

DEPARTEMENT DES MATHÉMATIQUES

Master Mathématique et Application au Calcul Scientifique
(MACS)

MEMOIRE DE FIN D'ETUDES

Pour l'obtention du Diplôme de Master Sciences et Techniques
(MST)

Étude numérique des vibrations non linéaire
par la méthode de balance harmonique

Réalisé par : DAANI Mohamed

Encadré par : Pr. EL KHAOULANI EL IDRISSE Rachid

Dr. HILALI Youssef

Soutenu le 21 juillet 2022

Devant le jury composé de :

- Pr. BOURIHANE Oussama Faculté des sciences et technique Fès
- Pr. ETTOUIL Mohamed Faculté des sciences et technique Fès
- Pr. EL KHAOULANI EL IDRISSE Rachid Faculté des sciences et technique Fès

Année Universitaire 2021 / 2022

FACULTE DES SCIENCES ET TECHNIQUES FES – SAISS

☒ B.P. 2202 – Route d'Imouzer – FES

Dédicace

Je dédie ce travail A ma petite famille, A celui qui m'a indiqué la bonne voie en me rappelant que la volonté fait toujours les grands hommes : **mon père**.

A celle qu'a attendu avec la patience les fruits de leur bonne éducation : **ma mère**.

A mes sœurs et frères,

A ma grande famille,

A mes chers enseignants,

A mes amis,

Et toute personne qui a aidé de près ou de loin dans la réalisation de ce projet.

* * * ✠ * * *



Remerciement

Tout d'abord, je tiens à remercier Dieu de m'avoir donné la volonté pour réaliser ce travail.

Je tiens à remercier dans un premier temps **Pr. Rachid EL KHAOULANI EL IDRISSE** et **Dr. HILALI Youssef** pour l'intérêt qu'ils m'ont accordé en tant qu'encadrant, je les remercie également pour leurs disponibilités, leurs conseils et la confiance qu'ils m'ont témoignés.

Je tiens à remercier fortement aussi les membres du jury **Pr. Mohamed ETTAOUIL** et **Pr. BOURIHANE Oussama** pour l'honneur qu'ils nous ont fait en acceptant de juger ce travail.

Enfin, il m'est particulièrement agréable de remercier ceux ou celles qui ont contribué de près ou de loin au bon déroulement de ce travail.

* * * ✠ * * *



Table des matières

Dédicace	2
Remerciement	3
Introduction	6
1 Théorie des poutres	7
1.1 Modèle et caractéristique de poutres	7
1.2 Loi de comportement	9
1.2.1 Loi de Hook généralisée	9
1.3 Les modèles de la théorie des poutres	10
1.3.1 Modèle d'Euler-Bernoulli	10
1.3.2 Modèle de Timoshenko	12
2 Méthode de balance harmonique	14
2.1 Exemple : L'oscillateur de Duffing	14
2.2 Méthode de Newton	17
2.2.1 Rappel sur les systèmes d'équations non linéaire	17
2.3 Application aux problème de continuation	19
2.3.1 Continuation numérique de solution	20
2.4 Généralisation aux systèmes mécaniques non linéaires	27
2.5 Les résultats obtenus pour quelques exemples	31
2.5.1 L'osillateur de Duffing	31
2.5.2 Une masse reliée par deux ressorts orthogonaux subissant de grandes déviations	31
Conclusion	33
Bibliographies	34

Table des figures

1.1	Quelques poutres classiques	7
1.2	Exemple de géométrie poutre	8
1.3	Les éléments de poutre	8
1.4	hypothèse de Navier-Bernoulli	9
1.5	Cinématique de poutre, sans cisaillement (Bernoulli) et avec cisaillement (Timoshenko)	10
2.1	L'oscillateur de Duffing	14
2.2	Une itération de la méthode de Newton.	18
2.3	Schéma de principe d'une branche de solutions suivie par continuation	20
2.4	Longueur de pas pour chaque itération	21
2.5	Prédiction tangente ($X^* = X_n + t$)	22
2.6	Correction par pseudo-longueur d'arc.	24
2.7	Illustration du principe général de continuation par prédiction-correction	24
2.8	Organigramme méthode de Newton-Continuation	26
2.9	Illustration de la fréquence alternée-temps (cas unidimensionnel)	30
2.10	Amplitude-courbes de fréquence de l'oscillateur de Duffing pour différents niveaux d'excitation P , $\delta = 0.05$, $\gamma = 0.1$	31
2.11	Une masse reliée par deux ressorts orthogonaux	32
2.12	Amplitude-courbes de fréquence de Une masse reliée par deux ressorts orthogonaux	32

Introduction générale

L'analyse des vibrations en régime transitoire, présente un intérêt particulier pour la transmission des informations acoustiques ou électriques dans les différents secteurs d'activité de l'aéronautique à l'automobile en passant par l'usinage, la maintenance ou la génie civil... .

Le sujet de cette étude porte sur la simulation par la méthode des balance harmonique des vibrations des poutres en rotation.

Ainsi, ce mémoire est divisé en deux chapitres :

Le premier chapitre :

Nous présentons la théorie des poutres qui grâce à des considérations géométriques de la structure poutre, permet une simplification de la cinématique (le champ de déplacement); il permet de réduire le milieu tridimensionnel en un milieu unidimensionnel équivalent. Nous exposons aussi les deux principaux modèles de la théorie des poutres (le modèle de Timoshenko et le modèle d'Euler-Bernoulli).

Le deuxième chapitre :

Nous présentons brièvement dans ce chapitre la méthode des balance harmonique puisque c'est l'une des méthodes les plus utilisées dans l'approximation numérique pour ce type de modélisation.

Théorie des poutres

La théorie des poutres est un modèle utilisé dans le domaine de la résistance des matériaux. On utilise deux modèles :

- **La théorie d'Euler-Bernoulli** : néglige l'influence du cisaillement.
- **La théorie de Timoshenko** : prend en compte l'effet de cisaillement.

1.1 Modèle et caractéristique de poutres

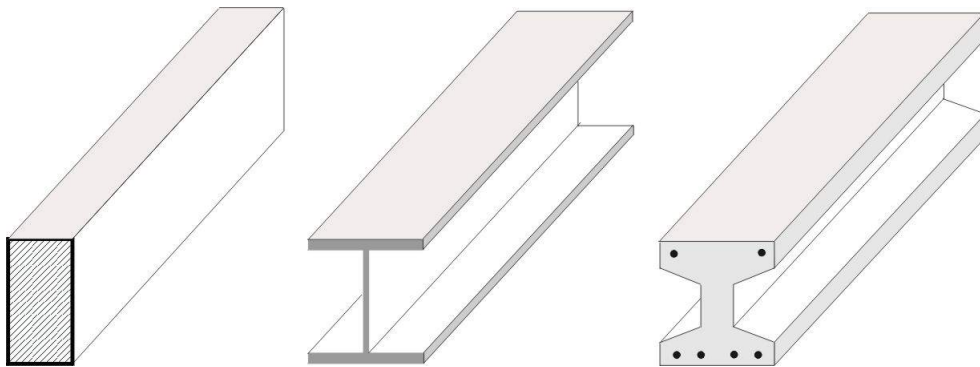


FIGURE 1.1 – Quelques poutres classiques

On appelle poutre un solide engendré par une surface fini (*section droite*) telles que :

- ▶ L'ensemble des centres de gravité (G) des sections droites est une courbe continue, différentiable appelée (*Courbe moyenne* (C)), son rayon de courbure est grand devant sa longueur.
- ▶ Les sections droites (S) sont perpendiculaires à la courbe moyenne, elle \ll varie de manière continue et lente \gg .
- ▶ La racine carrée de la surface des sections droites est petite devant la longueur de la courbe moyenne.
- ▶ Si (S) est petit devant L alors l'état de contrainte ainsi que le champ de déplacement du solide pourront être approximés en fonction de quantités exprimées uniquement le long de (C).
- ▶ Le matériau constituant la poutre est homogène et isotrope (*homogénéité* : on supposera que tous les éléments de matière aussi petits et sont identiques. (hypothèse non applicable pour le béton ou le bois). *isotropie* : on supposera qu'en tout point et dans toutes les directions, la matière a les mêmes propriétés mécaniques (hypothèse non applicable pour le bois ou les matériaux composites)).

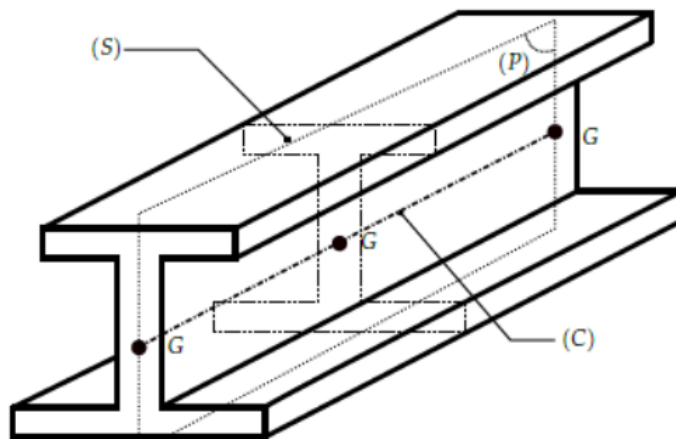


FIGURE 1.2 – Exemple de géométrie poutre

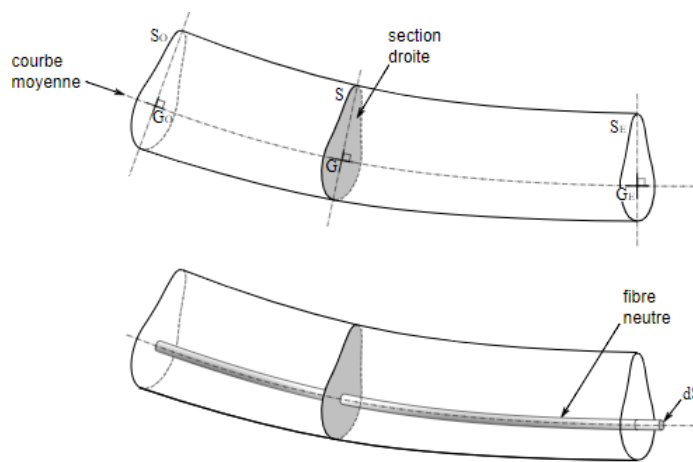


FIGURE 1.3 – Les éléments de poutre

La statique des poutres permet d'accéder, moyennant quelques hypothèses, aux efforts locaux de cohésion dans le solide. Les équations de l'élasticité tridimensionnelle sont utilisées pour déterminer la distribution de ces efforts le long de la ligne moyenne précédemment définie. Cette analyse tient compte d'un certain nombre d'hypothèses de RDM (Résistance Des Matériaux) adoptées pour les poutres :

- ▶ Hypothèse des petites déformations. On suppose que les efforts sont appliqués sur la configuration déformée.
- ▶ Hypothèse du comportement élastique linéaire.
- ▶ Principe de superposition des effets des forces. Les effets (contraintes, déformations et déplacements) en un point d'une poutre soumise à plusieurs forces extérieures sont la somme des contraintes, déformations, déplacements provoqués par ces sollicitations prises isolément.
- ▶ Les sections droites restent droites après déformation. C'est à dire qu'elle reste plane et perpendiculaire à la ligne moyenne (C) telle que le montre la figure ci-dessous. Cette dernière hypothèse est celle de *Navier-Bernouilli*.

