كلية العلوم و التقنيات فاس
Faculté des Sciences et Techniques de Fès

جامعة سيدي محمد بن عبد الله
Université Sidi Mohamed Ben Abdellah

DEPARTEMENT DES MATHEMATIQUES

Master Mathématique et Application au Calcul Scientifique

(MACS)

MEMOIRE DE FIN D'ETUDES

Pour l'obtention du Diplôme de Master Sciences et Techniques (MST)

Modèles d'optimisation de portefeuille de type Moyenne-Risque : CVaR et bPOE selon certaines lois de probabilité

Réalisé par : MRANI Fatima Ezzahrae

Encadré par : Pr.CHAIBI Ghizlane

Soutenu le 19 juillet 2022

Devant le jury composé de :

-Pr.HILALI Abdelmajid	**FST-FES**
-Pr.EL AYADI Rachid	**FST-FES**
-Pr.IDRISSI Moulay Abdallah	**FP-BENI MELLAL**
-Pr.CHAIBI Ghizlane	**FST-FES**

Année Universitaire 2021 / 2022

Table des matières

Table des figures

Remerciements

J'adresse mes sincères remerciements à mon encadrante Madame CHAIBI Ghizlane, à qui j'exprime toutes ma reconnaissance, de m'avoir encadrée et encouragée tout le long de ce projet.Merci pour sa bonne volonté, sa patience et ses précieux conseils ainsi que pour la pertinence de ses remarques et ses suggestions qui ont fait que ce rapport a vu ce jour.

J'exprime aussi mes vifs remerciements aux Professeurs HILALI Abdelmajid, EL AYADI Rachid et IDRISSI Moulay Abdallah pour l'honneur qu'ils ont me font d'accepter d'être membres de jury de ce mémoire et d'examiner mon travail et d'enrichir par leurs remarques.Veuillez trouver ici le témoignage de mon respect le plus profond.

Je n'oublie pas de remercier ma famille, mes amis et surtout ma mère, pour ses prières et soutiens inconditionnels durant mes études.

Merci infiniment à toutes les personnes qui ont contribué de prés ou de loin à l'élaboration de ce travail.

Annexes des notations

Notations	**Significations**
$R_{i,t}$	Rendement arithmétique d'un actif i
$D_{i,t}$	Dividende reçus pendant la période t
$R_{j,t}$	Rendement géométrique d'un actif j
$\mathbb{E}(R)$	Le rendement espéré d'un actif i
$\bar{R}_i$	Le rendement moyen de l'actif i
$F_X(x)$	La fonction de répartition de X
$E[X]$	L'espérance de X
x_i	La proportion investie dans le titire i
$\mathbb{E}(X/.)$	Espérance conditionnelle
$\rho(X)$	Mesures de Risque de perte X
$\mathcal{A}_\rho$	Position acceptable
$Var(R_i)$	La variance d'un actif i
σ_i	L'écart-type d'un actif i
$Cov(R_i, R_j))$	La covariance de deux actif i et j
r_{ij}	Coefficient de corrélation
μ_p	Le rendement espéré d'un portefeuille
$Var(R_p)$	La variance d'un portefeuille
$VaR_\alpha(X) = F_X^{-1}(\alpha)$	La Valeur à Risque de niveau $\alpha \in [0, 1]$
$CVaR_\alpha(X)$	La Valeur à Risque Conditionnelle
$\bar{q}_\alpha(X)$	Le superquantile appelé aussi la Valeur à Risque Conditionnelle
$\bar{p}_x(X)$	The buffered probability of exceedance

Notations	**Significations**
$p_x(X)$	The probability of exceedance
$\bar{F}_X(x)$	La fonction de superdistribution et l'inverse de superquantile (CVaR).
$supX$	Le supremum essentiel
$Argminf$	Argument minimum d'une fonction f
$U(X,Y)$	L'utilité totale du biens X et Y
$U_m(X)$	L'utilité marginale d'un bien X
Σ	La matrice variance-covariance des rendements des différents titre
R_I	Rendement de l' indice I
$\beta_P = \sum_{i=1}^{n} x_i\beta_i$	Le coefficient bêta d'un portefeuille.
w	Un vecteur de pondération des actifs

Introduction

L'évolution et le développement des marchés financiers, ainsi que la multitude des produits financiers ont poussé les chercheurs et les financiers à développer des modèles permettant d'aider au mieux un investisseur à prendre des décisions adéquates et des stratégies efficaces, pour une meilleure allocation de sa richesse, et savoir comment repartir son capital sur les différents titres, d'une façon à maximiser son profit (gain), tout en minimisant le risque encouru.

L'optimisation de portefeuille présente une décision très importante pour les investisseurs. L'idée du « portefeuille optimal » vient de la théorie de portefeuille moderne, introduite par Markowitz (1952)[12]. Cette théorie est appelée l'approche « moyenne-variance » et suppose que l'investisseur, averse au risque, choisit son portefeuille en prenant en compte la moyenne et la variance des rendements des actifs.
En effet, le modèle de Markowitz consiste à minimiser l'écart-type ou la variance pour un rendement donné ou de maximiser le rendement du portefeuille pour un risque donné.
Selon cette approche, l'investisseur agit d'une manière rationnelle et prend toujours des décisions dans le but de maximiser le rendement de son portefeuille pour un niveau de risque donné.

Le choix du portefeuille optimal traditionnel est fondé sur le principe de la rationalité de l'investisseur et de son aversion au risque, qui représentent la base de la théorie de la prise de décision classique, basée sur la théorie fondamentale de l'utilité espérée (von Neumann et Morgenstern,1944[21]).Cette dernière a été développée en se basant sur la théorie d'utilité de Bernoulli (1738)[2], qui correspond à une attitude d'aversion vis à vis du risque (fonction d'utilité concave) et a fait l'objet d'innombrables recherches notamment en finance et en particulier dans le cadre de l'allocation d'actifs financiers. En effet, la théorie de l'utilité espérée repose sur l'hypothèse d'un «homo-economicus», dont le comportement est régi par l'intérêt personnel et la prise de décision rationnelle. Elle suppose que chaque preneur de décision possède l'information et les ressources nécessaires pour trouver la solution qui sera la meilleure (en un sens à préciser). Cependant, malgré sa popularité initiale chez les théoriciens, cette théorie ne reflète pas toujours la réalité des comportements des investisseurs vis à vis des fluctuations aléatoires des marchés financiers. Au cours des dernières décennies, les points de vue sur ces comportements réels ont subi une mutation. Les expériences comportementales menées au sein de laboratoires sont devenues une composante importante de la recherche en économie et les résultats expérimentaux ont montré que les postulats fondamentaux de la théorie économique classique devaient être modifiés.

En ce qui concerne le choix de la mesure de risque, plusieurs alternatives se présentent. Par exemple, dans le modèle de gestion de portefeuille de Markowitz (1952), le risque du portefeuille est déterminé par sa variance. Ainsi, tous les écarts, négatifs ou positifs, par rapport à la rentabilité espérée sont pris en compte. Le résultat principal de ce modèle stipule qu'à l'optimum, le portefeuille détenu par l'investisseur doit être parfaitement diversifié.

En 1993, le Groupe des Trente, composé de banquiers, d'autorités de contrôle et d'académiciens, a publié un document qui recommandait notamment l'usage d'une nouvelle mesure de risque nommée Valeur à risque (Value at Risk) comme critère de mesure pour le risque de marché. Cet événement a concouru à l'adoption de cette nouvelle mesure sur le secteur financier et a favorisé son développement parmi les entreprises américaines.

Très vite alors sont apparus de nouveaux fournisseurs de programmes de gestion des risques, exploitant Risk-Metrics, un système qui a été mis à la disposition de tous sur Internet et gratuitement par la banque américaine J.P Morgan [10], transformant ainsi cette méthodologie en référence incontournable.En quelques années seulement, la VaR est devenue le plus populaire des outils de gestion du risque, et la réponse à la question que se posent la majorité des établissement financiers et présente plusieurs avantages comme la facilité de comparaison et d'interprétation.

Cependant, des études récentes, comme celle de Szergô[19] qui a montré que celle-ci souffre de plusieurs inconvénients, le plus marquant étant la non prise en compte du montant des pertes excédant la VaR et la sous additivitée[1], ce qui signifie qu'avec cette mesure, toute diversification n'implique pas un risque réduit.

Pour surmonter les limites de la VaR, une nouvelle mesure de risque appelée VaR conditionnelle et notée CVaR définit comme étant la moyenne des VaR, de niveau supérieur à celui de la VaR, est adoptée à sa place.

La Valeur à Risque Conditionnelle (CVaR), aussi appelée Expected Shortfall, est une mesure alternative qui a gagné en popularité au cours des dernières années. Contrairement à la VaR, elle est une mesure de risque cohérente [15] qui prend en compte l'ensemble des pertes dans la queue de gauche de la distribution.

Alors que le superquantile ($CVaR$) a gagné en popularité au cours de la dernière décennie, une caractéristique connexe appelée the buffred probability of exceedence ($bPOE$) a récemment été introduite, d'abord par Rockafellar et Royset (2010)[14] dans le contexte de the buffred failure probability, puis généralisée par Mafusalov et Uryasev (2018)[9].

Ce concept a gagné en popularité au sein de la communauté de la gestion des risques avec des applications dans l'intelligence, la logistique, l'analyse des catastrophes naturelles, des statistiques, de la programmation stochastique et de l'apprentissage automatique (Shang et coll. (2018) ; Uryasev(2014) ; Davis et Uryasev (2016) ; Mafusalov et al. (2018) ; Norton et coll. (2017) ; Norton et Uryasev (2016).

Dans ce travail, nous intéressons aux mesure de risque dans les modèles d'optimisation d'un portefeuille. Tout d'abord nous définissons et comparons ces mesure de risque et montrons leurs avantages et inconvenants et donnons leurs modèles qui sont sous forme de modèle de Markowitz.
Aussi Nous présentons la théorie moderne de Markowitz ainsi ses modèles simplifiés comme le modèle de Sharp et modèle de MEDAF.
Nous présentons également une nouvelle mesure de risque appelée la buffred probability of exceedence (bPOE) introduit par Mafusalov et Uryasev (2018), et nous exprimons la forme fermé et la mesure CVaR pour un certain nombre des lois de probabilité, puis nous comparons leurs modèles de portefeuille afin de déterminer le modèle optimal.

Notre mémoire est structuré de la façon suivante :
— Le premier chapitre donne un rappel de quelques définitions et concepts économiques de base comme la notion du rendement et du risque, ainsi l'espérance conditionnelle et fonction de répartition qui sont nécessaires pour la suite de notre travail.
— Le deuxième chapitre présente quelques outils de mesure de risque, qui nous aidons à définir des modèles de portefeuille optimal, parmi ces mesure du risque nous citons : La volatilité,la VaR et la CVaR ainsi une nouvelle mesure de risque appelée bPOE.
— Le troisième chapitre propose des différents modèles de l'optimisation de portefeuille commençons par le modèle classique(la théorie d'utilités) puis le modèle initiale du portefeuille (La théorie moderne du portefeuille), puis le modèle simplifié de Sharpe et le modèle d'équilibre des actifs financiers (MEDAF).
— Le quatrième chapitre présente les modèle de Moyenne-CVaR et Moyenne-bPOE de portefeuille, ainsi a forme fermée de ces deux mesures de risque pour un certain nombre des lois de probabilité (loi normale,loi log normale, logistique,Weibul...), nous comparons leurs modèles de portefeuille afin de déterminer le modèle optimal.

Chapitre 1

Préliminaire

Dans ce chapitre nous présentons certaines définitions et notions financiers doivent être présentée préalablement pour une bonne compréhension de ce mémoire.

1.1 Notions fondamentales

- **Marché financier**
  Les marchés financiers sont des lieux, physiques ou virtuels, où les investisseurs négocient des titres à l'achat ou à la vente. L'émission de ces différents titres commence par le marché primaire sur lequel ils sont émis, et se poursuit sur le marché secondaire où s'échangent les titres d'occasion.
- **Actif financier**
  Un actif est un titre ou contrat généralement négociable sur un marché financier, produisant à son propriétaire des revenus ou un gain en capital. Les actifs financiers que l'on trouve le plus couramment au bilan d'une entreprise sont :les actions,les obligations et les options.
  - **Action**
    Une action est un titre de propriété sur une part d'une entreprise. Elle offre à son propriétaire des droits sur la société et notamment un droit au dividende et un droit de vote lors des assemblées générales, . L'action est l'actif le plus négocié sur les marchés financiers.
  - **Obligation**
    Les obligations sont des titres de créances représentatifs de dettes.
    Une obligation donne droit au paiement d'un intérêt en général annuel et au remboursement du capital.Le détenteur d'une obligation perçoit un revenu connu à l'avance ou dont la révision se réalise dans les conditions prévues au moment de l'émission. En cas de faillite de l'émetteur, le détenteur d'une créance est prioritaire sur l'actionnaire.
    Les obligations peuvent être émises par les entreprises privées ou publiques, ainsi que

par l'état, les administrations publiques et les collectivités locales.

∗ **Option**

Une option est un contrat financier dérivé qui donne à l'acheteur la possibilité mais non l'obligation de vendre (option put) ou d'acheter (option call) une quantité définie d'actif sous-jacent moyennant le versement d'une prime (premium qui est le prix de l'option) à un prix d'exercice convenu (strike price) et à une date d'échéance déterminés à la signature du contrat.

- **Portefeuille financier**

  Un portefeuille est une combinaison d'un ensemble de titres (actifs) financiers (actions, obligations, produits dérivés, matières premières...), détenus par un investisseur(établissement ou individu).

  Cette combinaison se fait en des proportions différentes afin d'avoir un portefeuille bien diversifié, permettant ainsi de réaliser un rendement espéré bien déterminé tout en minimisant le risque que peut courir l'investisseur.

  Mathématiquement, un portefeuille $P = (x_1, x_2, ..., x_n)$ est un vecteur de proportions x_i, qui représente la proportion du capital investi dans chaque titre, avec :

$$x_i = \frac{\text{La part du capital investi en titre i}}{\text{capital total}}$$

- **Diversification** :

  La notion de diversification faite référence à la diversité des titres qui composent un portefeuille. Un portefeuille ne contenant qu'un seul titre n'est pas diversifié. La diversification est donc une méthode de gestion du risque de perte en capital. La diversification du portefeuille doit permettre de se protéger contre les risques associés à la détention d'un nombre limité de titres, d'une seule catégorie d'actifs financiers ou d'un seul marché...

1.2 Mesure de rentabilité

Le taux de rentabilité ou le rendement est une notion fondamentale en finance et il apparaît dans l'expression de la plupart des modèles de gestion de portefeuille ; il mesure l'appréciation(*augmentation de la valeur d'un actif au fil du temps*) ou dépréciation relative de la valeur d'un actif financier ou d'un portefeuille d'actifs financiers entre deux instants successifs.

1.2.1 Rendement d'un actif financier

Rendement arithmétique :

Le rendement arithmétique définie comme la variation relative du prix de l'actif i entre les instants $t-1$ et t :

$$R_{i,t} = \frac{(P_{i,t} - P_{i,t-1}) + D_{i,t}}{P_{i,t-1}}, \qquad i = 1, ..., m; t = 1, , ..., T$$

où :

- m représente le nombre d'actifs financiers ;
- T le nombre de périodes ;
- $P_{i,t}$: Prix du titre i à la fin de la date t ;
- $P_{i,t-1}$: Prix du titre i à la fin de la date $t-1$;
- $D_{i,t}$: Dividende(action) ou intérêt(obligation) reçu pendant la période t.

Rendement géométrique :

Le rendement géométrique, également appelé rendement logarithmique, entre les instants $t-1$ et t est donné par la relation suivante :

$$R_{j,t} = \ln(\frac{P_{j,t} + D_{j,t}}{P_{j,t-1}})$$

Remarque 1.2.1. *[6]*
L'inconvénient du rendement arithmétique est qu'il n'est pas additif. En effet, son calcul privilégie les deux instants $t-1$ et t, et néglige ainsi l'évolution de la valeur.
En supposant un intervalle de temps suffisamment petit, on peut définir un rendement instantané comme étant la valeur moyenne des valeurs prises par l'actif entre les instants t et $t + \delta t$, soit

$$R_{j,t} = \int_t^{t+\delta t} \frac{1}{P} dP = \ln(\frac{P_{j,t+\delta t}}{P_{j,t}}) = \ln(\frac{P_{j,t} + P_{j,\delta t}}{P_{j,t}})$$

d'où, à partir du développement limitée à l'ordre 1 de la fonction $\ln$ *:*

$$R_{j,t} = \ln(1 + \frac{\delta P_{j,t}}{P_{j,t}}) \approx \frac{\delta P_{j,t}}{P_{j,t}} \tag{1.1}$$

L'équation (1.1) montre que quand le pas de temps est faible le rendement logarithmique égalise le rendement arithmétique.

1.2.2 Rendement espéré d'un titre

C'est le résultat attendu du titre, c'est-à-dire le cours future et le dividende probable versé par l'entreprise. Ces deux paramètres sont fonction de la réaction face aux aléas du marché et aussi du comportement de l'entreprise par rapport à son environnement.
Pour évaluer ce rendement attendu, l'investisseur peut procéder soit par une méthode probabiliste, soit sur la base des rendements précédents(Historique) :

Méthode probabiliste :

Le rendement espéré d'un actif i est la moyenne pondérée des différents rendements possibles :

$$\mathbb{E}(R) = p_1R_1 + p_2R_2 + ... + p_kR_k = \sum_{i=k}^{i=n} p_iR_i$$

où :
- R_i : Rendement possible de l'issu i.
- p_i : Probabilité de réalisation de l'issu(événement) i, telle que : $\sum_{i=k}^{i=n} p_i = 1$.

Méthode de rendements historiques :

La rentabilité espérée d'un actif i peut être estimer par la moyenne arithmétique des rentabilités réalisés au cours des $T-$périodes précédentes.

$$\tilde{\mathbb{E}}(\mathbb{R}) = \frac{R_{i,1} + R_{i,2} + ... + R_{i,T}}{T} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} R_{i,t}$$

où : $R_{i,t}$:le rendement du titre i à la période t.

Rappelons maintenant quelques propositions et notions générales de la fonction de répartition.

1.3 La fonctions de répartition : Rappel

Cette section est basée sur l'ouvrage[4]

Définition 1.3.1. *Soit X une variable aléatoire réelle. On appelle fonction de répartition de X la fonction $F : \mathbb{R} \to [0, 1]$ définie par :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = P[X \leq x].$$

La proposition suivante regroupe des propriétés classiques de la fonction de répartition que nous ne démontrerons pas.

Proposition 1.3.2. 1. *La fonction de répartition F d'une variable aléatoire réelle X est croissante, continue à droite et vérifie*

$$\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0 \text{ et } \lim_{x\to+\infty} F(x) = 1.$$

2. *La fonction de répartition caractérise la loi : si X et Y sont deux variables aléatoires réelles qui ont la même fonction de répartition, alors*

$$\forall f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ mesurable bornée, } E[f(X)] = E[f(Y)]$$

3. *Une suite $(X_n), n \in \mathbb{N}^*$ de variables aléatoires réelles converge en loi vers X si et seulement si, pour tout point de continuité $x \in \mathbb{R}$ de la fonction de répartition F de X, on a*

$$F_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} F(x),$$

où F_n désigne la fonction de répartition de X_n.

4. *Soit $x \in \mathbb{R}$ et $(X_n, n \in \mathbb{N}^*)$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et de même loi. D'après la loi forte des grands nombres, on a p.s.*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \mathbf{1}_{\{X_k \leq x\}} = P[X_1 \leq x] = F(x).$$

Le théorème suivant assure en fait que cette convergence est uniforme en x.

Théorème 1.3.3. *(Glivenko-Cantelli). Soit $(X_n, n \in \mathbb{N}^*)$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et de même loi. On a p.s.*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} |F_n(x) - P[X_1 \leq x]| = 0$$

où F_n, définie par

$$F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \mathbf{1}_{\{X_k \leq x\}} = \frac{1}{n} \mathrm{Card}\{X_k \leq x, k \in \{1, \dots, n\}\}$$

est la fonction de répartition empirique de l'échantillon $X_1, \dots, X_n$.

Définition 1.3.4. *Soit X une variable aléatoire réelle de fonction de répartition F.*

— *Pour $p \in]0, 1]$, on appelle quantile ou fractile d'ordre p de X le nombre*

$$x_p = \inf\{x \in \mathbb{R}, F(x) \geq p\}$$

où par convention $\inf \emptyset = +\infty$.

— *L'application noté :* $F^{-1} :]0,1[\to \mathbb{R}$ *s'appelle l'inverse généralisé de* F *;elle vérifié :*
$p \to x_p$

$$\forall p \in]0,1[, F^{-1}(p) = x_p$$

.

Le résultat suivant est à la base de la méthode d'inversion de la fonction de répartition destinée à simuler des variables aléatoires réelles de fonction de répartition F.

Proposition 1.3.5. *Soit F une fonction de répartition et F^{-1} son inverse généralisé. Alors on a l'équivalence :*

$$F(x) \geq p \Leftrightarrow x \geq F^{-1}(p) \tag{1.2}$$

En outre, si F est continue, alors :

$$\forall p \in]0,1[, F(F^{-1}(p)) = p \tag{1.3}$$

Remarque 1.3.6. — *Si la fonction F est inversible de $\mathbb{R}$ dans $]0,1[$, alors elle est continue sur $\mathbb{R}$ et l'égalité (1.3) entraîne que l'inverse généralisé et l'inverse coïncident.*
— *L'intérêt de l'inverse généralisé est qu'il reste défini même lorsque F n'est pas inversible soit parce que cette fonction est discontinue soit parce qu'elle est constante sur des intervalles non vides.*

Démonstration. Soit $p \in]0,1[$. Nous allons d'abord vérifier (1.2).
Par définition de $x_p = F^{-1}(p) = \inf\{x \in \mathbb{R}/F(x) \geq p\}$, on a :
— si $F(x) \geq p$ alors $x \geq F^{-1}(p)$
— Si $x \geq F^{-1}(p)$, et par croissance de F on a $F(x) \geq p$.
D'où l'équivalence.

Montrons maintenant (1.3); Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $y_n \leq F^{-1}(p) + \frac{1}{n}$ tel que $F(y_n) \geq p$.
Par croissance de F, on a $F(F^{-1}(p) + \frac{1}{n}) \geq p$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
Par continuité à droite de F, on en déduit que

$$\forall p \in]0,1[, F(F^{-1}(p)) \geq p. \tag{1.4}$$

Avec la croissance de F, cela implique que si $x \geq F^{-1}(p)$, alors $F(x) \geq p$, ce qui achève la démonstration de (1.4).
On a (1.2) $\Rightarrow x < F^{-1}(p) \Rightarrow F(x) < p$. Avec (1.4), on en déduit que si F est continue an point $F^{-1}(p)$: $F(x) < p \leq F(F^{-1}(p)) \Rightarrow \lim_{x \to F^{-1}(p)} F(x) \leq p$ alors

$$F(F^{-1}(p)) = p$$

□

1.4 Espérance Conditionnelle :Rappel

Dans toute cette section, $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est un espace probabilisé, i.e.

