

DEPARTEMENT DES MATHEMATIQUES

**Master Mathématique et Application au Calcul Scientifique  
(MACS)**

**MEMOIRE DE FIN D'ETUDES**

**Pour l'obtention du Diplôme de Master Sciences et Techniques  
(MST)**

**La Commande Prédictive Baser Sur la  
Fonction de Lyapunov**

**Réalisé par: EL-FANNASSI Mohammed**

**Encadré par: EL KHOMSSI Mohammed**

**Soutenu le jour mois année : 22-12-2021**

**Devant le jury composé de:**

-Pr. EL KHOMSSI Mohammed	FST-FES
-Pr. CHAIBI Ghizlane	FST-FES
-Pr. HILALI Abdelmajid	FST-FES
-Pr. EL AYADI Rachid	FST-FES

**Année Universitaire 2021 / 2022**

FACULTE DES SCIENCES ET TECHNIQUES FES – SAISS

☒ B.P. 2202 – Route d'Imouzer – FES

☎ 212 (0)5 35 61 16 86 – Fax: 212 (0)5 35 60 82 14

Site web: <http://www.fst-usmba.ac.ma>

# REMERCIEMENT

Après avoir rendu grâce à Dieu le tout puissant et le miséricordieux, je tiens à exprimer mon profonde gratitude et sincères remerciements à mon cher encadrant Professeur **EL KHOMSSI Mohammed**. je le remercie pour ses orientations judicieuses, pour son effort incontournable et surtout pour sa réactivité et sa gentillesse déployée.

Ainsi, je veux par la même occasion, remercier les membres de jury Professeures **CHAIBI Ghizlane** , **HILALI Abdelmajid** et **EL AYADI Rachid** d'avoir accepté d'examiner ce travail de fin d'études et l'enrichir par leurs remarques, critiques et suggestions.

Et enfin, je présente mes remerciements les plus chaleureux au staff de la **FACULTE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE FES**, et en particulier au Corps Professoral de Master Mathématique et Application au Calcul Scientifique pour la formation solide qu'ils nous ont offert et surtout pour leur disponibilité

## Résumé

Dans ce travail, nous proposons des conceptions de la commande prédictive (MPC), qui sont capables d'optimiser la performance en boucle fermée par rapport aux considérations économiques générales pour une large classe de systèmes non linéaires.

Plus précisément, le MPC économique optimise une fonction de coût, qui est directement liée aux considérations économiques souhaitées et ne dépend pas nécessairement d'un état d'équilibre, contrairement aux modèles conventionnels classiques.

Tout d'abord, nous commençons par les systèmes non linéaires avec un échantillonnage synchrone de mesures. Dans ce cas la commande prédictive (MPC) proposé est conçu via des techniques basées sur une fonction de Lyapunov et possède deux modes de fonctionnement différents.

Par la suite, nous appliquons ces résultats aux systèmes non linéaires soumis à des mesures asynchrones et retardées. Sous l'hypothèse qu'il existe une borne supérieure sur l'intervalle entre deux mesures asynchrones consécutives et une borne supérieure sur le maximum des mesures

Toutes les conceptions (MPC) économiques proposées sont illustrées par un exemple de procédé chimique.

**les mots clés :** *Commande à horizon fini, MPC prédiction, Fonction coût, Fonction de Lyapunov, Systèmes non linéaires, Contraintes, procédé chimique.*

## Abstract

In this work, we develop model predictive control (MPC) designs, which are capable of optimizing closed-loop performance with respect to general economic considerations for a broad class of nonlinear process systems.

Specifically, in the proposed designs, the economic MPC optimizes a cost function, which is related directly to desired economic considerations and is not necessarily dependent on a steady-state—unlike conventional MPC designs.

First, we consider nonlinear systems with synchronous measurement sampling and uncertain variables. The proposed economic MPC is designed via Lyapunov based techniques and has two different operation modes.

Subsequently, we extend the results to nonlinear systems subject to asynchronous and delayed measurements and uncertain variables. Under the assumptions that there exist an upper bound on the interval between two consecutive asynchronous measurements and an upper bound on the maximum measurement delay.

All the proposed economic MPC designs are illustrated through a chemical process example .

**keywords** : *economic model predictive control, nonlinear process systems, synchronous measurements, asynchronous and delayed measurements, uncertain variables*

# TABLE DES MATIÈRES

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>10</b>
1.1	Généralités . . . . .	11
1.1.1	Notion de système dynamique . . . . .	11
1.1.1.1	Espace d'état . . . . .	12
1.1.1.2	Notion de temps . . . . .	13
1.1.1.3	Loi d'évolution . . . . .	13
1.1.2	Système dynamique général . . . . .	14
1.1.3	Systèmes dynamiques discrets . . . . .	16
1.1.4	Commande des systèmes dynamiques . . . . .	18
1.2	Commande prédictive à horizon fuyant . . . . .	21
1.2.1	Principe . . . . .	22
1.2.2	Formulation du problème . . . . .	23
1.2.3	Résolution du problème . . . . .	24
1.2.3.1	Remarques . . . . .	25
<b>2</b>	<b>stabilité au sens de Lyapunov.</b>	<b>27</b>
2.1	Stabilité de la commande prédictive avec contraintes. . . . .	28
2.1.1	Stabilité de systèmes dynamiques . . . . .	28
2.2	Notions fondamentales de la stabilité . . . . .	29
2.3	Notions de la théorie de Lyapunov . . . . .	31
<b>3</b>	<b>commande a base de Lyapunov avec échantillonnage synchrone des me- sures</b>	<b>36</b>
3.1	Classe des systèmes non-linéaire . . . . .	37
3.2	Commande a base de Lyapunov . . . . .	37

3.3	commande a base de Lyapunov avec échantillonnage synchrone des mesures	39
3.4	Stratégie d'implémentation . . . . .	40
3.5	La formulation du LEMPC . . . . .	41
3.6	Analyse de la stabilité . . . . .	42
<b>4</b>	<b>commande a base de Lyapunov avec mesures asynchrones et retardées</b>	<b>47</b>
4.1	MPC économique basé sur la méthode de Lyapunov avec mesures asynchrones et retardées. . . . .	48
4.2	Stratégie d'implémentation du LEMPC . . . . .	48
4.3	La formulation du LEMPC . . . . .	49
4.4	Analyse de stabilité . . . . .	50
<b>5</b>	<b>Application a un procédé chimique</b>	<b>54</b>
5.1	la commande de procédé . . . . .	55
5.2	Description du réacteur . . . . .	56
5.2.1	Modélisation du CSTR . . . . .	56
5.3	application . . . . .	58
5.3.1	Echantillonnage synchrone des mesures . . . . .	58
5.3.2	Echantillonnage asynchrones avec retard des mesures . . . . .	60
5.3.3	Analyse de Simulations . . . . .	61
5.4	Conclusion . . . . .	61
	<b>Conclusion générale</b>	<b>63</b>

# TABLE DES FIGURES

1.1	Un système dynamique continu : état d'une balle au cours de sa chute [6] .	12
1.2	Le monde physique vu de la machine [6] . . . . .	17
1.3	Classes de contrôleurs. On distingue les contrôleurs en boucle ouverte (a) et en boucle fermée (b) [6] . . . . .	19
1.4	Régulateur par retour d'état reconstruit [6] . . . . .	20
1.5	Principe de la commande prédictive à horizon fuyant [6] . . . . .	22
1.6	Structure d'un système de commande par MPC [6] . . . . .	25
2.1	(a) asymptotiquement stable; (b) stable; (c) instable. . . . .	29
5.1	Schéma du réacteur complètement agité exothermique irréversible [28] . . .	56

# LISTE DES SYMBOLES

## *Symboles*

$C_{A0}$	concentration molaire
$\Delta H$	enthalpie de réaction
$\Delta$	pas de discrétisation
$\phi$	Loi d'évolution
$\rho$	masse volumique du fluide dans le réacteur
$C_A$	concentration du produit à la sortie
$C_A$	la concentration du produit à la sortie
$C_p$	la capacité thermique
$C_{A0}$	concentration d'alimentation.
$F$	le débit de produit entrant .
$J$	Fonction de coût
$k_0$	Le facteur de fréquence
$Q$	le taux d'entrée/sortie de la chaleur
$T_0$	température d'alimentation dans le réacteur
$x(t)$	Variable d'état
$E$	énergie d'activation
$R$	La constante universelle des gaz parfaits
$T$	La température du milieu réactionnel



V Volume du liquide dans le réacteur

### ***Les Abréviations***

**CSTR** Continuously Stirred Tank Reactor)

**MPC** Model Predictive Control

**NMPC** La commande prédictive non-linéaire

**PID** Proportionnel-intégral-dérivé

**RHC** Receding Horizon Control

**LEMPC** Lyapunov economic Model Predictive Control

### ***Les Ensembles***

$\mathbb{N}$  Ensemble des entiers naturels

$\mathbb{N}^*$  Ensemble des entiers naturels non nuls

$\mathbb{R}$  Corps des réels

$\mathbb{R}_+$  Ensemble des nombres réels positifs

$\mathcal{S}$  L'espace d'état

$\mathcal{T}$  L'espace de temps

# Introduction générale

L'automatique est une science du contrôle des systèmes dynamiques. Les premiers exemples de contrôle des systèmes remontent à l'antiquité, mais c'est principalement au XIXe siècle que cette science se développe. Des systèmes de contrôle existent déjà, mais c'est en 1868 que James Clerk Maxwell publie le premier article mathématique sur la théorie du contrôle [10]. L'apport de la machine à vapeur lors de la révolution industrielle a considérablement accru le besoin de contrôle des machines et maintenant la théorie est largement répandue. Son utilisation se fait dans une variété de domaines très importante qui peut aller des systèmes les plus simples, contrôle allumé/éteint, aux plus complexes, contrôle avec algorithmes à variables multiples. Son objectif est d'automatiser le fonctionnement des systèmes et d'en améliorer les performances c'est pourquoi elle est si intéressante pour les scientifiques et pour les entreprises dans un marché concurrentiel. Dans ce contexte, l'accent est mis sur le contrôleur à commande prédictive, en anglais "model predictive control (MPC)", qui est souvent utilisé pour le contrôle de systèmes complexes tout en permettant de satisfaire tout un lot de contraintes.