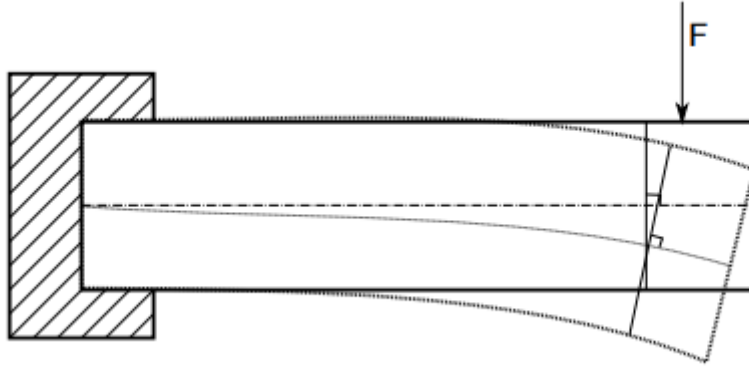


FIGURE 1.4 – hypothèse de Navier-Bernoulli

1.2 Loi de comportement

En mécanique, on nomme loi de comportement une relation mathématique établie entre le tenseur des contraintes et le tenseur des déformations. Nous limiterons ici l'étude aux petites déformations et aux matériaux supposés continus, homogènes et isotropes. On supposera également que les contraintes sont proportionnelles aux déformations. On parle alors de *domaine élastique* ou de *comportement linéaire* ce qui est généralement vrai pour les matériaux céramiques en petite déformation.

1.2.1 Loi de Hook généralisée

À partir des lois de Hook en traction et en cisaillement, on peut généraliser la loi de Hook dans l'espace pour obtenir des relations déformations/contraintes :

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E} [\sigma_{xx} - \nu (\sigma_{yy} + \sigma_{zz})] \text{ et } \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \quad (1.1)$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{1}{E} [\sigma_{yy} - \nu (\sigma_{xx} + \sigma_{zz})] \text{ et } \gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G} \quad (1.2)$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{1}{E} [\sigma_{zz} - \nu (\sigma_{xx} + \sigma_{yy})] \text{ et } \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G} \quad (1.3)$$

Ces dernières relations peuvent s'inverser pour obtenir des relations contraintes/déformations :

$$\sigma_{xx} = 2\mu\varepsilon_{xx} + \lambda(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}) \text{ et } \tau_{xy} = G\gamma_{xy} \quad (1.4)$$

$$\sigma_{yy} = 2\mu\varepsilon_{yy} + \lambda(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}) \text{ et } \tau_{xz} = G\gamma_{xz} \quad (1.5)$$

$$\sigma_{zz} = 2\mu\varepsilon_{zz} + \lambda(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}) \text{ et } \tau_{yz} = G\gamma_{yz} \quad (1.6)$$

Les coefficients μ et λ sont *les coefficients de Lamé* et s'expriment en MPa. On démontre que ces coefficients sont liés aux modules élastiques par les relations :

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} = G \text{ et } \lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (1.7)$$

Avec E module d'Young et G module de Coulomb.

⚠ La loi de Hook ci-dessus n'est valable que pour les matériaux supposés continus, homogènes et isotropes sous les hypothèses des petites déformations et dans le domaine élastique.

1.3 Les modèles de la théorie des poutres

Dans ce cas plan de la théorie des poutres, on peut donner aisément une interprétation physique simple des quantités telles que la rotation des sections. Les hypothèses de poutre ont conduit à poser une cinématique dans laquelle le déplacement de tout point M de la section s'exprime en fonction des déplacements plans du centre de gravité ($u(x)$ et $v(x)$) de la section et d'une rotation ($\phi(x)$) de cette section (Figure 1.5)

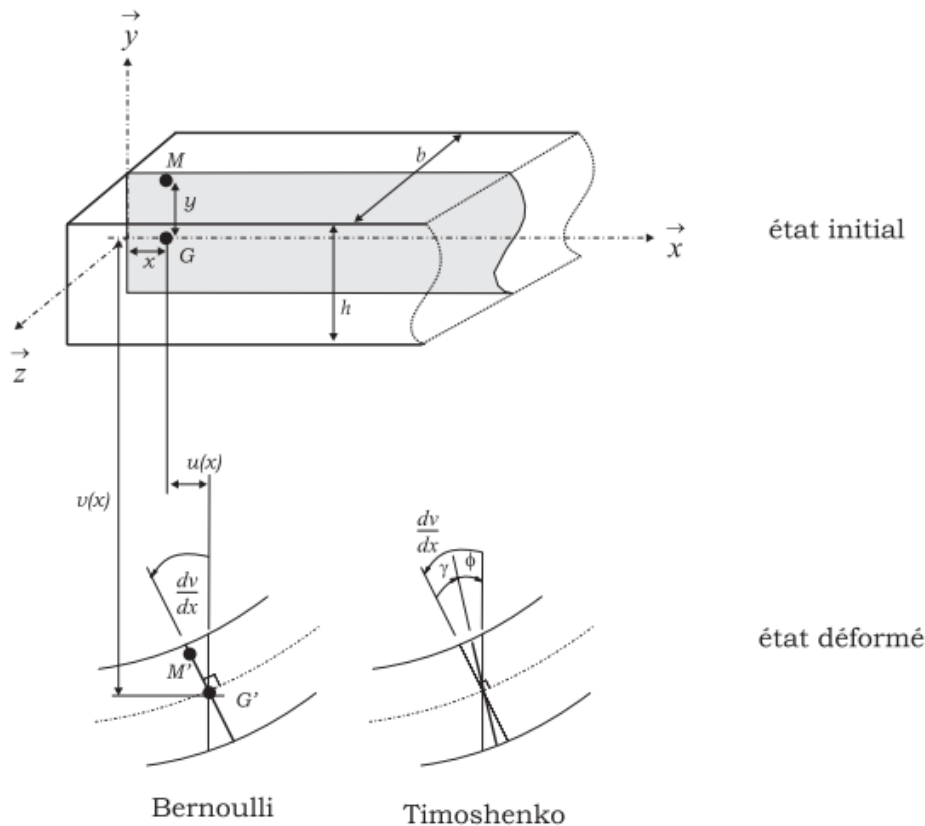


FIGURE 1.5 – Cinématique de poutre, sans cisaillement (Bernoulli) et avec cisaillement (Timoshenko)

1.3.1 Modèle d'Euler-Bernoulli

La théorie d'Euler-Bernoulli est probablement une des plus anciennes théories de poutres connues.

Elle est basée sur les trois hypothèses suivantes :

- Les sections droites restent perpendiculaires à la ligne moyenne après déformation.
- Les sections planes restent planes après déformation.
- Les sections sont indéformables dans leurs plans.

La poutre d'Euler-Bernoulli reste un modèle très simple pour l'étude des poutres. Elle est plus adaptée à l'étude d'éléments en flexion très élancés, où l'hypothèse des déformations de cisaillements négligeables sur la section est valide.

Champ de déplacement :

Dans la cinématique sans cisaillement ou de *Bernoulli*, les sections sont supposées rester normales à la ligne moyenne ($\phi(x) = \frac{dv(x)}{dx}$). Dans ce cas, la connaissance du déplacement de la ligne moyenne suffit, par des considérations géométriques simples, à définir complètement les déformations de membrane et de courbure.

Compte tenu des hypothèses précédentes, le champ de déplacements s'écrit :

$$\begin{cases} u_M(x, y) = u(x) - y \frac{dv(x)}{dx} \\ v_M(x, y) = v(x) \end{cases}$$

Équation de mouvement :

Le principe des travaux virtuels (**PTV**) $\forall \delta v \quad \delta W = \delta A$ pour une poutre chargée sur sa longueur et à ses extrémité.

Le travail virtuel des quantités d'accélération est : $\delta A = \int_0^l \rho S \ddot{v} \delta v dx$ si on néglige le moment dynamique de rotation des sections.

Le travail virtuel des efforts se décompose en travail virtuel des efforts de cohésion et celui des efforts extérieurs soit :

▷ Pour les effort de cohésion $\delta W_{int} = -\delta E_d$
avec

$$\begin{aligned} E_d &= \frac{1}{2} \int_D \sigma_{xx} \varepsilon_{xx} dV \\ &= \frac{1}{2} \int_D E (-y v_{,xx}) \cdot (-y v_{,xx}) dV & \varepsilon_{xx} = -y v_{,xx} ; \sigma_{xx} = E \varepsilon_{xx} \\ &= \frac{1}{2} \int_D E y^2 (v_{,xx})^2 dS dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^l EI (v_{,xx})^2 dx \end{aligned}$$

Ce qui implique :

$$\begin{aligned} \delta W_{int} &= -\delta E_d \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^l 2EI \delta v_{,xx} v_{,xx} dx \\ &= - \int_0^l EI \delta v_{,xx} v_{,xx} dx \end{aligned}$$

▷ Pour les effort extérieurs $\delta W_{ext} = \int_0^l f \delta v dx + F_0 \delta v_0 + F_l \delta v_l + M_0 \delta \theta_0 + M_l \delta \theta_l$

Le **PTV** conduit à l'équation intégrale suivante :

$$\forall \delta v \int_0^l \rho S \ddot{v} \delta v dx = - \int_0^l EI \delta v_{,xx} v_{,xx} dx + \int_0^l f \delta v dx + F_0 \delta v_0 + F_l \delta v_l + M_0 \delta \theta_0 + M_l \delta \theta_l$$

Les quatre derniers termes correspondent au travail virtuel des efforts appliqués aux extrémités

de la poutre. Dans le cas où les conditions aux limites portent sur les déplacements, les efforts de liaison sont des inconnues du problème. Pour déterminer l'équation du mouvement il faudra tenir compte des conditions aux limites en déplacements.

Restreindre le choix des déplacements virtuels à des champs virtuels admissibles, permet d'éliminer les efforts de liaison inconnus de la forme variationnelle.

Si $v = v_d(t)$ respectée alors $\delta v = 0$ et le $F\delta v$ est éliminé de la Formulation

Si $\theta = \theta_d(t)$ respectée alors $\delta\theta = 0$ et le $M\delta\theta$ est éliminé de la Formulation

Effectuons deux intégrations par partie du terme $\int_0^l EI\delta v_{,xx} v_{,xx} dx$

$$\int_0^l EI\delta v_{,xx} v_{,xx} dx = [\delta v_{,x} EI v_{,x^2}]_0^l - \int_0^l \delta v_{,x} EI v_{,x^3}$$

$[\delta v_{,x} EI v_{,x^2}]_0^l$ Fait apparaître les conditions aux limites en rotation et moment

$$\int_0^l EI\delta v_{,xx} v_{,xx} dx = [\delta v_{,x} EI v_{,x^2}]_0^l - [\delta v EI v_{,x^3}]_0^l + \int_0^l \delta v EI v_{,x^4}$$

$[\delta v EI v_{,x^3}]_0^l$ Fait apparaître les conditions aux limites en flèche et force

Reportons dans :

$$\forall \delta v \int_0^l \rho S \ddot{v} \delta v dx = - \int_0^l EI \delta v_{,xx} v_{,xx} dx + \int_0^l f \delta v dx + F_0 \delta v_0 + F_l \delta v_l + M_0 \delta \theta_0 + M_l \delta \theta_l$$

En regroupant les termes :

$$\forall \delta v \int_0^l \delta v (\rho S \ddot{v} + EI v_{,x^4} - f) dx = \begin{cases} \delta v_0 (F - EI v_{,x^3})_0 + \delta \theta_0 (M + EI v_{,x^2})_0 \\ \delta v_l (F + EI v_{,x^3})_l + \delta \theta_l (M - EI v_{,x^2})_l \end{cases}$$

Le choix $\delta v \neq 0$ sur $]0, l[$ nous donne l'équation locale : $\rho S \ddot{v} + EI v_{,x^4} = f$

1.3.2 Modèle de Timoshenko

La poutre de Timoshenko représente une évolution par rapport à la poutre de Bernoulli, en permettant d'obtenir une moyenne des déformations d'effort tranchant dans la section. Pour cela, on s'affranchit de l'hypothèse $H1$, en considérant les deux rotations de flexions comme des paramètres indépendants de la déformée. Les deux hypothèses $H2$ et $H3$ restent valides pour ce modèle.