- Ω est un ensemble non vide.
- $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ est une tribu (ou σ-algèbre) sur Ω :
  1. $\emptyset \in \mathcal{F}$;
  2. Si $A \in \mathcal{F}$, alors $A^c \in \mathcal{F}$;
  3. Si $(A_n)_{n\in\mathbf{N}} \subset \mathcal{F}$, alors $\bigcup_{n\in\mathbf{N}} A_n \in \mathcal{F}$.
- $\mathbb{P}$ est (une mesure de) probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F})$: $\mathbb{P} : \mathcal{F} \longrightarrow \overline{\mathbf{R}}_+ := \mathbf{R}_+ \cup \{+\infty\}$ t.q :
  1. $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$;
  2. Pour $(A_n)_{n\in\mathbf{N}} \subset \mathcal{F}$ t.q. pour tout $k \neq n$ $A_n \cap A_k = \emptyset$.
  $$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbf{N}} A_n\right) = \sum_{n\geq 0} \mathbb{P}(A_n);$$
  3. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.

Définition 1.4.1. *(Tribu engendrée)*
Soit $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(\Omega)$. On appelle tribu engendrée par $\mathcal{C}$, notée $\sigma(\mathcal{C})$, la plus petite tribu sur Ω, au sens de l'inclusion, contenant $\mathcal{C}$.

— *L'existence de $\sigma(\mathcal{C})$ résulte du fait qu'une intersection quelconque de tribus sur Ω est une tribu sur Ω.*

— *Si $A \subset \Omega$, $\sigma(\{A\}) = \{\emptyset, \Omega, A, A^c\}$.*

Définition 1.4.2. *(Tribu borélienne). On appelle tribu borélienne de $\mathbb{R}^n$, notée $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, la tribu engendrée par les ouverts (pour la topologie usuelle) de $\mathbb{R}^n$.*
On a $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\{]-\infty, a] : a \in \mathbb{R}\}) = \sigma(\{[a, b] : a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}\})$

Définition 1.4.3. *Soit $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une application. On dit que X est une variable aléatoire si*
$$\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \quad X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\} \overset{not.}{=} \{X \in B\} \in \mathcal{F}$$

Remarque 1.4.4. *Comme $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\{]-\infty, a] : a \in \mathbb{R}\}), X$ est une v.a. réelle ssi, pour tout réel a,on a $\{X \leq a\} \in \mathcal{F}$.*

Définition 1.4.5. *Soient X une variable aléatoire et $\mathcal{G}$ une sous-tribu de $\mathcal{F}$. On dit que X est $\mathcal{G}$-mesurable si*
$$\forall B \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^n), \quad \{X \in B\} \in \mathcal{G}.$$

Définition 1.4.6. *(Tribu engendrée par une v.a.). Soit X une variable aléatoire. On appelle tribu engendrée par X, notée $\sigma(X)$, la plus petite tribu pour l'inclusion, qui rend X mesurable.*

Définition 1.4.7. *(Indépendance). Deux variables aléatoires X et Y sont indépendantes si les tribus $\sigma(X)$ et $\sigma(Y)$ le sont c'est à dire si*

$$\forall B \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^n), \forall C \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^m),$$
$$\mathbb{P}(\{X \in B\} \cap \{Y \in C\}) = \mathbb{P}(\{X \in B\})\mathbb{P}(\{Y \in C\})$$

Espérance conditionnelle d'une v.a. sachant un évènement

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

Soit X une variable aléatoire sur Ω. L'espérance de X est le nombre

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)\mathbb{P}(\omega)$$

Notons que, pour tout évènement $A \subseteq \Omega$ appartenant à la tribu $\mathcal{F}$, on peut exprimer la probabilité de A comme l'espérance d'une v.a.,
en posant

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{\alpha \in A} \mathbb{P}(\alpha) = \mathbb{E}\mathbf{1}_A$$

où $\mathbf{1}_A$ désigne la v.a. indicatrice de A, égale à 1 sur A et 0 sinon.

Plus généralement, on appelle "espérance de X sachant A " ou "espérance de X conditionnellement à A'', le nombre, notée $\mathbb{E}(X/A)$, donné par

$$\mathbb{E}(X/A) = \frac{1}{\mathbb{P}(A)} \sum_{\alpha \in A} X(\alpha)\mathbb{P}(\alpha) = \frac{\mathbb{E}\left(X\mathbf{1}_A\right)}{\mathbb{E}\mathbf{1}_A}$$

En d'autres termes $\mathbb{E}(X/A)$ est la moyenne des éléments de A, pondérée par leur probabilité rapportée à la probabilité de A.

Nous insistons sur le fait que l'espérance conditionnelle d'une v.a. sachant un évènement est un nombre. L'espérance conditionnelle par rapport à une tribu, que nous allons introduire à présent, n'est pas un nombre, mais "un nombre qui dépend de l'état du monde", c'est-à-dire une variable aléatoire.
L'espérance conditionnelle est une notion de probabilité qui permet, étant données une variable aléatoire X et une sous-tribu $\mathcal{B}$, d'exprimer ce que l'on sait de X en ayant uniquement l'information contenue dans $\mathcal{B}$.

Espérance conditionnelle d'une v.a. par rapport une tribu

Définition 1.4.8. *Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, $\mathcal{B}$ est une sous-tribu de $\mathcal{A}$ et X est une variable aléatoire réelle définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et intégrable. Alors il existe une unique variable aléatoire, appelée espérance conditionnelle de X sachant $\mathcal{B}$, notée $E(X \mid \mathcal{B})$, telle que*

- *$E(X \mid \mathcal{B})$ est $\mathcal{B}$-mesurable ;*
- *Pour tout $B \in \mathcal{B}$, $\int_B E(X \mid \mathcal{B}) d\mathbb{P}(\omega) = \int_B X(\omega) d\mathbb{P}(\omega)$*

Si $\mathcal{B}$ est la tribu engendrée par une variable aléatoire Y, on note aussi $E(X \mid Y)$.

Remarque 1.4.9. *On peut également donner une définition "fonctionnelle" de l'indépendance : X et Y sont indépendantes si et seulement si, pour toutes fonctions f et g boréliennes et bornées,*

$$\mathbb{E}[f(X)g(Y)] = \mathbb{E}[f(X)]\mathbb{E}[g(Y)]$$

Le passage de la définition ensembliste à la définition fonctionnelle se fait via la formule :

$$\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \quad \mathbb{P}(\{X \in B\}) = \mathbb{E}[\mathbf{1}_B(X)]$$

Exemple 1. .

- *Soient X et Y deux v.a.r. X de carré intégrable et Y discrète à valeurs $y_1 < y_2 < y_3 < \ldots$*
- *Pour tout borélien B et tout $j \geq 1$, la probabilité conditionnelle*

$$\mathbb{P}(\{X \in B\} \mid \{Y = y_j\}) = \frac{\mathbb{P}(\{X \in B\} \cap \{Y = y_j\})}{\mathbb{P}(\{Y = y_j\})}$$

  représente la fréquence de réalisation de $\{X \in B\}$ parmi tous les événements où $Y = y_j$.
- *On remarque que*

$$\mathbb{P}(\{X \in B\} \mid \{Y = y_j\}) = \frac{\mathbb{E}\left[\mathbf{1}_B(X)\mathbf{1}_{\{Y=y_j\}}\right]}{\mathbb{P}(\{Y = y_j\})},$$

  et on définit, pour toute fonction f borélienne (bornée ou positive)

$$\mathbb{E}[f(X) \mid \{Y = y_j\}] = \frac{\mathbb{E}\left[f(X)\mathbf{1}_{\{Y=y_j\}}\right]}{\mathbb{P}(\{Y = y_j\})}$$

1.5 Mesures de Risque

Le risque économique est une probabilité, ou plusieurs, qui reflète les variations possibles pouvant survenir dans les différents scénarios avec lesquels une entreprise interagit.

Ainsi, le risque économique mesure l'incertitude générée par les différents événements possibles pouvant survenir dans le temps, pouvant avoir un impact direct sur l'entreprise.

L'importance de mesurer ce risque réside dans le fait que le compte de résultat dépend de ces risques.

Définition 1.5.1. *Soit $(\Omega, \mathcal{F})$ un espace mesurable.*
Un risque X sur Ω est une fonction mesurable réelles tel que : $\forall \omega \in \Omega$ on considère que :

- *$X(\omega) \geq 0$ s'interprète comme une perte ;*
- *$X(\omega) \leq 0$ s'interprète comme un gain.*

Définition 1.5.2. *Soit $(\Omega, \mathcal{F})$ un espace mesurable.*
$\mathcal{X}$ est un ensemble de variables aléatoires réelles sur Ω contenant les constantes.
On appelle mesure de risque toute application :

$$\begin{aligned} \rho : \quad & \mathcal{X} \to \mathbb{R} \\ & X \to \rho(X) \end{aligned}$$

qui permet de quantifier le niveau de danger inhérent à ce risque.

Exemple 2. *On peut considérer :*

- $\rho_{\max}(X) = \sup_{\omega \in \Omega} X(\omega)$,
- $\rho(X) = \sup \mathbb{E}[X]$,
- *Valeur à risque : $\mathrm{VaR}_\alpha(X)$ le quantile d'ordre α de X pour une probabilité $\mathbb{P}$ sur $(\Omega, \mathcal{F})$.*

Définition 1.5.3. *Une mesure de risque $\rho : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ est dite cohérente si elle vérifie les propriétés suivantes :*

- ***Invariance par translation :***
  Pout toute constante $m \in \mathbb{R}$ et $\forall X \in \Omega$ on a :
  $$\rho(X + m) = \rho(X) + m.$$
- ***Sous-additivité :***
  Pour tous les risques $X \in \Omega$ et $Y \in \Omega$ on a :
  $$\rho(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y).$$
- ***Homogénéité :***
  Pour toute constante $m \in \mathbb{R}$ et $\forall X \in \Omega$ on a :
  $$\rho(mX) = m\rho(X)$$
- ***Monotonicité :***
  Pour tout $X \in \Omega$ et $Y \in \Omega$ on a :
  $$X \leq Y \Rightarrow \rho(X) \leq \rho(Y)$$

Définition 1.5.4. *On dit que ρ est convexe si pour tout $\theta \in [0, 1]$*

$$\rho(\theta X + (1-\theta)Y) \leq \theta\rho(X) + (1-\theta)\rho(Y).$$

Lemme 1.5.5. *Si ρ est une mesure de risque monétaire positivement homogène, alors elle est convexe si et seulement si elle est sous additive*

$$\rho(X+Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$$

.

Exemple 3 (Mesure de risque cohérente)**.** .

— *La mesure de risque $\rho_{\max}$: la mesure de risque cohérente la plus conservatrice (si η est une mesure de risque cohérente alors $\eta(X) \leq \rho_{\max}(X)$).*

— *La mesure de risque $\rho(X) = \sup \mathbb{E}[X]$.*

Définition 1.5.6 (Position acceptable)**.** *On dit qu'une position X est acceptable si $\rho(X) \leq 0$ (elle ne nécessite pas de fond propre).On pose*

$$\mathcal{A}_\rho = \{X \in \mathcal{X}; \rho(X) \leq 0\}.$$

Proposition 1.5.7. *[7] Soit ρ une mesure de risque monétaire.*

1. $\mathcal{A}_\rho \neq \emptyset$
2. $\sup\{m \in \mathbb{R}; m \in \mathcal{A}_\rho\} < \infty$;
3. *Si $X \in \mathcal{A}_\rho$ alors $Y \leq X$ implique $Y \in \mathcal{A}_\rho$.*
4. $\lambda \in [0,1]; \lambda X + (1-\lambda)Y \in \mathcal{A}_\rho$ *est un fermé de* $[0,1]$ *(éventuellement vide).*
5. $\rho(X) = \inf\{m \in \mathbb{R}; X - m \in \mathcal{A}_\rho\}$ *($\rho(X)$ est le plus petit capital m tel que $X - m$ soit acceptable).*
6. *ρ convexe implique $\mathcal{A}_\rho$ convexe.*
7. *ρ positivement homogène implique $\mathcal{A}_\rho$ est un cône positif.*
8. *ρ cohérente implique $\mathcal{A}_\rho$ est un cône positif convexe.*

Démonstration. Voir la démonstration dans [7] □

On peut définir une mesure de risque à partir d'un ensemble de positions acceptables.

Soit $\mathcal{A} \subset \mathcal{X}$. On pose pour $X \in \mathcal{X}$ on a :

$$X \in \mathcal{X} : \rho_A(X) = \inf\{m \in \mathbb{R}; X - m \in \mathcal{A}\}$$

Chapitre 2

Outils de mesure de risque

L'étude des différents outils de mesure de risque constitue une étape nécessaire et primordiale dans la gestion des risques. L'importance de cette étude réside dans les deux finalités qu'ils nous permettent d'atteindre, à savoir juger de la santé financière de l'établissement et s'assurer de son respect des différentes contraintes et limites imposées par les autorisées concernées.
Dans ce chapitre, nous allons définir les différents outils de mesure de risque, jugés pertinents et fiables, pour pouvoir quantifier tout type de risque au niveau des différents portefeuilles existants.

2.1 La volatilité

La volatilité est considérée comme la base de la mesure du risque des actifs financiers dans la gestion de portefeuille, et par définition elle mesure des amplitudes des variations du cours d'un actif financier, durant tous les horizons (court, moyen et long terme).
Ainsi, plus la volatilité d'un actif est élevée plus l'investissement dans ce portefeuille sera considéré comme risqué et par conséquent plus l'espérance de gain (ou risque de perte) sera important. Par contre, un portefeuille sans risque ou très peu risqué aura une volatilité très faible.
Alors que cette notion tient aujourd'hui une place primordiale dans l'étude des marchés,elle est également énormément utilisée pour diversifier les portefeuilles, gérer le risque, calculer les prix des options.
Les périodes de forte volatilité se traduisent souvent par des cours relativement bas ce qui permet aux investisseurs d'anticiper une rentabilité plus élevée.

Types de volatilité :

1. **La volatilité historique** : Basée sur les variations historiques que le cours d'un titre à connu. Elle peut être calculé sur différents horizon de temps suivant l'analyse désirée. La seule limite à cette méthode et non des moindres, repose sur le fait qu'il est difficile de se

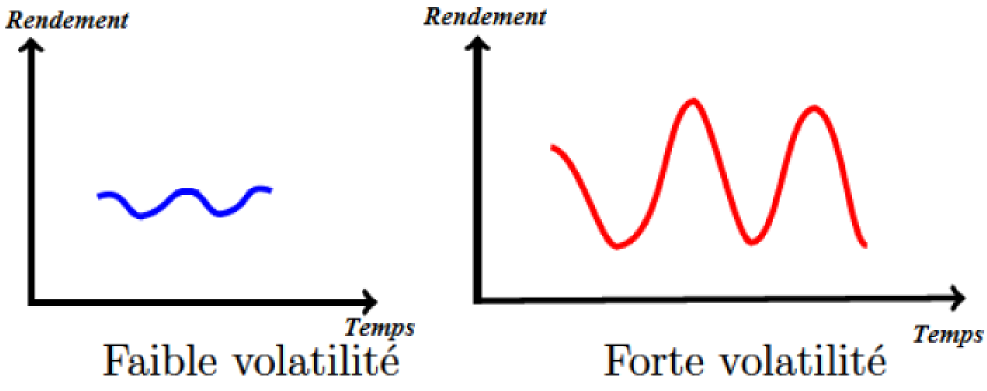

FIGURE 2.1 – Interprétation de la volatilité

baser sur des données historiques pour prédire les variations futures.
Cette volatilité est la plus simple à calculer car elle ne nécessite que très peu d'outils mathématiques. Elle est déterminée par l'écart type ou par la variance.

2. **La volatilité implicite** : Correspondant au prix du risque d'une option. Elle représente la volatilité anticipée par les acteurs du marché pour la durée de vie de l'option et transparaît dans la prime de l'option. Ainsi plus la volatilité implicite est élevé et plus la prime de l'option sera élevée et inversement.

Pour calculer la volatilité,on utilise le calcul de l'écart type.

La variance

La variance est l'un des instruments les plus importants dans l'étude de risque financier,elle peut être considérée comme une mesure servant à caractériser la dispersion d'une distribution ou d'un échantillon autour de sa moyenne.

La variance d'un actif i est donnée par :

$$\sigma_i^2 = Var(R_i) = E[(R_i - E(R_i))^2] = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} R_{i,t}^2 - \bar{R}_i^2$$

avec :
$R_{i,t}$:le rendement de l'actif i à l'instant t.
T :le nombre de périodes.
$\bar{R}_i$:Le rendement moyen de l'actif i où $\bar{R}_i = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} R_{i,t}$.

L'écart-type

L'écart-type est une mesure de risque utilisé pour calculer la volatilité d'un actif. Il s'obtient en calculant la racine carrée de la variance.
Mathématiquement, l'écart type se traduit par la formule suivante :

$$\sigma_i = \sqrt{Var(R_i)} = \sqrt{\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} R_{i,t}^2 - \bar{R}_i^2}$$

La covariance

Selon la définition classique la covariance permet d'étudier les variations simultanées de deux variables par rapport à leurs moyennes respectives. En finance, cette notion permet de mesurer le degré de liaison des fluctuations de deux titres entres eux, ou encore d'un titre avec un indice.
Mathématiquement, la formule de la covariance est la suivante :

$$cov(R_i, R_j) = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(R_{i,t} - \bar{R}_i)(R_{j,t} - \bar{R}_j)$$

avec :

— $R_{i,t}$: le rendement de l'actif R_i à l'instant t.
— $R_{j,t}$: le rendement de l'actif R_j à l'instant t.
— T : le nombre de périodes.
— $\bar{R}_i$: La rendement moyen de l'actif R_i.
— $\bar{R}_j$= La rendement moyen de l'actif R_j.

Remarque 2.1.1. *Si les deux variables R_i et R_j sont indépendantes, alors $Cov(R_i, R_j) = 0$.*

Coefficient de corrélation

La corrélation entre deux actifs financiers, ou plus généralement entre deux variables aléatoires, est l'intensité de la liaison qui existe entre ces deux variables.
Afin de déterminer cette liaison, il suffit de calculer le coefficient de corrélation par la formule suivante :

$$r_{ij} = Cov(R_i; R_j) = \sigma_i \sigma_j$$

où $\sigma_i \sigma_j$ représentent respectivement les volatilités des titres i et j

⋆Propriétés du coefficient de corrélation

1. $-1 \leq r_{ij} \leq 1$
2. Si $r_{ij} = 1$ (respectivement -1), alors il existe une relation linéaire positive (respectivement négative) entre les titres i et j.
3. Si $r_{ij} = 0$ alors les deux titres i et j sont décorrélées.
4. Le coefficient de corrélation est symétrique : $r_{ij} = r_{ji}$

2.2 La Valeur à Risque (VaR)

La VaR, abréviation de Valeur à Risque, représente une méthodologie récente qui utilise des techniques statistiques, pour calculer la perte maximale probable due au risque de marché, sur un portefeuille donné.

La définition de la banque J .P. Morgan [10] est celle qui résume le mieux le concept de la VaR :

"La VaR est un estimé,avec un niveau de confiance prédéterminé, de combien peut-on perdre en gardant une position, durant un horizon donné".

Durant ces dernières années, la Valeur à Risque est devenue un indicateur de risque largement utilisé par les établissements financiers, elle permet en effet d'appréhender les risques de marchés de façon globale dans une unité de mesure commune ; quelle que soit la nature des risques (taux, change, actions,$\cdots$ etc).

Pour un horizon de gestion donné, la VaR_α correspond au montant de perte au-delà duquel une perte survient avec une probabilité de α. Elle est donnée par le quantile d'ordre α de la distribution des rendements du portefeuille :

$$VaR_\alpha = F_X^{-1}(\alpha) = -F_{-X}^{-1}(1-\alpha)$$

En d'autres termes on a, $\mathbb{P}(X \geq VaR_\alpha) = 1 - \alpha$.

La VaR_α est la perte maximale pouvant être constatée en un jour dans les α cas les plus favorables ou encore c'est la moindre perte pouvant être constatée en un jour dans les α cas défavorables.

Définition 2.2.1. *On appelle Valeur à risque de niveau $\alpha \in [0,1]$ le quantile de niveau α,*

$$\rho_\alpha(X) = \mathrm{VaR}(X;\alpha) = x_\alpha \text{ où } \quad \mathbb{P}[X \leq x_\alpha] = \alpha$$

ou encore

$$\mathrm{VaR}(X;\alpha) = \inf\{x, \mathbb{P}[X \leq x] \geq \alpha\} = F_X^{-1}(\alpha) = q_\alpha(X)$$

Remarque 2.2.2. *Avec cette notation, on notera que $\rho_\alpha(X) = \mathrm{VaR}(X;\alpha)$ est une fonction croissante en α, alors que certains articles et ouvrages notent $\rho_\alpha(X)$ le quantile d'ordre $1-\alpha$.*

Commençons par rappeler que la VaR vérifie une propriété de stabilité par transformation monotone :

Lemme 2.2.3. *[3] Pour tout $\alpha \in]0,1[$, si g est un fonction strictement croissante et continue à gauche :*

$$\mathrm{VaR}(g(X),\alpha) = F_{g(X)}^{-1}(\alpha) = g(F_X^{-1}(\alpha)) = g(\mathrm{VaR}(X;\alpha)),$$

alors que si g est un fonction strictement décroissante, continue à droite, et si F_X est bijective :

$$\mathrm{VaR}(g(X), \alpha) = F^{-1}_{g(X)}(\alpha) = g(F_X^{-1}(1-\alpha)) = g(\mathrm{VaR}(X; 1-\alpha)).$$

Démonstration. Nous ne démontrerons que le cas croissant (le raisonnement étant analogue dans le cas décroissant).

Si g est strictement croissante et continue à gauche, alors, pour tout $0 < \alpha < 1$,

$$F^{-1}_{g(X)}(\alpha) \leq x \text{ si et seulement si } \alpha \leq F_{g(X)}(x).$$

Puisque g est continue à gauche,

$$g(z) \leq x \text{ si et seulement si } z \leq \sup\{y \in \mathbb{R} \mid g(y) \leq x\},$$

pour tout x, z. En effet ;

$$\begin{aligned} g(z) \leq x \Leftrightarrow & z \leq g^{-1}(x) \\ \Leftrightarrow & z \leq \sup\{y \in \mathbb{R} \mid g(y) \leq x\} \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\alpha \leq F_{g(X)}(x) \text{ si et seulement si } \alpha \leq F_X(\sup\{y \in \mathbb{R} \mid g(y) \leq x\}).$$

$$\begin{aligned} \alpha \leq F_{g(X)}(x) \Leftrightarrow & \alpha \leq P[g(x) \leq x)] \\ \Leftrightarrow & P[X \leq g^{-1}(x)] \\ \Leftrightarrow & F_X(g^{-1}(x)) \\ \Leftrightarrow & F_X(\sup\{y \in \mathbb{R} \mid g(y) \leq x\}) \end{aligned}$$

— Si sup $\{y \in \mathbb{R} \mid g(y) \leq x\}$ est fini, on obtient l'équivalence souhaitée, puisque $\alpha \leq F_X(\sup\{y \in \mathbb{R} \mid g(y) \leq x\})$ si et seulement si $F^{-1}_{g(X)}(\alpha) \leq g(F_X^{-1}(\alpha))$, en utilisant le fait que $\alpha \leq F_X(z)$ est équivalent à $F_X^{-1}(\alpha) \leq z$.
— Si $\sup\{y \in \mathbb{R} \mid g(y) \leq x\}$ est infini, l'équivalence ci-dessus ne peut être utilisée, mais le résultat reste valable.