La méthode MPC a été inventée en 1978 par Jacques Richalet [11] et a été généralisée par David W Clarke en 1987 [9], c'est une méthode légèrement plus complexe que la méthode proportionnelle, intégrale, dérivée (PID) ou placement de pôles, mais très facile à implémenter sur un ordinateur. En comparaison des méthodes PID ou placement de pôles, cette méthode est plus robuste, élimine les décalages et n'est pas affectée par les systèmes surparamétrés.

L'utilisation de cette méthode est préférable pour les systèmes à grande constante de temps comme les procédés chimiques qui ont une dynamique relativement lente. En effet pour contrôler de manière précise le système, il faut que la constante de temps soit grande devant le temps d'échantillonnage de la commande prédictive. Cette méthode est utilisée dans l'industrie depuis les années 1980 et est aujourd'hui très populaire, car elle est relativement facile à comprendre et parce qu'elle est très efficace. Elle utilise un modèle dynamique du système à contrôler et optimise la commande du système pour un horizon de temps fini.

Ce mémoire est organisé de la façon suivante. Le chapitre 1 est consacré aux systèmes dynamiques et leur commande. Le Chapitre 2 présente La notion de stabilité comme étant une problématique centrale de la théorie du contrôle plus précisément il consacré a stabilité au sens de Lyapunov. Les chapitre 3 et 4 abordent le sujet discutent la commande a base de Lyapunov avec échantillonnage synchrone des mesures et la commande a base de Lyapunov avec mesures asynchrones et retardées respectivement. Le chapitre 5 illustre ce qui précède par un exemple de procédé chimique

# CHAPITRE

## 1

# INTRODUCTION

Ce chapitre présente, après quelques généralités permettant de fixer les idées quand aux systèmes dynamiques et à leur commande, ce qu'on entend par approches numériques. Un rapide tour d'horizon non exhaustif des approches significatives de la littérature est réalisé. Tout d'abord, une technique classique est exposée : *la commande prédictive par modèle (Model Predictive Control, MPC)* ou commande à horizon fini.

## Sommaire

---

<b>1.1</b>	<b>Généralités</b>	<b>11</b>
1.1.1	Notion de système dynamique	11
1.1.1.1	Espace d'état	12
1.1.1.2	Notion de temps	13
1.1.1.3	Loi d'évolution	13
1.1.2	Système dynamique général	14
1.1.3	Systèmes dynamiques discrets	16
1.1.4	Commande des systèmes dynamiques	18
<b>1.2</b>	<b>Commande prédictive à horizon fuyant</b>	<b>21</b>
1.2.1	Principe	22
1.2.2	Formulation du problème	23
1.2.3	Résolution du problème	24
1.2.3.1	Remarques	25

---

## 1.1 Généralités

Avant d’entrer dans le vif du sujet, il convient de rappeler quelques notions sur les systèmes dynamiques et leur commande afin de cerner le domaine qui nous intéressera par la suite. En particulier, il peut être intéressant de savoir ce qu’on entend par “système dynamique”, car ce vocable recouvre un grand nombre de constructions mathématiques liées mais différentes

### 1.1.1 Notion de système dynamique

La notion de système dynamique est profondément enracinée dans le monde physique qui nous entoure. Ainsi, tous les éléments de l’univers, des particules élémentaires jusqu’aux planètes et aux étoiles, sont en évolution constante. Cette évolution se caractérise par un changement, au cours du temps, de l’état de l’objet considéré. Ici, l’état est l’ensemble des informations qui caractérisent le système et permettent de prédire son évolution. Par exemple, si on considère une balle en chute libre (Figure 2.1) dans un champ de pesanteur uniforme, un élément évident de son état est sa hauteur par rapport au sol. Cependant, cette information n’est pas suffisante. Pour pouvoir prédire sa position après l’écoulement d’un certain temps, il est aussi nécessaire de connaître la vitesse à laquelle elle se rapproche du sol, puisque sans cette information, on ne peut dire si elle est en mouvement ou immobile par rapport à celui-ci. L’état de la balle est donc le couple de valeurs (hauteur, vitesse). Cette information, qui est la mémoire du système, peut être utilisée pour faire des prédictions sur ses valeurs futures : connaissant la hauteur et la vitesse de la balle à un instant donné, on peut calculer sa nouvelle hauteur et sa nouvelle vitesse à un autre instant ultérieur. Ce calcul définit la manière dont l’état évolue au cours du temps : il s’agit de la loi d’évolution du système. Dans le cas de la balle, l’état du système peut être calculé à des intervalles aussi petits que l’on veut, le temps est donc une grandeur continue, et on parle de système dynamique continu.

L’exemple précédent fait partie des systèmes dynamiques *déterministes*, ou *causaux*. En effet, la règle qui préside à leur évolution ne fournit qu’une prédiction unique pour chaque combinaison d’état initial et d’instant considéré : pour une hauteur et une vitesse donnée de la balle, son état après l’écoulement d’un laps de temps fixe sera toujours identique.

Il existe d’autres systèmes dynamiques, dits *stochastiques*, pour lesquels cette hypothèse n’est pas respectée. Il s’agit par exemple du système consistant au jet d’une pièce. Son espace d’état est constitué des deux états qu’elle peut prendre, *pile* ; *face*, mais sa loi d’évolution n’est pas *déterministe* : en partant d’un état donné, par exemple *face*, l’état après le jet, et donc à l’instant suivant, est déterminé selon une loi de probabilité : il peut donc être soit *pile*, soit *face*.

La notion de système dynamique est donc un formalisme qui permet de décrire de nombreux phénomènes partageant certaines caractéristiques communes, qu’il s’agisse d’objets

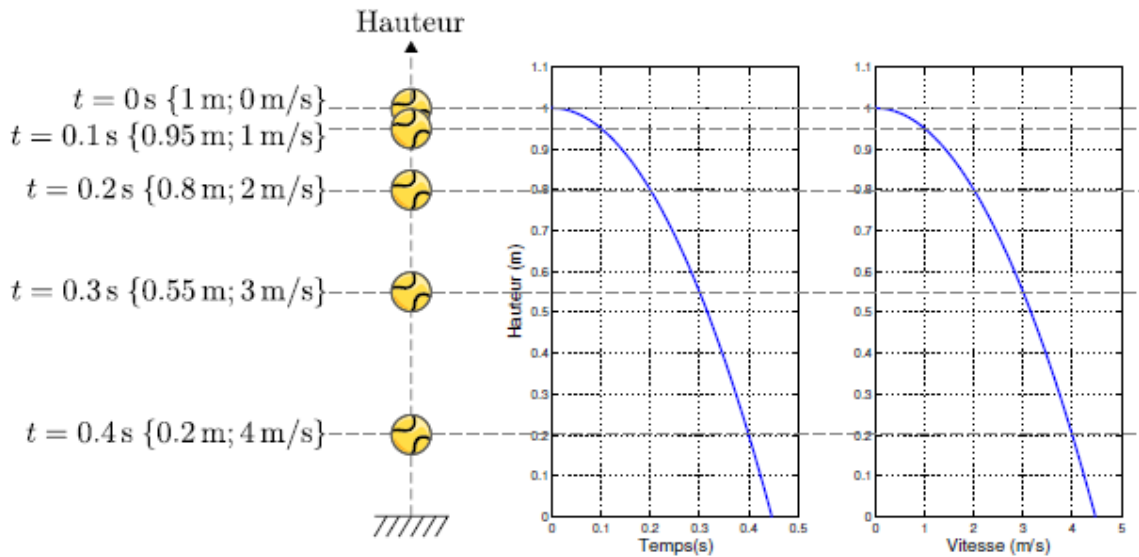


FIGURE 1.1 – Un système dynamique continu : état d’une balle au cours de sa chute [6]

du monde réel, tels que les systèmes mécaniques, ou d’objets purement mathématiques. ARROWSMITH [13] en donne la définition suivante : un système dynamique est une description mathématique des règles de dépendance temporelles d’un point dans son espace d’évolution naturel, appelées lois d’évolution. La notion de point est ici très vaste : on a vu précédemment que ce point représente l’état du système dynamique, et qu’il n’est pas nécessairement un objet géométrique. Ainsi, dans le cas de la balle, il se situe dans l’espace qui contient tous les couples (*hauteur ; vitesse*) possibles. L’ensemble dans lequel ce point se déplace est appelé *espace d’état*, et chacune de ses composante est une *variable d’état*.

Un système dynamique est donc un modèle formé par le regroupement de trois objets différents :

- Un ensemble  $\mathcal{S}$  de valeurs possibles pour l’état, l’espace d’état,
- Un ensemble d’instant  $\mathcal{T}$ , le temps,
- une règle de prédiction  $\phi$  de l’état du système en fonction de son état actuel et du temps, la *loi d’évolution*.

### 1.1.1.1 Espace d’état

L’espace d’état est l’ensemble des coordonnées nécessaires à la description complète d’un système. On note que les éventuels paramètres qui permettent de spécifier le modèle du système, par exemple la masse d’un corps dans un système mécanique, ne font en général pas partie de l’espace d’état, même s’ils peuvent être variables dans le temps.

Cet espace peut être discret et Il peut aussi être continu. Dans ce cas, on parle aussi d’*espace de phase*, selon la terminologie due à **Henri POINCARÉ**. Dans cette catégorie de systèmes dynamiques, les variables d’état peuvent évoluer continûment dans  $\mathcal{S}$ . Ainsi,

dans l'exemple de la balle, sa hauteur et sa vitesse sont des grandeurs qui peuvent prendre n'importe quelles valeurs dans  $\mathbb{R}$ , qui est infini et indénombrable.