La cinématique d'une poutre de Timoshenko s'écrit donc exactement de la même manière que pour celle d'Euler-Bernoulli, telle que $\frac{dv(x)}{dx} \neq \phi(x)$.

Champ de déplacement :

Dans la cinématique avec cisaillement ou de Timoshenko, la rotation totale de la section ($\phi(x)$) est indépendante de la rotation de la section due à la flexion ($\frac{dv(x)}{dx}$). Cet effet peut-être schématisé simplement en flexion pure : la flèche totale est la somme de la flèche de la poutre possédant uniquement une rigidité de flexion et de la flèche de la même poutre possédant cette fois-ci une rigidité de cisaillement uniquement (Figure 1.5). Dans cette théorie, le cisaillement ($\gamma(x)$) est donc la

différence de la rotation totale ($\phi(x)$) et de la rotation due à la flexion ($\frac{dv(x)}{dx}$). Ou vu autrement, pour une flèche donnée, le cisaillement provoque une rotation totale moindre par rapport à la flexion seule.

Compte tenu des hypothèses précédentes, le champ de déplacements s'écrit :

$$\begin{cases} u_M(x, y) = u(x) - y\phi(x) \\ v_M(x, y) = v(x) \\ \left(\gamma(x) = \frac{dv(x)}{dx} - \phi(x) \right) \end{cases}$$

Méthode de balance harmonique

La méthode de balance harmonique est une méthode d'approximation pour le calcul des solutions périodiques d'équations différentielles ordinaires (ODE). L'idée de la balance harmonique est de tronquer la série de Fourier et ainsi passer d'une fonction inconnue, continue en temps, a un nombre discret de variables inconnues.

2.1 Exemple : L'oscillateur de Duffing

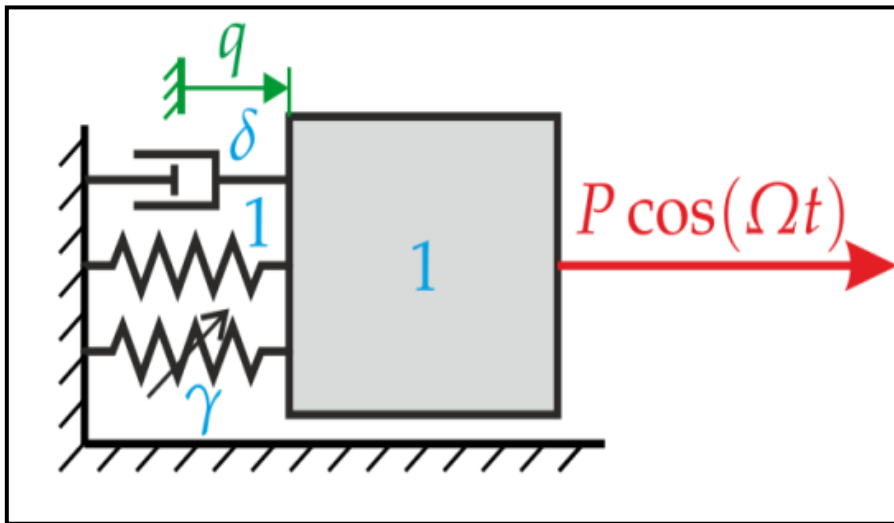


FIGURE 2.1 – L'oscillateur de Duffing

L'utilisation de la méthode de balance Harmonique peut également être illustrée sur l'exemple d'un oscillateur à un seul degré de liberté avec ressort cubique (oscillateur de Duffing), avec amortissement et forçage harmonique :

$$\ddot{q} + \delta \dot{q} + q + \gamma q^3 = P \cos(\Omega t) \quad (2.1)$$

Dans ce qui suit, nous allons approximer les solutions périodiques $q(t+T) = q(t)$ avec une période $T = \frac{2\pi}{\Omega}$ de l'équation (2.1) en utilisant *HB*.

Pour simplifier le propos et sous réserve de pouvoir choisir l'origine du temps t , on choisit la décomposition de Fourier suivante en considérant qu'**une seule harmonique** :

$$q_h(t) = Q_c \cos(\Omega t) + Q_s \sin(\Omega t) \quad (2.2)$$

Dérivées temporelles de $q(t)$ sont :

$$\begin{aligned} q_h &= +Q_c \cos(\Omega t) + Q_s \sin(\Omega t) \\ \dot{q}_h &= -Q_c \Omega \sin(\Omega t) + Q_s \Omega \cos(\Omega t) \\ \ddot{q}_h &= -Q_c \Omega^2 \cos(\Omega t) - Q_s \Omega^2 \sin(\Omega t) \end{aligned}$$

Développement de terme non linéaire en compte des formules trigonométriques :

$$\begin{aligned} q_h^3 &= (Q_c \cos(\Omega t) + Q_s \sin(\Omega t))^3 \\ &= Q_c^3 \cos^3(\Omega t) + 3Q_c^2 \cos^2(\Omega t) Q_s \sin(\Omega t) + 3Q_c \cos(\Omega t) Q_s^2 \sin^2(\Omega t) + Q_s^3 \sin^3(\Omega t) \\ &= \cos(\Omega t) \left(\frac{3}{4} Q_c^3 + \frac{3}{4} Q_c Q_s^2 \right) + \sin(\Omega t) \left(\frac{3}{4} Q_c^2 Q_s + \frac{3}{4} Q_s^3 \right) + \cos(3\Omega t) \left(\frac{1}{4} Q_c^3 - \frac{3}{4} Q_c Q_s^2 \right) \\ &\quad + \sin(3\Omega t) \left(\frac{3}{4} Q_c^2 Q_s - \frac{1}{4} Q_s^3 \right) \end{aligned}$$

En négligeant les termes des harmoniques supérieures de type $\cos(3\Omega t)$, $\sin(3\Omega t)$, on obtient :

$$q_h^3 = \cos(\Omega t) \left(\frac{3}{4} Q_c^3 + \frac{3}{4} Q_c Q_s^2 \right) + \sin(\Omega t) \left(\frac{3}{4} Q_c^2 Q_s + \frac{3}{4} Q_s^3 \right) \quad (2.3)$$

On remplace dans l'équation (2.1) et on a :

$$\left[(1 - \Omega^2) Q_c + \delta \Omega Q_s + \frac{3}{4} \gamma (Q_c^3 + Q_c Q_s^2) - P \right] \cos(\Omega t) + \left[(1 - \Omega^2) Q_s - \delta \Omega Q_c + \frac{3}{4} \gamma (Q_s^3 + Q_s Q_c^2) \right] \sin(\Omega t) = 0$$

Les termes de plus haute fréquence sont négligés en tenant en compte que $Q_c \gg Q_s$. L'équation résultante sera vérifiée en $\cos(\Omega t)$ et $\sin(\Omega t)$ et qui va être décomposée en deux termes :

$$\begin{aligned} R_c &:= (1 - \Omega^2) Q_c + \delta \Omega Q_s + \frac{3}{4} \gamma (Q_c^3 + Q_c Q_s^2) - P = 0 \\ R_s &:= (1 - \Omega^2) Q_s - \delta \Omega Q_c + \frac{3}{4} \gamma (Q_s^3 + Q_s Q_c^2) = 0 \end{aligned}$$

R_c , R_s avec deux inconnus.

Réponse en fréquence : Nous intéressons à la façon dont la solution évolue avec Ω .

Nous pouvons formuler ceci comme un problème de continuation, avec Ω comme paramètre libre :

$$\begin{aligned} \text{Résoudre } R(X) &= \begin{bmatrix} R_c \\ R_s \end{bmatrix} = 0 \\ \text{par rapport à } X &= \begin{bmatrix} Q_c \\ Q_s \\ \Omega \end{bmatrix} \\ \text{Avec } R &\in \mathbb{R}^2, X \in \mathbb{R}^3 \\ \text{Dans l'intervalle } &\Omega_{initial} \leq \Omega \leq \Omega_{final} \end{aligned}$$

Maintenant on va choisir la décomposition de Fourier suivante en considérant **trois harmonique** :

$$q_h(t) = A_1 \cos(\Omega t) + B_1 \sin(\Omega t) + A_2 \cos(2\Omega t) + B_2 \sin(2\Omega t) + A_3 \cos(3\Omega t) + B_3 \sin(3\Omega t) \quad (2.4)$$

Dérivées temporelles de $q(t)$ sont :

$$\begin{aligned} q_h &= A_1 \cos(\Omega t) + B_1 \sin(\Omega t) + A_2 \cos(2\Omega t) + B_2 \sin(2\Omega t) + A_3 \cos(3\Omega t) + B_3 \sin(3\Omega t) \\ \dot{q}_h &= -\Omega A_1 \sin(\Omega t) + \Omega B_1 \cos(\Omega t) - 2\Omega A_2 \sin(2\Omega t) + 2\Omega B_2 \cos(2\Omega t) - 3\Omega A_3 \sin(3\Omega t) + 3\Omega B_3 \cos(3\Omega t) \\ \ddot{q}_h &= -\Omega^2 A_1 \cos(\Omega t) - \Omega^2 B_1 \sin(\Omega t) - 4\Omega^2 A_2 \cos(2\Omega t) - 4\Omega^2 B_2 \sin(2\Omega t) - 9\Omega^2 A_3 \cos(3\Omega t) - 9\Omega^2 B_3 \sin(3\Omega t) \end{aligned}$$

On développe le terme non linéaire en prenant en compte des formules trigonométriques et en négligeant les termes des harmoniques supérieures de type $\cos(4\Omega t)$ jusqu'à $\cos(9\Omega t)$, $\sin(4\Omega t)$ jusqu'à $\sin(9\Omega t)$ qui vont apparaitre. L'idée de la balance harmonique est de se limiter aux termes de pulsation Ω , 2Ω et 3Ω . Donc on obtient :

$$\begin{aligned}
 q_h^3 = & \left[-\frac{3}{4}B_2^2A_3 + \frac{3}{4}A_1^2A_3 + \frac{3}{2}A_1A_3^2 + \frac{3}{2}A_1B_3^2 + \frac{3}{2}A_1B_2^2 + \frac{3}{2}A_1B_1^2 - \frac{3}{4}B_1^2A_3 + \frac{3}{4}A_2^2A_3 + \frac{3}{2}A_1A_2^2 \right. \\
 & + \frac{3}{2}A_2B_2B_3 + \frac{3}{4}A_1^3 + \frac{3}{2}A_1B_1B_3 \left. \right] \cos(\Omega t) + \left[\frac{3}{4}A_1^2B_2 + \frac{3}{4}A_1^2B_3 - \frac{3}{4}B_1^2B_3 + \frac{3}{2}B_1B_3^2 + \frac{3}{2}B_1B_2^2 \right. \\
 & + \frac{3}{2}B_1A_3^2 + \frac{3}{2}B_1A_2^2 - \frac{3}{4}A_2^2B_3 + \frac{3}{2}A_2B_2A_3 + \frac{3}{4}B_2^2B_3 - \frac{3}{2}A_1B_1A_3 + \frac{3}{4}B_1^3 \left. \right] \sin(\Omega t) + \left[\frac{3}{2}A_2B_3^2 + \frac{3}{2}A_2B_2^2 \right. \\
 & + \frac{3}{2}A_2B_1^2 + \frac{3}{2}A_2A_3^2 + \frac{3}{2}A_2A_1^2 + \frac{3}{2}A_1B_2B_3 + \frac{3}{2}B_1B_2A_3 - \frac{3}{2}B_1A_1B_3 + \frac{3}{2}A_1A_2A_3 + \frac{3}{4}A_1^3 \left. \right] \cos(2\Omega t) \\
 & + \left[\frac{3}{2}B_1A_2A_3 + \frac{3}{2}A_1A_2B_3 - \frac{3}{2}A_1B_2A_3 + \frac{3}{2}B_1B_2B_3 + \frac{3}{2}B_2A_3^2 + \frac{3}{4}B_2B_3^2 + \frac{3}{4}B_2A_2^2 + \frac{3}{2}A_1^2B_2 + \frac{3}{2}B_1^2B_2 \right. \\
 & + \frac{3}{4}B_2^3 \left. \right] \sin(2\Omega t) + \left[\frac{3}{4}A_3B_3^2 + \frac{3}{2}A_3B_2^2 + \frac{3}{2}A_3A_2^2 + \frac{3}{4}A_1A_2^2 + \frac{3}{2}A_1^2A_3 - \frac{3}{4}A_1B_2^2 - \frac{3}{4}A_1B_1^2 + \frac{3}{2}B_2^2A_3 \right. \\
 & + \frac{3}{2}B_1A_2B_2 + \frac{3}{4}A_3^3 + \frac{1}{4}A_1^3 \left. \right] \cos(3\Omega t) + \left[-\frac{3}{4}B_1A_2^2 + \frac{3}{2}B_3A_2^2 + \frac{3}{2}B_3A_3^2 + \frac{3}{2}B_3B_2^2 + \frac{3}{4}B_1A_1^2 + \frac{3}{2}B_3A_1^2 \right. \\
 & + \frac{3}{2}B_3B_1^2 + \frac{3}{4}B_1B_2^2 + \frac{3}{2}A_1A_2B_2 - \frac{3}{4}B_3^3 - \frac{1}{4}B_1^3 \left. \right] \sin(3\Omega t)
 \end{aligned}$$