En effet, si $\sup\{y \in \mathbb{R} \mid g(y) \leq x\} = +\infty$, l'équivalence devient

$$\begin{aligned} \alpha \leq 1 \Leftrightarrow & F_X^{-1}(\alpha) \leq F_X^{-1}(1) \\ \Leftrightarrow & F_X^{-1}(\alpha) \leq +\infty \end{aligned}$$

La stricte croissante de g et la continuité à droite permettent d'obtenir

$$F_X^{-1}(\alpha) \leq \sup\{y \in \mathbb{R} \mid g(y) \leq x\} g(F_X^{-1}(\alpha)) \leq x$$

En effet ;

$$\begin{aligned}\alpha \leq F_X(\sup\{y \in \mathbb{R} \mid g(y) \leq x\}) &\Leftrightarrow F_X^{-1}(\alpha) \leq g^{-1}(x) \\ &\Leftrightarrow g(F_X^{-1}(\alpha)) \leq x.\end{aligned}$$

En combinant toutes les inégalités, on peut écrire

$$F_{g(X)}^{-1}(\alpha) \leq x \text{ si et seulement si } g(F_X^{-1}(\alpha) \leq x$$

pour tout x, ce qui implique $F_{g(X)}^{-1}(\alpha) = g(F_X^{-1}(\alpha))$ pour tout α.

□

La fonction quantile est utile dans les méthodes de simulation de part la propriété suivante (on parle souvent de « méthode d'inversion de la fonction de répartition») :

Proposition 2.2.4. *[3] Soit $U \sim \mathcal{U}(0,1)$ et soit X une variable aléatoire quelconque. La variable aléatoire $F_X^{-1}(U)$ a même loi que X.*

Démonstration. Quel que soit $x \in \mathbb{R}$, avec le Lemme 2.2.3, on a :

$$\mathbb{P}[F_X^{-1}(U) \leq x] = \mathbb{P}[F_X(x) \geq U] = F_X(x).$$

□

En prenant $g(x) = x + c$ et $g(x) = cx$, on déduit immédiatement de cette dernière propriété que la VaR est invariante par translation et homogène. Toutefois, la VaR n'est pas sous-additive.

Exemple 4. *Considérons les risques indépendants suivant la loi de Pareto, $X \sim Par(1,1)$ et $Y \sim Par(1,1)$:*

$$\mathbb{P}(X > t) = \mathbb{P}(Y > t) = \frac{1}{t}, \quad t > 0.$$

Nous avons alors :

$$\mathrm{VaR}(X;\alpha) = \mathrm{VaR}(Y;\alpha) = \frac{1}{1-\alpha}$$

De plus, on peut vérifier que :

$$\mathbb{P}[X + Y \leq t] = 1 - \frac{2}{t} - 2\frac{\log(1+t)}{t^2}, \quad t > 0.$$

Comme nous avons :

$$\mathbb{P}[X + Y \leq 2\,\mathrm{VaR}[X;\alpha]] = \alpha - \frac{(1-\alpha)^2}{2}\log(\frac{1+\alpha}{1-\alpha}) < \alpha$$

l'inégalité :

$$\mathrm{VaR}(X;\alpha) + \mathrm{VaR}(Y;\alpha) < \mathrm{VaR}(X+Y;\alpha)$$

est vraie quel que soit α, de sorte que la VaR *ne peut pas être sous-additive dans ce cas.*

2.3 La Valeur à Risque Conditionnelle : (CVaR)

La VaR représente plusieurs avantages tels que la facilité de comparaison et d'interprétation. Tandis que la VaR ne prend pas en compte le montant des pertes l'excédant.

Ainsi la VaR n'est pas sous-additive[1], cela veut dire qu'une diversification n'implique pas un risque réduit.

Pour surmonter les limites de VaR, une nouvelle mesure de risque appelée la VaR conditionnelle ($CVaR$), définie comme la perte attendue dépassant la VaR peut être adoptée. C'est la valeur moyenne des pertes qui excèdent la VaR.

Ci-joint une illustration graphique de ces deux notions :

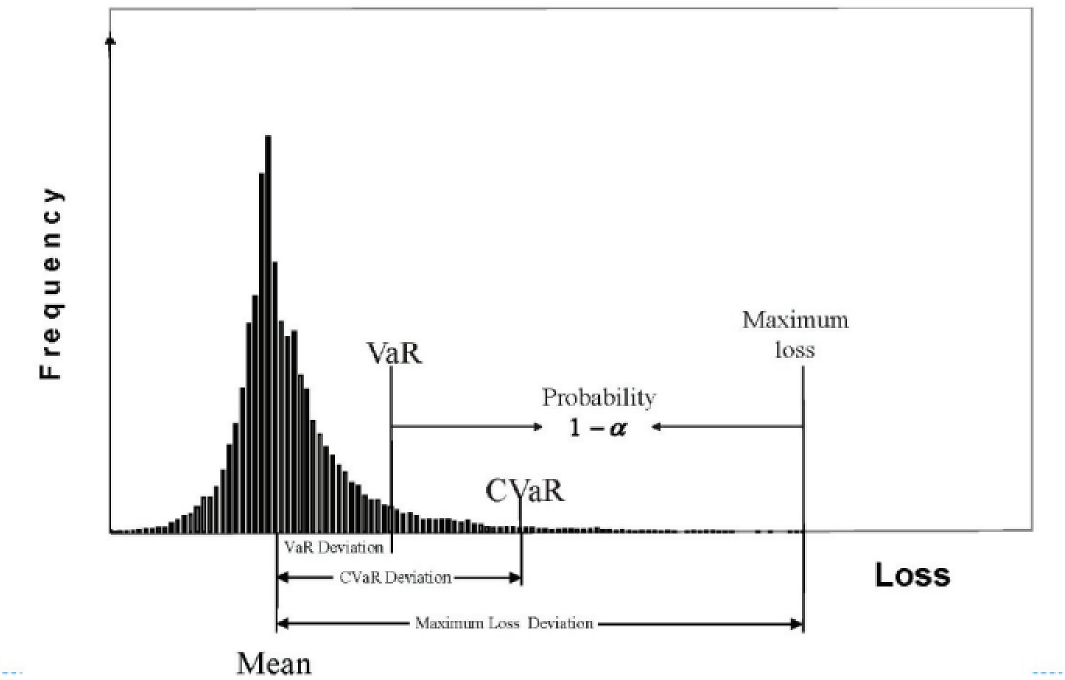

FIGURE 2.2 – Illustration graphique de la VaR et de la CVaR

Définition 2.3.1. *Soit X une fonction aléatoire de perte ayant une fonction de répartition F_X. Soit $\alpha \in [0, 1]$,*

$$CVaR_\alpha(X) = E[X \mid X \geq VaR_\alpha(X)]$$

Cette expression peut s'écrire autrement comme suit :

$$\begin{aligned}\bar{q}_\alpha(X) = \mathrm{CVaR}_\alpha(X) &= E[X \mid X \geq \mathrm{VaR}_\alpha(X)] \\ &= \frac{E[X\mathbf{1}_{[q_\alpha(X),\infty[}(X)].}{P(X \geq q_\alpha(X))} \\ &= \frac{1}{1-\alpha}E[X\mathbf{1}_{[q_\alpha(X),\infty[}(X)] \\ &= \frac{1}{1-\alpha}\int_{q_\alpha(X)}^{\infty} x dF_X(x) \\ &= \frac{1}{1-\alpha}\int_{\alpha}^{1} q_p(X)dp.\end{aligned}$$

où

$$\mathbf{1}_{[q_\alpha(X),\infty[}(X) = \begin{cases} 1 & si\ X \geq q_\alpha(X) \\ 0 & si\ X < q_\alpha(X) \end{cases}$$

Le $CVaR$ est compatible avec la cohérence définie au dessus et vérifie en plus les propriétés :

Proposition 2.3.2. *[13]*

1. *$CVaR_\alpha$ est équivariant par translation, i.e., pour tout $t \in \mathbb{R}$*

$$CVaR_\alpha(X+t) = CVaR_\alpha(X) + t$$

2. *$CVaR_\alpha(X)$ est positivement homogène, i.e., pour tout $t > 0$*

$$CVaR_\alpha(tX) = tCVaR_\alpha(X)$$

3. *Si X admet une densité, alors*

$$E[X] = (1-\alpha)CVaR_\alpha(X) - \alpha CVaR_\alpha(-X)$$

4. *$CVaR_\alpha$ est à dominance monotonique d'ordre 2, i.e.,*

$$si\ X_1 < X_2\ alors\ CVaR_\alpha(X_1) \leq CVaR_\alpha(X_2)$$

5. *$CVaR_\alpha$ est convexe, i.e., pour tous variables aléatoires X_1 et X_2 et pour $0 < \lambda < 1$, alors*

$$\mathrm{CVaR}_\alpha(\lambda X_1 + (1-\lambda)X_2) \leq \lambda\,\mathrm{CVaR}_\alpha(X_1) + (1-\lambda)\,\mathrm{CVaR}_\alpha(X_2)$$

Une autre caractérisation de la CVaR, très utile pour sa détermination pratique est obtenue de la manière suivante, Uryasev et Rockafellar (2000)[16] :

$$CVaR_\alpha(X) = \inf_{c\in\mathbb{R}}\{c + \frac{1}{1-\alpha}E[X-c]^+\} \tag{2.1}$$

où : $[z]^+ = max(z, 0)$.

Proposition 2.3.3. *[9] Soit : $X \in \mathcal{L}^\infty(\Omega)$. Définissons*

$$\phi = \begin{cases} P[X = \sup X] & pour \quad \sup X < \infty \\ 0 \quad sinon \end{cases}$$

Le superquantile $\bar{q}_\alpha(X)$ est une fonction continue strictement croissante de α sur $[0, 1-\phi]$, et

$$\bar{q}(X) = \sup X \ \ sur \ [1-\phi, 1].$$

Démonstration. Notez que si pour $\alpha_1 < \alpha_2$ nous avons $\bar{q}_{\alpha_1}(X) = \bar{q}_{\alpha_2}(X)$, alors, par propriété du superquantile,

$$\min_c c + \frac{1}{1-\alpha_1} E[X-c]^+ = \min_c c + \frac{1}{1-\alpha_2} E[X-c]^+.$$

Pour chaque valeur de c, si $c < \sup X$, alors $E[X-c]^+ > 0$ et

$$c + \frac{1}{1-\alpha_1} E[X-c]^+ < c + \frac{1}{1-\alpha_2} E[X-c]^+$$

Par conséquent,

$$argmin_c c + \frac{1}{1-\alpha_1} E[X-c]^+ = \sup X.$$

Cela prouve que $\bar{q}_\alpha(X)$ en tant que fonction de α peut avoir qu'un seul intervalle de constance, qui est pour $\alpha \in [1 - P(X = \sup X), 1]$.
Pour l'intervalle $\alpha \in [0, 1 - P[X = \sup X]]$, la fonction $\bar{q}_\alpha(X)$ est strictement croissante en α. □

Il est facile de montrer que le superquantile est également concave par rapport à l'opération de mélange.
La proposition suivante montre une déclaration légèrement plus générale.

Proposition 2.3.4. $(1-\alpha)\bar{q}_\alpha(X)$ *est une fonction concave de (X, α) par rapport à l'opération de mélange et de l'opération d'addition, respectivement, c'est-à-dire,*

$$(1-\alpha_m)\bar{q}_{\alpha_m}(\lambda X_1 \bigoplus (1-\lambda)X_2) \geq \lambda[(1-\alpha_1)\bar{q}_{\alpha_1} x_1(X_1)] + (1-\lambda)[(1-\alpha_2)\bar{q}_{\alpha_2}(X_2)],$$

où $\alpha_m = \lambda\alpha_1 + (1-\lambda)\alpha_2$, $\lambda, \alpha_1, \alpha_2 \in [0, 1]$, $X_1, X_2 \in \mathcal{L}^\infty(\Omega)$.

Démonstration. Noter que $c(1-\alpha) + E[X-c]^+$ est conjointement linéaire par rapport à l'opération de mélange sur X et l'opération d'addition sur α. Puisque $(1-\alpha)\bar{q}_\alpha(X) = \min_c c(1-\alpha) + E[X-c]^+$, alors, en tant que minimume sur une collection de fonctions linéaires, $(1-\alpha)\bar{q}_\alpha(X)$

est conjointement concave sur (X, α) en fonction de l'opération de mélange et de l'opération d'addition. $\square$

2.4 The buffered probability of exceedance (bPOE)

Dans cette section on va définir et donner quelques propriétés mathématique d'une nouvelle mesure de risque appelée : the Buffered probability of exceedance on abrégé $bPOE$.
La notion de $bPOE$ a été introduite et étudiée par Mafusalov et Uryasev (2014), est une une extension de la notion de the porbability of exceedence (POE).
Rappelons d'abbord de la défintion de la POE.

Définition 2.4.1 (The Probability of exceedance (POE))**.** *Soit X une variable aléatoire de perte. La probabilité de la variable aléatoire de perte X dépasse un seuil $x \in \mathbb{R}$ est égale à :*

$$p_x(X) = P[X > x] = 1 - F_X(x)$$

appelée la Probability of exceedance (POE)

Remarque 2.4.2.
- *La POE est également connus par : le complémentaire de la fonction de répartition, distribution de queue, dépassement (exceedance),fonction de survie et fonction de fiabilité.*
- *La POE fournit une limite basse sur les résultats de queue dépassant le seuil, mais elle ne fournit pas d'information sur l'ampleur de ces résultats.*

Pour définir la bPOE, nous introduisons les notions mathématiques suivantes :

Pour toute variable aléatoire X avec fonction de répartition $F_X(x)$ il existe une variable aléatoire $\bar{X} = \bar{q}(F_X(x), X)$ avec fonction de répartition $\bar{F}_X(x) = F_{\bar{X}}(x)$ appelée fonction de superdistribution, qui été introduite comme un inverse de superquantile $(CVaR)$:

$$\bar{F}_X(x) = \begin{cases} 1 \quad \text{pour} \quad x \geq supX, \\ \bar{q}^{-1}(x; X) \quad \text{pour} \quad E[X] < x < supX, \\ 0 \quad \text{ailleurs} \end{cases}$$

Définition 2.4.3. *[9] Pour une variable aléatoire $X \in L^1(\Omega)$ et $x \in \mathbb{R}$,la $bPOE$ est définie comme*

$$\bar{p}_x(X) = \begin{cases} 0 \quad pour \quad x \geq supX \\ 1 - \bar{q}^{-1}(x; X) pour \quad E[X] < x < supX \\ 1 \quad ailleur \end{cases}$$

où pour $x \in (E[X]; supX)$, $\bar{q}^{-1}(x; X)$ est l'inverse de $\bar{q}(\alpha; X)$.

La $bPOE$ est la fonction inverse du superquantile $(CVaR)$ $\bar{q}_\alpha(X) = \bar{q}(\alpha; X)$.

Lorsque α passe de 0 à 1, $\bar{q}_\alpha(X)$ passe de $E[X]$ à $supX$, et donc, le domaine de la fonction inverse est $(E[X]; supX)$, où l'inverse est uniquement défini car $\bar{q}(\alpha; X)$ strictement croissant sur $[0; P[X < supX]]$.

Remarque 2.4.4. *Même s'il existe de similitude entre POE et bPOE, Cependant, le bPOE est une limite supérieure pour le POE car il inclut tous les résultats dépassant le seuil, ainsi que certains résultats inférieurs au seuil. Les résultats en dessous du seuil forment ce qu'on appelle le "buffer", par conséquent, bPOE est un buffred POE. En ce sens, l'estimation de l'incertitude des pertes donnée par bPOE est plus prudente que celle donnée par POE.*

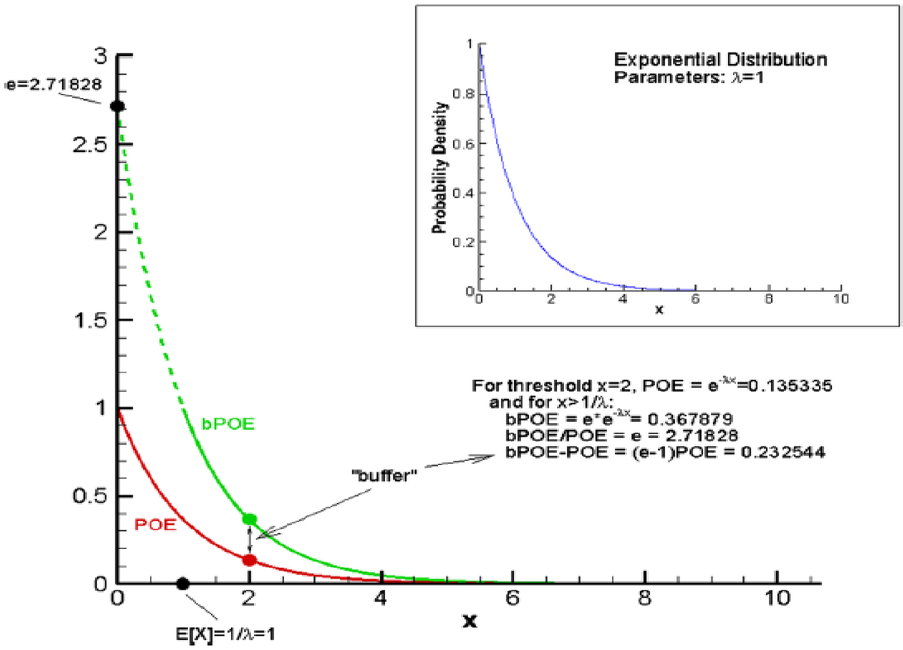

FIGURE 2.3 – Une illustration de la *POE* et de la *bPOE* pour la distribution exponentielle

Remarque 2.4.5. *Ainsi la bPOE est calcule la proportion des résultats les plus défavorables qui sont moyens à x c'est à dire :*

$$\bar{p}_x(X) = \{1 - \alpha \quad tq \quad \bar{q}_\alpha(X) = x\}$$

La figure suivante 2.4 présente une illustration de bPOE pour une variable aléatoire distribuée.

Aussi la bPOE est :

— La probabilité d'une queue telle que la moyenne de cette queue soit égale au seuil,
— Une fonction quasi-convexe du nombre aléatoire variable en fonction l'opération d'addition régulière,
— Une fonction concave par rapport à l'opération de mélange,
— Une fonction monotone de la variable aléatoire,

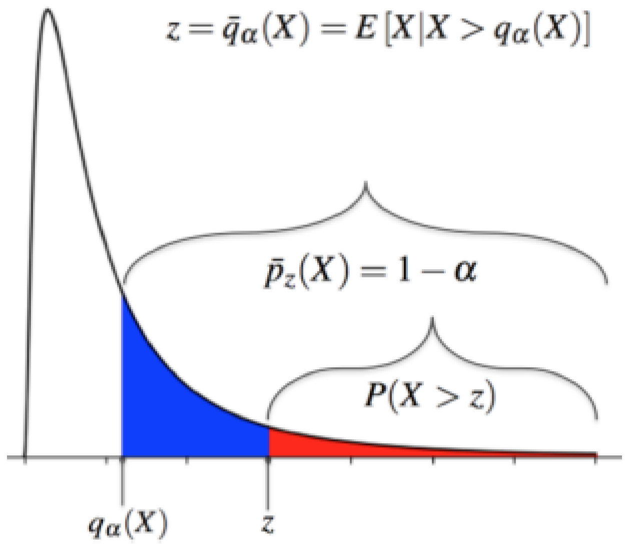

FIGURE 2.4 – Une illustration de bPOE pour une variable aléatoire distribuée LognormalX

— Une fonction strictement décroissante du seuil sur l'intervalle entre l'attente $E[X]$ et le supremum essentiel $supX$

Proposition 2.4.6. *Pour une variable aléatoire X et $x \in \mathbb{R}$, la buffered probability of exceedance est égale à :*

$$\bar{p}_x(X) = \begin{cases} 0, & si \quad x = \sup X \\ \min_{a\geq 0} E[a(X-x)+1]^+, & sinon \end{cases}$$

Démonstration. Par la définition de la buffered probability of exceedance on a trois cas :

1. $\bar{p}_x(X) = 1 - \bar{q}^{-1}(x; X)$ si $EX < x < \sup X$,
2. $\bar{p}_x(X) = 1$ si $x < EX$ ou $x = EX < \sup X$,
3. $\bar{p}_x(X) = 0$ si $x \geq \sup X$.

Prouvons la proposition cas par cas.

1. Soit $E[X] < x < \sup X$, prenons $x = 0$. Comme $\bar{q}_\alpha(X)$ est une fonction strictement croissante sur $\alpha \in [0, 1 - P[X = \sup X]]$, alors l'équation $\bar{q}_\alpha(X) = 0$ a une solution unique $\bar{q}_\alpha(X)$ pour $E[X] < x < \sup X$.
   Alors, $\bar{p}_0(X) = p$ de telle sorte que

$$\min_c c + \frac{1}{p}E[X-c]^+ = 0$$

   Comme $\bar{q}_\alpha(X)$ est une fonction croissante de paramètre α, alors nous pouvons reformuler $\bar{p}_0(X) = \min_p p$ de telle sorte que $\min_c c + \frac{1}{p}E[X-c]^+ \leq 0$.

