plane transcendante, trajectoire d'un point fixé à un cercle qui roule sans glisser sur une droite.

Alors que le *chewing-gum* (point directeur) collé sur le pneu d'une roue de vélo décrit une cycloïde.

Dans cette dernière partie, On veut démontrer que toute trajectoire optimale joignant (x_1, y_1) a au plus une arche de cycloïde.

* Calculons p_x et t_f dans le cas où $y_1 = 0$.

On a :

$$y(t) = \frac{1}{2gp_x^2} \sin^2(gp_x t)$$

Si :

$$y(t_f) = y_1 = 0$$

Alors

$$\sin(gp_x t_f) = 0$$

Donc,

$$gp_x t_f = \pi + k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z}$$

mais comme t_f doit être minimal, on a forcément $k = 0$ (c'est cela qui va impliquer que toute trajectoire optimale a au plus une arche de cycloïde .)

Donc,

$$gp_x t_f = \pi \tag{*}$$

On a :

$$x(t) = \frac{1}{2p_x} t - \frac{1}{4gp_x^2} \sin(2gp_x t).$$

Au pt $t = t_f$; on a :

$$x(t_f) = x_1 = \frac{t_f}{2p_x} \tag{**}$$

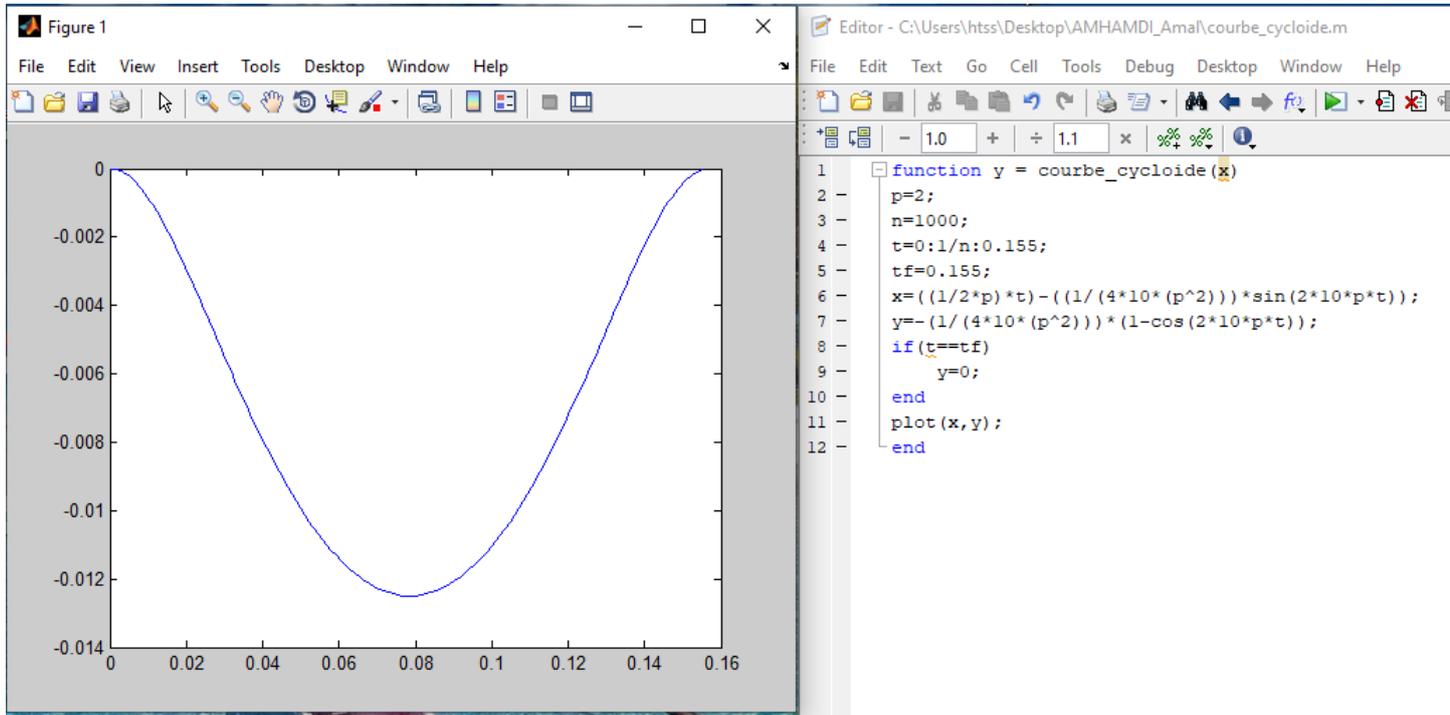
On obtient, d'après (*) et (**):

$$t_f = \sqrt{\frac{2\pi x_1}{g}}$$

Et ;

$$p_x = \sqrt{\frac{\pi}{2gx_1}}.$$

* Dans le plan, traçons toutes les trajectoires optimales joignant $(x_1, 0)$, pour tout $x_1 > 0$.