### 1.1.1.2 Notion de temps

Tout comme l'espace d'état, le temps peut prendre des formes différentes si on le considère comme discret ou continu. Dans tous les cas il s'agit d'une grandeur  $t \in \mathcal{T}$  dont l'évolution est monotone (en général croissante), permettant de définir une relation d'ordre total dans son ensemble : cette relation d'ordre explicite la causalité inhérente à la loi d'évolution. Plus formellement,  $\mathcal{T}$  est un monoïde<sup>1</sup> totalement ordonné, muni de la loi de combinaison interne notée  $+$  et de l'élément neutre noté  $0$ .

Dans le cas discret, l'état du système n'est donné qu'après l'écoulement d'un certain intervalle donné, mais pas nécessairement constant, de temps. En général, l'intervalle de temps est normalisé tel que  $\mathcal{T} = \mathbb{N}$ , voire  $\mathcal{T} = \mathbb{Z}$ , chaque élément représentant un instant ou une itération distincts.

Par contre, dans l'exemple de la balle le temps est considéré comme une grandeur continue :  $\mathcal{T} = \mathcal{I} \subseteq \mathbb{R}$ . Il correspond alors à la notion intuitive et familière du temps, c'est à dire un intervalle de  $\mathbb{R}$ .

### 1.1.1.3 Loi d'évolution

Enfin, la loi d'évolution  $\Phi$  est une fonction qui associe à chaque point  $x \in \mathcal{S}$ , appelé *état initial*, une image unique<sup>2</sup> dans  $\mathcal{S}$ , en fonction de la variable  $t \in \mathcal{T}$ , dite *paramètre d'évolution*.

Formellement, on peut définir, dans le cadre général, la loi  $\Phi$  comme suit :

$$\Phi : \mathcal{D} \subseteq \mathcal{I} \times \mathcal{S} \mapsto \mathcal{S}.$$

Soit  $\mathcal{I}$  l'ensemble de tous les temps pour lesquels  $\Phi$  est définie pour un état initial donné fixe :

$$\mathcal{I}(x) = \{t \in \mathcal{T} : (t, x) \in \mathcal{D}\}$$

Alors  $\Phi$  a les propriétés suivantes :

— A l'instant  $t_0$ , on a pour tout  $x|_{t=t_0}$  et  $t_0$  l'identité :

$$\Phi(t_0, x|_{t=t_0}) = x|_{t=t_0} \tag{1.1}$$

— De plus, elle respecte la propriété de groupe à un paramètre :

$$\Phi(t_2, \Phi(t_1, x|_{t=t_0})) = \Phi(t_2, x|_{t=t_0}), \quad \forall t_0, t_1, t_2 \in \mathcal{I}(x) \tag{1.2}$$

---

1. un monoïde est un ensemble muni d'une loi de composition interne et d'un élément neutre unique pour cette loi. Il se distingue du groupe car l'existence d'inverses n'est pas nécessaire.

2. Dans le cas des systèmes dynamiques déterministes.

Si on considère un état initial constant, on note :

$$\Phi_x(t) = \Phi(t, x)$$

et si on considère un instant constant, on note :

$$\Phi^t(x) = \Phi(t, x)$$

Le cadre très général qui vient d'être décrit montre que la nature même de la loi d'évolution caractérise entièrement le type de système dynamique considéré.

### 1.1.2 Système dynamique général

On peut déduire de ces deux exemples qu'un système dynamique différentiel général est décrit par  $n$  équations différentielles du premier ordre en général non linéaires :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= f_1(x_1(t), \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_m(t), t) \\ \dot{x}_2(t) &= f_2(x_1(t), \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_m(t), t) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n(t) &= f_n(x_1(t), \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_m(t), t) \end{aligned}$$

avec  $t \in \mathcal{T}$ . Chaque variable d'entrée est issue d'un intervalle  $\mathcal{U}_i \subseteq \mathbb{R}$ , et on peut les rassembler dans un vecteur  $u = [u_1, \dots, u_m]^T$  qu'on appelle vecteur d'entrée du système, qui prend valeur dans l'ensemble  $\mathcal{U} = \mathcal{U}_1 \times \dots \times \mathcal{U}_m \subseteq \mathbb{R}^m$ . De même, chaque variable d'état est issue d'un intervalle  $\mathcal{S}_j \subseteq \mathbb{R}$  et le vecteur d'état  $x = [x_1, \dots, x_n]^T$  est un élément de  $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \times \dots \times \mathcal{S}_n \subseteq \mathbb{R}^n$ . Pour simplifier les notations, on donne en général un système dynamique sous la forme :

$$\dot{x} = f(x, u, t) \tag{1.3}$$

On appelle cette relation *équation d'état*, ou, par abus de langage, *équation d'évolution*. Il s'agit d'une fonction au moins définie et continue dans un domaine  $\mathcal{D}$  :

$$f : \mathcal{D} \subset \mathcal{S} \times \mathcal{U} \times \mathcal{T} \mapsto \mathbb{R}^n$$

On peut compléter le modèle (1.3) par une deuxième relation, la *relation de sortie*, qui n'est pas une équation différentielle et qui donne un vecteur  $y \in \mathcal{Y} \subseteq \mathbb{R}^q$  dont chaque composante est appelée sortie du système :

$$y = g(x, u, t)$$

Ces sorties peuvent par exemple représenter les variables mesurables du système, ou toute autre combinaison de l'état présentant un intérêt particulier. En général on a  $q \leq n$ , ce

qui signifie qu'il est possible que toutes les variables d'état ne soient pas accessibles et mesurables, amenant des difficultés pour la synthèse de lois de commande du système.

Dans la pratique, l'équation d'état de la plupart des systèmes ne dépend pas explicitement du temps. Ce sont des systèmes *stationnaires*, qui n'en dépendent qu'implicitement par l'entrée et qui s'écrivent :

$$\begin{cases} \dot{x} &= f(x, u), f : \mathcal{S} \times \mathcal{U} \mapsto \mathbb{R}^n \\ y &= g(x, u), g : \mathcal{S} \times \mathcal{U} \mapsto \mathcal{Y} \end{cases} \quad (1.4)$$

Cette forme est la plus générale possible, les fonctions  $f$  et  $g$  étant supposées non linéaires.

Comme on l'a vu précédemment, les solutions de ces systèmes différentiels forment la loi d'évolution d'un système dynamique, fonction du temps  $t$ , de l'état initial  $x|_{t=t_0} = x_0$  à l'instant  $t_0$ , pour toute entrée admissible sous les conditions d'existence et d'unicité de la solution. Comme le montrent par exemple TESCHL [1] ou PERKO [29], une de ces conditions est que les entrées admissibles soient des fonctions  $\{(\alpha = t - t_0) \in [0, +\infty[ : t \geq t_0\} \mapsto \mathcal{U}$  continues à droite par morceaux, qui ne dépendent donc pas de la date initiale  $t_0$ . Notons cette solution  $x(t, x_0, t_0, u(\alpha))$ . Le choix de la date  $t_0$  importe peu. En effet, si on considère le système autonome  $x(t, x_0, t_0, 0)$ , alors un corollaire de 1.2 est que chaque trajectoire est invariante par translation temporelle :

$$x(t, x_0, t_0, 0) = x(t + \tau, x_0, t_0 + \tau, 0), \forall t, \tau$$

De plus, puisque par définition les fonctions d'entrée sont indépendantes de la date initiale, les trajectoires de l'état du système forcé sont elles aussi invariantes par translation temporelle. Pour simplifier les notations, on peut donc poser  $t_0 = 0$  et la solution de 1.4 devient  $x(t, x_0, u)$ .

**Portrait de phase** Revenons à un système autonome en supposant que  $u(t) = 0, \forall t$ . La solution de 1.4 est alors un ensemble de trajectoires  $\phi_{x_0}(t) = x(t, x_0, 0)$  paramétrées par l'état initial  $x_0$  qui sont en fait obtenues en intégrant le système différentiel sur le plus grand intervalle possible de  $\mathcal{T}$ . On les appelle aussi courbes intégrales maximales du système, et leur union pour toutes les conditions initiales  $x_0 \in \mathcal{S}$  forme un *portrait de phase*. L'intérêt du portrait de phase est qu'il permet d'identifier des classes de trajectoires similaires et par conséquent de caractériser des comportements génériques du système dynamique.

**Champ de vecteurs** : La fonction  $f$  du système différentiel 1.4 peut par conséquent être perçue comme un champ de vecteurs qui associe à chaque état du système le vecteur tangent à la trajectoire passant par cet état. Ce vecteur représente alors la "vitesse" de l'état en ce point de l'espace de phase. En toute rigueur, ces vecteurs ne sont pas des vecteurs de l'espace de phase : chacun fait partie d'un espace vectoriel tangent au point  $x$  de  $\mathcal{S}$  et notés  $T_x(\mathcal{S})$ . L'espace image de la fonction  $f$  est donc formé de l'union  $T(\mathcal{S})$



de tous les espaces tangents à chaque point de  $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{R}^n$ , appelé fibré tangent. Cependant, en supposant  $\mathcal{S} = \mathbb{R}^n$ , ce qui est le plus souvent le cas, et qui le sera dans les systèmes que nous étudierons par la suite, on peut également considérer que cet espace image est  $\mathbb{R}^n$  : en effet,  $T_x(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$ , ce qui implique que  $T(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$ . L'équivalence du système différentiel et du champ de vecteurs sous-jacent prend tout son sens lorsqu'il s'agit d'analyser un portrait de phase, en particulier dans le cas des systèmes non linéaires [52]. En effet, c'est ce champ de vecteurs qui caractérise les trajectoires de l'état, et nous verrons par la suite que certaines techniques de commande reposent sur son analyse automatique afin d'extraire de l'information utile quant au système à piloter. Cette analyse est toutefois complexe, puisque les champs de vecteurs associés aux systèmes non linéaires sont souvent extrêmement tortueux.