On remplace dans l'équation (2.1) et on a :

$$\begin{aligned}
 & \left[(1 - \Omega^2)A_1 + \delta\Omega B_1 + \gamma \left(-\frac{3}{4}B_2^2A_3 + \frac{3}{4}A_1^2A_3 + \frac{3}{2}A_1A_3^2 + \frac{3}{2}A_1B_3^2 + \frac{3}{2}A_1B_2^2 + \frac{3}{2}A_1B_1^2 \right. \right. \\
 & - \left. \frac{3}{4}B_1^2A_3 + \frac{3}{4}A_2^2A_3 + \frac{3}{2}A_1A_2^2 + \frac{3}{2}A_2B_2B_3 + \frac{3}{4}A_1^3 + \frac{3}{2}A_1B_1B_3 \right) - P \left. \right] \cos(\Omega t) \\
 & + \left[(1 - \Omega^2)B_1 - \delta\Omega A_1 + \gamma \left(\frac{3}{4}A_1^2B_2 + \frac{3}{4}A_1^2B_3 - \frac{3}{4}B_1^2B_3 + \frac{3}{2}B_1B_3^2 + \frac{3}{2}B_1B_2^2 \right. \right. \\
 & + \left. \frac{3}{2}B_1A_3^2 + \frac{3}{2}B_1A_2^2 - \frac{3}{4}A_2^2B_3 + \frac{3}{2}A_2B_2A_3 + \frac{3}{4}B_2^2B_3 - \frac{3}{2}A_1B_1A_3 + \frac{3}{4}B_1^3 \right) \left. \right] \sin(\Omega t) \\
 & + \left[(1 - 4\Omega^2)A_2 + 2\delta\Omega B_2 + \gamma \left(\frac{3}{2}A_2B_3^2 + \frac{3}{2}A_2B_2^2 + \frac{3}{2}A_2B_1^2 + \frac{3}{2}A_2A_3^2 + \frac{3}{2}A_2A_1^2 + \frac{3}{2}A_1B_2B_3 \right. \right. \\
 & + \left. \frac{3}{2}B_1B_2A_3 - \frac{3}{2}B_1A_1B_3 + \frac{3}{2}A_1A_2A_3 + \frac{3}{4}A_1^3 \right) \left. \right] \cos(2\Omega t) + \left[(1 - 4\Omega^2)B_2 - 2\delta\Omega A_2 \right. \\
 & + \left. \gamma \left(\frac{3}{2}B_1A_2A_3 + \frac{3}{2}A_1A_2B_3 - \frac{3}{2}A_1B_2A_3 + \frac{3}{2}B_1B_2B_3 + \frac{3}{2}B_2A_3^2 + \frac{3}{4}B_2B_3^2 + \frac{3}{4}B_2A_2^2 \right. \right. \\
 & + \left. \frac{3}{2}A_1^2B_2 + \frac{3}{2}B_1^2B_2 + \frac{3}{4}B_2^3 \right) \left. \right] \sin(2\Omega t) + \left[(1 - 9\Omega^2)A_3 + 3\delta\Omega B_3 + \gamma \left(\frac{3}{4}A_3B_3^2 + \frac{3}{2}A_3B_2^2 \right. \right. \\
 & + \left. \frac{3}{2}A_3A_2^2 + \frac{3}{4}A_1A_2^2 + \frac{3}{2}A_1^2A_3 - \frac{3}{4}A_1B_2^2 - \frac{3}{4}A_1B_1^2 + \frac{3}{2}B_2^2A_3 + \frac{3}{2}B_1A_2B_2 + \frac{3}{4}A_3^3 \right. \\
 & + \left. \frac{1}{4}A_1^3 \right) \left. \right] \cos(3\Omega t) + \left[(1 - 9\Omega^2)B_3 - 3\delta\Omega A_3 + \gamma \left(-\frac{3}{4}B_1A_2^2 + \frac{3}{2}B_3A_2^2 + \frac{3}{2}B_3A_3^2 \right. \right. \\
 & + \left. \frac{3}{2}B_3B_2^2 + \frac{3}{4}B_1A_1^2 + \frac{3}{2}B_3A_1^2 + \frac{3}{2}B_3B_1^2 + \frac{3}{4}B_1B_2^2 + \frac{3}{2}A_1A_2B_2 - \frac{3}{4}B_3^3 - \frac{1}{4}B_1^3 \right) \left. \right] \sin(3\Omega t) = 0
 \end{aligned}$$

Ceci conduit aux équations suivantes :

$$\begin{aligned}
 Eq_1 : & (1 - \Omega^2)A_1 + \delta\Omega B_1 + \gamma\left(-\frac{3}{4}B_2^2 A_3 + \frac{3}{4}A_1^2 A_3 + \frac{3}{2}A_1 A_3^2 + \frac{3}{2}A_1 B_3^2 + \frac{3}{2}A_1 B_2^2 + \frac{3}{2}A_1 B_1^2 \right. \\
 & \left. - \frac{3}{4}B_1^2 A_3 + \frac{3}{4}A_2^2 A_3 + \frac{3}{2}A_1 A_2^2 + \frac{3}{2}A_2 B_2 B_3 + \frac{3}{4}A_1^3 + \frac{3}{2}A_1 B_1 B_3\right) - P = 0 \\
 Eq_2 : & (1 - \Omega^2)B_1 - \delta\Omega A_1 + \gamma\left(\frac{3}{4}A_1^2 B_2 + \frac{3}{4}A_1^2 B_3 - \frac{3}{4}B_1^2 B_3 + \frac{3}{2}B_1 B_3^2 + \frac{3}{2}B_1 B_2^2 + \frac{3}{2}B_1 A_3^2 \right. \\
 & \left. + \frac{3}{2}B_1 A_2^2 - \frac{3}{4}A_2^2 B_3 + \frac{3}{2}A_2 B_2 A_3 + \frac{3}{4}B_2^2 B_3 - \frac{3}{2}A_1 B_1 A_3 + \frac{3}{4}B_1^3\right) = 0 \\
 Eq_3 : & (1 - 4\Omega^2)A_2 + 2\delta\Omega B_2 + \gamma\left(\frac{3}{2}A_2 B_3^2 + \frac{3}{2}A_2 B_2^2 + \frac{3}{2}A_2 B_1^2 + \frac{3}{2}A_2 A_3^2 + \frac{3}{2}A_2 A_1^2 \right. \\
 & \left. + \frac{3}{2}A_1 B_2 B_3 + \frac{3}{2}B_1 B_2 A_3 - \frac{3}{2}B_1 A_1 B_3 + \frac{3}{2}A_1 A_2 A_3 + \frac{3}{4}A_1^3\right) = 0 \\
 Eq_4 : & (1 - 4\Omega^2)B_2 - 2\delta\Omega A_2 + \gamma\left(\frac{3}{2}B_1 A_2 A_3 + \frac{3}{2}A_1 A_2 B_3 - \frac{3}{2}A_1 B_2 A_3 + \frac{3}{2}B_1 B_2 B_3 + \frac{3}{2}B_2 A_3^2 \right. \\
 & \left. + \frac{3}{4}B_2 B_3^2 + \frac{3}{4}B_2 A_2^2 + \frac{3}{2}A_1^2 B_2 + \frac{3}{2}B_1^2 B_2 + \frac{3}{4}B_2^3\right) = 0 \\
 Eq_5 : & (1 - 9\Omega^2)A_3 + 3\delta\Omega B_3 + \gamma\left(\frac{3}{4}A_3 B_3^2 + \frac{3}{2}A_3 B_2^2 + \frac{3}{2}A_3 A_2^2 + \frac{3}{4}A_1 A_2^2 + \frac{3}{2}A_1^2 A_3 - \frac{3}{4}A_1 B_2^2 \right. \\
 & \left. - \frac{3}{4}A_1 B_1^2 + \frac{3}{2}B_2^2 A_3 + \frac{3}{2}B_1 A_2 B_2 + \frac{3}{4}A_3^3 + \frac{1}{4}A_1^3\right) = 0 \\
 Eq_6 : & (1 - 9\Omega^2)B_3 - 3\delta\Omega A_3 + \gamma\left(-\frac{3}{4}B_1 A_2^2 + \frac{3}{2}B_3 A_2^2 + \frac{3}{2}B_3 A_3^2 + \frac{3}{2}B_3 B_2^2 + \frac{3}{4}B_1 A_1^2 + \frac{3}{2}B_3 A_1^2 \right. \\
 & \left. + \frac{3}{2}B_3 B_1^2 + \frac{3}{4}B_1 B_2^2 + \frac{3}{2}A_1 A_2 B_2 - \frac{3}{4}B_3^3 - \frac{1}{4}B_1^3\right) = 0
 \end{aligned}$$

2.2 Méthode de Newton

2.2.1 Rappel sur les systèmes d'équations non linéaire

On rappelle le principe de la méthode de Newton pour trouver le zéro d'une fonction f à valeurs réelles d'une variable réelle x .

Soit à résoudre :

$$f(x) = 0 \quad (2.5)$$

L'idée de la méthode de Newton est de réduire le problème non linéaire 2.5 que nous ne savons pas a priori comment résoudre exactement, à une série des problèmes linéaires que nous savons résoudre. Une itération de la méthode de Newton est basée sur les étapes suivantes :

- (1) Une estimation de départ de la solution cherchée x_0 ;
- (2) Une linéarisation g de la fonction f autour de l'état de départ x_0 :
 g est la droite tangente à la fonction f au point d'abscisse x_0 :

$$g(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \quad (2.6)$$

(3) La résolution du problème tangent :

$$g(x_1) = 0 \quad (2.7)$$

qui permet d'obtenir un nouvel état x_1 , que l'on espère plus proche de la solution de 2.5 que x_0 .