* Finalement, montrons que la courbe optimale $(x(t), y(t))$ joignant (x_1, y_1) est telle que :

- $y(t)$ passe par un minimum lorsque $y_1 > -\frac{2}{\pi}x_1$.
- $y(t)$ est strictement décroissante lorsque $y_1 < -\frac{2}{\pi}x_1$.

En effet,

Si

$$\dot{y}(t) = 0 \quad [\dot{y}(t) = -\frac{1}{2p_x} \sin(2gp_x t)]$$

Alors :

$$\sin(2gp_x t) = 0$$

D'où

$$2gp_x t = \pi + k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z}$$

Et par optimalité comme précédemment, $k = 0$, donc :

$$t = \frac{\pi}{2gp_x}.$$

Pour $t > \frac{\pi}{2gp_x}$; $\dot{y}(t) > 0$.

D'où le tableau de variation suivant :

t	$\frac{\pi}{2gp_x}$
$y(t)$	$-\frac{1}{2gp_x^2}$

On obtient la courbe paramétrée :

$$y\left(t = \frac{\pi}{2gp_x}\right) = y(p_x) = -\frac{1}{2gp_x^2}; x(p_x) = \frac{\pi}{4gp_x^2}$$

On déduit que :

$$y = \frac{-2}{\pi}x.$$

Alors :

- $y(t)$ passe par un minimum lorsque $y_1 > -\frac{2}{\pi}x_1$.
- $y(t)$ est strictement décroissante lorsque $y_1 < -\frac{2}{\pi}x_1$.

Et alors cela montre bien que toute trajectoire optimale joignant (x_1, y_1) a au plus une arche de cycloïde.

3.3 Exemple :n° :03.

Contrôle optimal de la pollution par engrais.

*Introduction :

La pollution du sol signifie la pénétration de substances étrangers dans le sol ou une augmentation de la concentration de l'un de ces composants naturels, ce qui entraîne une modification de la composition chimique et physique du sol, ces substances peuvent être des pesticides ou des engrais chimiques, ou acides pluie ou déchets et autres.

La pollution du sol entraîne la contamination des cultures agricoles, ce qui conduit à nuire à la santé de l'homme qui s'en nourrit directement, et par la transmission de polluants aux produits d'origine animale tels que le lait, les œufs et la viande.

Particulièrement, l'engrais est une substance organique ou minérale, destinée à apporter aux plantes des compléments d'éléments nutritifs, de façon à améliorer leur croissance, et à augmenter le rendement et la quantité des cultures, en revanche cette substance peut avoir un effet négatif sur le sol, si on l'utilise en quantités ou concentrations inhabituelles, en excès ou en diminution.

Afin de connaître la bonne quantité ou la quantité exacte à faire, on va étudier le problème suivant :

***L'énoncé :**

On considère l'évolution de la quantité de pollution $\mathbf{x}(t)$ dans un champ de céréales où l'on cherche, par ajout d'engrais, à optimiser le rendement tout en minimisant la pollution produite.



Le contrôle $\mathbf{u}(t)$ est la quantité d'engrais ajouté. Il vérifie la contrainte

$$0 \leq \mathbf{u}(t) \leq 3$$

On note $\alpha > 0$ le taux de décroissance naturelle de la pollution. L'évolution de la pollution $\mathbf{x}(t)$ est :

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{u}(t) - \alpha \mathbf{x}(t).$$

avec $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 > 0$

D'une part, on cherche à minimiser la pollution engendrée par l'engrais, mais d'autre part, on cherche à optimiser le rendement de céréales par ajout d'engrais. Cependant, un ajout excessif d'engrais a aussi un effet nocif sur les plantes, et donc sur le rendement. On fixe un temps final \mathbf{T} , et on cherche à minimiser le critère

$$C_T(\mathbf{u}) = \int_0^T \left(\mathbf{x}(t)^2 - \sqrt{(3 - \mathbf{u}(t))(1 + \mathbf{u}(t))} \right) dt$$

$$\mathbf{u}(t) = ???$$

***corrigé :**

* On introduit les variables adjointes \mathbf{p} et \mathbf{p}^0 .