**Points d'équilibre** : Ce champ de vecteur laisse aussi apparaître des points particuliers de l'espace de phase. Il s'agit de points qui ont pour vecteur tangent le vecteur nul. Cela signifie que ces points sont invariants pour tout  $t \in \mathcal{T}$ , ce sont des points d'équilibre. Un état  $\tilde{x}$  est un point d'équilibre pour le système autonome si :

$$f(\tilde{x}, u) = 0 \iff x(t, \tilde{x}, u) = \tilde{x} \quad \forall t \in \mathcal{T}$$

où 0 représente le vecteur nul de  $\mathbb{R}^n$ . En d'autres termes, les points d'équilibre sont toutes les solutions  $\tilde{x}$  de l'équation

$$f(x, u) = 0$$

**Points de fonctionnement** : Ceci nous amène au concept de point de fonctionnement. Un point de fonctionnement est une valeur désirée de l'état ou de la sortie, qui ne correspond pas nécessairement à un point d'équilibre du système autonome. Il s'agit donc d'étendre la notion de point d'équilibre au système piloté. Les points de fonctionnement sont donc les couples de vecteurs d'état et d'entrée  $(\tilde{x}, \tilde{u})$  tels que :

$$f(\tilde{x}, \tilde{u}) = 0$$

### 1.1.3 Systèmes dynamiques discrets

La totalité des systèmes dynamiques que nous allons rencontrer dans cet exposé sont modélisés sous forme de systèmes dynamiques continus. Cependant, les machines utilisées pour les piloter sont des ordinateurs, qui sont par essence des machines en temps discret. Toutes les opérations qu'ils réalisent sont en effet synchronisées par un signal d'horloge, et toute notion de temps est fonction de cette horloge. En d'autres termes, le temps est quantifié selon un intervalle multiple de la période d'horloge. Cette quantification conduit à ne considérer le système qu'à des intervalles donnés de temps  $\delta t \in \mathbb{R}$  et donc à des dates  $t$  multiples de cet intervalle :  $t = k\delta t$ ,  $k \in \mathcal{T}$ . En général, on considère  $\mathcal{T} \subseteq \mathbb{Z}$ . Dans le cas des systèmes différentiels, la loi d'évolution était construite à partir d'une fonction, l'équation

d'état, qui donnait la variation infinitésimale de l'état entre deux instants successifs aussi proches que l'on veut. Par analogie, un système dynamique discret peut se définir à partir d'une application de récurrence  $f$  au moins définie et continue par rapport à  $x$  sur un domaine  $\mathcal{D}$  qui, étant donné l'état à l'instant  $k$ , permet de calculer l'état à l'instant  $k + 1$  et qu'on appelle équation d'état discrète :

$$x(k+1) = f(x(k), k), \quad f : \mathcal{D} \subseteq \mathcal{S} \times \mathcal{T} \mapsto \mathcal{S}$$

De même, nous considérons toujours les systèmes stationnaires, qui ne dépendent donc pas du temps, mais sur lesquels une action externe peut être accomplie, en introduisant un vecteur d'entrée  $u \in \mathcal{U}$ . Dans ce cas, la relation de récurrence ne dépend plus de  $k$  que implicitement au travers du signal d'entrée

$$u(k) : \mathcal{T} \mapsto \mathcal{U}$$

Dans ce cas, l'équation de récurrence devient :

$$x(k+1) = f(x(k), u(k)), \quad f : \mathcal{D} \subseteq \mathcal{S} \times \mathcal{T} \mapsto \mathcal{S}$$

à laquelle on peut adjoindre une relation  $g : \mathcal{D} \mapsto \mathcal{Y}$  de sortie qui donne, en fonction de l'état et de l'entrée, un vecteur de sortie selon la même définition que dans le cas continu. On peut alors écrire le système dynamique discret total sous la forme :

$$\begin{cases} x_{k+1} = f(x_k, u_k) \\ y_k = g(x_k, u_k) \end{cases} \quad (1.5)$$

en notant  $x(k) = x_k$ .

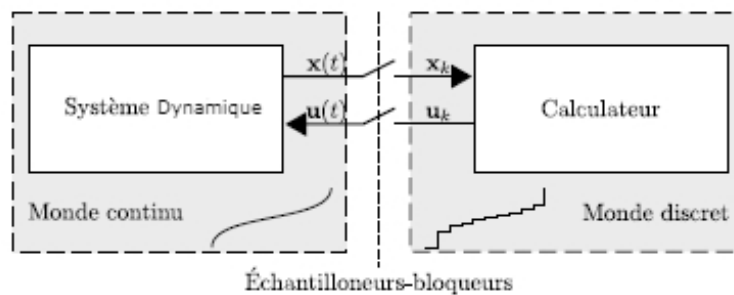


FIGURE 1.2 – Le monde physique vu de la machine [6]

Connaissant les trajectoires d'un système dynamique différentiel continu autonome, il est toujours possible de passer à une représentation discrète, elle aussi autonome. Il suffit pour cela de préciser un intervalle de temps  $\delta t \in \mathbb{R}$  et d'écrire :

$$f(x_k, 0) = \Phi^{\delta t}(x_k, 0)$$

La difficulté réside dans la prise en compte de l'entrée. Dans la pratique, cette entrée est le plus souvent calculée par un ordinateur qui est un système intrinsèquement discret. Ce fait implique que l'image du système dynamique vue de l'ordinateur est échantillonnée. En d'autres termes, la machine ne prend en compte le monde extérieur qu'à des instants discrets séparés par un intervalle de temps arbitraire, et surtout, n'agit sur celui-ci qu'aux mêmes instants discrets. Il y a une interface entre le monde chimique, continu, et le calculateur, discret. Cette interface, comme l'illustre la figure 1.2, est matérialisée par des échantillonneurs-bloqueurs, dont le rôle est de capturer dans un sens l'état à la date  $k\delta t$  et dans l'autre sens de conserver constante, pendant un intervalle de longueur  $\delta t$ , la valeur de l'entrée calculée par l'ordinateur. L'entrée est donc, lorsqu'elle provient d'un ordinateur, elle-même une fonction continue par morceaux, uniforme sur  $[k\delta t, (k+1)\delta t[ \in \mathbb{R}$ , ce qui reste compatible avec la définition des entrées admissibles telle que donnée dans la section 1.1.2. Cependant, certaines conditions, en particulier quant à la fréquence et à la quantification de l'échantillonnage, doivent être respectées sous peine de perdre une partie du signal continu. Ces conditions, liées au théorème de NYQUIST-SHANNON, donnent des limites acceptables de fréquence d'échantillonnage et d'immunité au bruit selon la résolution des échantillons. Sans entrer dans les détails de la théorie de l'information et du signal, qu'on peut trouver dans [5], il est essentiel d'y prendre garde si on veut espérer pouvoir reconstruire fidèlement les fonctions  $x(t)$  à partir des  $x_k$ .

### 1.1.4 Commande des systèmes dynamiques

Pour l'instant, les systèmes dynamiques différentiels que nous avons vus sont autonomes. Nous avons considéré des systèmes sur lesquels il n'existait pas de moyen d'influer volontairement de l'extérieur (cas de la balle).

La commande des systèmes dynamique regroupe l'ensemble des méthodes qui consistent à influencer sur le système dynamique pour obtenir un comportement différent de celui du système autonome. On peut classer les problèmes de commande en trois grandes catégories :

- **Stabilisation** : il s'agit de faire en sorte de garantir que les trajectoires résultantes d'un état initial non identique à un point de fonctionnement fixé à priori, appelé consigne, convergeront vers ce point de fonctionnement.
- **Poursuite** : il s'agit d'une généralisation du problème de stabilisation. Dans ce cas, le but est de garantir que certaines sorties du système vont non plus converger vers un point de fonctionnement fixe, mais être capable de suivre une trajectoire de consigne variable dans le temps.
- **Rejet de perturbation** : certaines entrées du système peuvent ne pas être des entrées de pilotage, mais des entrées de perturbation. Cela signifie qu'il est possible que le monde extérieur agisse de manière non voulue sur le système. On pourrait par exemple ajouter au système "balle" une entrée qui correspondrait au vent. Si le vent

est non nul, alors sa trajectoire serait perturbée. Le rejet de perturbation consiste à limiter les effets de telles entrées afin que le système  $y$  soit le moins sensible possible.

En règle générale, on peut rencontrer toute combinaison de ces trois problèmes. La commande des systèmes dynamique est simplement la conception de moyens de modifier, au travers de ses entrées, la trajectoire de l'état (et des sorties) d'un système dynamique afin qu'elle réponde au problème posé. Le rôle d'un système de commande, aussi appelé contrôleur ou régulateur selon les cas, est donc de construire, au cours du temps, une suite d'actions  $u(t)$  qui changeront le comportement du système piloté au travers de ses actionneurs, ce qui conduira à l'asservir.

On distingue deux grandes classes de contrôleurs : les contrôleurs en boucle ouverte et les contrôleurs en boucle fermée ou par contre-réaction.

Les premiers (figure 1.3 (a)) calculent les actions en se basant simplement sur le temps, leur propre état, un modèle du système à piloter et d'une consigne  $w$  donnant l'objectif de contrôle. Le contrôleur ne dispose d'aucune information sur l'effet des actions calculées sur le système piloté et si l'objectif de contrôle est atteint ou non. Il est donc incapable de corriger les erreurs éventuelles qu'il commet, et ne peut compenser d'éventuelles perturbations.

Les seconds (figure 1.3 (b)) peuvent se diviser eux-même en deux catégories : les commandes par retour de sortie, et les commandes par retour d'état. Dans ce dernier cas, le contrôleur calcule les actions en se basant sur l'état courant du système piloté. Puisqu'ils mesurent l'état du système, il leur est possible d'adapter les actions à réaliser en fonction de leur résultat et de l'écart entre la consigne  $w$  et l'état  $x$ , ce qui permet de construire des commandes qui, rejetant les perturbations externes, sont robustes aux perturbations.