Donc,

$$\begin{aligned}\bar{p}_0(X) &= \min_{p,c} p \\ \text{s.c} \quad & c + \frac{1}{p}E[X-c]^+ \leq 0.\end{aligned}$$

Prenons c^* comme un optimal on a : $c^* < 0$, puisque

$$c^* \leq c^* + \frac{1}{p^*}E[X-c^*]^+ \leq 0$$

et $c^* = 0$ implique $\sup X \leq 0$,ce qui n'est pas le cas qu'on a considère comme hypothèsr.
Donc

$$\begin{aligned}\bar{p}_0(X) &= \min_{p,c} p \\ \text{s.c} \quad & p\frac{c}{|c|} + E[\frac{1}{|c|}X - \frac{c}{|c|}]^+ \leq 0.\end{aligned}$$

Puisque $c^* < 0$, alors $\frac{c^*}{|c^*|} = -1$.
En outre, désignant $a = \frac{1}{|c|}$, on a :

$$\begin{aligned}\bar{p}_0(X) &= \min_{p,a>0} p \\ \text{s.c.} \quad & E[a(X+1)]^+ \leq p\end{aligned}$$

et donc,

$$\bar{p}_0(X) = \min_{a\geq 0} E[aX+1]^+$$

Notez que le changement de $a > 0$ à $a \geq 0$ inclut la valeur 1 à la région réalisable, ce qui n'a pas d'incidence sur le cas considéré. Enfin, comme $\bar{p}_x(X) = \bar{p}_0(X-x)$, alors

$$\bar{p}_x(X) = \min_{a\geq 0} E[a(X-x)+1]^+.$$

2. Pour $E[X] \geq x$, on a

$$E[a(X-x)+1]^+ \geq aE[X-x]+1 \geq 1$$

On note aussi que $E[a(X-x)+1]^+ = 1$ pour $a = 0$.
Donc,

$$\min_{a\geq 0} E[a(X-x)+1]^+ = 1$$

3. Pour $x = \sup X$, par la formule, $\bar{p}_x(X) = 0$.

On considère $x > \sup X$, i.e., $X - x \leq -\varepsilon < 0$.
Prenant $a = \frac{1}{\varepsilon}$ donne $a(X-x) \leq -1$, donc,

$$\min_{a \geq 0} E[a(X-x)+1]^+ = 0$$

□

Corollaire 2.4.7. *Pour $E[X] < x < \sup X$,*

$$\bar{p}_x(X) = 1 - \bar{q}^{-1}(x;X) = \min_{c<x} \frac{E[X-c]^+}{x-c}. \tag{2.2}$$

En outre, pour $x = \bar{q}_\alpha(X)$, où $\alpha \in (0,1)$, il est valable que

$$q_\alpha(X) \in \arg\min_{c<x} \frac{E[X-c]^+}{x-c},$$

et, par conséquent,

$$\bar{p}_x(X) = \frac{E\left[X - q_\alpha(X)\right]^+}{\bar{q}_\alpha(X) - q_\alpha(X)}$$

Démonstration. Puisque $E[X] < x < \sup X$, alors $\bar{q}^{-1}(x;X) \in [0,1]$, donc, $a = 0$ n'est pas optimal pour $\min_{a\geq 0} E[a(X-x)+1]^+$. Donc, par changement de variable $a \to \frac{1}{x-c}$ mène à :

$$\min_{a\geq 0} E[a(X-x)+1]^+ = \min_{c<x} E\left[\frac{1}{x-c}(X-x)+1\right]^+ = \min_{c<x} \frac{E[X-c]^+}{x-c}.$$

Notez que si $x = \bar{q}_\alpha(X)$, alors $\bar{p}_x(X) = 1 - \bar{q}^{-1}(x;X) = 1-\alpha$.
Puisque $\bar{q}_\alpha(X) = q_\alpha(X) + \frac{1}{1-\alpha} E\left[X - q_\alpha\right]^+$, alors

$$\bar{p}_x(X) = 1 - \alpha = \frac{E\left[X - q_\alpha(X)\right]^+}{\bar{q}_\alpha(X) - q_\alpha(X)},$$

Donc $q_\alpha(X) \in argmin_{c<x} \frac{E[X-c]^+}{x-c}$. □

Corollaire 2.4.8. *Pour toute variable aléatoire X, buffered probability of exceedance $\bar{p}_x(X)$ est une fonction continue strictement décroissante de x à l'intervalle $x \in [E[X], \sup X[$.*

Démonstration. Pour $x \in [E[X], \sup X[$ on a : $\bar{p}_x(X) = 1 - \bar{q}^{-1}(x;X)$.
D'après la proposition la fonction $\bar{q}(\alpha;X)$ est strictement croissante continue pour $\alpha \in [0, 1 - P[X = \sup X]]$.
Alors, pour $x \in [E[X], \sup X]$ on peut dire que la fonction $\bar{q}^{-1}(x;X)$ est une fonction continue strictement croissante de x. □

Proposition 2.4.9. *La fonction*

$$\frac{1}{1-\bar{F}_X(x)} = \frac{1}{\bar{p}_x(X)}$$

est une fonction convexe en fonction de x. De plus, il est linéaire par morceaux pour distribué discrètement X.

Proposition 2.4.10. *[9] La bPOE est une fonction quasi-convexe fermée de variable aléatoire (en fonction de l'opération d'addition.), c'est-à-dire l'ensemble $\{X \mid \bar{p}_x(X) \leq p\}$ est un ensemble convexe fermé de variables aléatoires pour tout $p \in \mathbb{R}$.*
En outre, pour $p \in [0,1[$,

$$\bar{p}_x(X) \leq p \Leftrightarrow \bar{q}_{1-p}(X) \leq x.$$

Démonstration.

— Si $p \geq 1$, alors l'inégalité $\bar{p}_x(X) \leq p$ s'appliquent à tout x et X.
Par conséquent, $\{X \mid \bar{p}_x(X) \leq p\}$ est un ensemble convexe fermé.

— Pour $p < 0, \{X \mid \bar{p}_x(X) \leq p\} = \emptyset$.

— On considère $p \in [0,1[$;
On Suppose que $\bar{p}_x(X) \leq p$, alors $\bar{p}_x(X) = p - \varepsilon$ pour certains $\varepsilon \geq 0$.
Alors, soit $\bar{q}_{1-\bar{p}_x(X)}(X) = \bar{q}_{1-p+\varepsilon}(X) = x$, alors, $\bar{q}_{1-p}(X) \leq x$, où $\sup X \leq x$.
Donc,

$$\bar{q}_{1-p}(X) \leq \bar{q}_1(X) \leq x$$

Inversement, si $\bar{q}_{1-p}(X) \leq x$, alors soit $\bar{q}_{1-p+\varepsilon}(X) = x$ pour certain $\varepsilon \geq 0$, où $\sup X \leq x$.
Dans le premier cas, $\bar{p}_x(X) = p - \varepsilon \leq p$, et

$$\bar{p}_x(X) \leq p \Leftrightarrow \bar{q}_{1-p}(X) \leq x.$$

Si $\sup X \leq x$, alors $\bar{p}_x(X) = 0 \leq p$.
La fonction $\bar{q}_{1-p}(X)$ est une fonction convexe fermée de X, par conséquent, l'ensemble $\{X \mid \bar{q}_{1-p}(X) \leq x\}$ est fermé convexe.
Alors, l'ensemble $\{X \mid \bar{p}_x(X) \leq p\}$ est fermé convexe.

$\square$

Chapitre 3

Modèles d'optimisation de portefeuille

3.1 Théorie d'utilités

Le problème d'un investisseur est de choisir parmi l'ensemble des allocations possibles le portefeuille optimal selon un critère donné. Le choix du critère de sélection de portefeuille peut avoir un effet important sur la composition du portefeuille optimal et donc sur le résultat de l'allocation. Les modèles de sélection de portefeuille ont fait l'objet de nombreuses études dans la littérature financière.

3.1.1 Définitions

- **L'utilité**
  L'utilité (en économie) est une mesure du bien-être ou de la satisfaction obtenue par la consommation, ou du moins l'obtention, d'un bien ou d'un service.
  L'utilité est un instrument scientifique, utilisé par les économistes pour comprendre comment les consommateurs rationnels répartissent leurs ressources limitées entre les différents biens et services qui leur procure une certaine satisfaction.
- **L'utilité totale**
  L'utilité totale notée U d'un bien X mesure la satisfaction globale que l'individu retire de la consommation de ce bien.
  Le niveau de U dépend de la quantité du bien X. Autrement dit : $U = U(X)$
  Pour deux biens X et Y, le niveau de satisfaction dépend de la quantité consommée du bien X et de la quantité consommée du bien Y :

$$U = U(X, Y)$$

où :

⋆ U =le niveau de satisfaction ou d'utilité ;

⋆ X =quantité consommée du bien X ;

⋆ Y =quantité consommée du bien Y.

- **L'utilité marginale**

  L'utilité marginale, U_m, mesure l'évolution de l'utilité totale "à la marge", c'est-à-dire pour une variation très petite de la quantité consommée. On va alors distinguer deux types de bien :

  — Les biens imparfaitement divisibles pour lesquels il existe une unité de mesure en deçà de laquelle il est impossible de descendre (une voiture, une paire de lunette,...).
  L'utilité marginale d'un bien X imparfaitement divisible est alors la variation de l'utilité totale induite par une unité supplémentaire de ce bien. On le note :

$$U_m(X) = \frac{\Delta U}{\Delta X}$$

  — Les biens parfaitement divisibles pour lesquels il existe également une unité de mesure mais qu'il est toujours possible de réduire (l'eau, le sel,...).
  L'utilité marginale d'un bien X parfaitement divisible est la variation de l'utilité totale pour une variation infiniment petite de la quantité consommée. On le note :

$$U_m(X) = \frac{dU}{dX}$$

  Principe de l'utilité marginale décroissante

  L'utilité totale atteint son maximum au point de satiété càd au point de saturation du consommateur S.
  Au point S, l'utilité marginale est nulle : une unité S supplémentaire de consommation n'augmente plus la satisfaction.
  Si la consommation de X est poussée au-delà de S, l'utilité marginale devient négative et l'utilité totale diminue. On suppose qu'un individu arrête sa consommation au point S.
  Donc on fait l'hypothèse que l'utilité marginale est normalement décroissante mais toujours positive. Pour visualiser ce concept, il est judicieux de tracer graphiquement cette évolution :

3.1.2 Théorie de l'utilité espérée

La théorie d'utilité espérée est un cadre standard pour analyser les décisions des individus dans un univers incertain. Cette théorie est été introduite par Bernoulli (1738), qui été proposé de transformer les gains monétaires en une fonction d'utilité qui permet de mieux représenter la satisfaction de l'individu. Cette fonction d'utilité est une fonction croissante et concave. Dans ses travaux, Bernoulli (1738) a utilisé la fonction logarithmique du type

$$U(x) = \alpha \log(x)$$

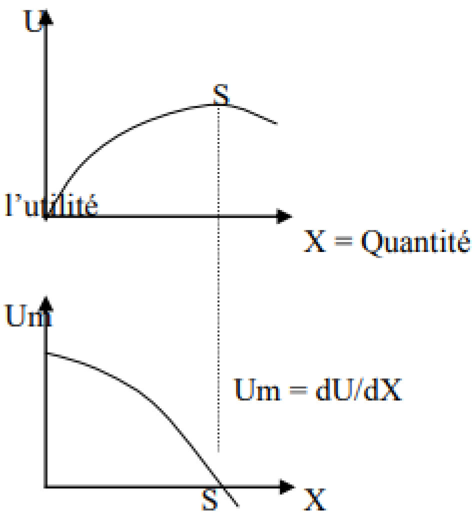

FIGURE 3.1 – Représentation graphique de l'utilité totale et de l'utilité marginale

D'une manière générale,l'évaluation d'une loterie par l'investisseur prend la forme suivante[20] :

$$\mathbb{E}(U(X)) = \sum_{i=1}^{n} p_i(x)U(x_i)$$

où

— X est une loterie,

— $p(x_i)$ est la probabilité d'occurrence du résultat $x_i \in X$,

Cette représentation permet d'évaluer la loterie X au moyen de l'espérance d'utilité des résultats engendrés par cette loterie.

La théorie de l'utilité, formalisée mathématiquement par Von Neumann et Morgenstern (1944), permet aux investisseurs averses au risque de prendre en compte la dimension risque dans leurs choix de décision. Cette théorie représente le soubassement de toute la théorie de choix en avenir incertain ; elle constituera aussi l'outil de base du critère de choix de portefeuille en incorporant les moments d'ordre supérieur à deux. Le principe de ce critère est qu'un investisseur rationnel maximise son utilité espérée, en égard de son attitude vis-à-vis du risque lorsqu'il est face à un choix entre différentes combinaisons possibles du risque–rendement.

Considérons une loterie $X \in L$ à n résultats définie par le vecteur $X = (x_1, p_1; \ldots; x_n, p_n)$; où

— L est l'ensemble de loteries possibles ;

— x_i représente le paiement de l'événement i ;

— p_i est la probabilité d'occurrence de l'événement i.

— $p_i \geq 0$ et $\sum_i^n p_i = 1$.

La formalisation du comportement de l'investisseur rationnel repose sur un ensemble d'axiomes qui portent sur la relation binaire de préférence : $\geq$

1. **Axiome de comparabilité (dit encore de complétude)** :

L'individu peut toujours établir une comparaison entre les loteries disponibles :
Soit $X_1, X_2 \in L$;
— $X_1 \geq X_2$: X_1 est préféré à X_2 ;
— $X_2 \geq X_1$: X_2 est préféré à X_1
— $X_1 \sim X_2$: X_1est indifférent à X_2

2. **Axiome de transitivité (ou de cohérence)** :
Soit $X_1, X_2, X_3 \in L$ trois loteries Alors : $X_1 \geq X_2$ et $X_2 \geq X_3 \rightarrow X_1 \geq X_3$.
3. **Axiome de continuité** :
Soit $X_1, X_2, X_3 \in L$ trois loteries telles que $X_1 \geq X_2$ et $X_2 \geq X_3$.
Alors il existe un nombre réel $\alpha \in [0, 1]$ tel que :
$$X_2 \sim \alpha X_1 + (1 - \alpha) X_3$$
Cet axiome permet de déduire que des petites modifications au niveau des probabilités de survenance des événements ne changent pas l'ordre de préférence de l'individu.
4. **Axiome d'indépendance** :
Soit X_1, X_2 et $X_3 \in L$ trois loteries et $\alpha \in [0, 1]$, tel que $X_1 \geq X_2$.
Alors on a toujours
$$\alpha X_1 + (1 - \alpha) X_3 \geq \alpha_2 X_2 + (1 - \alpha) X_3$$
Ceci montre que l'introduction d'une nouvelle loterie à un ensemble de loteries existant n'influence pas les préférences de l'individu.

En se basant sur les axiomes cités ci-dessus, Von Neumann et Morgenstern (1944) ont établi un théorème qui permet de caractériser le principe de l'utilité espérée.

Théorème 3.1.1. *Soit une relation de préférence $\geq$, appliquée sur l'ensemble L, qui satisfait les axiomes de continuité et d'indépendance. Alors cette relation de préférence peut être représentée par une fonction linéaire par rapport aux probabilités d'occurrence des événements risqués, telle qu'il existe une fonction d'utilité $U : L \rightarrow \mathbb{R}$, pour toutes les loteries $X_1 = \{(x_1, p_1), \ldots, (x_n, p_n)\}$ et $X_2 = \left\{\left(x_1, p_1^{'}\right), \ldots, \left(x_n, p_n^{'}\right)\right\}$, on a :*
$$X_1 \geq X_2 \Longleftrightarrow \sum_{i=1}^{m} U(x_i) p_i \geq \sum_{i=1}^{m} U(x_i) p_i^{'}$$

A partir de ce théorème, VNM (1944) ont montré que l'utilité de chaque loterie peut être représentée par une fonction d'utilité linéaire par rapport aux probabilités d'occurrence des événements, sous la forme suivante :
$$\mathbb{E}(U(X)) = \sum_{i=1}^{n} p(x_i) U(x_i)$$

Ainsi, cette théorie montre que l'individu rationnel choisit la loterie qui lui présente l'utilité espérée la plus élevée.

Remarque 3.1.2. — *Lorsque la fonction d'utilité est concave, l'agent est dans ce cas averse au risque. Si la fonction d'utilité est convexe alors l'agent est preneur de risque, si non si la fonction d'utilité est linéaire alors l'agent est neutre au risque.*
— *Notons qu'on se basant sur le développement des séries de Taylor, la fonction de l'utilité espérée peut être approximée en fonction des moments d'ordre centrés. Ce résultat permet de résoudre le problème de sélection de portefeuille en tenant compte des moments d'ordre supérieur à deux.*

3.2 Approche Espérance-Variance d'un portefeuille

Rendement espéré d'un portefeuille

Considérons un portefeuille P composé de n titres, ayant des rendements R_i ; $i = 1, 2, ..., n$. Le rendement du portefeuille P, noté R_p , durant une période donnée est une combinaison linéaire pondérée des rendements qui le composent :

$$R_p = x_1R_1 + x_2R_2 + ... + x_nR_n = \sum_{i=1}^{n} x_iR_i$$

où x_i est la proportion du portefeuille (ou richesse) investi dans le titre i.
Le rendement espéré du portefeuille, noté μ_p, est égal à la moyenne pondérée des rendements enregistrés pendant cette période des différents titres qui composent ce portefeuille. Il est donné par l'expression suivante :

$$\mu_p = E[R_p] = \sum_{i=1}^{n} x_iE[R_i] = \sum_{i=1}^{n} x_i\mu_i$$

En notant : $x = (x_1, x_2, ..., x_n)'$ et $\mu = (\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n)'$, alors le rendement espéré d'un portefeuille P s'écrit sous la forme matricielle suivante :

$$\mu_p = \mu' x.$$

La variance d'un portefeuille

Le risque d'un portefeuille est calculé en fonction de sa volatilité, cette volatilité étant définie comme la variance ou l'écart-type des rentabilités des actifs financiers. Alors pour calculer le risque d'un portefeuille, on doit tenir compte de :
— La variabilité du rendement de chaque titre : la variance $Var(R_i)$.
— Le degré de dépendance existant entre les rendements des différents titres : la matrice de variance-covariance notée Σ.

Risque d'un portefeuille composé de deux titres :

La variance (risque) du taux de rendement d'un portefeuille composé de deux titres i et j est donnée par :

$$Var\left(R_p\right) = x_i^2 Var\left(R_i\right) + x_j^2 Var\left(R_j\right) + 2x_i x_j Cov\left(R_i, R_j\right)$$

Risque d'un portefeuille composé de n titres :

La variance du taux de rendement d'un portefeuille composé de n titres est la somme des produits des poids de chaque couple d'actifs par leur covariance :

$$Var\left(R_p\right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i x_j Cov\left(R_i, R_j\right).$$

La forme matricielle du risque s'écrit sous la forme :

$$\sigma_p^2 = Var\left(R_p\right) = x'\Sigma x,$$

où Σ est la matrice variance-covariance des rendements des différents titres, avec :

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11}^2 & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22}^2 & \cdots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \cdots & \sigma_{nn}^2 \end{pmatrix}$$

3.3 La théorie moderne de Markowitz

Le concept de la gestion du portefeuille était utilisé bien au milieu du siècle dernier. Néanmoins, la théorie moderne du portefeuille est née en 1952 avec la publication de l'article fondateur de *Harry Markowitz*. En partant du postulat que le risque d'un portefeuille peut être mesuré par la variance de sa rentabilité, Markowitz explicite et formalise le dilemme fondamental de la finance moderne : obtenir une rentabilité faible mais certaine, ou accepter de prendre un risque dans l'espoir d'accroître cette rentabilité.
Markowitz [12] formalise et quantifie également l'effet de diversification selon lequel une combinaison judicieuse de nombreux actifs dans un portefeuille, qui permet de réduire le risque total subi pour un taux de rentabilité espérée donné. Les travaux de Markowitz devaient s'avérer extrêmement importants et modifier profondément la façon de concevoir les problèmes financiers. Ils montrent, en particulier, que l'intérêt d'investir dans un titre financier ne doit pas être évalué séparément, mais dans le cadre de l'ensemble du portefeuille constitué par l'investisseur (diversification).

3.3.1 Les hypothèses du modèle de Markowitz

Les hypothèses Relatives aux actifs financiers

— **Hypothèse 1 :**
Tout investissement est une décision prise dans une situation de risque : le rendement R_i d'un actif financier i pour toute période future est par conséquent une variable aléatoire, dont ont fait l'hypothèse qu'elle est distribuée selon une loi normale, c'est à dire une distribution symétrique stable entièrement définie par deux paramètres : l'espérance mathématique $\mu = E(R_i)$ du rendement et son écart-type $\sigma_i = \sigma(R_i)$ de la distribution de probabilité du rendement.

— **Hypothèse 2** :
Les rendements des différents actifs financiers ne fluctuent pas indépendamment les uns des autres : ils sont corrélés ou, ce qui revient au même, ont des covariances non nulles $(\sigma_{ij} \neq 0)$.

— **Hypothèse 3** :
Les marchés sont parfaits : toutes les conditions pour que les prix correspondent à la réalité du moment sont réunies. L'entrée et la sortie sont libres et sans coût. L'information circule de manière totalement transparente. La concurrence est parfaite entre les acteurs composant le marché ...

Les hypothèses relatives aux comportements des investisseurs

— **Hypothèse 4** :
Le comportement des investisseurs est caractérisé par un degré plus ou moins prononcé d'aversion vis-à-vis du risque. Ce dernier est mesuré par l'écart-type de la distribution de la probabilité du rendement.

— **Hypothèse 5** :
Les investisseurs sont rationnels : bien que leur fonction de préférence soit purement subjective, ils opèrent, en référence à celle-ci, des choix strictement transitifs.

— **Hypothèse 6** :
Tous les investisseurs ont le même horizon de décision, qui comporte une seule période. Cette simplification, qui peut paraître exagérée, permet de mettre en oeuvre un modèle de décision qui tient compte du caractère hautement combinatoire du portefeuille.

3.3.2 Détermination du portefeuille optimal

Le problème posé par Markowitz est la recherche d'un portefeuille P composé de n actifs risqués, ayant respectivement des rendements R_i ; $i = 1, 2, \cdots, n$, suivant tous la loi normale. Chaque titre i est caractérisé par une espérance de rentabilité $\mu_i = E[R_i]$ et un écart-type σ_i. ou par une variance minimale à espérance de rentabilité donnée, ce portefeuille est dit efficace

(efficient).
Le choix d'un portefeuille efficient revient à résoudre le problème d'optimisation sous contraintes suivant :

$$\begin{cases} \min_x \sigma_p^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j \sigma_{ij} \\ \underline{\text{s.c}} \sum_{i=1}^n x_i \mu_i = \mu_p \\ \sum_{i=1}^n x_i = 1 \end{cases} \tag{3.1}$$

Dans la pratique, nous cherchons non pas un, mais tous les portefeuilles qui pour une espérance donnée minimise la variance.
La méthode classique de résolution consiste à minimiser une fonction économique Z définie par :

$$Z = Var(R_p) - \gamma E[R_p] = x'\Sigma x - \gamma\mu' x, \tag{3.2}$$

où γ est un paramètre qui représente le degré d'aversion au risque des investisseurs.
Par conséquent, le problème à résoudre est le suivant :

$$\begin{cases} \min_x \quad Z = x'\Sigma x - \gamma\mu' x \\ \underline{\text{s.c}} \quad \sum_{i=1}^n x_i = 1 \end{cases} \tag{3.3}$$

3.3.3 La frontière efficiente

L'objectif de la théorie moderne du portefeuille est toujours l'obtention de portefeuilles efficients. Un portefeuille est considéré comme efficient si l'une ou l'autre des conditions suivantes est satisfaite :

- Pour un niveau de rendement prévu donné, il n'existe aucun autre portefeuille comportant moins de risque.
- Pour un niveau de risque donné, il n'existe aucun autre portefeuille offrant un meilleur rendement prévu.