-Le Hamiltonien du système est :

$$\begin{aligned} H(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}, \mathbf{p}^0, \mathbf{u}) &= \langle \mathbf{p}, \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) \rangle + \mathbf{p}^0 f^0(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) \\ &= \mathbf{p}(\mathbf{u} - \alpha \mathbf{x}) + \mathbf{p}^0 (\mathbf{x}^2 - \sqrt{((3 - \mathbf{u})(1 + \mathbf{u}))}) \end{aligned}$$

-Et l'équation d'extrémale est :

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{p}} &= -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} \\ &= \alpha \mathbf{p} - 2\mathbf{p}^0 \mathbf{x}.\end{aligned}$$

-Les conditions de transversalité sur le vecteur adjoint donnent.

Remarquons que notre problème est un problème de Lagrange (car $\mathbf{g} = \mathbf{0}$).

or le point final est libre, alors le vecteur adjoint au temps final est nul, donc $\mathbf{p}(T) = \mathbf{0}$.

-Remarquons que \mathbf{p}^0 est forcément non nul.

En effet,

or le couple $(\mathbf{p}(\cdot), \mathbf{p}^0)$ doit être non-trivial, et $\mathbf{p}(T) = \mathbf{0}$ alors \mathbf{p}^0 est forcément non nul.

Dans la suite, on pose $\mathbf{p}^0 = -1$.

*Dans cette étape, on va prendre une idée sur la quantité de la pollution et sur le signe du vecteur adjoint.

On a $\mathbf{u}(t) \geq 0$, donc :

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &\geq -\alpha \mathbf{x} \\ \Rightarrow e^{-\alpha t}(\dot{\mathbf{x}}e^{\alpha t} + \alpha e^{\alpha t} \mathbf{x}) &\geq 0 \\ \Rightarrow \frac{d}{dt}[\mathbf{x}e^{\alpha t}] &\geq 0\end{aligned}$$

En intégrant, on trouve :

$$\mathbf{x}e^{\alpha t} - \mathbf{x}_0 \geq 0$$

D'où

$$\mathbf{x}(t) \geq \mathbf{x}_0 e^{-\alpha t} \quad (3.3)$$

Et en particulier

$$\mathbf{x}(t) > 0, \text{ pour tout } t \in [0, T].$$

- En déduire que $\mathbf{p}(t) < 0$, pour tout $t \in [0, T[$.

On a

$$\dot{\mathbf{p}} = \alpha \mathbf{p} + 2\mathbf{x}, \text{ avec } \mathbf{x} > 0$$

Donc , si en un temps $t_1 < T$, on a $\mathbf{p}(t_1) \geq 0$, alors \mathbf{p} est croissante, d'où pour $t > t_1$; $\mathbf{p}(t) > \mathbf{p}(t_1) > 0$, ce qui contredit $\mathbf{p}(T) = \mathbf{0}$.

Et donc,

$$\mathbf{p}(t) < 0 \text{ pour tout } t \in [0, T].$$

* Soit $\mathbf{u}(t)$ le contrôle extrémal au temps t .

Montrons que :

$$\mathbf{u}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } \mathbf{p}(t) \leq -1/\sqrt{3} \\ 1 + \frac{2\mathbf{p}(t)}{\sqrt{\mathbf{p}(t)^2 + 1}} & \text{si } \mathbf{p}(t) > -1/\sqrt{3} \end{cases}$$

La condition de maximisation est :

$$\max_{0 \leq u \leq 3} \mathbf{f}(u) \text{ avec } \mathbf{f}(u) = \mathbf{p}u + \sqrt{(3-u)(1+u)}.$$

Étudions en fonction de p cette fonction $f(u)$ (sachant que $p < 0$).

Pour $0 \leq u \leq 3$;

On a :

$$f'(u) = p + \frac{1-u}{\sqrt{(3-u)(1+u)}}$$

$$f'(u) = 0 \Leftrightarrow u_1 = 1 - \frac{2p}{\sqrt{1+p^2}} \text{ et } u_2 = 1 + \frac{2p}{\sqrt{1+p^2}}.$$

Or

$$[f(u_1) = p - 2\sqrt{p^2+1}] < [f(u_2) = p + 2\sqrt{p^2+1}].$$

Et

$$f''(u) < 0$$

Alors f atteint son maximum sur l'intervalle $[0, 3]$ lorsque $u = 1 + \frac{2p}{\sqrt{1+p^2}}$ (qui est bien toujours < 3).