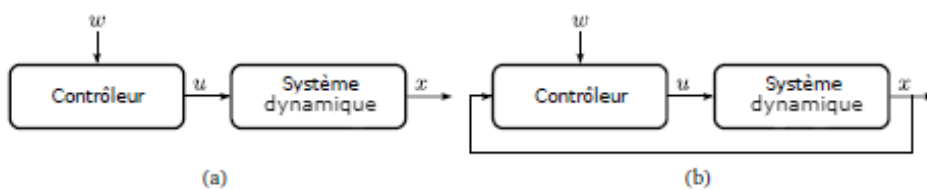


FIGURE 1.3 – Classes de contrôleurs. On distingue les contrôleurs en boucle ouverte (a) et en boucle fermée (b) [6]

Puisqu'ils permettent de corriger les actions en fonction de leur résultat, cette deuxième catégorie de contrôleurs est de loin la plus répandue. Cependant, dans la plupart des cas, l'état complet du système n'est pas disponible, soit qu'on ne dispose pas de moyens physiques de le mesurer, soit que l'ajout de capteurs pour certaines variable d'état est impossible pour des raisons techniques ou économiques. Dans ce cas, on ne peut utiliser directement une commande par retour d'état, et le contrôleur ne peut utiliser que la sortie  $y$  et la consigne  $w$  pour calculer l'entrée. Les systèmes de commande les plus répandus,

à savoir les contrôleurs de type proportionnel-intégral-dérivé [53] sont de ce type. Cependant, la plupart des techniques avancées de contrôle, et en particulier celles dont il sera question plus loin, sont du type retour d'état. Pour qu'elles soient utilisables même en l'absence d'une mesure complète de l'état, il faut être capable de l'estimer à partir de la simple connaissance des sorties. Dans ce cas, on ajoute un observateur d'état (figure 1.4) dont le rôle est d'en fournir une estimation  $\hat{x}$  en fonction des entrées et des sorties. Le régulateur utilise alors cette estimation pour calculer l'entrée à appliquer au système. Formellement, un régulateur par retour d'état est une fonction telle que

$$u = \gamma(x, w)$$

et le système dynamique peut alors s'écrire

$$\dot{x} = f(x, \gamma(x, w))$$

dans le cas d'un retour d'état statique. La combinaison du système et de son contrôleur forme un système dynamique autonome différent du système initial, non piloté. Le but de la synthèse de commande est alors de trouver la fonction qui permet de répondre au problème de contrôle. Il existe de très nombreuses méthodes, qui pour la plupart s'attachent à trouver une expression algébrique de  $\gamma$ , ce qui est plus ou moins complexe en fonction des non linéarités du système. On peut citer par exemple les commandes linéaires par placement de pôles [24], les commandes de type linéaire-quadratiques [8], où encore les approches non linéaires basées sur la théorie de **LYAPUNOV** [22].

Ces approches, classiques ou avancées, constituent ce qu'on peut appeler des méthodes formelles. Elles sont basées sur la dérivation d'expressions algébriques pour  $\gamma$ , expressions qui dépendent le plus souvent de manière forte de la forme du modèle du système.

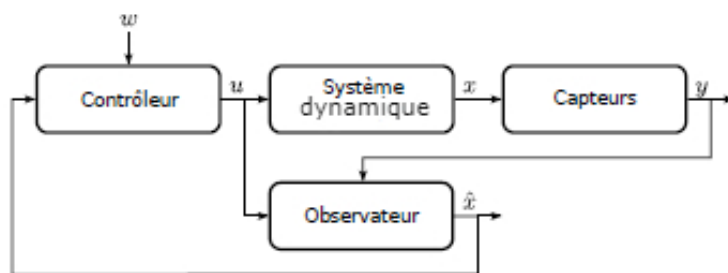


FIGURE 1.4 – Régulateur par retour d'état reconstruit [6]

Une fois la commande synthétisée, il s'agit de la mettre en oeuvre. Il est parfois possible de concevoir des systèmes de commande analogique continus, où la fonction  $\gamma$  est donnée par un système externe au système à piloter de manière continue. On peut par exemple donner l'exemple trivial de la stabilisation du niveau d'eau d'un réservoir par pilotage d'une vanne par un flotteur, qui est un système de régulation dynamique, ou l'usage d'amplificateurs différentiels intégrés pour construire des régulateurs de type

proportionnel-intégral-dérivé (PID). Cependant, dans la plupart des cas, les systèmes de commande sont réalisés sous forme numérique au moyens d'ordinateurs.

Puisque un ordinateur est un système discret, la valeur de la fonction  $\gamma$  n'est évaluée qu'à des instants particuliers, et maintenue constante entre ces instants, conduisant à une commande échantillonnée-bloquée. Puisque la plupart des approches classiques de la commande fournissent des contrôleurs continus, cette implémentation requiert soit une discrétisation du contrôleur, soit de choisir un pas d'échantillonnage  $\delta t$  suffisamment petit pour pouvoir obtenir une bonne approximation de la commande continue. Entre deux pas, le système piloté est essentiellement livré à lui-même, puisque le contrôleur ne peut changer la commande. On a alors la même situation que dans le cadre de la commande en boucle ouverte, ce qui peut conduire à des différences importantes à ce qui serait obtenu si on pouvait implémenter la commande de manière continue.

Par définition, toute commande implémentée sur un ordinateur est numérique. Quels sont dans ces conditions les types de commandes qui nous intéressent ?

Il existe une autre classe d'approches, où la fonction  $\gamma$  ne peut être donnée explicitement dans le cas général. En particulier, depuis le début des années 1960, l'automatique moderne a suivi les progrès réalisés en commande optimale et en optimisation. Cette évolution a abouti à des techniques de contrôle avancé basées le plus souvent sur la génération à priori de trajectoires d'état optimales selon des critères économiques donnés. D'autre part, la génération à priori de trajectoires d'état permet de prendre en compte des contraintes sur les états ou les entrées, puisque on peut choisir à priori d'éliminer les trajectoires qui ne les respectent pas. La plus courante de ces contraintes est de borner les entrées admissibles aux possibilités finies des actionneurs physiques. Dans certains cas, il est possible de donner l'expression de ces trajectoires et en conséquence de la fonction  $\gamma$ , en particulier si le système piloté est linéaire et qu'on abandonne l'idée de contraintes. Mais dans le cas général, la seule possibilité est de calculer à chaque pas la valeur de  $\gamma$  en fonction de la situation présente et de la connaissance du système ou d'une représentation de celui-ci. Ce calcul est alors non plus simplement l'évaluation d'une fonction algébrique, mais un algorithme de calcul plus ou moins complexe, sa complexité dépendant souvent de la quantité et de la qualité de l'information disponible à propos du système piloté. Nous parlerons alors d'approche algorithmique de la commande.

Parmi ces techniques, nous en détaillerons une dans les sections suivantes :

- la commande prédictive à horizon fuyant, ou encore Model-based Predictive Control (MPC).

## 1.2 Commande prédictive à horizon fuyant

Devoir calculer à l'avance le coût associé à chaque état afin de résoudre un problème de programmation dynamique présente certains avantages, mais aussi des inconvénients. L'avantage principal est que calculer la commande à appliquer au système demande peu

de ressources. Toutefois, si dans certains cas linéaires sans contraintes on peut donner une formulation analytique de ce coût, dans la plupart des situations, en particulier quand le système est non linéaire et/ou contraint, ce n'est pas possible. Il faut alors se résoudre à construire une approximation de cette fonction de coût dans un sous-espace fini de l'espace d'état.

### 1.2.1 Principe

L'idée centrale de la commande à horizon fuyant (Receding Horizon Control, RHC), aussi appelée commande prédictive basée sur un modèle (Model Predictive Control, MPC) est de ne pas avoir à déterminer à l'avance la stratégie optimale pour chaque état initial. Dans cette approche, les entrées de contrôle sont sélectionnées au fur et à mesure en se basant sur un critère d'optimalité formulé sur un horizon fini de prédiction. Un modèle explicite est utilisé pour prédire les effets des entrées futures sur l'état et les sorties. Un des intérêts essentiels de cette technique est qu'on peut prendre en compte de manière explicite des contraintes sur les entrées, sur l'état et sur les sorties durant la phase d'optimisation, ce qui en fait une méthode de contrôle en boucle fermée très attractive et utilisée dans une grande variété d'applications [18] [19] allant du contrôle de procédés industriels à l'aérospatial.