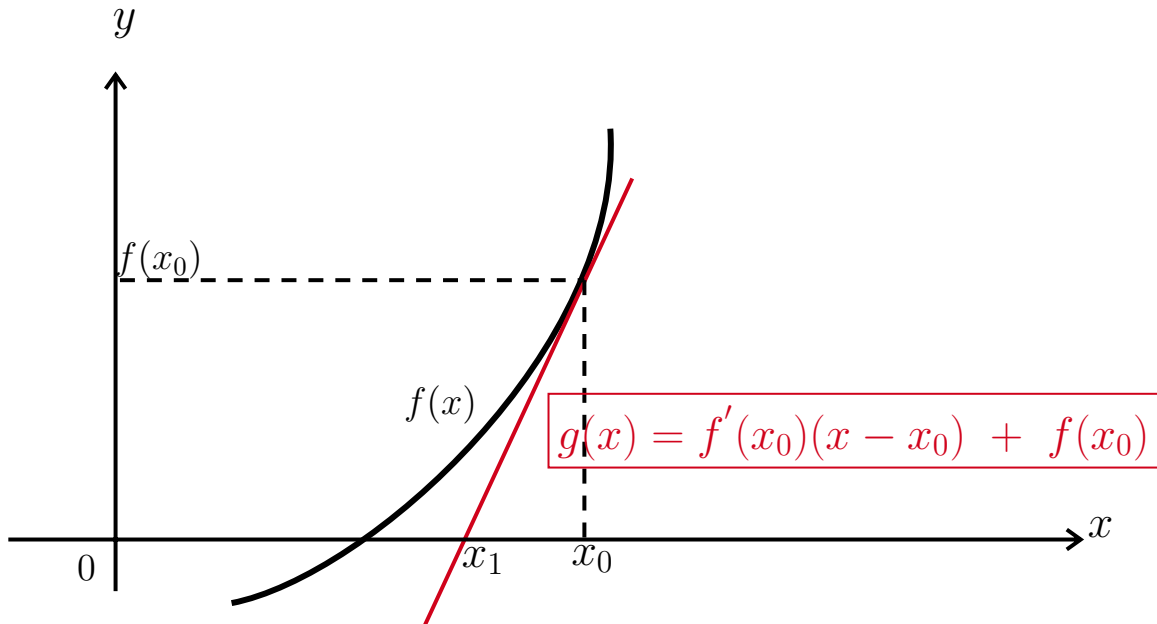


FIGURE 2.2 – Une itération de la méthode de Newton.

Une itération de la méthode de Newton est montrée sur la figure 2.11. On itère ensuite la méthode de Newton n fois jusqu'à ce que $f(x_n)$ soit suffisamment proche de 0. La résolution du problème tangent 2.7 peut s'écrire sous deux formes algébriquement équivalentes :

► Une forme incrémentable où l'inconnu Δx est l'incrément de la variable x :

$$(a) \Delta x = \frac{1}{f'(x_0)} \times -f(x_0).$$

$$(a) x_1 = x_0 + \Delta x$$

► Une forme incrémentable où l'inconnu est directement l'état cherché x_1 :

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

Considérons un système d'équations s'écrivant $F(X) = 0$ ou encore, de façon développée

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{cases} \quad (2.8)$$

La généralisation naturelle de la formule de Newton unidimensionnelle

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \quad (2.9)$$

fait intervenir la matrice Jacobienne de F :

$$\Delta F(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Toutes les dérivées partielles étant évaluées au point x_k .

$\Delta F(x)$ est appelée aussi la matrice Jacobienne de F au point x .

La méthode de Newton-Raphson s'écrit donc formellement

$$x_{k+1} = x_k - [\Delta F(x)]^{-1} F(x_k) \quad (2.10)$$

Le second membre de 2.10 est parfaitement défini car on effectue le produit d'une matrice carrée de taille n par un vecteur de \mathbb{R}^n . Dans la pratique, on ne calcule pas explicitement l'inverse de la matrice Jacobienne, ce qui s'avèrerait trop coûteux, et on préfère écrire l'algorithme sous la forme suivante :

Algorithm 1 Algorithme de Newton-Raphson

Entrée x_0 donné dans \mathbb{R}^n

Pour k de 0, 1, à test d'arrêt **faire**

$\Delta F(x_k)\delta_k = -F(x_k)$

$x_{k+1} = x_k + \delta_k$

Fin

2.3 Application aux problème de continuation

Considérons par exemple le problème de continuation suivant :

$$\begin{aligned} &\text{Résoudre } R(X) = \begin{bmatrix} R_c \\ R_s \end{bmatrix} = 0 \\ &\text{par rapport à } X = \begin{bmatrix} Q_c \\ Q_s \\ \Omega \end{bmatrix} \\ &\text{Avec } R \in \mathbb{R}^2, X \in \mathbb{R}^3 \\ &\text{Dans l'intervalle } \Omega_{initial} \leq \Omega \leq \Omega_{final} \end{aligned}$$

2.3.1 Continuation numérique de solution

Les méthodes de continuation de solution visent à calculer des familles de solutions d'un système pour lequel au moins un paramètre évolue. Nous nous placerons dans le cadre de système d'équations pour le quelle le paramètre que l'on veut suivre est noté Ω et nous supposons que la recherche de solutions de ce système prend la forme du système suivant :

$$R(Q, \Omega) = 0 \quad (2.11)$$

Où $Q \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur inconnue et $\Omega \in \mathbb{R}$ un paramètre.

Les système non linéaires ont la particularité de souvent présenter plusieurs réponses possibles pour une valeur donnée Ω_0 du paramètre, on s'intéresse à son devenir lorsque le paramètre Ω varie (Considérant Ω comme inconnue).

La continuation consiste à calculer la ou les branches de solutions d'un système, à partir de la seule donnée d'un point solution de départ et des équations de système.

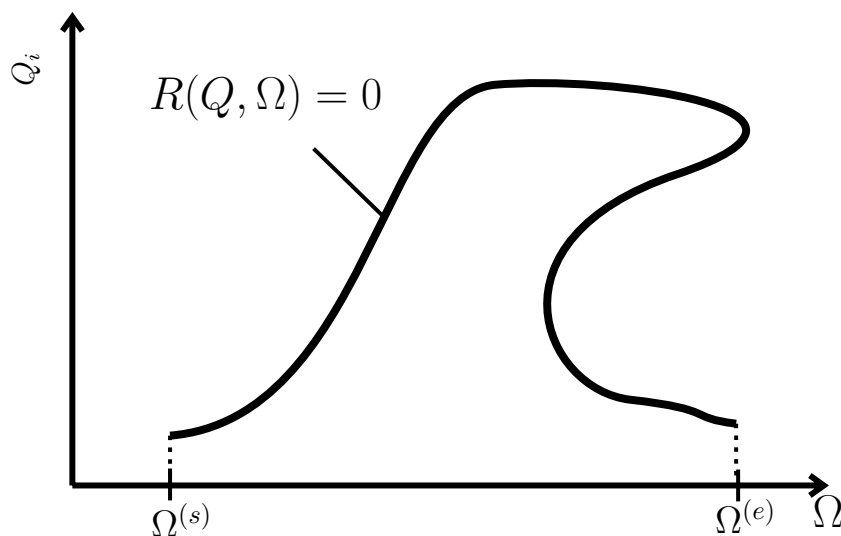


FIGURE 2.3 – Schéma de principe d'une branche de solutions suivie par continuation

Étape de prédiction

Pour ce faire, on postule une forme pour le prochain point solution (Q_*, Ω_*) , nommée point prédit. Ce point n'est généralement pas solution du système, mais s'en veut le plus proche possible.

À partir de la première point convergé de la courbe de réponse (Q^0, Ω^0) obtenu en résolvant le système 2.11, l'étape de prédiction consiste à essayer de déterminer la solution pour la prochaine valeur de Ω .

La prédiction se fait dans une direction tangente à la courbe solution. La direction du vecteur tangent $t = (dQ^1, d\Omega^1)$ est obtenu en exprimant la différentielle totale de R en (Q^0, Ω^0) . On a :

$$R(Q^0, \Omega^0) = 0 \quad (2.12)$$

D'où

$$dR(Q^0, \Omega^0) = \left. \frac{\partial R}{\partial Q} \right|_{Q^0, \Omega^0} dQ + \left. \frac{\partial R}{\partial \Omega} \right|_{Q^0, \Omega^0} d\Omega = 0 \quad (2.13)$$

Qu'on récrit sous la forme :

$$R_Q^0 \cdot dQ^1 + R_\Omega^0 \cdot d\Omega^1 = 0 \quad (2.14)$$

Avec R_Q^0 et R_Ω^0 les deux matrice jacobiennes du système calculées en (Q^0, Ω^0) .

Il reste à fixer la norme de vecteur tangent t égale à Δs qui représente la longueur de pas.

$$\|t\|^2 = \|dQ^1\|^2 + (d\Omega^1)^2 = (\Delta s)^2 \quad (2.15)$$

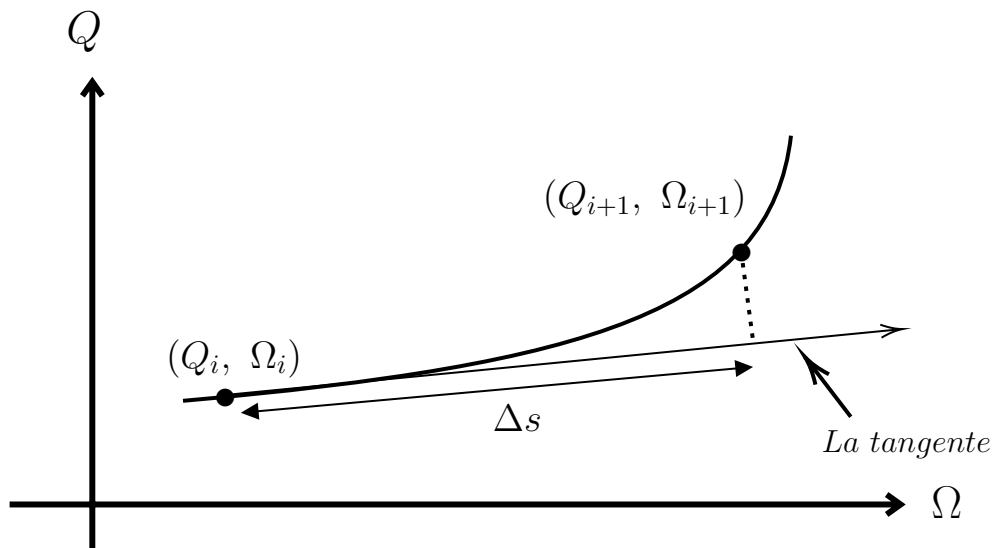


FIGURE 2.4 – Longueur de pas pour chaque itération

Ainsi, la procédure pour déterminer le vecteur tangent t est la suivante :

► Résoudre le système suivant :

$$R_Q^0 \cdot \hat{Q}^1 = -R_\Omega^0 \text{ ou } \hat{Q}^1 = \frac{dQ^1}{d\Omega^1} \quad (2.16)$$

► En déduire $d\Omega^1$ par l'équation suivante :

$$d\Omega^1 = \pm \frac{\Delta s}{\sqrt{1 + \left\| (R_Q^0)^{-1} \cdot R_\Omega^0 \right\|^2}} \quad (2.17)$$

► Le signe de $d\Omega^1$ est choisi de sorte que deux vecteurs tangents successifs aient un produit scalaire positif (pas de retour sur une solution déjà décrite).