Par ailleurs, $1 + \frac{2p}{\sqrt{p^2+1}} = 0$ si et seulement si $p = \pm 1/\sqrt{3}$.

Or $p < 0 \Rightarrow p = -1/\sqrt{3}$.

Donc, finalement ;

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } p(t) \leq -1/\sqrt{3} \\ 1 + \frac{2p(t)}{\sqrt{p(t)^2+1}} & \text{si } p(t) > -1/\sqrt{3} \end{cases}$$

-Remarquons que $u(t) = 1 + \frac{2p(t)}{\sqrt{p(t)^2+1}}$ sur $[T-\eta, T]$, pour $\eta > 0$ assez petit.

En effet,

Au temps final T , on a $p(T) = 0 > -1/\sqrt{3}$, donc $u(t) = 1 + \frac{2p(t)}{\sqrt{p(t)^2+1}}$ sur $[T-\eta, T]$, pour $\eta > 0$ assez petit.

*On remarque que le contrôle $u(t)$ dépend du vecteur adjoint ;alors Cherchons $p(t)$.

-Montrons que $p(t) \geq \left(p(0) + \frac{x_0}{\alpha}\right) e^{\alpha t} - \frac{x_0}{\alpha} e^{-\alpha t}$, pour tout $t \in [0, T]$.

D'après (3.3) , on obtient :

$$\dot{p}(t) \geq \alpha p(t) + 2x_0 e^{-\alpha t}.$$

Donc,

$$e^{\alpha t} [\dot{p}(t) e^{-\alpha t} - \alpha e^{-\alpha t} p(t)] \geq 2x_0 e^{-\alpha t}.$$

Donc,

$$\frac{d}{dt} (p(t) e^{-\alpha t}) \geq 2x_0 e^{-2\alpha t}.$$

En intégrant, on trouve :

$$p(t) e^{-\alpha t} - p(0) \geq 2x_0 \left[-\frac{1}{2\alpha} (e^{-2\alpha t} - 1)\right]$$

Finalement,

$$p(t) \geq (p(0) + \frac{x_0}{\alpha})e^{\alpha t} - \frac{x_0}{\alpha}e^{-\alpha t} \text{ pour tout } t \in [0, T].$$

- En déduire que $p(0) \leq \frac{x_0}{\alpha} (e^{-2\alpha T} - 1)$.

Au temps final T , $p(T) = 0$, donc par l'inégalité précédente, on trouve :

$$p(0) \leq \frac{x_0}{\alpha} (e^{-2\alpha T} - 1). \quad (+)$$

* On suppose désormais que $x_0 (1 - e^{-2\alpha T}) > \alpha/\sqrt{3}$.

- Montrons que $u(t) = 0$ sur un intervalle du type $[0, t_1]$.

Sous l'hypothèse $x_0 (1 - e^{-2\alpha T}) > \alpha/\sqrt{3}$, on obtient :

$$p(0) \leq \frac{x_0}{\alpha} (e^{-2\alpha T} - 1) < -1/\sqrt{3}. \quad (*)$$

Et donc $u(t) = 0$ sur un intervalle du type $[0, t_1]$.

- Que vaut $p(t)$ sur $[0, t_1]$?

Sur $[0, t_1]$, $u = 0$; donc,

$$\dot{x} = -\alpha x \text{ et } \dot{p} = \alpha p + 2x \text{ avec } x(0) = x_0$$

En intégrant la 1^{re} équation comme précédemment, on obtient :

$$x(t) = x_0 e^{-\alpha t}$$

D'où :

$$\dot{p} = \alpha p + 2x_0 e^{-\alpha t}.$$

En intégrant cette dernière comme précédemment, on trouve :

$$p(t) = (p(0) + \frac{x_0}{\alpha})e^{\alpha t} - \frac{x_0}{\alpha}e^{-\alpha t}, \text{ pour tout } t \in [0, t_1].$$

- Montrons que $p(0) + \frac{x_0}{\alpha} \geq 0$.