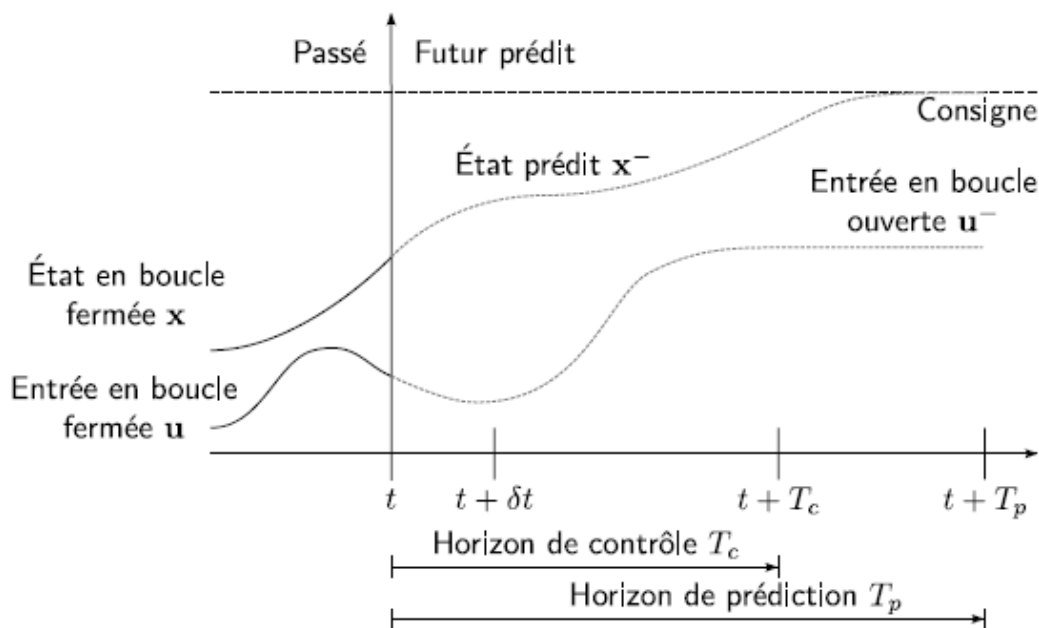


FIGURE 1.5 – Principe de la commande prédictive à horizon fuyant [6]

La figure 1.5 montre le principe de base de cette méthode. En utilisant les mesures faites à l'instant  $t$ , le contrôleur utilise un modèle du système pour prédire son comportement dynamique futur sur un horizon de temps  $T_p$  et détermine sur un horizon de contrôle  $T_c \leq T_p$  le signal d'entrée en boucle ouverte qui minimise une fonctionnelle de coût dépendant d'un objectif de performance donné à priori. Si il n'y a aucune perturbation et

si le modèle du système est parfait, alors en supposant que le problème d'optimisation peut être résolu pour un horizon infini, il serait possible d'appliquer au système le signal d'entrée futur, calculé à l'instant  $t = 0$ , pour tout temps  $t \geq 0$ . On obtiendrait ainsi un contrôleur en boucle ouverte. Toutefois, procéder de cette façon n'est pas possible en général : à cause des erreurs de modèle et des perturbations externes, le comportement réel du système diffère de sa prédiction. Afin de mettre en place un mécanisme de contre-réaction, le signal d'entrée calculé n'est appliqué que jusqu'à ce que la prochaine mesure soit disponible, pendant un temps  $\delta t$ . En utilisant la nouvelle mesure à l'instant  $t + \delta t$ , la procédure complète est répétée pour trouver un nouveau signal d'entrée future, en faisant avancer les horizons de contrôle et de prédiction

## 1.2.2 Formulation du problème

Le problème consiste à stabiliser une classe de systèmes dynamiques définis par

- un système déterministe d'équations différentielles ordinaires du premier ordre

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), \quad x(0) = x_0, \quad f(0,0) = 0$$

- un ensemble  $S \subseteq \mathbb{R}^n$  connexe d'états réalisables tel que  $x(t) \in S$ ,
- un ensemble  $U \subseteq \mathbb{R}^m$  compact d'entrées admissibles tel que  $u(t) \in U$
- une fonctionnelle de coût

$$J(x(t), u^-, T_p, T_c) = \int_t^{t+T_p} F(x^-(\tau), u^-(\tau)) d\tau$$

où  $u^-$  est une fonction d'entrées futures continue à droite sur  $[0, T_p]$  et  $x^-$  la trajectoire d'état prédite

Les ensembles  $S$  et  $U$  représentent des contraintes d'état et d'entrée. Dans leur forme la plus simple, il peut s'agir de contraintes linéaires de la forme

$$\mathcal{U} \quad : \quad \{u \in \mathbb{R}^m \mid u_{\min} \leq u \leq u_{\max}\}$$

$$\mathcal{X} \quad : \quad \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_{\min} \leq x \leq x_{\max}\}$$

mais pas nécessairement. Le problème  $\mathcal{P}$  peut alors s'écrire :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{u^-} \quad J(x(t), u^-, T_p, T_c) \\ \text{s.c} \\ \dot{x}^-(\tau) = f(x^-(\tau), u^-(\tau)) \\ x^-(t) = x(t) \\ x^-(\tau) \in \mathcal{S} \quad \forall \tau \in [t, t+T_p] \\ u^-(\tau) = u^-(\tau + T_c) \quad \forall \tau \in [t+T_c, t+T_p] \\ u^-(\tau) \in \mathcal{U} \quad \forall \tau \in [t, t+T_c] \end{array} \right. \quad (1.6)$$



La fonction de coût  $F$  est utilisée pour définir les performances désirées du contrôleur et peut être issue de considérations économiques par exemple. Cependant, la forme la plus utilisée est le coût quadratique suivant :

$$F(x, u) = x^T \cdot Q \cdot x + u^T \cdot R \cdot u$$

en supposant sans perte de généralité que le point de fonctionnement du système qu'on cherche à atteindre est l'origine. On peut noter que le problème de contrôle optimal en boucle ouverte  $\mathcal{P}$  est initialisé avec l'état réel du système, qu'il est nécessaire d'estimer ou de mesurer. Il s'agit donc d'un contrôleur de type "retour d'état". Si le problème a une solution, alors on la note  $u^{-*}(t, x(t), T_p, T_c)$ . Il est résolu de manière répétée à chaque fois qu'une nouvelle mesure est disponible aux instants d'échantillonnage  $t_0 + k \cdot \delta t$ ,  $t = 0, 1, \dots$  et l'entrée de commande en boucle fermée est donnée par la solution optimale aux instants d'échantillonnage :

$$u^* = u^{-*}(t, x(t), T_p, T_c), \quad \tau \in [t, t + \delta t[$$

### 1.2.3 Résolution du problème

Pour calculer la commande à appliquer au système, il faut résoudre en ligne le problème  $\mathcal{P}$ . Cette résolution se fait bien entendu de manière très différente si le modèle du système est linéaire ou linéarisé où s'il s'agit d'un modèle non linéaire. Dans le cas des systèmes linéaires, la théorie et les applications sont bien maîtrisées. L'équation d'état du système est donnée sous forme d'une contrainte d'égalité linéaire, ainsi que les différentes contraintes sur les entrées et l'état. Si la fonctionnelle à minimiser est quadratique, comme c'est en général le cas,  $\mathcal{P}$  devient un problème convexe quadratique sous contraintes linéaires, pour lequel il existe des algorithmes numériques de résolution efficaces [15].

L'inconvénient de la commande prédictive par modèle linéaire (*LMPC, Linear Model Predictive Control*) est que beaucoup de systèmes physiques sont intrinsèquement non linéaires. De plus, pour des considérations de performances, de productivité, d'économie d'énergie, les utilisateurs demandent d'avoir des processus dont le fonctionnement est au plus près de leurs capacités et donc des limites admissibles. Les modèles linéaires sont trop limités dans la description de la dynamique des systèmes pour répondre à ces exigences, ce qui impose l'utilisation de modèles non linéaires. C'est ce qui explique que la plupart des efforts récents se tournent vers la version nonlinéaire de la MPC (*NMPC, Nonlinear Model Predictive Control*), dont on peut trouver une présentation générale dans [14]. Néanmoins, l'usage d'un modèle d'évolution non linéaire rend le problème  $\mathcal{P}$  lui aussi nonlinéaire et surtout non convexe. Ceci entraîne une augmentation importante de la complexité de sa résolution, d'autant plus que celle-ci doit se faire en temps réel. Enfin, puisqu'il s'agit d'une théorie plus récente, il reste beaucoup de problèmes ouverts quant à la stabilité de l'approche NMPC en boucle fermée.

Dans les deux cas, la structure du système de commande reste celle illustrée figure 1.6.

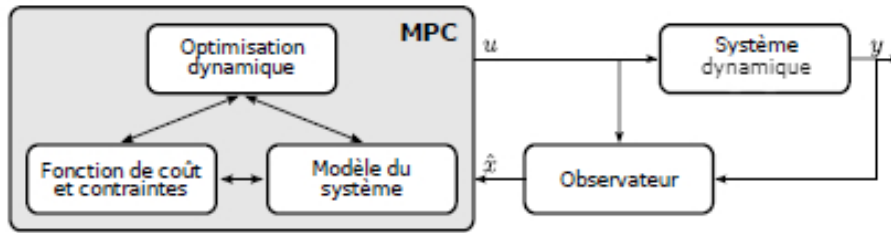


FIGURE 1.6 – Structure d'un système de commande par MPC [6]

Bien entendu, cette structure ne se prête guère en pratique à la formalisation continue donnée plus haut, même s'il est parfois possible de trouver une forme analytique spécifique aux solutions de  $\mathcal{P}$  et d'obtenir ainsi un contrôleur explicite qui ne nécessite pas d'optimisation en ligne [16]. Afin de pouvoir mettre en oeuvre le schéma de commande, il convient de le reformuler sous forme discrète, où on considère l'entrée comme constante sur chaque pas de temps. Afin d'arriver à une solution exacte, on pourrait utiliser des horizons de contrôle et de prédiction infinis ( $T_c = T_p = +\infty$ ) pour optimiser l'objectif de performance donné par la fonction de coût. Néanmoins, puisque cette optimisation doit être réalisée en ligne, elle est le plus souvent formulée sous forme d'un problème à horizon fini afin d'en permettre la résolution en temps réel. En effet, plus l'horizon est court, moins cette phase est coûteuse en temps de calcul. Puisque le temps de calcul disponible dépend essentiellement du pas d'échantillonnage  $\delta t$ , il faut trouver un compromis entre ce dernier et la taille de l'horizon.

En résumé, l'algorithme de base de la commande prédictive à horizon fuyant est le suivant :

1. obtenir une mesure ou une estimation de l'état du système,
2. calculer un signal d'entrée optimal en minimisant une fonction de coût donnée sur un certain horizon de prédiction en utilisant un modèle du système,
3. appliquer au système la première partie du signal d'entrée optimal ainsi obtenu, pendant un pas d'échantillonnage
4. aller en 1.