Un portefeuille qui répond à ces critères devrait apparaître sur la frontière efficiente.

On représente sur un graphique rentabilité-risque chaque action individuelle, caractérisée par son risque et sa rentabilité espérée. Toutes les actions numérotées $1, 2, 3$, etc. sont représentées par une croix point dans l'espace rentabilité-risque.

En effectuant toutes les combinaisons possibles de portefeuilles de titres, on obtient un ensemble de portefeuilles optimaux généralement appelé frontière efficiente,laquelle est représentée sur la figure ci dessus par la ligne AB.

Ces portefeuilles optimaux ou efficients sont tels que, pour un niveau de risque donné, ils maximisent la rentabilité ou, parallèlement, pour un niveau de rentabilité espérée, ils minimisent le risque.

Le portefeuille A est le portefeuille de risque minimal. Le portefeuille B est celui qui fournit la meilleure rentabilité espérée.

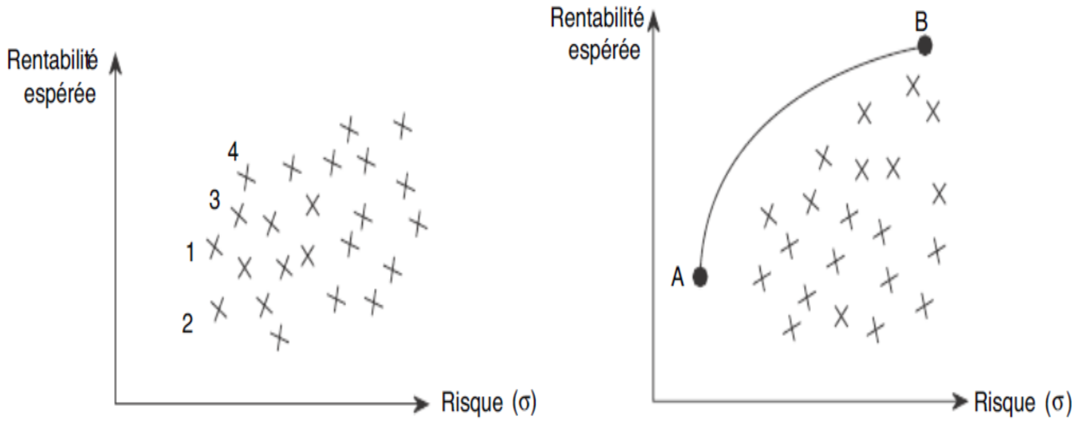

FIGURE 3.2 – Frontière efficiente de Markowitz

Selon Markowitz :
- Les points situés sous la courbe ne doivent pas intéresser les investisseurs.
- Les points situés sur la courbe sont les portefeuilles recherchés par les investisseurs.

3.4 Approche de Sharpe (1963-1964)

3.4.1 Modèle à indice simple de Sharpe

Sharpe [18] a été le premier qui a tenté de simplifier le modèle de Markowitz en développant les modèles à indice qui se base sur la simplification de la matrice de variances-covariances afin de réduire la charge de calcul.
Sharpe a proposé une diagonalisation de cette matrice en se basant sur le modèle à un seul indice en supposant que les fluctuations des rendements des actions peuvent être exprimés à l'aide d'une régression simple. Autrement dit,

$$r_i = a_i + b_i R_I + \varepsilon_i \quad \text{pour} \quad i = 1, \ldots, n$$

où :
- R_I : est le rendement d'indice économique donné I (indice boursier, indice du produit national brut, indice des prix ou voir même rendement le rendement du portefeuille du marché lui-même...)
- ε_i : est une variable aléatoire appelée bruit blanc qui vérifié les hypothèses suivant :
  - $E[\varepsilon_i] = 0$, et $\sigma^2_{\varepsilon_i} \neq 0 \quad$ pour $i = 1, \ldots, n$
  - $\sigma_{\varepsilon_i, \varepsilon_j} = \text{cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0, \quad \forall i \neq j;$
- $\sigma_{\varepsilon_i, I} = \text{cov}(\varepsilon_i, \mathrm{R}_I) = 0, \quad$ pour $i = 1, \ldots, n.$

Le rendement de portefeuille devient :

$$R(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i r_i = \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} x_i a_i + R_I \left(\sum_{i=1}^{n} x_i b_i \right) + \sum_{i=1}^{n} x_i \varepsilon_i$$

Soit $x_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} x_i b_i$ il en résulte :

$$R(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i a_i + x_{n+1} R_I + \sum_{i=1}^{n} x_i \varepsilon_i$$

Le rendement espéré est donné par :

$$E[R(x)] = \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} x_{\mathrm{i}} a_i + x_{n+1} E\left[R_I\right],$$

La variance du rendement est :

$$\sigma_P^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sigma_{\varepsilon_i}^2 + x_{n+1}^2 \sigma_I^2$$

Donc on a besoin que de $(n+1)$ termes à estimer au lieu de $\frac{n(n+1)}{2}$ variances et covariances pour l'approche de Markowitz.
Le concept de l'approche de Markowitz est basé sur la diversification qui permet de réduire davantage le risque du portefeuille. Malheureusement on ne peut réduire complètement le risque en augmentant indéfiniment la taille de portefeuille.
Sharpe a montré que le risque d'un portefeuille quelconque peut être décomposé en deux parties : le risque diversifiable ou risque non systématique et le risque non diversifiable ou risque de marché.

3.4.2 Modèle de marché de Sharpe

Sharpe a remplacé l'indice I par l'ensemble du marché M dans le modèle à indice simple. Dans ce cas, ce modèle porte le nom modèle de marché.
Le modèle de marché suppose une relation linéaire entre le rendement d'une action i et le rendement global du marché :[5]

$$r_i = \alpha_i + \beta_i R_M + \varepsilon_i$$

où ε_i est une variable aléatoire définie comme dans le modèle à indice simple.
Les paramètres α_i et β_i sont obtenus par la régression simple comme suit :

$$\beta_i = \frac{\operatorname{cov}\left(r_i, R_M\right)}{\operatorname{var}\left(R_M\right)} = \frac{\sigma_{iM}}{\sigma_M^2}$$

Coefficient bêta

Il représente la sensibilité du rendement du titre par rapport aux fluctuations du rendement du marché. Au niveau de son interprétation 5 possibilités existent :

- Si $\beta = 1$ les titres évoluent de façon identique, c'est-à-dire que les fluctuations du marché seront reproduites ;
- Si $\beta < 1$ signifie que le titre varie dans des proportions moindres que le marché ;
- Si $\beta > 1$ signifie que le titre évolue avec des fluctuations plus importantes que le marché global
- Si $\beta = 0$ signifie que le titre n'est pas corrélé au marché global.
- Si $\beta < 0$ signifie le rendement du titre varie dans le sens contraire à celui du marché.

Le risque de portefeuille est :

$$\begin{aligned}\sigma_P^2 = \operatorname{Var}[R(x)] &= \operatorname{Var}\left[\alpha_P + R_M\beta_P + \varepsilon(x)\right] = \operatorname{Var}\left[R_M\beta_P + \varepsilon(x)\right]\\ &= \operatorname{Var}\left[R_M\beta_P\right] + \operatorname{Var}[\varepsilon(x)] = \beta_{\mathrm{P}}^2 \operatorname{Var}\left[R_M\right] + \operatorname{Var}\left[\sum_{i=1}^n x_i\varepsilon_i\right]\end{aligned}$$

où $\beta_P = \sum_{i=1}^n x_i\beta_i$ est appelé le coefficient bêta du portefeuille.
Donc

$$\sigma_P^2 = \beta_P^2\sigma_M^2 + \sum_{i=1}^n x_i^2\sigma_{\varepsilon_i}^2.$$

Supposons que $x_1 = x_2 = \ldots\ldots = x_n = \frac{1}{n}$. Alors :

$$\sigma_P^2 = \beta_P^2\sigma_M^2 + \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^n \sigma_{\varepsilon_i}^2$$

Posons $M = \max_{1\le i\le n}\sigma_{\varepsilon_i}^2$, il en résulte que $0 \le \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^n \sigma_{\varepsilon_i}^2 \le \frac{nM}{n^2} = \frac{M}{n}$.
Donc

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sigma_P^2\right) = \beta_P^2\sigma_M^2$$

Comme dans le cas d'un seul titre, le risque de portefeuille peut être décomposé en deux parties :

- $\beta_P^2\sigma_M^2$: le risque systématique de portefeuille.
- $\sum_{i=1}^n x_i^2\sigma_{\varepsilon_i}^2$: le risque non systématique qui peut être éliminé en diversifiant le capital investi entre l'ensemble des actions.

Cette décomposition de risque est appelée l'effet de portefeuille ou l'effet de construction de portefeuille sur le risque, qui se décompose en deux éléments :

- L'effet Markowitz (ou effet des corrélations négatives).
- L'effet de diversification (ou effet des non-corrélations).

Considérons un portefeuille contenant n titres à pondération égale :

$$x_i = \frac{1}{n} \text{ pour tout } i = 1, \dots, n.$$

Soit σ_{ij} la corrélation entre les rendements r_i et r_j des deux titres i et j.
Si $\sigma_{ij} = 0 \quad \forall i, j = 1, \dots, n$ alors le risque de portefeuille sera :

$$\mathrm{Var}(R(x)) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sigma_{ii} = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2$$

Supposons que toutes les variances sont bornées, alors $\sigma_i^2 \leq M$ pour tout $i = 1, \dots, n$. Il en résulte que

$$\mathrm{Var}(R(x)) \leq \frac{M}{n}.$$

Donc

$$\lim_{n \to +\infty} (\mathrm{Var}(R(x))) = 0$$

Il s'agit de l'effet des non-corrélations.
Par contre si $\forall i, j = 1, \dots, n \quad (i \neq j) \quad \sigma_{ij} \neq 0$ alors le risque de portefeuille devient :

$$\mathrm{Var}(R(x)) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2 + \frac{1}{n^2} \sum_{\substack{i=1 \\ j=1 \\ i \neq j}}^{n} \sigma_{ij}$$

Pour n suffisamment grand, le risque de portefeuille devient approximativement :

$$\mathrm{Var}(R(x)) = \frac{1}{n^2} \sum_{\substack{i=1 \\ \text{et} \\ i \neq j}}^{n} \sigma_{ij}$$

Où : $\forall i, j = 1, \dots, n \quad (i \neq j) \qquad \sigma_{ij} \leq \sigma_i \sigma_j$.
Donc on aura

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{n} \sigma_{ij} \leq \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{n} \sigma_i \sigma_j \leq n^2 M^2.$$

Posons

$$\mathrm{Cov}_{\text{moyenne}} = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{n} \sigma_{ij}$$

Il en résulte que

$$\frac{n(n-1)}{n^2} \mathrm{Cov}_{\text{moyenne}} \leq M^2.$$

Alors

$$\lim_{n \to +\infty} (\mathrm{Var}(R(x))) = \bar{\sigma}$$

où $\bar{\sigma} = \lim_{n\to\infty}[\mathrm{Cov}_{\text{moyenne}} \,]$.

Donc le risque de portefeuille se décompose en deux parties :

— Le risque diversifiable : la partie de risque qui est dû à l'effet de diversification et que l'on peut éliminer en augmentant la taille de portefeuille.

— Le risque non-diversifiable (ou le risque de marché) : la partie de risque que l'on ne peut éliminer.

Remarque 3.4.1. *Il faut souligner que l'augmentation du nombre de titres au-delà d'un certain seuil ne permet pas de réduire le risque. La figure suivante montre bien cette situation :*

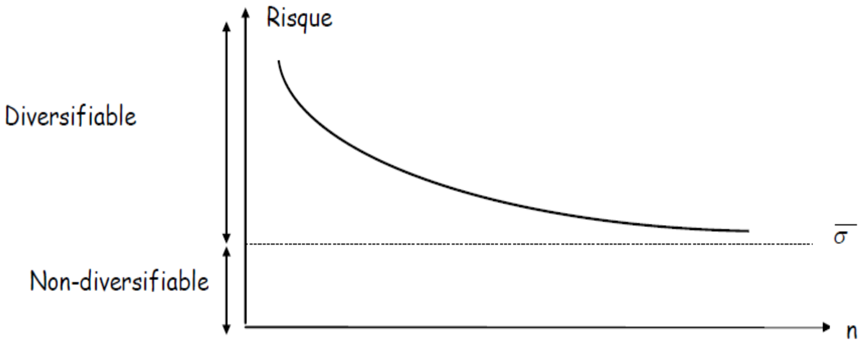

FIGURE 3.3 – Risque et Diversification

3.4.3 Modèle d'équilibre des actifs financiers (MEDAF)

Introduit dans les années 1960 par les Américains William Sharpe (1964), John Lintner (1965), et le Norvégien Jan Mossin (1966) le MEDAF représente la suite des travaux de Markowitz. En plus d'être un modèle d'équilibre répondant à la double question « à quoi sont égales les rendements espérés ? Comment les cours d'équilibre sont-ils établis ? le MEDAF permet de résoudre un problème majeur : la mesure du risque d'un titre individuel.

Pour tout actif financier pris individuellement, la relation entre risque et rentabilité espérée est croissante de manière linéaire.

Toutefois, la mesure de risque est différente pour une action isolée et pour un portefeuille diversifié. En effet, la mesure du risque d'un titre individuel est estimée par sa covariance avec le portefeuille P dans lequel il est intégré, ce qui rend subjectif le risque en ce sens, vu qu'il dépend du portefeuille de l'investisseur.

Le MEDAF permet donc de faire disparaître cette difficulté : le risque du titre i est mesuré, par sa sensibilité β_i aux variations du marché, c'est-à-dire sa covariance avec le marché, et cette mesure du risque est la même quel que soit l'investisseur.

Ce modèle permet d'établir une relation entre le rendement espéré d'un titre et son risque

systématique β_i. Le risque d'un titre devient donc objectif en ce sens.
Le MEDAF, modèle à une période, décrit la rentabilité d'un actif financier comme le rendement de l'actif sans risque additionnée à une prime de marché pondérée par le β_i de l'actif

$$E(r_j) = r_f + \beta_j |E(r_M) - r_f|$$

où :
- $E(r_j)$: Rendement espéré de l'actif financier
- r_f : Taux sans risque
- β_j : Bêta de l'actif financier
- $E(r_M)$ Rentabilité espérée du marché.

Les hypothèses de recherche du MEDAF

L'univers du MEDAF obéit à certaines règles bien spécifiques afin que la formule de la rentabilité de l'actif fonctionne. Ci-dessous les hypothèses de base tirées des travaux de Markowitz sur la théorie moderne du portefeuille :

1. Il n'existe ni de coûts de transactions ni de taxes ;
2. La vente à découvert ou l'achat d'un titre n'a aucune incidence sur son prix ;
3. Les investisseurs sont averses au risque et rationnels ;
4. Tous les investisseurs ont le même horizon d'investissement ;
5. Les investisseurs contrôlent le risque de leur portefeuille par la diversification ;
6. Le marché est entièrement libre et tous les actifs peuvent y être échangés ;
7. Les investisseurs peuvent emprunter et prêter des montants illimités au taux sans risque, sans que cela ait une incidence sur le prix de l'action ;
8. Toutes les informations sur le marché sont disponibles pour tous les investisseurs ;
9. La concurrence sur les marchés est parfaite et non faussée ;
10. Tous les actifs financiers peuvent être divisés en actifs de plus petite taille ;
11. Tous les investisseurs ont un portefeuille de Markowitz car ils ne considèrent chaque action que sous son aspect moyenne-variance. Comme nous pouvons le constater, l'univers du MEDAF est parfait et ne peut consister qu'en une approximation grossière du monde réel.

Cependant, la majorité des hypothèses ne sont pas vérifiées telles que les hypothèses 7 et 11. Effectivement, toutes transactions d'une certaine taille affectent le cours d'une action et peu d'investisseurs ont un portefeuille de Markowitz.

Chapitre 4

Le portefeuille optimal à l'aide de CVaR et bPOE

Ce chapitre est basé sur l'article [11] .

L'expression de forme fermée

Une expression de forme fermée est une expression mathématique qui utilise un nombre fini d'opérations standard.
Il peut contenir des constantes,des variables, certaines opérations bien connues (par exemple, $+, -, \div, \times$) et des fonctions (par exemple, racine $n - ime$, exposant, logarithme, fonctions trigonométriques et fonctions hyperboliques inverses), mais généralement pas de limite , différenciation, ou intégration. L'ensemble des opérations et des fonctions peut varier selon l'auteur et le contexte.
Les solutions de toute équation quadratique à coefficients complexes peuvent être exprimées sous forme fermée en termes d'addition , de soustraction , de multiplication , de division et d'extraction de racine carrée , dont chacune est une fonction élémentaire . Par exemple, l'équation quadratique est traitable puisque ses solutions peuvent être exprimées sous la forme d'une expression fermée, c'est-à-dire en termes de fonctions élémentaires

4.1 La forme fermée du superquentile et bPOE selon les lois de probabilité

Dans cette section, nous allons déterminer selon Norton et al.[11] la forme fermée du superquantile (CVaR) et de la bPOE pour les lois de probabilité : l'exponentielle, Pareto, Pareto généralisé et Laplace.

Loi exponentielle

Définition 4.1.1. *On dit que X suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, ce que l'on note $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ si elle est absolument continue, et admet pour densité*

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0, \\ 0 & x < 0. \end{cases}$$

— X admet alors une espérance et un écart type :$E[X] = \sigma(X) = \frac{1}{\lambda}$

— La fonction de répartition et le quantile sont donnés par,

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & x \geq 0, \\ 0 & x < 0. \end{cases} \qquad q_\alpha(X) = \frac{-\ln(1-\alpha)}{\lambda}$$

Proposition 4.1.2. *Soit $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$. Alors,la CVaR et la bPOE sont donnés par :*

$$\bar{q}_\alpha(X) = \frac{-\ln(1-\alpha)+1}{\lambda}, \quad \bar{p}_x(X) = e^{1-\lambda x}.$$

Démonstration. Tout d'abord, on a le quantile $q_\alpha(X) = \frac{-\ln(1-\alpha)}{\lambda}$ et d'après la définition de le superquentile on a :

$$\begin{aligned} \bar{q}_\alpha(X) &= \frac{1}{1-\alpha} \int_\alpha^1 q_p(X)dp \\ &= \frac{-1}{\lambda(1-\alpha)} \int_\alpha^1 \ln(1-p)dp \\ &= \frac{-1}{\lambda(1-\alpha)} \int_{1-\alpha}^0 -\ln(y)dy = \frac{-1}{\lambda(1-\alpha)} \int_0^{1-\alpha} \ln(y)dy \end{aligned}$$

Puisque : $\int \ln(y)dy = y\ln(y) - y + C$,on a :

$$\begin{aligned} \bar{q}_\alpha(X) &= \frac{-1}{\lambda(1-\alpha)} \int_0^{1-\alpha} \ln(y)dy \\ &= \frac{-1}{\lambda(1-\alpha)}[(1-\alpha)\ln(1-\alpha) - (1-\alpha)] = \frac{-\ln(1-\alpha)}{\lambda} + 1 \end{aligned}$$

D'autre part ; d'après la définition de la bPOE on a :

$$\begin{aligned}\bar{p}_x(X) &= \{1-\alpha \mid \bar{q}_\alpha(X) = x\} \\ &= \left\{1-\alpha \mid \frac{-\ln(1-\alpha)+1}{\lambda} = x\right\} \\ &= \{1-\alpha \mid \ln(1-\alpha) = 1-\lambda x\} \\ &= \left\{1-\alpha \mid e^{\ln(1-\alpha)} = e^{1-\lambda x}\right\} = \left\{1-\alpha \mid 1-\alpha = e^{1-\lambda x}\right\} = e^{1-\lambda x}\end{aligned}$$

□

Le corollaire suivant va montrer la relation entre la bPOE et POE ainsi que le superquantile et le quantile.