Une fois le vecteur tangent normé t calculé, la prédiction est obtenue à partir de la dernière solution convergée obtenue :

$$\begin{Bmatrix} Q^1 \\ \Omega^1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q^0 \\ \Omega^0 \end{Bmatrix} + t = \begin{Bmatrix} Q^0 \\ \Omega^0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} dQ^1 \\ d\Omega^1 \end{Bmatrix} \quad (2.18)$$

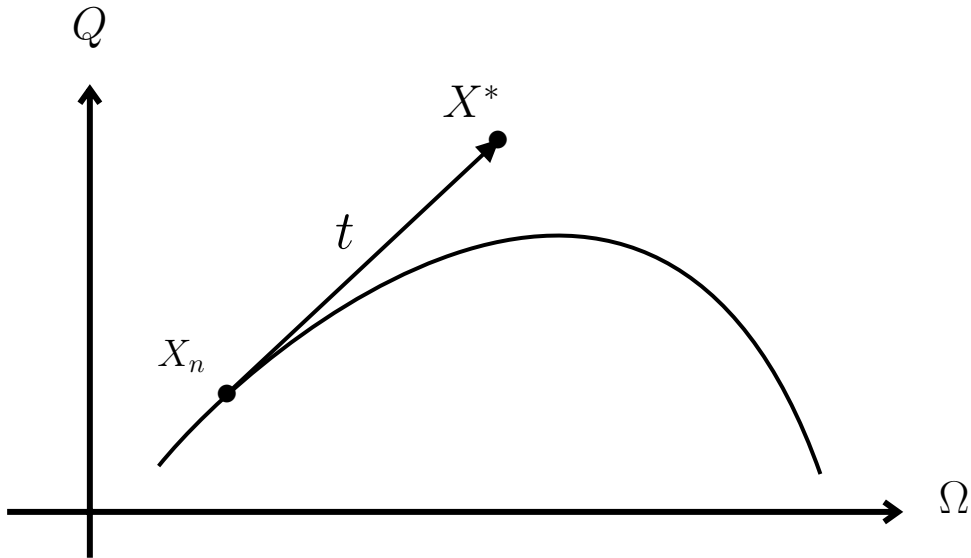


FIGURE 2.5 – Prédiction tangente ($X^* = X_n + t$)

Étape de correction

Une fois le point prédit X^* obtenu, une étape de correction est nécessaire pour s'assurer de l'obtention d'un point solution de l'équation. L'équation de correction consiste généralement en une relation de type géométrique liant X^* , X_n et X_{n+1} . La méthode naturelle consiste à injecter en entrée d'un schéma de Newton-Raphson le point prédit et de fixer $\Omega_{n+1} = \Omega$.

La solution prédite ne vérifie généralement pas l'équation 2.11. On calcule donc des corrections $(\delta Q, \delta \Omega)$ de façon itérative de sorte à annuler le résidu, i.e.

$$R(Q^1 + \delta Q, \Omega^1 + \delta \Omega) = 0 \quad (2.19)$$

On a par développement de Taylor :

$$R(Q^1 + \delta Q, \Omega^1 + \delta \Omega) \simeq R(Q^1, \Omega^1) + R_Q^1 \cdot \delta Q + R_\Omega^1 \cdot \delta \Omega = 0 \quad (2.20)$$

Ceci donne :

$$R_Q^1 \cdot \delta Q + R_\Omega^1 \cdot \delta \Omega = -R(Q^1, \Omega^1) = -R^1 \quad (2.21)$$

On imposé également que les corrections se fassent dans une direction orthogonale au vecteur tangent t .

$$\langle dQ^1, \delta Q \rangle + d\Omega^1 \delta \Omega = 0 \quad (2.22)$$

Alors le système à résoudre devient à l'itération k :

$$J^{ac^k} \begin{Bmatrix} \delta Q \\ \delta \Omega \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} R_Q^k & R_\Omega^k \\ dQ^{1^T} & d\Omega^1 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \delta Q \\ \delta \Omega \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -R^k \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.23)$$

Où J^{ac^k} est la matrice jacobienne augmentée par la continuation.

C'est à dire :

$$\begin{cases} R_Q^k \cdot \delta Q + R_\Omega^k \cdot \delta \Omega = -R(Q^k, \Omega^k) = -R^k \\ \langle dQ^1, \delta Q \rangle + d\Omega^1 \delta \Omega = 0 \end{cases} \quad (2.24)$$

Équivalent à :

$$\begin{cases} R_Q^k \cdot \delta Q + R_\Omega^k \cdot \delta \Omega = -R^k \\ \delta \Omega = -\frac{1}{d\Omega^1} \langle dQ^1, \delta Q \rangle \end{cases} \quad (2.25)$$

Équivalent à :

$$\begin{cases} R_Q^k \cdot \delta Q + R_\Omega^k \cdot \left(-\frac{1}{d\Omega^1} dQ^{1^T} \cdot \delta Q\right) = -R^k \\ \delta \Omega = -\frac{1}{d\Omega^1} \langle dQ^1, \delta Q \rangle \end{cases} \quad (2.26)$$

Équivalent à :

$$\begin{cases} \left[R_Q^k - \frac{1}{d\Omega^1} R_\Omega^k \cdot dQ^{1^T} \right] \delta Q = -R^k \\ \delta \Omega = -\frac{1}{d\Omega^1} \langle dQ^1, \delta Q \rangle \end{cases} \quad (2.27)$$

La continuation par pseudo-longueur d'arc ajoute donc une équation et une inconnue au système à résoudre.

A chaque itération de la procédure de Newton, une correction de Q et Ω est apportée. La solution à l'itération $k + 1$ est donc renouvelée par :

$$\begin{cases} Q^{k+1} = Q^k + \delta Q \\ \Omega^{k+1} = \Omega^k + \delta \Omega \end{cases} \quad (2.28)$$

Le calcul itératif a convergé lorsque la précision relative requise η est atteinte. Le critère de convergence est soit en correction $\frac{\delta Q}{Q}$, soit basé sur la norme du résidu.

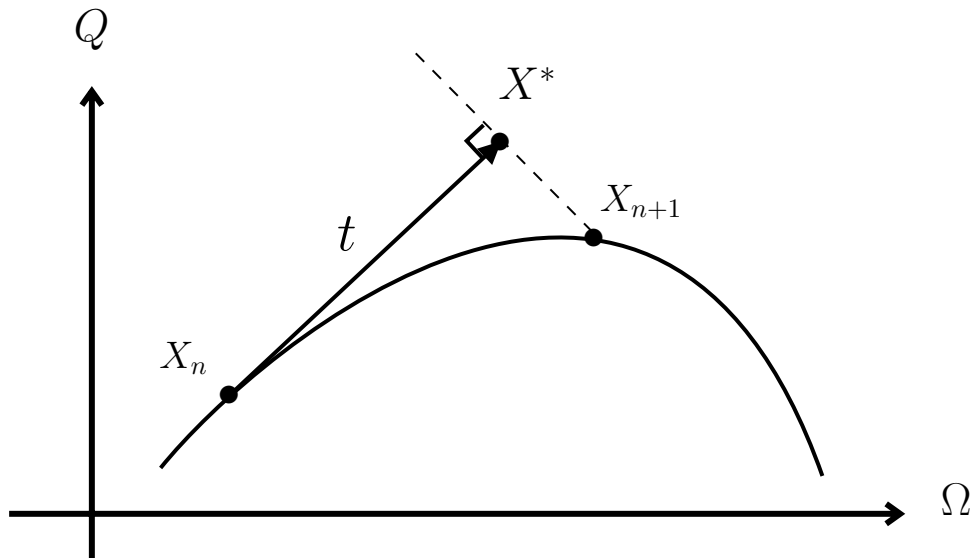


FIGURE 2.6 – Correction par pseudo-longueur d'arc.

Schéma de continuation et gestion du pas

Le processus global de continuation est finalement représenté en Fig.2.7

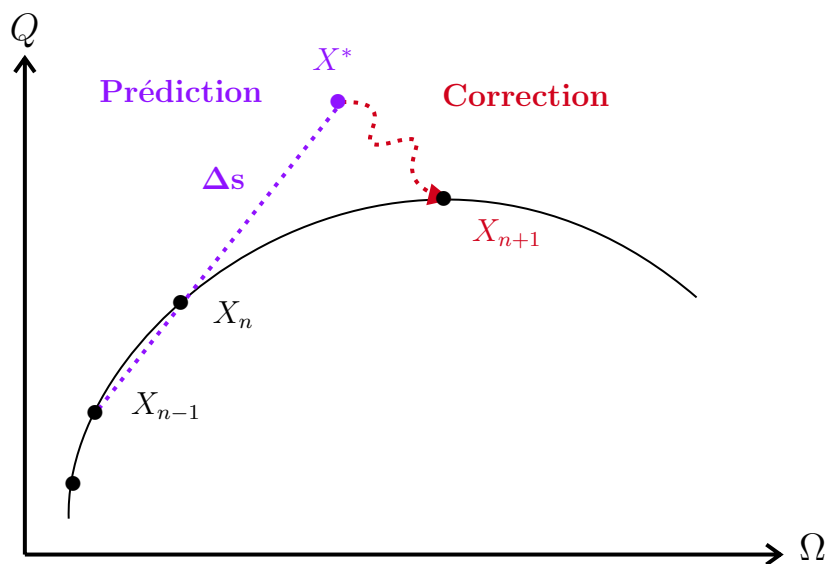


FIGURE 2.7 – Illustration du principe général de continuation par prédiction-corrrection

Le choix d'un couple prédicteur-correcteur peut être plus ou moins pertinent suivant le système étudié. De manière générale, on cherchera un compromis entre qualité d'un prédicteur et qualité d'un correcteur : une bonne prédiction peut sembler coûteuse mais le solveur utilisé pour la correction convergera potentiellement plus vite. Au contraire, une prédiction simple comme une prédiction sécante

peut paraître grossière mais demeure pertinente pour traiter de grandes longueurs d'arc qui se révèlent être peu incurvées, sans point de retournement.

Dans tous les cas, ce choix s'allie à des stratégies de gestion du pas Δs que l'on utilise pour calculer le point solution suivant.

Lors du tracé d'une branche de solutions, on peut intuitivement distinguer des segments pour lesquels le comportement dynamique varie peu et la correction se fait très rapidement. Par contre, on trouve des zones à problèmes (e.g. résonance, proximité d'une bifurcation, etc.) qui vont dans les faits nécessiter plus d'itérations de Newton. Ces zones se retrouvent généralement être les zones d'intérêt de la dynamique non linéaire du système. L'idée est de fixer un critère amenant à faire varier Δs en fonction de ces considérations.

Soient r_1 et r_2 deux réels positifs avec $r_1, r_2 > 1$, et N_{ite}^{min} , N_{ite}^{max} deux entiers correspondant à des nombres d'itérations de correction. On propose la stratégie de continuation classique suivante, selon le nombre N_{ite} d'itérations de correction :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Si } N_{ite} \geq N_{ite}^{max} : \text{Correction abandonnée. Nouvelle prédiction avec } \Delta s = \frac{\Delta s}{r_1} \\ \text{Si } N_{ite} \leq N_{ite}^{min} : \text{Point convergé et point suivant avec } \Delta s = \Delta s \times r_2 \\ \text{Sinon} : \text{Point convergé et point suivant prédit avec le même } \Delta s \end{array} \right.$$

Ainsi les zones numériquement problématiques sont décrites avec un plus grand nombre de points que les zones peu variables. Les parties les moins intéressantes étant décrites avec moins de points, du temps de calcul est économisé. La Fig. 2.10, tracée par continuation, montre bien la nécessité d'intégrer plus de points pour tracer correctement le point de retournement du pic de résonance de l'oscillateur de Duffing.

L'algorithme de Newton couplé avec la continuation par longueur d'arc est décrit dans l'organigramme de la figure 2.8.