### 1.2.3.1 Remarques

Cette courte description du schéma de contrôle associé à la MPC permet d'en extraire les caractéristiques essentielles, qui peuvent soit être des avantages, soit des inconvénients. Au titre des forces de cette approche, on peut citer :

- la possibilité d'utiliser un modèle non linéaire pour les prédictions, dans le cas de la NMPC,
- la prise en compte explicite de contraintes d'état, de sorties et de d'entrée, contraintes qui peuvent être données sous forme linéaire mais pas seulement et qui peuvent

- concerner aussi bien l'amplitude des grandeurs que leur vitesse d'évolution,
- la possibilité de traiter des problèmes MIMO de grande dimension,
  - la nature optimale du signal de contrôle obtenu, qui permet d'assurer des critères de performance donnés comme paramètres de conception et non de réglage.
  - la simplicité relative de l'approche dans le cas de modèles de prédiction linéaires, qui en explique en partie son grand succès dans l'industrie et la commande de process.

Quant aux faiblesses, elles sont essentiellement les suivantes :

- l'étape d'optimisation en ligne demande une grande puissance de calcul, ce qui en limitait jusqu'à récemment l'application à des systèmes lents, tels que des réacteurs chimiques dont les constantes de temps peuvent dépasser la minute. Toutefois, l'effet conjugué de l'amélioration des algorithmes d'optimisation et de l'augmentation de la puissance des calculateurs, ainsi que les nombreuses recherches visant à obtenir des solutions analytiques ou calculées hors-ligne, tendent à rendre ce point de moins en moins pertinent alors que la MPC voit ses champs d'application s'étendre à des systèmes de plus en plus rapides,
- dans le cas de l'utilisation de modèles non linéaires, il existe beaucoup moins de résultats de stabilité et de robustesse que dans le cas linéaire d'une part, et d'autre part la résolution du problème d'optimisation peut s'avérer impossible à réaliser en temps réel. Toutefois, l'essentiel de la recherche se portant sur ce sujet, des solutions, y compris commerciales, commencent à voir le jour.

# CHAPITRE

## 2

# STABILITÉ AU SENS DE LYAPUNOV.

La notion de stabilité constitue une problématique centrale de la théorie du contrôle. Souvent liée à la façon d’appréhender un système, la stabilité possède un large éventail de définitions. Dans ce chapitre, nous nous intéresserons à quelques notions particulières de stabilité. On cite la stabilité au sens de **Lyapunov**.

## Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Stabilité de la commande prédictive avec contraintes.</b>	<b>28</b>
2.1.1	Stabilité de systèmes dynamiques	28
<b>2.2</b>	<b>Notions fondamentales de la stabilité</b>	<b>29</b>
<b>2.3</b>	<b>Notions de la théorie de Lyapunov</b>	<b>31</b>

---

## 2.1 Stabilité de la commande prédictive avec contraintes.

Dans la conception des systèmes de commande, il est évident que l'une des exigences les plus importantes à vérifier est celle de la stabilité. Pour des systèmes continus linéaires et invariants dans le temps, des conditions nécessaires et suffisantes de stabilité ont été données il y a plus d'un siècle par Routh et Hurwitz [2]. Les conditions correspondantes pour la stabilité dans les systèmes à temps discret peuvent être trouvées, par exemple, dans le travail de Jury [3]. Toutefois ces critères algébriques intéressants pour l'analyse sont tous peu utilisables à des fins de synthèse. Un critère très utilisé pour la conception et l'étude de la stabilité de systèmes, est le critère de stabilité de Lyapunov [2], qui sera expliqué par la suite.

Les contrôleurs linéaires, tel que le contrôleur linéaire quadratique (LQG), sont relativement faciles à mettre en œuvre et garantissent, sous certaines hypothèses générales, la stabilité en boucle fermée. Cependant, les problèmes de commande à horizon infini n'ont de solution simple et "fermée" que lorsque aucune des variables du procédé n'est contrainte. La difficulté principale pour l'usage d'horizons infinis dans les processus avec contraintes est liée au fait qu'ils doivent se résoudre au moyen de méthodes numériques, qui exigent pour leur solution la mise en œuvre d'un nombre fini (même si grand) de variables.

Les premiers travaux de MPC utilisaient un horizon de prédiction fini. De cette manière on pouvait incorporer de manière naturelle les contraintes dans la formulation et la conception de la stratégie de commande. L'analyse de la stabilité dans les problèmes de commande prédictive avec horizon fini, est une tâche compliquée spécialement dans le cas avec contraintes -Zafriou [4] et Zafriou et Marchal [30], en outre la stabilité est, en général, faible -Bitmead, Gevers et Wertz [5], Rawlings et Muske [17]. Cependant, depuis le début des années 90 un grand effort est fait pour résoudre le problème de la commande prédictive stabilisante avec de nouveaux outils et sous certaines hypothèses de base.

Jusqu'au début des années 90, la recherche de résultats de stabilité dans des systèmes de commande prédictive en présence de contraintes, n'avait pas été étudiée. À partir de cette date, apparaissent des travaux en horizons fini ou infini, dans lesquels il est possible de démontrer la stabilité du système contrôlé par une stratégie MPC sous certaines hypothèses de base. La démonstration de la stabilité du système, s'inspire, en général, de la théorie de Lyapunov.

### 2.1.1 Stabilité de systèmes dynamiques

Il est fait référence aux concepts stabilité et instabilité dans nombre de branches de la science. Il est commun d'entendre dire qu'une monnaie est stable; à un ingénieur dire qu'une structure est stable ou instable, à un chimiste dire qu'une réaction est stabilisée, etc...

En 1892, **M Lyapunov** a formulé de manière précise le concept de stabilité, et ses

travaux ont constitué le point de départ pour établir d'autres variantes du concept.

À titre d'exemple, il est d'usage de considérer le mouvement d'une balle qui se déplace sous l'action de la gravité sur différentes surfaces comme celles montrées Figure 2.1 Dans les trois cas, la balle se trouve dans une position d'équilibre, mais quel sera le mouvement résultant si la balle est écartée "un peu" de son état d'équilibre? Dans le cas (a), la balle se maintiendra près de sa position d'équilibre en oscillant autour de celle-ci, et tendra à revenir à cette position d'équilibre, si l'on admet d'existence de frottements, phénomènes dissipateurs d'énergie mécanique (stabilité dite asymptotique). Dans ce cas, l'équilibre est dit asymptotiquement stable. Dans le cas (b), pour toute petite perturbation de la balle, celle-ci restera "près" de la position d'équilibre mais ne tendra pas à s'approcher de cette position, on parlera alors de stabilité (non asymptotique). Finalement en (c), toute petite perturbation entraînera la balle à s'éloigner de sa position d'équilibre; dans ce cas l'équilibre est alors instable.

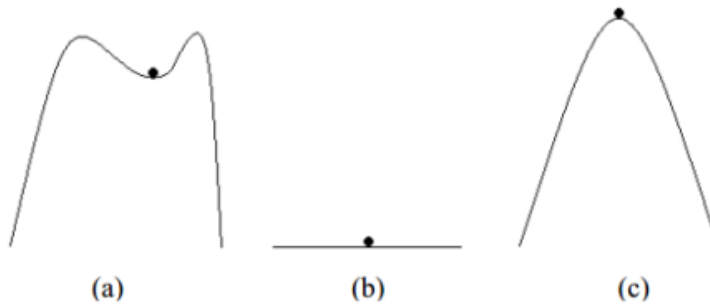


FIGURE 2.1 – (a) asymptotiquement stable; (b) stable; (c) instable.

## 2.2 Notions fondamentales de la stabilité

On considère un système non linéaire non autonome de la forme suivante :

$$\dot{x} = f(t, x(t)) \quad (2.1)$$

avec  $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$  une fonction continue en  $t$ , localement Lipchitzienne en  $x$  et telle que  $f(t, 0) = 0$ , pour tout  $t \geq 0$ , de sorte que l'origine soit un point d'équilibre. On désigne tout au long de ce mémoire la condition initiale  $x(t_0)$  par  $x_0$ . Le paragraphe suivant est dédié à la définition de quelques concepts fondamentaux de stabilité.

$U$  désigne toujours un ouvert non vide de  $\mathbb{R}^n$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ) contenant 0 et  $I$  un intervalle non vide de  $\mathbb{R}$ , non borné à droite.

**Définition 1.** On considère le système 2.1, et  $V : U \times I \mapsto \mathbb{R}^n$  ayant des dérivées partielles

sur  $U \times I$  On définit **la dérivée totale**  $\dot{V}$  pour le système 2.1 par

$$\dot{V}(t, y) = \frac{\partial V}{\partial t}(t, y) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial^i V}{\partial x_i}(t, y) f_i(t, y)$$

**Définition 2 (Stabilité).** On dit que  $x = 0$  est un point d'équilibre stable, si

$$\forall \epsilon > 0, \forall t_0 \geq 0, \exists \delta = \delta(t_0, \epsilon) > 0, \text{ tel que } \|x_0\| < \delta \Rightarrow \|x_t\| < \epsilon \forall t \geq t_0$$

Autrement dit, la stabilité au sens de Lyapunov de l'origine du système veut dire que pour tout  $t \geq t_0$ , la solution de condition initiale  $(t_0, x_0)$  reste au voisinage de l'origine si  $x_0$  est au voisinage de l'origine. En d'autres termes, pour tout  $t \geq t_0$ , une petite perturbation de la condition initiale  $x_0$  autour de l'origine donne naissance à une solution  $x(t)$  qui reste proche de l'origine.

Notons bien que la stabilité du système n'implique pas la convergence des solutions vers l'origine, c'est pourquoi la notion de stabilité toute seule est insuffisante pour l'étude du comportement des solutions. On définit alors la notion d'attractivité.

**Définition 3 (Attractivité).** On dit que l'origine  $x = 0$  est

— un point d'équilibre attractif, s'il existe un voisinage de l'origine  $U(0)$ , tel que

$$\forall x_0 \in U(0), \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0$$

— un point d'équilibre globalement attractif si :

$$\forall x_0 \in \mathbb{R}^n, \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0$$

**Définition 4 (Stabilité asymptotique).** On dit que l'origine  $x = 0$  est

— un point d'équilibre asymptotiquement stable (ou AS), s'il est stable et attractif.