Corollaire 4.1.3. *Soit* $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$*, avec un moyen* $\mu = \frac{1}{\lambda}$*.*
Alors

$$\bar{p}_x(X) = P(X > x - \mu) \quad \textit{et} \quad \bar{q}_\alpha(X) = q_\alpha(X) + \mu$$

Démonstration. Soit $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$, alors sa fonction de répartition est donné par $P[X \geq x] = 1 - e^{-\lambda x}$.
D'après la Proposition 4.1.2, on a :

$$\bar{p}_x(X) = e^{(1-\lambda x)} = e^{-\lambda\left(\frac{-1}{\lambda}+x\right)}$$

Puisque on a : $\mu = \frac{1}{\lambda}$, en déduit : $\bar{p}_x(X) = e^{-\lambda(x-\mu)} = 1 - P[X \leq x - \mu] = P[X > x - \mu]$.
D'autre part d'apès la Proposition 4.1.2 on a la CVaR :

$$\bar{q}_\alpha(X) = \frac{-\ln(1-\alpha)+1}{\lambda}$$

et puisque : $q_\alpha(X) = \frac{-\ln(1-\alpha)}{\lambda}$ et $\mu = \frac{1}{\lambda}$, alors :

$$\bar{q}_\alpha(X) = q_\alpha(X) + \mu.$$

□

Loi de Pareto

L'économiste italien Vilfredo Pareto $(1848-1923)$ observa au début du XXe siècle que 20% de la population italienne possédait 80% de la richesse nationale d'où le nom de la loi $80-20$ ou $20-80$.
La loi de Pareto admet deux paramètres (a, x_m). Le premier paramètre $(a > 0)$ tronque la distribution : le domaine de définition de X suivant cette loi est alors restreint à $]a, +\infty[$

(introduction de la contrainte x > a). Le deuxième paramètre est le paramètre de forme $x_m > 0$. Alors la distribution est caractérisée par :

Définition 4.1.4. *On dit que $X \sim$ Pareto (a, x_m). de paramètres $a > 0, x_m > 0$ si elle est absolument continue, et admet pour densité :*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{ax_m^a}{x^{\alpha+1}} & x \geq x_m, \\ 0 & x < x_m \end{cases}$$

Avec une espérance $E[X] = \begin{cases} \infty, & a \leq 1, \\ \frac{ax_m}{a-1}, & a > 1 \end{cases}$ *et écart type* $\sigma^2(X) = \begin{cases} \infty, & a \in]0,2], \\ \frac{ax_m^2}{(a-1)^2(a-2)}, & a > 2 \end{cases}$,

La fonction de répartition et le quantile sont donnés par :

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \left(\frac{x_m}{x}\right)^a & x \geq x_m, \\ 0 & x < x_m. \end{cases}, \quad , q_\alpha(X) = \frac{x_m}{(1-\alpha)^{\frac{1}{a}}}$$

Proposition 4.1.5. *Soit $X \sim \text{Pareto}\,(a, x_m)$ avec $a > 1$.*
Alors, pour $\alpha \in [0, 1]$ et $x \geq E[X]$,

$$\bar{q}_\alpha(X) = \frac{x_m a}{(1-\alpha)^{\frac{1}{a}}(a-1)}, \quad \bar{p}_x(X) = \left(\frac{x_m a}{x(a-1)}\right)^a$$

Si $a \in [0, 1[$, alors $E[X] = \infty$ ce qui implique que $\forall \alpha \in [0, 1]$ $\bar{q}_\alpha(X) = \infty$ et $\forall x \in \mathbb{R}^n$ $\bar{p}_x(X) = 1$

Démonstration. On note que la loi conditionnelle d'un Pareto est conditionnée par le fait que la variable aléatoire X est plus grande que certains γ,(un autre Pareto avec des paramètres a, γ). Cela implique que

$$E[X \mid X > \gamma] = \begin{cases} \frac{a\gamma}{a-1} & \text{si } a \geq 1 \\ E[X \mid X > \gamma] = \infty & \text{sinon} \end{cases}$$

Aussi,

$$1 - F(\gamma) = \left(\frac{x_m}{\gamma}\right)^a$$

Puisque,

$$E[X - \gamma]^+ = (E[X \mid X > \gamma] - \gamma)(1 - F(\gamma))$$

D'où,

$$E[X - \gamma]^+ = \left(\frac{a\gamma}{a-1} - \gamma\right)\left(\frac{x_m}{\gamma}\right)^a$$

Donc la formule de la bPOE :

$$\begin{aligned}\bar{p}_x(X) &= \min_{x_m \leq \gamma < x} \frac{\left(\frac{a\gamma}{a-1} - \gamma\right) x_m^a}{\gamma^a (x-\gamma)} \\ &= \min_{x_m \leq \gamma < x} \frac{\left(\frac{a}{a-1} - 1\right) x_m^a}{\gamma^{a-1}(x-\gamma)} = \left(\max_{x_m \leq \gamma < x} \frac{\gamma^{a-1}(x-\gamma)(a-1)}{x_m^a}\right)^{-1} \qquad (*)\end{aligned}$$

Puisque $a > 1$, $(*)$ est concave sur $\gamma \in]0, \infty[$,il suffit donc de prendre le gradient de fonction $g(\gamma) = \frac{\gamma^{a-1}(x-\gamma)(a-1)}{x_m^a}$ et réglez-le à zéro pour trouver l'optimal γ comme suit :

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial \gamma} = \frac{x(a-1)^2\gamma^{a-2} - (a-1)a\gamma^{a-1}}{x_m^a} = 0 &\Longrightarrow x(a-1)^2\gamma^{a-2} = (a-1)a\gamma^{a-1} \\ &\Longrightarrow \frac{x(a-1)}{a} = \gamma\end{aligned}$$

En remplaçant γ par la valeur trouvée donc la formule de bPOE est donnée par :

$$\begin{aligned}\bar{p}_x(X) &= \frac{\left(\frac{\frac{ax(a-1)}{a}}{a-1} - \frac{x(a-1)}{a}\right) x_m^a}{\left(\frac{x(a-1)}{a}\right)^a \left(x - \frac{x(a-1)}{a}\right)} \\ &= \left(\frac{x_m a}{x(a-1)}\right)^a\end{aligned}$$

Le CVaR est égal à la valeur de x qui résout l'équation $1 - \alpha = \bar{p}_x(X)$ où,

$$1 - \alpha = \left(\frac{x_m a}{x(a-1)}\right)^a \Longrightarrow \frac{1}{x} = \frac{(1-\alpha)^{\frac{1}{a}}(a-1)}{x_m a}$$

D'où la résultat :

$$\bar{q}_\alpha(X) = \frac{x_m a}{(1-\alpha)^{\frac{1}{a}}(a-1)}$$

□

Corollaire 4.1.6. *La relation entre bPOE et POE, ainsi entre le quantile et le superquantile, sont donnés par :*

$$\bar{p}_x(X) = P\left[X > \frac{x(a-1)}{a}\right] = P[X > x]\left(\frac{a}{a-1}\right)^a \qquad et \quad \bar{q}_\alpha(X) = q_\alpha(X)\frac{a}{a-1}.$$

Démonstration. Découle de la Proposition 4.1.2 et des formules connues pour POE et le quantile. □

La loi de Pareto généralisée(GPD)

Définition 4.1.7. *On dit que $X \sim GPD(\mu, s, \xi)$ de paramètre $\mu \in \mathbb{R}, s > 0, \xi \in \mathbb{R}$ si elle continue et admet pour densité :*

$$f(x) = \frac{1}{s}\left(1 + \frac{\xi(x-\mu)}{s}\right)^{\left(-\frac{1}{\xi}-1\right)}$$

- L'espérance de X est : $E[X] = \mu + \frac{s}{1-\xi}$ si $\xi < 1$
- La variance de X est $\sigma^2(X) = \frac{s^2}{(1-\xi)^2(1-2\xi)}$ si $\xi < 0.5$.
- La fonction de répartition est donné par :

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \left(1 + \frac{\xi(x-\mu)}{s}\right)^{-1/\xi} & \text{pour } \xi \neq 0, \\ 1 - \exp\left(-\frac{x-\mu}{s}\right) & \text{pour } \xi = 0. \end{cases}$$

Pour $x \geq \mu$ quand $\xi \geq 0$ et $\mu \leq x \leq \mu - \frac{s}{\xi}$ quand $\xi < 0$.
De plus, les quantiles sont donnés par,

$$q_\alpha(X) = \begin{cases} \mu + \frac{s\left((1-\alpha)^{-\xi}-1\right)}{\xi} & \text{for } \xi \neq 0 \\ \mu - s\ln(1-\alpha) & \text{for } \xi = 0 \end{cases}$$

Proposition 4.1.8. *On suppose que $X \sim GPD(\mu, s, \xi)$ avec $-1 < \xi < 1$. Alors,*

$$\bar{q}_\alpha(X) = \begin{cases} \mu + s\left[\frac{(1-\alpha)^{-\xi}}{1-\xi} + \frac{(1-\alpha)^{-\xi}-1}{\xi}\right] & \textit{for } \xi \neq 0, \\ \mu + s[1 - \ln(1-\alpha)] & \textit{for } \xi = 0. \end{cases}$$

$$\bar{p}_x(X) = \begin{cases} \frac{\left(1+\frac{\xi(x-\mu)}{s}\right)^{-\frac{1}{\xi}}}{(1-\xi)^{\frac{1}{\xi}}} & \textit{for } \xi \neq 0, \\ e^{1-\left(\frac{x-\mu}{s}\right)} & \textit{for } \xi = 0 \end{cases}$$

Démonstration. On a si $X \sim GPD(\mu, s, \xi)$, alors

$$X - \gamma \mid X > \gamma \sim GPD(0, s + \xi(\gamma - \mu), \xi)$$

.Ensuite Si $\xi < 1$, alors $E[X] = \mu + \frac{s}{1-\xi}$.
Cela nous donne,

$$E[X - \gamma \mid X > \gamma] = E[GPD(0, s + \xi(\gamma - \mu), \xi)] = \frac{s + \xi(\gamma - \mu)}{1 - \xi}$$

ce qui implique,

$$\begin{aligned}\bar{q}_\alpha(X) &= E\left[X - q_\alpha(X) \mid X > q_\alpha(X)\right] + q_\alpha(X) \\ &= \frac{s + \xi\left(q_\alpha(X) - \mu\right)}{1-\xi} + q_\alpha(X)\end{aligned}$$

En utilisant la formule de quantile on trouve la formules finale.
D'autre part avec simple calcul on trouve $\bar{q}_\alpha(X)$, en résoudant

$$\bar{p}_x(X) = \{1 - \alpha \quad \text{tel que} \quad x = \bar{q}_\alpha(X)\}$$

$\square$

Loi de Laplace

Définition 4.1.9. *On dit que $X \sim$ Laplace (μ, b) de paramètre $\mu \in \mathbb{R}, b > 0$, si elle est continue et admet une densité*

$$f(x) = \frac{1}{2b} e^{\frac{-|x-\mu|}{b}}$$

— L'espérance et la variance de X sont donnés par : $E[X] = \mu$ et $\sigma^2(X) = 2b^2$
— La fonction de répartition et le quantile de Laplace sont donnés par :

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{2} e^{-\frac{x-\mu}{b}} & x \geq \mu, \\ \frac{1}{2} e^{\frac{x-\mu}{b}} & x < \mu \end{cases} \quad , q_\alpha(X) = \mu - b \operatorname{sign}(\alpha - 0.5) \ln(1 - 2|\alpha - 0.5|)$$

Proposition 4.1.10. *Si $X \sim \mathrm{Laplace}(\mu, b)$, alors*

$$\bar{q}_\alpha(X) = \begin{cases} \mu + b\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)(1 - \ln(2\alpha)) & \alpha < 0.5, \\ \mu + b(1 - \ln(2(1-\alpha))) & \alpha \geq 0.5. \end{cases}$$

$$\bar{p}_x(X) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{1 - \left(\frac{x-\mu}{b}\right)} & x \geq \mu + b, \\ 1 + \frac{z}{\mathcal{W}(-2e^{-z-1} z)} & x < \mu + b. \end{cases}$$

où $z = \frac{x-\mu}{b}$ et $\mathcal{W}$ est la fonction Lambert- $\mathcal{W}$.

Rappel :La fonction de *Lambert*

La fonction de Lambert notée, $\mathcal{W}(x)$, est définie comme étant la fonction inverse de la fonction $f(x) = xe^x = y$ où e est la base du logarithme népérien. Donc, on a $x = f^{-1}(y) = W(y)$. Par conséquent, la fonction W de Lambert vérifie la formule suivante :

$$\mathcal{W}(y)e^{\mathcal{W}(y)} = y.$$

Donc, la fonction W de *Lambert* est implicitement définie par l'équation transcendante :

$$\mathcal{W}(x)e^{\mathcal{W}(x)} = x$$

Par définition, le graphe de la fonction W est la courbe obtenue par symétrie du graphe de la fonction $f(x) = xe^x$ par rapport à l'axe $y = x$.

Démonstration. Soit le superquantile,

$$\begin{aligned}
\bar{q}_\alpha(X) &= \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 q_p(X)dp \\
&= \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 \mu - b\,\text{sign}(p-0.5)\ln(1-2|p-0.5|)dp \\
&= \mu - \frac{b}{1-\alpha}\int_\alpha^1 \text{sign}(p-0.5)\ln(1-2|p-0.5|)dp \\
&= \mu - \frac{b}{1-\alpha}\left(\int_{\min\{\alpha,.5\}}^{.5} -\ln(2p)dp + \int_{\max\{\alpha,.5\}}^{1} \ln(2(1-p))dp\right)
\end{aligned}$$

Pour évaluer l'intégrale, nous utilisons une substitution simple ainsi que l'identité $\int \ln(y)dy = y\ln(y) - y + C$.

Après simplification,et avec $\alpha < 0.5$ l'intégrale évalue à,

$$\bar{q}_\alpha(X) = \mu + b\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)(1-\ln(2\alpha))$$

De même, nous constatons qu'avec $\alpha \geq 0.5$ l'intégrale évalue à,

$$\bar{q}_\alpha(X) = \mu + b(1-\ln(2(1-\alpha)))$$

Pour la bPOE, supposons d'abord que la seuil $x \geq \mu + b$.
En utilisant la formule de CVaR, on trouve : $\bar{q}_{0.5}(X) = \mu + b$. Ainsi, $x \geq \mu + b$ implique que

$1-\bar{p}_x(X) \geq 0.5$ impliquant que,

$$\begin{aligned}\bar{p}_x(X) &= \{1-\alpha \mid \bar{q}_\alpha(X) = x, \alpha \geq .5\} \\ &= \{1-\alpha \mid \mu + b(1-\ln(2(1-\alpha))) = x\} \\ &= \frac{1}{2} e^{1-\left(\frac{x-\mu}{b}\right)}\end{aligned}$$

Supposons au contraire que $x < \mu + b$. Puisque $\bar{q}_{.5}(X) = \mu + b$,On a $1-\bar{p}_x(X) < 0.5$ ce qui imlique que :

$$\begin{aligned}\bar{p}_x(X) &= \{1-\alpha \mid \bar{q}_\alpha(X) = x, \alpha < .5\} \\ &= \left\{1-\alpha \mid \mu + b\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)(1-\ln(2\alpha)) = x\right\}.\end{aligned}$$

On pose $z = \frac{x-\mu}{b}$,tel que on trouve α qui résout l'équation $\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)(1-\ln(2\alpha)) = z$.
Alors :

$$\begin{aligned}\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)(1-\ln(2\alpha)) = z &\implies \frac{-z}{\alpha} = \frac{(\ln(2\alpha)-1)}{1-\alpha} \\ &\implies e^{\frac{-z}{\alpha}} = e^{\frac{(\ln(2\alpha)-1)}{1-\alpha}} = \left(\frac{2\alpha}{e}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \\ &\implies e^{\frac{-z(1-\alpha)}{\alpha}} = \left(\frac{2\alpha}{e}\right) \\ &\implies \frac{-z}{\alpha} e^{-z\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)} = -2ze^{-1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)(1-\ln(2\alpha)) = z &\implies \frac{-z}{\alpha} = \frac{(\ln(2\alpha)-1)}{1-\alpha} \\ &\implies e^{\frac{-z}{\alpha}} = e^{\frac{(\ln(2\alpha)-1)}{1-\alpha}} = \left(\frac{2\alpha}{e}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \\ &\implies e^{\frac{-z(1-\alpha)}{\alpha}} = \left(\frac{2\alpha}{e}\right) \\ &\implies \frac{-z}{\alpha} e^{-z\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)} = -2ze^{-1} \\ &\implies \frac{-z}{\alpha} e^{\frac{-z}{\alpha}} = -2ze^{-z-1} \\ &\implies \frac{-z}{\alpha} = \mathcal{W}\left(-2ze^{-z-1}\right)\end{aligned}$$

où la dernière étape découle de la définition de la fonction Lambert- $\mathcal{W}$ qui est donnée par la relation $xe^x = y \iff \mathcal{W}(y) = x$.
Ainsi,

$$\begin{aligned}\frac{-z}{\alpha} &= \mathcal{W}\left(-2ze^{-z-1}\right) \\ \implies \bar{p}_x(X) &= 1-\alpha = 1 + \frac{z}{\mathcal{W}\left(-2e^{-z-1}z\right)}.\end{aligned}$$

□

4.2 La forme fermée de superquantile selon les lois de probabilité

Cette section donne les expressions de la forme fermée du superquantile selon les lois symétriques : la loi Normale, Logistique et student-t et les lois asymétriques : Log-Normale, Weibull, Log-Logistique et GEV.

La forme fermée de la bPOE est indéterminable pour les lois précédentes .Mais selon Norton et al. [11], bPOE peut être calculé en résolvant un problème d'optimisation convexe unidimensionnelle ou un problème de recherche de racine unidimensionnelle pour le cas de la loi Normale et la loi Logistique.

La loi Normale

Définition 4.2.1. *On dit qu'une variable aléatoire X suit la loi normale centrée réduite, ce que l'on note $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ si elle est continue et admet pour densité :*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}}$$

La fonction de répartition et le quantile sont donnés par :

$$F(x) = \frac{1}{2}\left[1 + \operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\right], \quad q_\alpha(X) = \sqrt{2}\operatorname{erf}^{-1}(2\alpha - 1),$$

où $\operatorname{erf}(\cdot)$ est la fonction d'erreur communément connue avec erf $^{-1}(\cdot)$ indiquant son inverse.

Proposition 4.2.2. *Si $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$, alors*

$$\bar{q}_\alpha(X) = \mu + \sigma \frac{f\left(q_\alpha\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)\right)}{1-\alpha}$$

Démonstration. On a si $X \sim \mathcal{N}(0,1)$, alors l'espérance conditionnelle est donnée par l'inverse de Mills Ratio,

$$E[X \mid X > \gamma] = \frac{f(\gamma)}{1 - F(\gamma)}$$

Alors on a :

$$\begin{aligned} \bar{q}_\alpha(X) &= E[X \mid X > q_\alpha(X)] \\ &= \frac{f(q_\alpha(X))}{1 - F(q_\alpha(X))} \\ &= \frac{f(q_\alpha(X))}{1-\alpha}. \end{aligned}$$

Rappel :L'inverse de Mill Ratio

Le Mills ratio d'un v.a continue X est la foction

$$m(x) := \frac{\bar{F}(x)}{f(x)},$$

où : $f(x)$ est la fonction de densité et

$$\bar{F}(x) := \Pr[X > x] = \int_x^{+\infty} f(u)du$$

est le complèmentaire de la fonction de répartition. Le ratio de Mills est lié au taux de danger $h(x)$ qui est défini comme suit :

$$h(x) := \lim_{\delta \to 0} \frac{1}{\delta} \Pr[x < X \leq x + \delta \mid X > x]$$

par

$$m(x) = \frac{1}{h(x)}.$$

Le ratio de Mills inverse est le rapport de la fonction de densité de à le complémentaire de la fonction de répartition. Son utilisation est souvent motivée par la propriété suivante de la loi normale tronquée.
Si X est une variable aléatoire ayant une loi normale avec moyenne μ et variance σ^2, alors

$$\mathrm{E}[X \mid X > \alpha] = \mu + \sigma \frac{\phi\left(\frac{\alpha-\mu}{\sigma}\right)}{1 - \Phi\left(\frac{\alpha-\mu}{\sigma}\right)}$$

$$\mathrm{E}[X \mid X < \alpha] = \mu - \sigma \frac{\phi\left(\frac{\alpha-\mu}{\sigma}\right)}{\Phi\left(\frac{\alpha-\mu}{\sigma}\right)}$$

où α est constante, ϕ désigne la fonction de densité de la loi normal, et Φ est la fonction de répartition de la loi normale. Les deux fractions sont les ratio de Mills inverses.

□

Proposition 4.2.3. *Si $X \sim \mathcal{N}(0,1)$, alors*

$$\bar{p}_x(X) = \min_{\gamma < x} \frac{f(\gamma) - \gamma(1 - F(\gamma))}{x - \gamma}$$

De plus, si $\gamma \in$ argmin, alors γ est égal au quantile de X au niveau de probabilité $1 - \bar{p}_x(X)$.

Démonstration. Notez que pour une variable aléatoire suit la loi normale centrée réduite, the tail expectation au-delà de tout seuil γ est donnée par l'inverse de Mills Ratio,

$$E[X \mid X > \gamma] = \frac{f(\gamma)}{1 - F(\gamma)}$$

Notez également que pour tout seuil γ et toute variable aléatoire, nous avons,

$$E[X - \gamma]^{+} = (E[X \mid X > \gamma] - \gamma)(1 - F(\gamma))$$

L'utilisation de Mills Ratio nous donne,

$$E[X - \gamma]^{+} = \left(\frac{f(\gamma)}{1 - F(\gamma)} - \gamma\right)(1 - F(\gamma)) = f(\gamma) - \gamma(1 - F(\gamma)).$$

D'où le résultat. □

Proposition 4.2.4. *Soit $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ avec $x \in \mathbb{R}$ donné. Si γ est la solution à l'équation*

$$\frac{f(\gamma)}{1 - F(\gamma)} = x$$

alors

$$\bar{p}_x(X) = \frac{f(\gamma) - \gamma(1 - F(\gamma))}{x - \gamma}$$

De plus, nous aurons $q_\alpha(X) = \gamma$ et $\bar{q}_\alpha(X) = x$ au niveau de probabilité $\alpha = 1 - \bar{p}_x(X)$.

Démonstration. Cela découle du fait que

$$\bar{q}_\alpha(X) = E\left[X \mid X > q_\alpha(X)\right] = \frac{f\left(q_\alpha(X)\right)}{1 - F\left(q_\alpha(X)\right)}$$

et la formule d'optimisation de bPOE donnée dans la proposition précédente pour les variables normalement distribuées. □

La proposition suivante fournit le calcul du gradient pour résoudre le problème de minimisation bPOE.