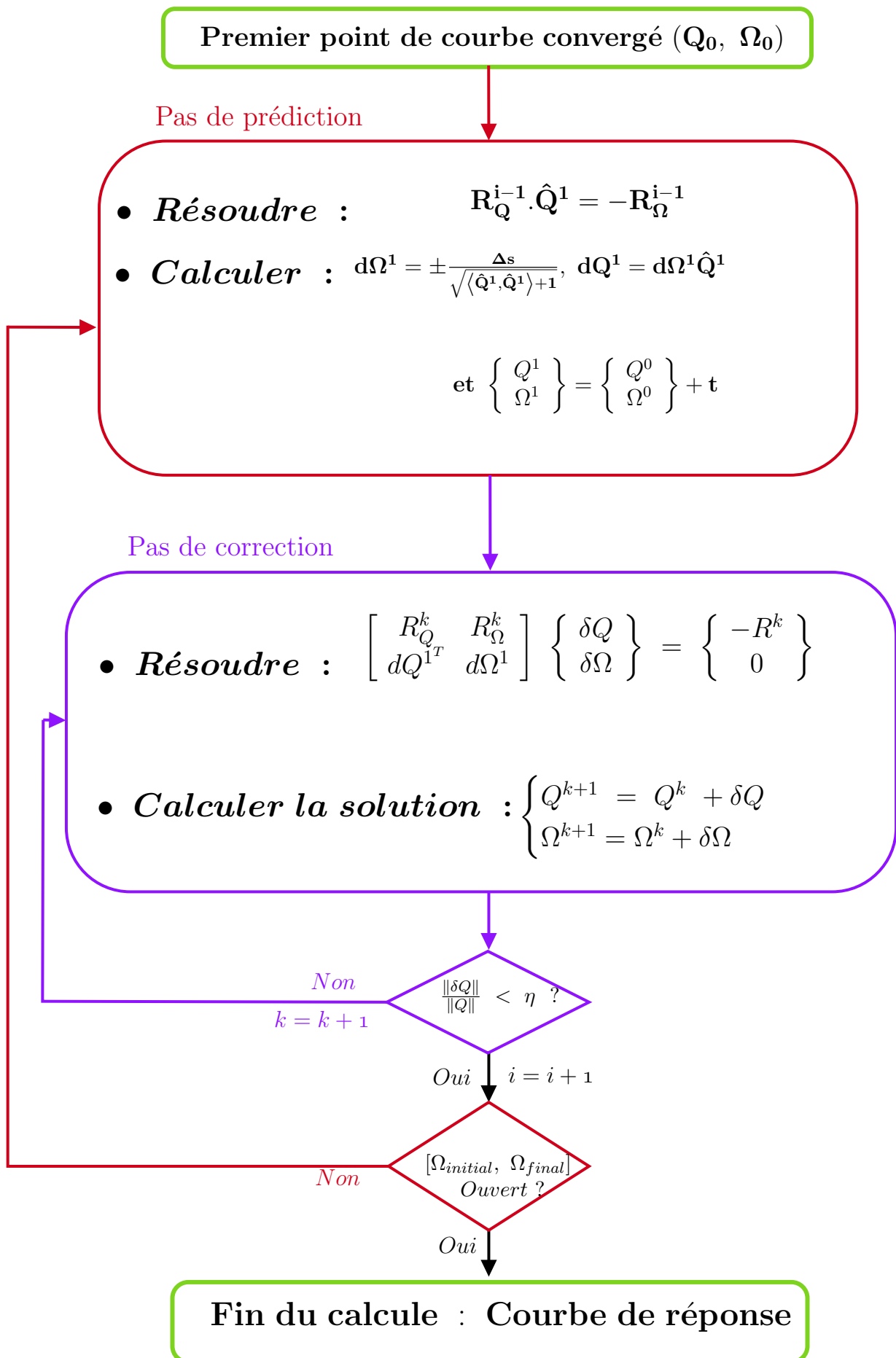


FIGURE 2.8 – Organigramme méthode de Newton-Continuation

2.4 Généralisation aux systèmes mécaniques non linéaires

Équations du mouvement d'un système mécanique invariant dans le temps avec un forçage périodique :

$$\mathbf{M}\ddot{q} + \mathbf{D}\dot{q} + \mathbf{K}q + f_{nl}(q, \dot{q}) = f_{ext}(t) \quad (2.29)$$

Avec $q, f_{nl}, f_{ext} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ $\mathbf{M}, \mathbf{D}, \mathbf{K} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ $\mathbf{M} = \mathbf{M}^T > 0$ et $f_{ext}(t) = f_{ext}(t + T)$

Le but : Calculer les solutions périodiques $q(t) = q(t + T)$ avec $T = \frac{2\pi}{\Omega}$ on cherche la solution d'un système dynamique non linéaire décrit sous la forme de la série de Fourier tronquée :

$$\begin{aligned} q_h(t) &= Q_0 + \sum_{k=1}^{\infty} Q_{c,k} \cos(k\Omega t) + Q_{s,k} \sin(k\Omega t) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{Q}_k e^{ik\Omega t} \\ &= \Re \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} Q_k e^{ik\Omega t} \right\} \end{aligned}$$

Avec $Q_0, Q_{c,k}, Q_{s,k} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ et $\tilde{Q}_k, \tilde{Q}_{-k} \in \mathbb{C}, \forall k \neq 0, \tilde{Q}_k = \tilde{Q}_{-k}^*$

Dérivées temporelles de la solution :

$$\begin{aligned} q_h &= \Re \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} Q_k e^{ik\Omega t} \right\} \\ \dot{q}_h &= \Re \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} ik\Omega Q_k e^{ik\Omega t} \right\} \\ \ddot{q}_h &= \Re \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} -(k\Omega)^2 Q_k e^{ik\Omega t} \right\} \end{aligned}$$

Substituer dans les équations du mouvement on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbf{M} \Re \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} -(k\Omega)^2 Q_k e^{ik\Omega t} \right\} + \mathbf{D} \Re \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} ik\Omega Q_k e^{ik\Omega t} \right\} + \mathbf{K} \Re \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} Q_k e^{ik\Omega t} \right\} \\ + f_{nl} - f_{ext} =: r \neq 0 \\ \Re \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \left[-(k\Omega)^2 \mathbf{M} + ik\Omega \mathbf{D} + \mathbf{K} \right] Q_k e^{ik\Omega t} \right\} + f_{nl}(q_h, \dot{q}_h) - f_{ext} = r \end{aligned}$$

$$\Re \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\left[-(k\Omega)^2 \mathbf{M} + ik\Omega \mathbf{D} + \mathbf{K} \right] \mathbf{Q}_k + \mathbf{F}_{nl,k} - \mathbf{F}_{ex,k}}_{\mathbf{R}_k} e^{ik\Omega t} \right\} = \mathbf{r}$$

$$\text{Avec } f_{ex} = \Re \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{F}_{ex,k} e^{ik\Omega t} \right\} \quad \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f_{nl}(q_h, \dot{q}_h) e^{ik\Omega t} d\Omega t = \begin{cases} 2\mathbf{F}_{nl,0} \\ \mathbf{F}_{nl,k} \quad k \neq 0 \end{cases}$$

et \mathbf{r} résidu dû à l'approximation de Fourier d'une fonction éventuellement non régulière

En tronquant à l'ordre H et en fixant les coefficients de Fourier du résiduel à zéro et la balance harmonique donne :

$$R^k = 0 ; k = 0, \dots, H \quad (2.30)$$

Ce qu'équivaut à :

$$\left\{ \begin{array}{l} R^0(Q_0, Q_1, \dots, Q_H) = 0 \\ R^1(Q_0, Q_1, \dots, Q_H) = 0 \\ \vdots \\ R^H(Q_0, Q_1, \dots, Q_H) = 0 \end{array} \right\}$$

$$\text{Avec } R^0, Q_0 \in \mathbb{R}^{n \times 1} \quad R^k, Q_k \in \mathbb{C}^{n \times 1} \quad k = 1, \dots, H$$

L'équilibre harmonique comme méthode de Galerkin

Méthode du résidu pondéré :

$$\int_0^T \mathbf{r} [q_h(t), \dot{q}_h(t)] \psi_k^*(t) dt = 0 \quad k = 0, 1, \dots \quad (2.31)$$

Avec $\psi_k^*(t)$ fonction de pondération.

Méthode Galerkin : prendre les fonctions adaptées comme fonctions de poids.

Dans notre cas, les fonctions adaptées sont $\psi_k^*(t) = e^{-ik\Omega t}$. On obtient ainsi :

$$\begin{aligned} \int_0^T \mathbf{r} [q_h(t), \dot{q}_h(t)] e^{-ik\Omega t} dt &= 0 \\ \int_0^T \Re \left\{ \sum_{l=0}^{\infty} \mathbf{R}_l e^{-ik\Omega t} \right\} e^{-ik\Omega t} dt &= 0 \\ \int_0^{2\pi} \Re \left\{ \sum_{l=0}^{\infty} \mathbf{R}_l e^{-il\tau} \right\} e^{-ik\tau} d\tau &= 0 \quad \text{avec } \tau = \Omega t \\ \int_0^{2\pi} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\mathbf{R}_l \frac{e^{-il\tau}}{2} + \mathbf{R}_l^* \frac{e^{-il\tau}}{2} \right) e^{-ik\tau} d\tau &= 0 \\ R^k &= 0 \end{aligned}$$

Depuis :

$$\int_0^{2\pi} e^{im\tau} d\tau = \begin{cases} 2\pi & m = 0 \\ 0 & m \neq 0 \end{cases} \quad m \in \mathbb{Z}$$

Le véritable problème est le calcul des harmoniques non linéaires de la force $\mathbf{F}_{nl,k}(Q_0, \dots, Q_H)$!

$$\text{définition formelle : } \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f_{nl}(q_h, \dot{q}_h) e^{-ik\Omega t} d\Omega t = \begin{cases} 2\mathbf{F}_{nl,0} \\ \mathbf{F}_{nl,k} \quad k = 1, \dots, H \end{cases}$$

Il existe essentiellement trois algorithmes :

1. **Uniquement pour les forces polynomiales** : expression à forme fermée, obtenue soit par expansion algébrique dans une série de Fourier, soit par application du théorème de convolution.
2. **Uniquement pour les forces polynomiales par morceaux** (y compris les forces linéaires par morceaux) : déterminer les temps de transition, puis procéder comme en 1.
3. **Les forces non linéaires génériques** : Schéma alternatif fréquence-temps (AFT)

Dans notre problème on s'intéresse à l'AFT.

Le schéma AFT est de loin de la méthode la plus populaire et la plus polyvalente pour résoudre les forces non linéaires dans HB. En accord avec transformée de Fourier discrète, nous pouvons exprimer le schéma AFT pour calculer $\hat{f}_{nl}(\hat{q}, \Omega)$ comme suit :

$$\hat{f}_{nl,H}(\hat{q}_H, \Omega) \approx \hat{f}_{nl,H}^{AFT}(\hat{q}_H, \Omega) = E_{NH}^* \tilde{f}_{nl,N}(E_{NH} \hat{q}_H, \Delta\Omega \hat{q}_H) \quad (2.32)$$

Avec $E_{NH}^* = \bar{E}_{NH}/N$

Ici, H et N sont à nouveau explicitement dénotés, car ils sont importants pour la discussion suivante L'algorithme AFT est illustré à la Fig. 2.9. Des échantillons des coordonnées et des vitesses généralisées sont pris, $\tilde{q}(l) = h_H(\Omega t_l) \hat{q}_H$ et $\tilde{\dot{q}}(l) = h_H(\Omega t_l) \Delta\Omega \hat{q}_H$, à des instants équidistants t_l dans une période d'oscillation. L'évaluation des forces non linéaires f_{nl} à ces instants donne les échantillons $\hat{f}_{nl}(l) = f_{nl}(\hat{q}(l), \tilde{\dot{q}}(l), t_l)$.

Enfin, la transformée de Fourier discrète donne en général une approximation de la transformée de Fourier. les coefficients de Fourier $\hat{f}_{nl,H}$ des forces non linéaires.