Par l'absurde, si $p(0) + \frac{x_0}{\alpha} < 0$, alors d'après l'expression précédente de $p(t)$, on a $p(t) < 0$ pour tout $t \in [0, t_1]$, puis pour tout $t \in [0, T]$, ce qui contredit $p(T) = 0$. Donc,

$$p(0) + \frac{x_0}{\alpha} \geq 0. \quad (++)$$

* Montrons finalement dans cette dernière phase que :

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq t \leq t_1 \\ 1 + \frac{2p(t)}{\sqrt{p(t)^2 + 1}} & \text{si } t_1 < t \leq T \end{cases}$$

Caractérisons le temps de commutation t_1 (sans chercher à le calculer explicitement).

- Sur $[0, t_1]$; $u = 0$.

– Sur $[0, t_1]$, $p(t)$ est donné par :

$$p(t) = (p(0) + \frac{x_0}{\alpha})e^{\alpha t} - \frac{x_0}{\alpha}e^{-\alpha t}$$

En particulier

$$\dot{p}(t) [= \alpha(p(0) + \frac{x_0}{\alpha})e^{\alpha t} + x_0e^{-\alpha t}] > 0$$

Et donc, $p(t)$ est strictement croissante.

D'après (*),

$$p(0) < -1/\sqrt{3},$$

Et d'autre part

$$p(T) = 0,$$

Donc il existe bien un temps de commutation $t_1 < T$ pour lequel

$$p(t_1) = (p(0) + \frac{x_0}{\alpha})e^{\alpha t_1} - \frac{x_0}{\alpha}e^{-\alpha t_1} = -1/\sqrt{3}.$$

(ce qui caractérise t_1).

– Essayons de faire une équivalence entre $p(t) > -1/\sqrt{3}$ et $t_1 < t \leq T$.

En suite, pour $t \geq t_1$, on sait que $p(t) \geq g(t)$;

Où la fonction $g(t) = (p(0) + \frac{x_0}{\alpha})e^{\alpha t} - \frac{x_0}{\alpha}e^{-\alpha t}$ est croissante.

En effet $\dot{g}(t) > 0$, car $p(0) + \frac{x_0}{\alpha} \geq 0$;

Donc $p(t) > [p(t_1) = -1/\sqrt{3}]$ pour $t_1 < t \leq T$.

Finalement,

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq t \leq t_1 \\ 1 + \frac{2p(t)}{\sqrt{p(t)^2 + 1}} & \text{si } t_1 < t \leq T \end{cases}$$

* Montrons que $\max(-\frac{x_0}{\alpha}, \frac{x_0}{\alpha}(e^{-2\alpha T} - 1) - \frac{1}{\sqrt{3}}e^{-\alpha T}) \leq p(0) \leq \frac{x_0}{\alpha}(e^{-2\alpha T} - 1)$.

Comme $t_1 < T$, et par croissance de la fonction $g(t)$,

On a $-1/\sqrt{3} = g(t_1) < g(T)$, ce qui conduit à :

$$p(0) > \frac{x_0}{\alpha}(e^{-2\alpha T} - 1) - \frac{1}{\sqrt{3}}e^{-\alpha T}.$$

Et donc, d'après (+) et (++) :

$$\max(-\frac{x_0}{\alpha}, \frac{x_0}{\alpha}(e^{-2\alpha T} - 1) - \frac{1}{\sqrt{3}}e^{-\alpha T}) \leq p(0) \leq \frac{x_0}{\alpha}(e^{-2\alpha T} - 1).$$

3.4 Exemple :n° :04.

Contrôle optimal d'une épidémie.

Considérons une population touchée par une épidémie que l'on cherche à enrayer par une vaccination. On note

$-I(t)$, le nombre d'individus infectieux, qui peuvent contaminer les autres ;
 $-S(t)$, le nombre d'individus non infectieux, mais contaminables ;
 $-R(t)$, le nombre d'individus infectés, et disparus, ou isolés du reste de la population.
 Soit $r > 0$ le taux d'infection, $\gamma > 0$ le taux de disparition, et $u(t)$ le taux de vaccination.
 Le contrôle $u(t)$ vérifie la contrainte

$$0 \leq u(t) \leq a.$$

Où $a > 0$ est une constante .
 La modélisation est (modèle SIR.)

$$\begin{aligned}
 \dot{S}(t) &= -rS(t)I(t) + u(t), \\
 \dot{I}(t) &= rS(t)I(t) - \gamma I(t) - u(t) \\
 \dot{R}(t) &= \gamma I(t)
 \end{aligned}$$

Et le but est de déterminer une loi optimale de vaccination, de manière à minimiser, en un temps T fixé, le cout

$$C(u) = \alpha I(T) + \int_0^T u(t)^2 dt$$

Où $\alpha > 0$ est donné. Déterminer l'expression du contrôle optimal en fonction du vecteur adjoint.