Proposition 4.2.5. *Pour $X \sim \mathcal{N}(0,1)$,la formule de minimisation bPOE a la représentation intégrale suivante,*

$$\begin{aligned}
\bar{p}_x(X) &= \min_{\gamma < x} \frac{f(\gamma) - \gamma(1 - F(\gamma))}{x - \gamma} \\
&= \min_{\gamma < x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \frac{u e^{\frac{-(\gamma+u)^2}{2}}}{x - \gamma} du \\
&= \min_{\gamma < x} \frac{e^{\frac{-\gamma^2}{2}} - \gamma\sqrt{\frac{\pi}{2}}\operatorname{erfc}\left(\frac{\gamma}{\sqrt{2}}\right)}{\sqrt{2\pi}(x - \gamma)}
\end{aligned}$$

De plus, la fonction $g(u,\gamma;x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty \frac{ue^{\frac{-(\gamma+u)^2}{2}}}{x-\gamma}du$ *est convexe par rapport à* γ *sur une échelle* $\gamma \in]-\infty, x[$. *De plus, g a gradient donné par,*

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial \gamma} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial \gamma}\left(\frac{ue^{\frac{-(\gamma+u)^2}{2}}}{x-\gamma}\right)du \\ &= \frac{e^{\frac{-\gamma^2}{2}} - x\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\mathrm{erfc}\left(\frac{\gamma}{\sqrt{2}}\right)}{\sqrt{2\pi}(x-\gamma)^2}\end{aligned}$$

où erfc $(\cdot)$ *désigne le complémentaire de fonction d'erreur.*

Démonstration. Pour dériver la représentation intégrale, il suffit de simplifier la formule de $E[X-\gamma]^+$, puis d'utiliser la définition du fonction de densité et de répartition. □

Loi log-Normale

Définition 4.2.6. *On dit qu'une variable aléatoire* X *suit la loi log-normale* $X \sim log - Normal(\mu, s)$ *définie par ses paramètres d'emplacement et d'échelle* $\mu \in \mathbb{R}, s > 0$, *admet pour densité :*

$$f(x) = \frac{1}{xs\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-(\ln x-\mu)^2}{2s^2}}$$

- X admet alors une espérance et une variance $E[X] = e^{\mu+\frac{s^2}{2}}$, $\sigma^2(X) = \left(e^{s^2}-1\right)e^{2\mu+s^2}$,
- La fonction de répartition et le quantile de X sont donnés par :

$$F(x) = \frac{1}{2}\left[1 + \mathrm{erf}\left(\frac{\ln x - \mu}{s\sqrt{2}}\right)\right]$$

$$q_\alpha(X) = e^{\mu + s\sqrt{2}\,\mathrm{erf}^{-1}(2\alpha-1)}$$

Proposition 4.2.7. *Si* $X \sim \log Normal(\mu, s)$, *alors*

$$\bar{q}_\alpha(X) = \frac{1}{2}e^{\mu+\frac{s^2}{2}}\frac{\left[1+\mathrm{erf}\left(\frac{s}{\sqrt{2}} - \mathrm{erf}^{-1}(2\alpha-1)\right)\right]}{1-\alpha}$$

Démonstration. On va évaluer l'intégrale de la fonction quantile comme suit :

$$\begin{aligned}
\bar{q}_\alpha(X) &= \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 q_p(X)dp \\
&= \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 e^{\mu+s\sqrt{2}\,\mathrm{erf}^{-1}(2p-1)}dp \\
&= \frac{e^\mu}{1-\alpha}\int_\alpha^1 e^{s\sqrt{2}\,\mathrm{erf}^{-1}(2p-1)}dp \\
&= \frac{e^\mu}{1-\alpha}\left[-\frac{1}{2}e^{\frac{x^2}{2}}\left(1+\mathrm{erf}\left(\frac{s}{\sqrt{2}}-\mathrm{erf}^{-1}(2p-1)\right)\right)\right]_{p=\alpha}^1 \\
&= \frac{e^\mu}{1-\alpha}\left[\frac{1}{2}e^{\frac{s^2}{2}}+\frac{1}{2}e^{\frac{s^2}{2}}\left(1+\mathrm{erf}\left(\frac{s}{\sqrt{2}}-\mathrm{erf}^{-1}(2p-1)\right)\right)\right] \\
&= \frac{1}{2}e^{\mu+\frac{s^2}{2}}\frac{\left[1+\mathrm{erf}\left(\frac{s}{\sqrt{2}}-\mathrm{erf}^{-1}(2\alpha-1)\right)\right]}{1-\alpha}.
\end{aligned}$$

□

Loi logistique

Définition 4.2.8. *Soit $X \sim \mathrm{Logistic}(\mu, s)$ définie par ses paramètres d'échelle et d'emplacement $\mu \in \mathbb{R}, s > 0$, admet une densité*

$$f(x) = \frac{e^{-\frac{x-\mu}{s}}}{s\left(1+e^{-\frac{x-\mu}{s}}\right)^2}$$

Sa fonction de répartition et quantile sont :

$$F(x) = \frac{1}{1+e^{-\frac{x-\mu}{s}}}, \quad q_\alpha(X) = \mu + s\ln\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)$$

et son espérance et sa variance sont données par les formules suivantes :

$$E[X] = \mu \text{ et } \sigma^2(X) = \tfrac{s^2\pi^2}{3}$$

Proposition 4.2.9. *Si $X \sim$ Logistic (μ, s), alors*

$$\bar{q}_\alpha(X) = \mu + \frac{sH(\alpha)}{1-\alpha}$$

avec $H(\alpha)$ est la fonction d'entropie binaire $H(\alpha) = -\alpha\ln(\alpha) - (1-\alpha)\ln(1-\alpha)$. De plus, pour tout $x \geq \mu$, si α résout l'équation,

$$\frac{H(\alpha)}{1-\alpha} = \frac{x-\mu}{s}$$

alors $\bar{p}_x(X) = 1 - \alpha$. *De plus* $\bar{p}_x(X) = 1 - \alpha$ *si* α *est la solution au système transformé,*

$$(1-\alpha)\alpha^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} = e^{-\left(\frac{x-\mu}{s}\right)}$$

Notez que les deux fonctions $\frac{H(\alpha)}{1-\alpha}$ *et* $(1-\alpha)\alpha^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$ *sont unidimensionnels, convexes et monotones sur* $\alpha \in [0,1]$*, et donc l'existence de la solution unique qui peut être trouvées par des méthodes de recherche d'un zéro d'une fonction.*

Démonstration. Pour obtenir le superquantile, nous avons :

$$\begin{aligned}
\bar{q}_\alpha(X) &= \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 q_p(X)dp \\
&= \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 \mu + s\ln\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right) dp \\
&= \mu + \frac{s}{1-\alpha}\int_\alpha^1 \ln(p) - \ln(1-p)dp \\
&= \mu + \frac{s}{1-\alpha}\left(\int_\alpha^1 \ln(p)dp + \int_\alpha^1 -\ln(1-p)dp\right)
\end{aligned}$$

Puisque on a : $\int \ln(y)dy = y\ln(y) - y + C$,alors

$$\begin{aligned}
\bar{q}_\alpha(X) &= \mu + \frac{s}{1-\alpha}(-1 - \alpha\ln\alpha + \alpha - (1-\alpha)\ln(1-\alpha) + (1-\alpha)) \\
&= \mu + \frac{s}{1-\alpha}(-\alpha\ln\alpha - (1-\alpha)\ln(1-\alpha)) \\
&= \mu + \frac{s}{1-\alpha}H(\alpha).
\end{aligned}$$

D'autre part pour trouver bPOE on applique la définition de bPOE : trouver α tel que $\mu + \frac{s}{1-\alpha}H(\alpha) = x$ □

Proposition 4.2.10. *Si* $X \sim \text{Logistic}(\mu, s)$*, alors*

$$\bar{p}_x(X) = \min_{\gamma < x} \frac{s\ln\left(1 + e^{-\left(\frac{\gamma-\mu}{s}\right)}\right)}{x-\gamma}$$

qui est un problème d'optimisation convexe sur l'échelle $\gamma \in (-\infty, x)$*. De plus, le minimum se produit à* γ *de telle sorte que,*

$$\frac{s\ln\left(1 + e^{-\left(\frac{\gamma-\mu}{s}\right)}\right)}{x-\gamma} = 1 - F(\gamma)$$

Démonstration. Cela découle du fait que $E[X-\gamma]^+ = \int_\gamma^\infty (1 - F(t))dt$. En évaluant cette intégrale pour for $X \sim$ Logistic (μ, s) nous donne, $E[X-\gamma]^+ = s\ln\left(1 + e^{-\left(\frac{\gamma-\mu}{s}\right)}\right)$. La deuxième partie de la proposition découle du fait que le gradient de la fonction objective par rapport à γ est donné par :

$$\frac{s\ln\left(1+e^{-\left(\frac{\gamma-\mu}{s}\right)}\right)}{(x-\gamma)^2}-\frac{e^{-\left(\frac{\gamma-\mu}{s}\right)}}{(x-\gamma)\left(1+e^{-\left(\frac{\gamma-\mu}{s}\right)}\right)}$$

en mettant ce gradient à zéro et en simplifiant, on obtient la condition d'optimalité indiquée. $\square$

Loi de Student-t

Définition 4.2.11. *On dit que : $X \sim$ Student-t (ν, s, μ) définie par ses paramètres d'échelles $\nu > 0, s > 0, \mu > 0$, est absolument continue et admet pour densité*

$$f(x)=\frac{\Gamma(\frac{\nu+1}{2})}{\Gamma(\frac{\nu}{2})\sqrt{\nu\pi}s}(1+\frac{(x-\mu)^2}{\nu s^2})^{\frac{-(\nu+1)}{2}},$$

où où $\nu(x)=\frac{\nu}{\frac{x-\mu}{s}+\nu}, \mathcal{I}_t(a,b)$ est la fonction bêta incomplète régularisée., et $\Gamma(a)$ est la fonction Gamma

— L'espérance et la variance sont donnés par :
  $E[X]=\mu$ et $\sigma^2(X)=\frac{s^2\nu}{\nu-2}$
— La fonction de répartition est donné :

$$F(x)=1-\frac{1}{2}\mathcal{I}_{\nu(x)}(\frac{\nu}{2},\frac{1}{2})$$

La forme fermée de $q_\alpha(X)$ n'est pas connu, mais est une fonction disponible dans common software packages EXCEL.

Rappel :Fonction Bêta incomplète

Nous appelons fonction Bêta incomplète la fonction définie par :

$$\mathcal{I}(t;\alpha;\beta)=\int_0^t u^{\alpha-1}(1-u)^{\beta-1}du,\quad \forall t\in\left]0;1\right[,\quad \alpha,\beta\in\mathbb{R}_+^{\star}.$$

Nous notons $\mathcal{I}(\alpha;\beta)=\mathcal{I}(1,\alpha,\beta)$ et nous l'appelons fonction $\mathcal{I}$. La fonction Bêta est liée à la fonction Gamma de la manière suivante :

$$\mathcal{I}(\alpha;\beta)=\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}.$$

Nous appelons fonction Gamma la fonction définie par :

$$\Gamma(\alpha)=\int_0^{+\infty}t^{\alpha-1}e^{-t}dt,\quad \forall\alpha\in\mathbb{R}_+^{\star}$$

La fonction Gamma satisfait aux relations suivantes :

$$\Gamma(\alpha+1)=\alpha\Gamma(\alpha),\quad \forall\alpha\in\mathbb{R}_+^{\star},\quad \Gamma(n+1)=n!,\quad \forall n\in\mathbb{N},\quad \Gamma(0,5)=\sqrt{\pi}$$

Proposition 4.2.12. *Si $X\sim$ Student-t (ν,s,μ), alors*

$$\bar{q}_\alpha(X)=\mu+s\left(\frac{\nu+T^{-1}(\alpha)^2}{(\nu-1)(1-\alpha)}\right)\tau\left(T^{-1}(\alpha)\right)$$

où : $T^{-1}(\alpha)$ est l'inverse de la fonction de répartition de la loi Student- t et $\tau(x)$ est la fonction de densité normale de la loi Student- t.

Démonstration. Puisqu'il n'y a pas d'expression de forme fermée pour le quantile, nous utilisons la représentation du superquantile donnée par $\frac{1}{1-\alpha}\int_{q_\alpha(X)}^{\infty}tf(t)dt$.

Pour évaluer cette intégrale, nous prenons d'abord le dérivé du fonction de densité, en donnant

$$\frac{df(x)}{dx}=\frac{-f(x)(x-\mu)(\nu+1)}{\nu s^2+(x-\mu)}$$

Alors,

$$xf(x)dx=\frac{-\nu s^2df(x)}{(\nu+1)}-\frac{(x-\mu)^2df(x)}{(\nu+1)}+\mu f(x)dx$$

On peut alors intégrer les deux côtés,

$$\int xf(x)dx=\frac{-\nu s^2f(x)}{(\nu+1)}-\frac{1}{(\nu+1)}\int(x-\mu)^2df(x)+\mu F(x)$$

L'intégration par parties, nous donne la forme suivante du moyen terme,

$$\int (x-\mu)^2 df(x) = (x-\mu)^2 f(x) - 2\int xf(x)dx + 2\mu F(x).$$

Donc :

$$\int xf(x)dx = -\frac{(\nu s^2 + (x-\mu)^2)}{(\nu-1)} f(x) + \mu F(x).$$

Par la défintion de l'intégrale :

$$\begin{aligned}\int_{q_\alpha(X)}^{\infty} xf(x)dx = &\left(-\lim_{x\to\infty}\frac{(\nu s^2 + (x-\mu)^2)}{(\nu-1)} f(x) + \lim_{x\to\infty}\mu F(x)\right) \\ &- \left(-\frac{\left(\nu s^2 + (q_\alpha(X)-\mu)^2\right)}{(\nu-1)} f\left(q_\alpha(X)\right) + \mu F\left(q_\alpha(X)\right)\right)\end{aligned}$$

Il est facile de voir que la deuxième limite tend vers à 1 et, après avoir appliqué L'Hopital, la première limite tend vers à zéro. Cela donne :

$$\begin{aligned}\int_{q_\alpha(X)}^{\infty} xf(x)dx &= \mu - \left(-\frac{\left(\nu s^2 + (q_\alpha(X)-\mu)^2\right)}{(\nu-1)} f\left(q_\alpha(X)\right) + \mu F\left(q_\alpha(X)\right)\right) \\ &= \mu(1-\alpha) + \left(\frac{\nu s^2 + (q_\alpha(X)-\mu)^2}{(\nu-1)}\right) f\left(q_\alpha(X)\right) \\ &= \mu(1-\alpha) + s\left(\frac{\nu + T^{-1}(\alpha)^2}{(\nu-1)}\right)\tau\left(T^{-1}(\alpha)\right),\end{aligned}$$

D'où le superquantile :

$$\bar{q}_\alpha(X) = \frac{1}{1-\alpha}\int_{q_\alpha(X)}^{\infty} xf(x)dx = \mu + s\left(\frac{\nu + T^{-1}(\alpha)^2}{(\nu-1)(1-\alpha)}\right)\tau\left(T^{-1}(\alpha)\right)$$

□

Loi de Weibull

C'est une loi de probabilité continue appliquée aux durées de vie. C'est donc dans le contrôle de fiabilité que les entreprises ont tendance à l'utiliser, et plus précisément lorsque le taux de défaillance évolue comme une puissance du temps (ce qui est le cas le plus courant).

Rappelons que lorsque ce taux est constant, on utilise la loi exponentielle, forme particulière de celle de Weibull, et lorsque le taux augmente proportionnellement au temps, c'est la distribution de Rayleigh qui est employée.

La loi de Weibull repose sur deux paramètres positifs, l'un de forme et l'autre d'échelle de temps. La loi de Weibull à trois paramètres prend en compte la "localisation", c'est-à-dire un éventuel décalage du départ de la courbe par rapport à l'origine (soit à gauche soit à droite).

On prendra α comme paramètre de forme, et λ étant celui de temps.

Le paramètre α est habituellement supérieur à 1 : le taux de défaillance croît avec le temps. S'il est inférieur, c'est pendant le rodage que les risques de défaillance sont élevés et s'il est égal à 1, on retombe sur la loi exponentielle.
Sa fonction de densité :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{k}{\lambda}\left(\frac{x}{\lambda}\right)^{k-1} e^{-(x/\lambda)^k} & x \geq 0, \\ 0 & x < 0, \end{cases},$$

Sa fonction de répartition

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-(x/\lambda)^k} & x \geq 0, \\ 0 & x < 0, \end{cases},$$

Caractéristiques : $E[X] = \lambda\Gamma\left(1+\frac{1}{k}\right)$ et $\sigma^2(X) = \lambda^2\left[\Gamma\left(1+\frac{2}{k}\right) - \Gamma\left(1+\frac{1}{k}\right)^2\right]$
et le quantile :

$$q_\alpha(X) = \lambda(-\ln(1-\alpha))^{1/k}$$

où $\Gamma(a) = \int_0^\infty p^{a-1}e^{-p}dp$ est la fonction Gamma.

Proposition 4.2.13. *Si X suit une loi exponentielle de paramètre λ alors $X^{\frac{1}{\alpha}}$ suit une loi de Weibull $W(\lambda, \alpha)$.*

Proposition 4.2.14. *Si $X \sim Weibull(\lambda, k)$, alors*

$$\bar{q}_\alpha(X) = \frac{\lambda}{1-\alpha}\Gamma_U\left(1+\frac{1}{k}, -\ln(1-\alpha)\right)$$

où $\Gamma_U(a,b) = \int_b^\infty p^{a-1}e^{-p}dp$ est la fonction gamma incomplète supérieure.

Démonstration. Pour calculer le superquantile, nous utilisons la représentation intégrale, qui est

$$\begin{aligned}\bar{q}_\alpha(X) &= \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 q_p(X)dp \\ &= \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 \lambda(-\ln(1-p))^{1/k}dp\end{aligned}$$

Pour mettre cette intégrale sous la forme de la fonction gamma supérieure incomplète, on fait le changement de variable $y = -\ln(1-p)$.

Cela nous donne $e^y = \frac{1}{1-p}$ et $dp = (1-p)dy = e^{-y}dp$ avec une nouvelle limite inférieure d'intégration $\alpha \to -\ln(1-\alpha)$ et limite supérieure d'intégration $1 \to \infty$. En appliquant à l'intégrale :

$$\begin{aligned}\bar{q}_\alpha(X) &= \frac{\lambda}{1-\alpha}\int_{-\ln(1-\alpha)}^{\infty} y^{1/k}e^{-y}dy \\ &= \frac{\lambda}{1-\alpha}\Gamma_U\left(1+\frac{1}{k}, -\ln(1-\alpha)\right)\end{aligned}$$

□

Loi log-logistique

Définition 4.2.15. *On dit que X suit la loi log-logistique définie par ses paramètres $a>0, b>0$ noté : $X \sim \log\mathrm{Logistic}(a,b)$ admet une fonction de densité*

$$f(x) = \frac{(b/a)(x/a)^{b-1}}{\left(1+(x/a)^b\right)^2}$$

L'espérance et la variance de la loi de log-logistique sont donnés par :
$E[X] = a\frac{\pi}{b}\csc\left(\frac{\pi}{b}\right)$ quand $b>1$ et $\sigma^2(X) = a^2\left(\frac{2\pi}{b}\csc\left(\frac{2\pi}{b}\right) - \left(\frac{\pi}{b}\csc\left(\frac{\pi}{b}\right)\right)^2\right)$ quand $b>2$
La fonction de répartition et le quantile sont donnés par :

$$F(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^{-b}}, \quad q_\alpha(X) = a\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^{\frac{1}{b}}$$

où $\csc(\cdot)$ est la fonction cosécante.

Proposition 4.2.16. *Si $X \sim \log\mathrm{Logistic}(a,b)$, alors*

$$\bar{q}_\alpha(X) = \frac{a}{1-\alpha}\left(\frac{\pi}{b}\csc\left(\frac{\pi}{b}\right) - B_\alpha\left(\frac{1}{b}+1, 1-\frac{1}{b}\right)\right)$$

où $B_y(A_1,A_2) = \int_0^y p^{A_1-1}(1-p)^{A_2-1}dp$ est la fonction bêta incomplète.

Démonstration. Pour calculer le superquantile, nous utilisons la représentation intégrale comme suit :

$$\begin{aligned}\bar{q}_\alpha(X) &= \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 q_p(X)dp \\ &= \frac{1}{1-\alpha}\left(\int_0^1 q_p(X)dp - \int_0^\alpha q_p(X)dp\right) \\ &= \frac{1}{1-\alpha}\left(E[X] - \int_0^\alpha q_p(X)dp\right) \\ &= \frac{1}{1-\alpha}\left(E[X] - a\int_0^\alpha \left(\frac{p}{1-p}\right)^{\frac{1}{b}}dp\right)\end{aligned}$$

Pour $X \sim \log-\mathrm{logistic}(a,b)$, on a $E[X] = a\frac{\pi}{b}\csc\left(\frac{\pi}{b}\right)$. pour la fonction bêta incomplète $A_1 =$

$\frac{1}{b}+1$ et $A_2 = 1-\frac{1}{b}$, On a :

$$B_\alpha\left(\frac{1}{b}+1, 1-\frac{1}{b}\right) = \int_0^\alpha p^{\frac{1}{b}}(1-p)^{-\frac{1}{b}}dp$$

En utilisant ces deux faits, nous avons,

$$\begin{aligned}\bar{q}_\alpha(X) &= \frac{1}{1-\alpha}\left(E[X] - a\int_0^\alpha \left(\frac{p}{1-p}\right)^{\frac{1}{b}} dp\right)\\ &= \frac{1}{1-\alpha}\left(a\frac{\pi}{b}\csc\left(\frac{\pi}{b}\right) - aB_\alpha\left(\frac{1}{b}+1, 1-\frac{1}{b}\right)\right)\\ &= \frac{a}{1-\alpha}\left(\frac{\pi}{b}\csc\left(\frac{\pi}{b}\right) - B_\alpha\left(\frac{1}{b}+1, 1-\frac{1}{b}\right)\right)\end{aligned}$$

□

Loi d'extremum généralisée

Définition 4.2.17. *On dit que* X *suit la loi d'extremum généralisée(GEV) noté* $X \sim GEV(\mu, s, \xi)$ *définie par ses paramètres d'échelle* $\mu \in \mathbb{R}, s > 0, \xi \in \mathbb{R}$,*si elle admet une densité*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{s}\left(1+\frac{\xi(x-\mu)}{s}\right)^{\frac{-1}{\xi}-1} e^{-\left(1+\frac{\xi(x-\mu)}{s}\right)^{\frac{-1}{\xi}}} \\ \frac{1}{s}e^{-\left(\frac{x-\mu}{s}\right)}e^{-e^{-\left(\frac{x-\mu}{s}\right)}} \end{cases}$$

La Loi d'extremum généralisée admet une espérance et variance donné par :

$$E[X] = \begin{cases} \mu + s\left(g_1 - 1\right)/\xi & \text{if } \xi \neq 0, \xi < 1 \\ \mu + sy & \text{if } \xi = 0, \\ \infty & \text{if } \xi \geq 1, \end{cases}$$

et

$$\sigma^2(X) = \begin{cases} s^2\left(g_2 - g_1^2\right)/\xi^2 & \text{if } \xi \neq 0, \xi < \frac{1}{2}, \\ s^2\frac{\pi^2}{6} & \text{if } \xi = 0, \\ \infty & \text{if } \xi \geq \frac{1}{2}, \end{cases}$$

où $g_k = \Gamma(1-k\xi)$ et y est la constante de Euler-Mascheroni.

La fonction de répartition et quantile sont donnés par :

$$F(x) = \begin{cases} e^{-\left(1+\frac{\xi(x-\mu)}{s}\right)^{\frac{-1}{\xi}}} & \xi \neq 0 \\ e^{-e^{-\left(\frac{x-\mu}{s}\right)}} & \xi = 0 \end{cases}$$

$$q_\alpha(X) = \begin{cases} \mu + \frac{s}{\xi}\left(\left(\ln\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{-\xi} - 1\right) & \xi \neq 0 \\ \mu - s\ln(-\ln(\alpha)) & \xi = 0 \end{cases}$$

Proposition 4.2.18. *Si $X \sim GEV(\mu, s, \xi)$, alors*

$$\bar{q}_\alpha(X) = \begin{cases} \mu + \frac{s}{\xi(1-\alpha)}\left[\Gamma_L\left(1-\xi, \ln\left(\frac{1}{\alpha}\right)\right) - (1-\alpha)\right] & \xi \neq 0 \\ \mu + \frac{s}{(1-\alpha)}(y + \alpha\ln(-\ln(\alpha)) - li(\alpha)) & \xi = 0 \end{cases}$$

où

- *$\Gamma_L(a,b) = \int_0^b p^{a-1}e^{-p}dp$ est la fonction gamma incomplète inférieure.*
- *$li(x) = \int_0^\alpha \frac{1}{\ln p}dp$ est la fonction logarithmique intégrale.*
- *y est la constante de Euler Mascheroni.*

Démonstration. On suppose que $\xi = 0$. Alors, on a

$$\begin{aligned} \bar{q}_\alpha(X) &= \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 \mu - s\ln(-\ln(p))dp \\ &= \mu - \frac{s}{1-\alpha}\left(\int_0^1 \ln(-\ln(p))dp - \int_0^\alpha \ln(-\ln(p))dp\right) \\ &= \mu - \frac{s}{1-\alpha}\left(y - \int_0^\alpha \ln(-\ln(p))dp\right) \\ &= \mu - \frac{s}{1-\alpha}(y + \alpha\ln(-\ln(\alpha)) - \mathrm{li}(\alpha)) \end{aligned}$$

On suppose que $\xi \neq 0$. Alors, on a

$$\begin{aligned} \bar{q}_\alpha(X) &= \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 \mu + \frac{s}{\xi}\left(\left(\ln\left(\frac{1}{p}\right)\right)^{-\xi} - 1\right)dp \\ &= \mu + \frac{s}{\xi(1-\alpha)}\left[\Gamma_L\left(1-\xi, \ln\left(\frac{1}{\alpha}\right)\right) - (1-\alpha)\right] \end{aligned}$$

□

4.3 Optimisation de portefeuille

Dans cette section Nortan et al[11] ont montré que les formules de forme fermées du super-quantile et la bPOE révèlent des propriétés importantes sur les problèmes d'optimisation du portefeuille formulés avec des hypothèses distributives particulières placées sur les rendements du portefeuille.