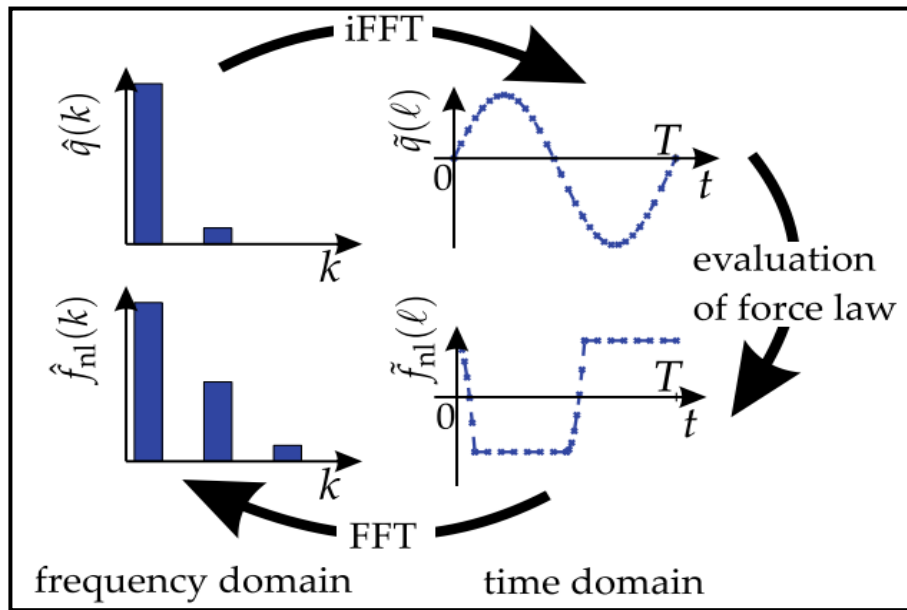


FIGURE 2.9 – Illustration de la fréquence alternée-temps (cas unidimensionnel)

2.5 Les résultats obtenus pour quelques exemples

2.5.1 L'osillateur de Duffing

Pour $P = 0,20$, par exemple, les points d'inflexion se produisent à proximité de $\Omega = 1,3$ et $\Omega = 1,16$. Pour une fréquence d'excitation et un niveau d'excitation donnés, une, deux, ou trois amplitudes existent. Les oscillations périodiques associées à la branche en surplomb qui relie les deux points de retournement sont bien connues pour être instables. Les autres branches correspondent à des oscillations périodiques stables.

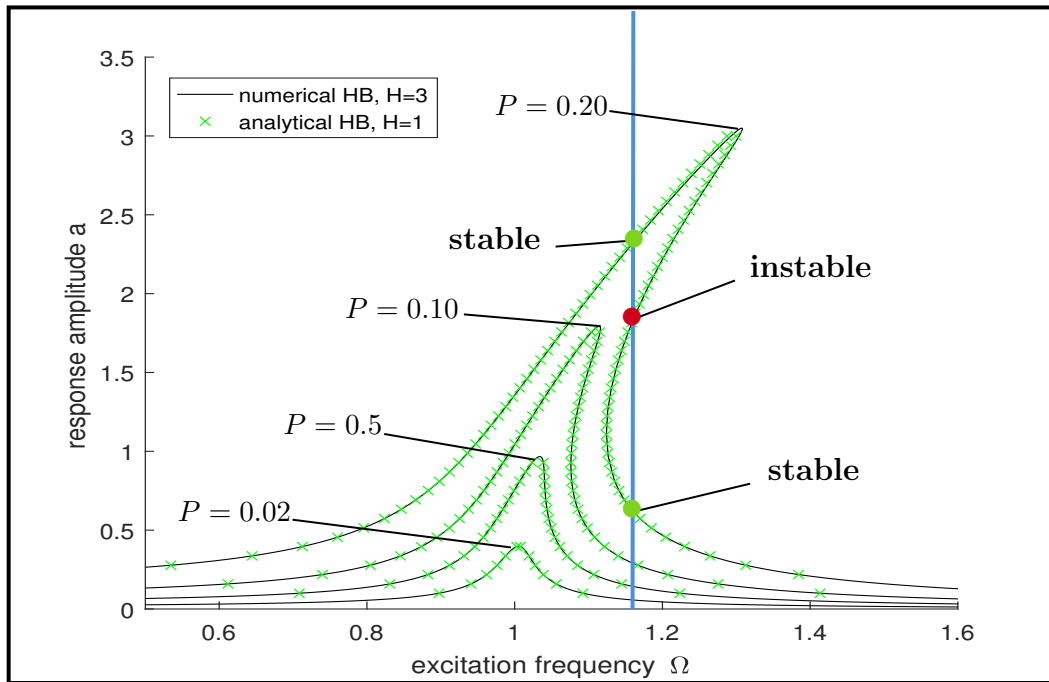


FIGURE 2.10 – Amplitude-courbes de fréquence de l'oscillateur de Duffing pour différents niveaux d'excitation P , $\delta = 0.05$, $\gamma = 0.1$

2.5.2 Une masse reliée par deux ressorts orthogonaux subissant de grandes déviations

Étude de la dynamique d'une masse reliée par deux ressorts orthogonaux subissant de grandes déviations. Les équations du mouvement du système autonome avec amortissement linéaire visqueux sont les suivantes :

$$\begin{cases} \ddot{q}_1 + 2\zeta_1\Omega_1 \times \dot{q}_1 + \Omega_2^2 q_1 + \frac{\Omega_1}{2} (3q_1^2 + q_2^2) + \Omega_2^2 q_1 q_2 + \frac{(\Omega_1^2 + \Omega_2^2)}{2} \times q_1 \times (q_1^2 + q_2^2) = 0 \\ \ddot{q}_2 + 2\zeta_2\Omega_2 \times \dot{q}_2 + \Omega_1^2 q_2 + \frac{\Omega_2}{2} (3q_1^2 + q_2^2) + \Omega_1^2 q_1 q_2 + \frac{(\Omega_1^2 + \Omega_2^2)}{2} \times q_2 \times (q_1^2 + q_2^2) = 0 \end{cases}$$

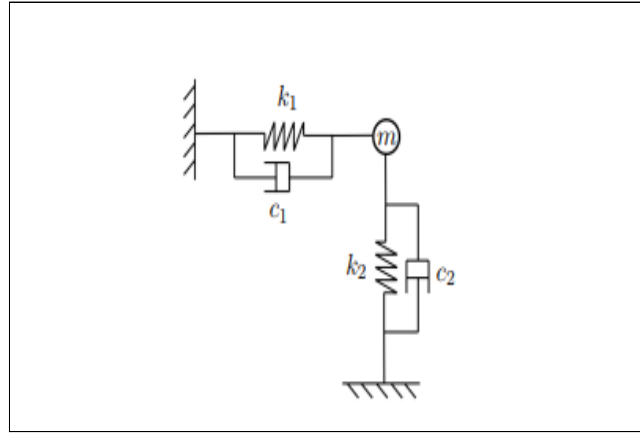


FIGURE 2.11 – Une masse reliée par deux ressorts orthogonaux

Le résultat obtenu avec HBM

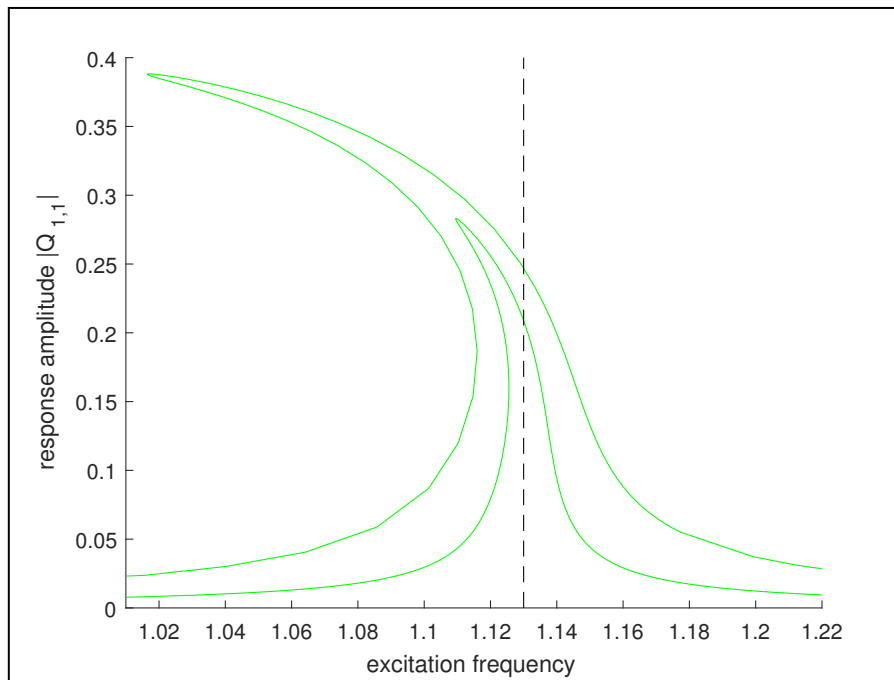


FIGURE 2.12 – Amplitude-courbes de fréquence de Une masse reliée par deux ressorts orthogonaux

Conclusion

Ce projet de fin d'études m'a permis d'approfondir ma formation en général et particulièrement en analyse numérique et calcul scientifique mais également en modélisation mécanique.

Dans la perspective de modéliser numériquement la vibration des poutres en rotation nous nous sommes intéressés à trois volets complémentaires :

- 1 -** La mise en équations du problème étudié grâce aux équations de la mécanique des milieux continus et les hypothèses simplificatrices qui concernent les structures poutres. Nous avons exposé les principaux modèles pour ce type de structure à savoir ; le modèle de Euler-Bernoulli qui néglige l'influence du cisaillement et le modèle de Timoshenko qui prend en compte l'effet de cisaillement.
- 2 -** Après la détermination des équations de mouvements d'une poutre en rotation dans la partie de la modélisation mécanique, on s'est focalisé sur l'approximation numérique de ces équations par la méthode des balances harmoniques. nous avons détaillé les principaux étapes de cette méthode, notamment la construction du système linéaire discret.
- 3 -** Nous avons implémenté tous les développements, qui concernent l'approximation numérique, en programmes informatiques dans le logiciel Matlab. Les résultats numériques obtenus constituent une première validation de nos travaux.

On a travaillé dans ce mémoire sur quelque système dynamique discret et la perspective naturelle de ce travail serait d'appliquer la méthode de balance harmonique sur un système dynamique continue comme les poutres.

Ensuite, il serait intéressant d'améliorer l'approximation numérique à toutes ses étapes et de considérer des configurations plus complexes.

Bibliographie

- [1] **Arnaud Delaplace, Fabrice Gatuingt, Frédéric Ragueneau**, *MÉCANIQUE DES STRUCTURES, Résistance des matériaux*, Dunod, 2008
- [2] **Damien André**, *Résistance Des Matériaux*, Université de limoges, novembre 2020
- [3] **Loïc Peletan, Sébastien Baguet, Mohamed Torkhani, Georges Jacquet-Richardet**, *Quasi-periodic harmonic balance method for rubbing self-induced vibrations in rotor–stator dynamics*, Décembre 2014
- [4] **Loïc PELETAN**, <http://theses.insa-lyon.fr/publication/2012ISAL0146/these.pdf>
- [5] **Louis MEYRAND**, *MODES NON LINÉAIRES : APPROCHES RÉDUITES PAR PGD/HBM ET APPLICATIONS AUX RÉPONSES FORCÉES*, Novembre 2019
- [6] **Malte Krack , Johann Gross**, *Harmonic Balance for Nonlinear Vibration Problems*, University of Stuttgart, Germany, 2018.
- [7] **M. Krack**, *Introduction to Harmonic Balance and application to nonlinear vibrations*, University of Stuttgart.
- [8] **Sami Karkar**, *Méthodes numériques pour les systèmes dynamiques non linéaires. Application aux instruments de musique auto-oscillants*, Octobre 2012
- [9] **Sylvain Drapier**, *Mécanique des Structures et Approximations Numériques*, Octobre 2019
- [10] **T.G. Chondros, A.D. Dimarogonas, J. Yao**, *A continuous cracked beam vibration theory*, Journal of Sound and Vibration 215 (1) (1998) 17–34