Que vaut le contrôle optimal au voisinage du temps final si $2a < \alpha$?



Comme d'habitude, appliquons la condition de maximisation,

* Le Hamiltonien du système est :

$$H = p_S(-rSI + u) + p_I(rSI - \gamma I - u) + p_R\gamma I + p^0 u^2.$$

* Les équations d'extrémales sont :

$$\begin{aligned}
 \dot{p}_S &= -\frac{\partial H}{\partial S} = P_S r I - p_I r I. \\
 \dot{p}_I &= -\frac{\partial H}{\partial I} = r S p_S - p_I (r S - \gamma) - p_R \gamma. \\
 \dot{p}_R &= 0.
 \end{aligned}$$

* Les conditions de transversalité sont :

$$\begin{aligned} p_S(T) &= p^0 \frac{\partial g}{\partial S} = 0 \text{ avec } g(T) = \alpha I(T) \\ p_I(T) &= p^0 \frac{\partial g}{\partial I} = p^0 \alpha. \\ p_R(T) &= 0. \end{aligned}$$

On en déduit que $p^0 \neq 0$, et on choisit $p^0 = -1/2$.

* La condition de maximisation est :

$$\max_{0 \leq u \leq a} f(u) \text{ avec } f(u) = p_S u - p_I u - \frac{1}{2} u^2.$$

Étudions en fonction de p cette fonction $f(u)$.

On a un seul point critique de g qui est : $u = p_S - p_I$.

g est une fonction concave de u atteignant son maximum absolu en $u = p_S - p_I$.

On en déduit :

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } p_S(t) - p_I(t) < 0 \\ p_S(t) - p_I(t) & \text{si } 0 \leq p_S(t) - p_I(t) \leq a \\ a & \text{si } p_S(t) - p_I(t) > a \end{cases}$$

* Au temps final T ,

$$p_S - p_I = 0 + \frac{1}{2} \alpha = \frac{\alpha}{2};$$

Donc, si $2a < \alpha$ alors : $\frac{\alpha}{2} > a$.

D'où $u(t) = a$ dans un voisinage du temps final.

Conclusion.

En conclusion, je dois avouer que je suis satisfaite et heureuse de ce travail, car ce mini-projet m'a permis de comprendre et apprendre à maîtriser des nouvelles notions ; et aussi il m'a appris un joli langage mathématique : Latex.

Notre travail a été consacré à clarifier le principe du maximum de Pontryagin dans le cas de dimension finie, où on a pris en compte des contraintes sur le contrôle, ce principe tel qu'il vient d'être énoncé ne prend pas en compte d'éventuelles contraintes sur l'état. La théorie est cependant beaucoup plus compliquée ; une différence fondamentale avec le principe du maximum classique est que la présence de contraintes sur l'état peut rendre le vecteur adjoint discontinu. Pour finir, les perspectives futures de ce travail peut inclure l'étude du problème avec des contraintes sur l'état .

Et pourquoi pas après dans la recherche (si mon dieu le veut.), en se profondant dans ce domaine, on étudiera ce dernier dans le cas infini.



Bibliographie

- [1] Ahleme, N., & Sonia, Z. (2020). Sous-Variété de \mathbb{R}^n (Doctoral dissertation, Abdelhafid boussouf university Centre mila).
- [2] Balac, S., & Chupin, L. (2008). Analyse et algèbre : cours de mathématiques de deuxième année avec exercices corrigés et illustrations avec Maple. PPUR presses polytechniques.
- [3] Barles, G. (1994). Solutions de viscosité des équations de Hamilton-Jacobi. Collection SMAI.
- [4] Bonnans, F., & Rouchon, P. (2005). Commande et optimisation de systemes dynamiques. Editions Ecole Polytechnique.
- [5] Bruckner, A. M., Bruckner, J. B., & Thomson, B. S. (1997). Real analysis. ClassicalRealAnalysis. com.
- [6] Gamkrelidze, R. V., Pontrjagin, L. S., & Boltjanskij, V. G. E. (1964). The mathematical theory of optimal processes. Macmillan Company.
- [7] <https://fr.wikipedia.org/wiki/>
- [8] Trélat, E. (2005). Contrôle optimal :théorie & applications (pp. 246-pages). Paris : Vuibert.
- [9] ZITANE, M. Cours d'analyse 2 Filiere : SMIA (Semestre II).