On note que la perte est le contraire du rendement : $X = -R$, et $q_\alpha(X) = -q_{1-\alpha}(R)$.
Le problème de l'optimisation du portefeuille consiste à trouver un vecteur de pondération

des actifs $w \in \mathbb{R}^n$ pour un ensemble de de n actifs avec des rendements aléatoires inconnus $R = [R_1, R_2, \ldots, R_n]$ qui résout le problème d'optimisation suivant :

$$\begin{array}{ll} \max_{w\in\mathbb{R}^n} & L(w,R) \\ \text{s.c.} & g_i(w,R) \leq 0, i = 1,\ldots,I \\ & h_j(w,R) = 0, j = 1,\ldots,J \\ & w^T\mathbf{1} = 1 \\ & l \leq w \leq u \end{array} \tag{4.1}$$

où $L(w, R)$ est une fonction à maximiser, $g_j(w, R)$ et $h_i(w, R)$ sont respectivement des contraintes d'inégalité et d'égalité, $\mathbf{1} = (1, 1, 1, ..., 1)^T$ un vecteur contenant des 1 et les vecteurs l, u appliquent des limites supérieures et inférieures sur les pondérations individuelles des actifs.
Un exemple simple est le problème d'optimisation de Markowitz standard où nous maximisons l'utilité espérée, qui est une combinaison pondérée du rendement attendu et de sa variance via un paramètre de compromis positif $\lambda \geq 0$

$$\begin{array}{ll} \max_{w\in\mathbb{R}^n} & w^T\eta - \lambda w^T\Sigma w \\ \text{s.c} & w^T\mathbf{1} = 1 \\ & l \leq w \leq u \end{array} \tag{4.2}$$

avec $w^T\eta$=$E[w^T R]$ et $\sigma^2(w^T R) = w^T\Sigma w$, où $\eta \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur des rendements espéré pour les n actifs , $\mathbf{1} = (1, 1, 1, ..., 1)$ et $\Sigma \in \mathbb{R}^{n\times n}$ est la matrice de covariance pour les n actifs.

Cela permet de représenter la valeur attendue et la variance du rendement du portefeuille en termes de w, et par conséquent de formuler un problème d'optimisation avec le vecteur de décision w.

4.3.1 L'optimisation du superquantile et bPOE avec Distributions qualifiées

On va voir dans cette section la formule du superquantile à l'aide de la notation de rendements des actifs, et non de pertes. Le superquantile est la perte espéré au-dessus du quantile donc en termes de rendements, ce serait la valeur conditionnelle espéré des rendements dans la queue gauche, qui peut être décrite par le superquantile gauche :

$$\tilde{q}_{1-\alpha}(R) = \frac{1}{1-\alpha}\int_0^{1-\alpha} q_p(R)dp$$

On peut utiliser les formules superquantiles de forme fermée dans les sections précédentes pour le superquantile droit $\bar{q}_\alpha(R)$ pour calculer le superquantile gauche $\tilde{q}_\alpha(R)$, comme suit

$$\alpha\tilde{q}_\alpha(R) + (1-\alpha)\bar{q}_\alpha(R) = \int_0^1 q_p(R)dp = E[R],$$

Donc

$$-\tilde{q}_{1-\alpha}(R) = -\frac{1}{1-\alpha}\left(E[R] - \alpha\bar{q}_{1-\alpha}(R)\right).$$

Puisque $\tilde{q}_{1-\alpha}(R) = \bar{q}_{\alpha}(X)$, bPOE est défini comme suit :

$$\bar{p}_x(X) = \{1-\alpha \mid \bar{q}_\alpha(X) = x\} = \{1-\alpha \mid \tilde{q}_{1-\alpha}(R) = -x\}.$$

Distributions qualifiées pour l'optimisation du portefeuille

Le problème d'optimisation de portefeuille superquantile ou bPOE a sa fonction objective ou l'une des contraintes définies en termes de $\tilde{q}_{1-\alpha}\left(w^T R\right)$ ou $\bar{p}_x\left(w^T R\right)$.

Pour formuler un tel problème à l'aide d'une loi donnée, Nortan et al. ont défini un ensemble de distributions qualifiées.

Définition 4.3.1 (Distribution qualifiée)**.** *Une distribution qualifiée $\mathcal{D}$ satisfait aux conditions suivantes :*

1. $w^T R \sim \mathcal{D} \implies \tilde{q}_{1-\alpha}(w^T R) = w^T\eta - \sqrt{w^T\Sigma w}\,\zeta(\alpha,\Theta)$*, où $\zeta(\alpha,\Theta)$ est une fonction dépendant uniquement de α et éventuellement d'un ensemble de paramètres fixes Θ qui ne dépendent pas de w, η est le vecteur des rendements attendus des actifs et Σ est la matrice de covariance pour les rendements des actifs.*
2. *Les paramètres statistiques de la distribution $\mathcal{D}$ doivent être cohérents avec les statistiques descriptives de la vie réelle rendements des actifs.*
3. *La forme du fonction de densité pour la distribution donnée $\mathcal{D}$ doit être typique à la forme du densité empirique des rendements d'actifs réels .*

Interprétation de les conditions

• La condition (1) garantit que le superquantile peut être exprimé en termes de w. Ceci est nécessaire pour exprimer le problème d'optimisation superquantile.
Par exemple, si nous supposons que $w^T R \sim \text{Logistic}(\mu, s)$, nous devons être en mesure d'exprimer μ et s en termes de w.

Puisque $\mu = E[w^T R] = w^T\eta$ et $w^T\Sigma w = \sigma^2(w^T R) = \frac{s^2\pi^2}{3}$,on a

$$\begin{aligned}
\bar{q}_{1-\alpha}(R) &= \frac{1}{1-\alpha}\left(E[R] - \alpha\bar{q}_{1-\alpha}(R)\right) = \frac{1}{1-\alpha}\left(\mu - \alpha\left[\mu + \frac{s}{\alpha}(-(1-\alpha)\ln(1-\alpha) - \alpha\ln(\alpha))\right]\right) \\
&= \mu - \frac{s}{1-\alpha}(-\alpha\ln(\alpha) - (1-\alpha)\ln(1-\alpha)) \\
&= w^T\eta - \sqrt{w^T\Sigma w}\frac{\sqrt{3}(-\alpha\ln(\alpha) - (1-\alpha)\ln(1-\alpha))}{\pi(1-\alpha)},
\end{aligned}$$

qui satisfait (1).

Autres exemples qui satisfont à cette condition sont les lois de Laplace, Normale, Exponentielle, Student-t, Pareto, GPD et GEV.
Pour Student-t, nous supposons que le paramètre ν est fixe et identique pour tous les actifs, c'est-à-dire $\Theta = \nu$, et pour les distributions GPD/GEV $\Theta = \{\xi\}$.
• Les conditions (2) et (3) sont des contrôles de la cohérence de les hypothèses de modèle de portefeuille . Par exemple, pour la loi exponentielle $E[R] = \frac{1}{\lambda} = \sigma(R)$, toutefois, pour les rendements réels des actifs, la moyenne de l'échantillon n'est généralement pas égale à l'écart-type de l'échantillon.

Ainsi, la loi exponentielle et la loi de Pareto n'ont aucun sens dans les problèmes d'optimisation de portefeuille, même s'ils satisfont (1). Quant à (3), une loi de probabilité n'est pas pratique s'il existe un écart évident entre la forme de son densité et la forme du densité empirique observé à l'aide de rendements d'actifs réels. Ce dernier est généralement en forme de cloche ou, plus probablement, en forme de V inverse, et n'a jamais la forme du densité d'un Exponentielle, d'un Pareto/GPD ou d'un Weibull pour $k < 1$.

Cela nous laisse avec un ensemble de quatre lois elliptiques qui répondent aux trois conditions : Logistique, Laplace, Normal et Student $-t$, ainsi que la loi non elliptique GEV .

Pour ce dernier, avec $\xi \neq 0$, le superquantile gauche peut être exprimé comme suit :

$$\bar{q}_{1-\alpha}(R) = w^T\nu - \sqrt{w^T\Sigma w}\frac{\alpha\Gamma(1-\xi) - \Gamma_U(1-\xi, \ln(\frac{1}{1-\alpha}))}{(1-\alpha)\sqrt{g_2 - g_1^2}},$$

où $\Gamma_U(a,b) = \int_b^\infty p^{a-1}e^{-p}dp$ est la fonction Gamma incomplète supérieure, $g_k = \Gamma(1-k\xi)$.

L'optimisation du superquantile et bPOE

Comme une alternative au problème de Markowitz Nortan et al. ont trouvé un portefeuille où le superquantile (4.3) ou la bPOE (4.4) seront une fonction objective minimisés.

$$\begin{array}{ll} \min_{w\in\mathbb{R}^n} & -\bar{q}_{1-\alpha}\left(w^TR\right) \\ \text{s.c} & w^T\mathbf{1} = 1 \\ & l \le w \le u \end{array} \tag{4.3}$$

$$\begin{array}{ll} \min_{w\in\mathbb{R}^n} & \bar{p}_x\left(w^TR\right) \\ \text{s.c} & w^T\mathbf{1} = 1 \\ & l \le w \le u \end{array} \tag{4.4}$$

Pour les distributions qualifiées, ces problèmes peuvent être simplifiés. Tout d'abord, (4.3) se réduit à (4.5) :

$$\begin{array}{ll} \max_{w\in\mathbb{R}^n} & w^T\eta - \sqrt{w^T\Sigma w}\zeta(\alpha,\Theta) \\ \text{s.c.} & w^T\mathbf{1} = 1 \\ & l \le w \le u \end{array} \tag{4.5}$$

Khokhlov (2016) montre que la solution optimale à (4.5) est la même que la solution optimale à un problème d'optimisation de Markowitz (4.2) avec $\lambda = \frac{\zeta(\alpha,\Theta)}{2\sigma(w^T R)}$.

Ainsi, le portefeuille optimal superquantile est également optimal en moyenne-variance au sens de Markowitz.

Proposition 4.3.2. *Si on suppose que $w^T R \sim \mathcal{D}$ et nous avons $\mathcal{D}$ est une distribution qualifiée, alors* (4.4) *réduit à* (4.6)

$$\begin{array}{ll} \max_{w\in\mathbb{R}^n} & \frac{w^T\eta + x}{\sqrt{w^T\Sigma w}} \\ s.c. & w^T\mathbf{1} = 1 \\ & l \leq w \leq u \end{array} \tag{4.6}$$

Démonstration. On note que d'abord par définition du superquantile, nous savons que $\zeta(\alpha,\Theta)$ est une fonction croissante par rapport à $\alpha \in [0,1]$.

Ensuite,comme $\bar{p}_x(X) = \{1-\alpha \mid \tilde{q}_{1-\alpha}(R) = -x\}$ et $\tilde{q}_{1-\alpha}\left(w^T R\right) = w^T\eta - \sqrt{w^T\Sigma w}\zeta(\alpha,\Theta)$ pour les distributions qualifiées, le problème (4.4) peut être réécrit comme suit :

$$\begin{array}{ll} \min_{w\in\mathbb{R}^n,\alpha} & 1-\alpha \\ \text{s.c.} & -w^T\eta + \sqrt{w^T\Sigma w}\zeta(\alpha,\Theta) = x \\ & w^T\mathbf{1} = 1 \\ & l \leq w \leq u \end{array} \tag{4.7}$$

qui peut alors s'écrire comme suit :

$$\begin{array}{ll} \max_{w\in\mathbb{R}^n} & \alpha \\ \text{s.c} & \zeta(\alpha,\Theta) = \frac{w^T\eta + x}{\sqrt{w^T\Sigma w}} \\ & w^T\mathbf{1} = 1 \\ & l \leq w \leq u \end{array} \tag{4.8}$$

Enfin, puisque $\zeta(\alpha,\Theta)$ est une fonction croissante par rapport à α et Θ ne dépend pas de w, alors on peut formuler la maximisation comme (4.6) sans changer l'argmin. □

Cette proposition a l'implication importante pour la théorie du portefeuille que le portefeuille bPOE optimal pour la distribution qualifiée ne dépend pas de la distribution elle-même.
Le même portefeuille aura le bPOE le plus bas pour l'une de ces distributions. Le fait que l'optimisation bPOE soit, dans un certain sens, indépendante des hypothèses distributives la rend préférable à l'optimisation superquantile.

4.3.2 Résultats expérimentaux

Dans cette section nous présentons des résultats expérimentaux d'un exemple de portefeuille d'actions mondiales qui se compose de 6 portefeuilles de marché : États-Unis, Japon, Royaume-Uni, Allemagne, France et Suisse, représentées par les indices MSCI(entreprise de services financiers, publiant notamment les indices boursiers) correspondants - MXUS, MXJP, MXGB, MXDE, MXFR, MXCH. Les rendements des portefeuilles mentionné précédemment sont pré-

Asset ticker	Expected return	Standard deviation	Correlations MXUS	MXJP	MXGB	MXDE	MXFR	MXCH
MXUS	10.25%	13.79%	1	0.190041	0.639133	0.481857	0.499406	0.605384
MXJP	6.90%	26.05%	0.190041	1	0.450337	0.251601	0.378753	0.373964
MXGB	8.81%	19.16%	0.639133	0.450337	1	0.579918	0.584215	0.654687
MXDE	9.15%	20.31%	0.481857	0.251601	0.579918	1	0.753072	0.628426
MXFR	8.83%	20.40%	0.499406	0.378753	0.584215	0.753072	1	0.580626
MXCH	13.85%	17.45%	0.605384	0.373964	0.654687	0.628426	0.580626	1

FIGURE 4.1 – Données sur le rendement du portefeuille

sentés dans le tableau 4.1.
Ce problème a été résolu à l'aide d'un algorithme de programmation non linéaire et les résultats sont fournis dans le tableau 4.2.
Les valeurs respectives de λ sont également fournies, ce qui permet de donner les mêmes portefeuilles en utilisant le MVO standard solveur qui utilise un algorithme de programmation quadratique.

Asset	min risk	CVaR 99% optimal portfolios				CVaR 95% optimal portfolios			
ticker	portfolio	normal	t (df=3)	Laplace	logistic	normal	t (df=3)	Laplace	logistic
MXUS	70.99%	65.80%	67.59%	67.03%	66.53%	64.23%	64.78%	65.05%	64.64%
MXJP	13.98%	9.61%	11.11%	10.64%	10.21%	8.28%	8.74%	8.97%	8.62%
MXGB	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
MXDE	9.24%	2.87%	5.07%	4.37%	3.76%	0.95%	1.61%	1.94%	1.44%
MXFR	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
MXCH	5.79%	21.72%	16.22%	17.96%	19.50%	26.54%	24.87%	24.04%	25.30%
Return	9.89%	10.68%	10.40%	10.49%	10.57%	10.91%	10.83%	10.79%	10.85%
St.dev.	12.86%	13.01%	12.93%	12.95%	12.97%	13.11%	13.08%	13.06%	13.09%
λ		20.48	31.28	26.82	23.80	15.73	17.11	17.88	16.73

FIGURE 4.2 – Le portefeuille Optimal d'un Superquantile (CVaR)

D'après les résultats du tableau 4.2 on trouve que :

— Même si les portefeuilles optimaux du superquantiles (CVaR) et le portefeuille global à variance minimale (min risk portfolio) sont assez proches, mais ils sont différents.
— Les hypothèses des lois jouent un rôle dans la composition optimale des portefeuilles, par exemple la loi de Student-t est la plus conservatrice pour CVaR 99%.
Cependant, il n' y a pas une grande différence entre les portefeuilles optimaux pour la CVaR 95% .

À partir du modèle d'optimisation de CVaR (4.5) si le rendement du portefeuille est limité par le bas, sauf si cette contrainte est très proche du rendement du portefeuille global à variance minimale, il en résulte que l'optimisation superquantile est essentiellement la même chose que la minimisation de la variance. Si le risque est limité par le haut, ce superquantile l'optimisation est la même chose que la maximisation du rendement.

Avec le même ensemble d'actifs, en résolvant le problème d'optimisation bPOE (4.4) avec des seuils $x = 0,16$ et $x = 0,25$ (c'est-à-dire des pertes supérieures respectivement à 16% et 25% du portefeuille initial), $l = 0$ et $u = 1$.
Le tableau 4.3 montre les résultats suivants : la bPOE minimal atteint la composition optimaux du portefeuille, ainsi atteint tout les portefeuilles optimaux de CVaR .
Toutes les solutions optimales ont été générées par le non-linéaire algorithme de programmation pour différentes lois, mais les résultats soutiennent la conclusion que l'optimal de la composition du portefeuille ne dépend pas de les loi de probabilité

Assumed distribution	normal	t (df=3)	Laplace	logistic	normal	t (df=3)	Laplace	logistic
bPOE threshold, x	16%				25%			
bPOE value, $\bar{p}_x(X)$	5.13%	6.21%	7.46%	6.36%	0.80%	2.93%	2.81%	1.86%
Asset tiker	bPOE-optimal portfolio composition							
MXUS	64.20%	64.19%	64.20%	64.20%	65.95%	65.95%	65.95%	65.95%
MXJP	8.26%	8.27%	8.25%	8.25%	9.73%	9.73%	9.73%	9.73%
MXGB	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
MXDE	0.90%	0.91%	0.90%	0.90%	3.05%	3.05%	3.06%	3.05%
MXFR	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
MXCH	26.64%	26.63%	26.64%	26.65%	21.27%	21.27%	21.27%	21.27%
Return	10.92%	10.92%	10.92%	10.92%	10.65%	10.65%	10.65%	10.65%
St.dev.	13.12%	13.12%	13.12%	13.12%	13.00%	13.00%	13.00%	13.00%
Test distribution	CVaR for the test distribution's							
normal	16.00%	14.93%	13.87%	14.79%	25.00%	18.95%	19.16%	21.16%
t (df=3)	18.14%	16.00%	14.05%	15.74%	46.31%	25.00%	25.56%	31.46%
Laplace	19.48%	17.70%	16.00%	17.48%	36.62%	24.61%	25.00%	28.79%
logistic	17.61%	16.18%	14.81%	16.00%	31.14%	21.71%	22.01%	25.00%

FIGURE 4.3 – Le portefeuille optimal de bPOE

Conclusion

Ce mémoire est s'intéresse à donner quelques modèles d'optimisation de portefeuilles, ces modèles plus au moins sophistiqués sont du type Moyenne-Risque.
Puisque le champ d'application d'approche Moyenne-Variance de Markowitz est limité parce qu'il est basé sur la variance comme mesure de risque ; nous avons présenté des autre mesures risques que la variance comme la Valeur à risque introduite par la banque américaine J.P Morgan [10], la Valeur à risque Conditionnelle et the buffred probability of exceedence. Ces mesures risques tiennent compte de la non normalité des données, hypothèse très largement réaliste.

En plus de la théorie modèrne de Markowitz qui est intensivement utilisé pour contrôler le risque et évaluer les portefeuilles, nous avons donnés aussi le modèle de Sharp et le modèle de MEDAF qui sont considérés comme des modèles simplifiés de modèle de Markowitz.

Nous avons également focalisé sur le modèle du superquantile (CVAR) et le nouveau modèle d'optimisation de portefeuille :le modèle de the buffred probability of exceedence (bPOE) proposé par Matthew Norton et al.[11], ces modèles sont une alternative de modèle de Markowitz tel que les mesures bPOE et CVAR sont estimé selon la formes fermée de certaines lois de probabilité, de plus nous avons constaté que le portefeuille optimal de bPOE est plus robuste et évolutif par rapport a le portefeuille optimal de CVaR.

Bibliographie

[1] Artzner, P., Delbaen, F., Eber, J. M., & Heath, D "Coherent measures of risk." Mathematical finance 9.3 (1999) : 203-228.

[2] Bernoulli,D. "Esquisse d'une théorie nouvelle de mesure du sort." Cahiers du séminaire d'histoire des mathématiques 6 (1985) : 61-77.

[3] Charpentier,A. "Mesures de risque." Université Rennes 1 (2010).

[4] Delmas, J. F., & Jourdain, B. "Modèles aléatoires, volume 57 of Mathématiques and Applications (Berlin)[Mathematics and Applications]." (2006).

[5] El Hachloufi,M. "Les Apports de l'Intelligence Artificielle aux Approches Probabilistes pour l'Optimisation de Portefeuille d'Actifs Financiers." (2013).

[6] Fokou,R. "Mesure du risque de marché d'un portefeuille de type Actions (Value-At-Risk, Value-At-Risk Conditionnelle)." (2006).

[7] Föllmer, H., Schied, A., & Lyons, T. "Stochastic finance. An introduction in discrete time." The Mathematical Intelligencer 26.4 (2004) : 67-68.

[8] Krokhmal, P., Palmquist, J., & Uryasev, S. "Portfolio optimization with conditional value-at-risk objective and constraints." Journal of risk 4 (2002) : 43-68.

[9] Mafusalov, A., & Uryasev, S. "Buffered probability of exceedance : mathematical properties and optimization." SIAM Journal on Optimization 28.2 (2018) : 1077-1103.

[10] Morgan, J. P. "Creditmetrics-technical document." JP Morgan, New York (1997).

[11] Norton, M., Khokhlov, V., & Uryasev, S. "Calculating CVaR and bPOE for common probability distributions with application to portfolio optimization and density estimation." Annals of Operations Research 299.1 (2021) : 1281-1315.

[12] Poncet,P. et Roland,P. "La théorie moderne du portefeuille : théorie et applications." STDI Frame Maker 4986_. book (2009) : 795.

[13] Pflug, G. C. "Some remarks on the value atrisk and the conditional value at risk. In Probabilistic constrained optimization", Springer, (2000) : 272-281.

[14] Rockafellar, R. T., & Royset, J. O."On buffered failure probability in design and optimization of structures." Reliability engineering and system safety 95.5 (2010) : 499-510.

[15] Rockafellar, R. T., & Uryasev, S. "Conditional value at risk for general loss distributions." Journal of banking and finance 26.7 (2002) : 1443-1471.

[16] Rockafellar, R. T., & Uryasev, S. "Optimization of conditional value-at-risk." Journal of risk 2 (2000) : 21-42.

[17] Salah, H. B.Gestion des actifs financiers : de l'approche Classique à la modélisation non paramétrique en estimation du DownSide Risk pour la constitution d'un portefeuille efficient. Diss. Université Claude Bernard-Lyon I, 2015.

[18] Sharpe, W. F. "A simplified model for portfolio analysis." Management science 9.2 (1963) : 277-293.

[19] Szegö, G."Measures of risk." Journal of Banking and finance 26.7 (2002) : 1253-1272.

[20] Triki, E." Optimisation de portefeuille en présence des biais comportementaux". Diss. Cergy-Pontoise (2019).

[21] Von Neumann, J., & Morgenstern, O. "Theory of games and economic behavior.", (2007).