— un point d'équilibre globalement asymptotiquement stable, s'il est stable et globalement attractif.

**Définition 5 (Bornitude uniforme).** Les solutions du système (2.1) sont dites uniformément bornées, si :  $\exists a \geq 0$  et une fonction croissante  $c : ]0, a[ \rightarrow \mathbb{R}$  telles que  $\forall \alpha \in ]0, a[$

$$\|x_0\| < \alpha \Rightarrow \|x(t)\| < c(\alpha), \forall t \geq t_0$$

Les solutions sont dites globalement uniformément bornées, si la propriété précédente est vraie pour  $a = +\infty$

**Définition 6 (Stabilité uniforme).** On dit que

— l'origine  $x = 0$  est un point d'équilibre uniformément stable (noté US) si :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta = \delta(\epsilon), \text{ tel que } \forall t_0 \geq 0$$

$$\|x_0\| < \delta \Rightarrow \|x(t)\| < \epsilon, \forall t \geq t_0 \geq 0$$

- l'origine est un point d'équilibre globalement uniformément stable (noté GUS), s'il est uniformément stable et les solutions du système sont globalement uniformément bornées.

**Définition 7 (Attractivité uniforme).** On dit que

- l'origine  $x = 0$  est un point d'équilibre uniformément attractif (noté UA), si :  $\exists c > 0 / \forall \|x_0\| < c, \forall \epsilon > 0, \exists T := T(\epsilon, c)$  tel que,

$$\|x(t)\| < \epsilon, \forall t \geq T + t_0$$

- l'origine  $x = 0$  est un point d'équilibre globalement uniformément attractif (noté GUA), si :  $\forall c > 0 / \forall \|x_0\| < c, \forall \epsilon > 0, \exists T := T(\epsilon, c)$  tel que,

$$\|x(t)\| < \epsilon, \forall t \geq T + t_0$$

**Définition 8 (Stabilité asymptotique uniforme).** On dit que

- l'origine  $x = 0$  est un point d'équilibre uniformément asymptotiquement stable (noté UAS), s'il est uniformément stable et uniformément attractif.
- l'origine  $x = 0$  est un point d'équilibre globalement uniformément asymptotiquement stable (noté GUAS), s'il est globalement uniformément stable et globalement uniformément attractif.

**Définition 9 (Stabilité exponentielle).** On dit que

- l'origine  $x = 0$  est un point d'équilibre exponentiellement stable (noté ES), s'il existe un voisinage de l'origine noté  $U(0)$ ,  $\exists \lambda_1 > 0$  et  $\exists \lambda_2 > 0$ , tels que

$$\|x(t)\| \leq \lambda_1 \|x_0\| e^{-\lambda_2(t-t_0)}, \forall x_0 \in U(0), \forall t \geq t_0 \geq 0$$

Dans ce cas, la constante  $\lambda_2$  est appelée le taux ou aussi la vitesse de convergence

- l'origine  $x = 0$  est un point d'équilibre globalement exponentiellement stable (noté GES), si  $U(0) = \mathbb{R}^n$

**Remarque 1.** Il est important de remarquer que la propriété de la stabilité exponentielle du système entraîne nécessairement la stabilité asymptotique de ce dernier.

## 2.3 Notions de la théorie de Lyapunov

L'utilisation des fonctions définies positives est une technique parmi les plus efficaces pour analyser la stabilité d'un système gouverné par une équation différentielle ordinaire

**Définition 10.** Un point  $\tilde{x} \in U$  est un point d'équilibre, ou un point singulier du système (2.1) si  $\forall t \in I f(t, \tilde{x}) = 0$ .



**Définition 11 (Fonction de classe  $\mathcal{K}$ ).** Une fonction continue  $\alpha : [0, a[ \mapsto [0, +\infty[$  est dite de classe  $\mathcal{K}$  si

- $\alpha$  est strictement croissante
- $\alpha(0) = 0$

Elle est dite de classe  $\mathcal{K}_\infty$ , si de plus, on a

- $a = +\infty$  et  $\alpha(r) \mapsto +\infty$  quand  $r \mapsto +\infty$

**Exemple 1.** Donnons deux exemples de fonctions de classe  $\mathcal{K}$  et de classe  $\mathcal{K}_\infty$

- $g$  définie par  $g(r) = \arctan(r)$  est une fonction de classe  $\mathcal{K}$  en effet
  1.  $g$  est strictement croissante car

$$g'(r) = \frac{1}{1+r^2} > 0$$

2.  $g(0) = 0$

mais  $g$  n'appartient pas à la classe  $\mathcal{K}_\infty$  car  $\lim_{r \rightarrow \infty} g(x) = \frac{\pi}{2}$

- Soit  $c > 0$ ,  $h$  définie par  $h(r) = r^c$  est de classe  $\mathcal{K}_\infty$  en effet :
  1.  $h$  est strictement croissante car

$$h'(r) = cr^{c-1} > 0$$

2.  $h(0) = 0$

3.  $\lim_{r \rightarrow \infty} h(x) = +\infty$

**Définition 12 (Fonction de classe  $\mathcal{KL}$ ).** Une fonction continue  $\beta : [0, a[ \times [0, +\infty[ \mapsto [0, +\infty[$  est dite de classe  $\mathcal{KL}$ , si :

- pour tout  $s$  fixé, l'application  $r \mapsto \beta(r, s)$  est de classe  $\mathcal{K}$
- pour tout  $r$  fixé, l'application  $s \mapsto \beta(r, s)$  est décroissante
- $\beta(r, s) \mapsto 0$  quand  $s \mapsto +\infty$

**Exemple 2.** Soit  $k > 0$  et  $\beta$  définie par  $\beta(r, s) = \frac{r}{ksr+1}$  est strictement croissante en  $r$  car

$$\frac{\partial \beta}{\partial r}(r, s) = \frac{1}{(ksr+1)^2} > 0$$

et strictement décroissante en  $s$  car

$$\frac{\partial \beta}{\partial s}(r, s) = \frac{-kr^2}{(ksr+1)^2} < 0$$

De plus  $\lim_{s \rightarrow \infty} \beta(r, s) = 0$  donc  $\beta$  est de classe  $\mathcal{KL}$

Voici une autre reformulation des notions de stabilité utilisant les fonctions de classe  $\mathcal{K}$  et  $\mathcal{KL}$  ; les démonstrations des propositions suivantes peuvent être consultées dans l'ouvrage [21]

**Proposition 1.** *L'origine  $x = 0$  est un point d'équilibre*

1. *Uniformément stable si et seulement si il existe une fonction  $\alpha(\cdot)$  de classe  $\mathcal{K}$  et une constante positive  $c$  indépendante de  $t_0$  telle que,*

$$\|x(t)\| \leq \alpha(\|x_0\|), \quad \forall t \geq t_0 \geq 0, \quad \forall \|x_0\| < c$$

2. *Globalement uniformément stable si et seulement si l'inégalité précédente est satisfaite pour toute condition initiale  $x_0$ .*

**Proposition 2.** *L'origine  $x = 0$  est un point d'équilibre*

1. *Uniformément asymptotiquement stable si et seulement s'il existe une fonction  $\beta(\cdot, \cdot)$  de classe  $\mathcal{KL}$  et une constante positive  $c$  indépendante de  $t_0$  telle que,*

$$\|x(t)\| \leq \beta(\|x_0\|, t - t_0), \quad \forall t \geq t_0 \geq 0, \quad \forall \|x_0\| < c$$

2. *Globalement uniformément asymptotiquement stable si et seulement si l'inégalité précédente est satisfaite pour toute condition initiale  $x_0$ .*

**Proposition 3.** *L'origine  $x = 0$  est un point d'équilibre*

1. *Exponentiellement stable si et seulement si l'inégalité précédente est satisfaite avec*

$$\beta(r, s) = kre^{(-\gamma s)}, \quad \gamma > 0, \quad \forall \|x_0\| < c$$

2. *Globalement exponentiellement stable si et seulement si l'inégalité précédente est satisfaite pour toute condition initiale  $x_0$ .*

**Définition 13.** *Une fonction continue  $V : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}_+$  est dite :*

— *définie positive, s'il existe une fonction  $\alpha$  de classe  $\mathcal{K}$ , telle que*

$$\forall t \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad V(t, x) \geq \alpha\|x\|.$$

— *définie positive et radialement non-bornée (ou propre), si l'inégalité précédente est vérifiée pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$  avec une fonction  $\alpha$  de classe  $\mathcal{K}_\infty$*

— *limitée ou decrescent, s'il existe une fonction  $\gamma$  de classe  $\mathcal{K}$ , telle que*

$$\forall t \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad V(t, x) \leq \gamma\|x\|.$$

**Définition 14 (Fonction de Lyapunov).** *On considère le système (2.1). Soit  $U(0)$  un voisinage de zéro et  $V : \mathbb{R}_+ \times U(0) \mapsto \mathbb{R}$  une fonction continue et différentiable sur  $U(0)$ .*

— *On dit que  $V$  est une fonction de Lyapunov au sens large en 0, si elle vérifie les deux propriétés suivantes :*

1.  *$V$  est définie positive.*

$$2. \dot{V}(t, x) \leq 0 \text{ pour tout } x \in U(0)$$

— On dit que  $V$  est une fonction de Lyapunov stricte en  $0$ , si elle vérifie les deux propriétés suivantes :

1.  $V$  est définie positive.

$$2. \dot{V}(t, x) < 0 \text{ pour tout } x \in U(0) \setminus \{0\}$$

L'utilisation de ces fonctions fournit des critères qui permettent de conclure à la stabilité ou à la stabilité asymptotique d'un point d'équilibre sans que l'intégration des équations du système considéré soit nécessaire. Les résultats datent du 19e siècle et sont dus à Lyapunov. Pour une démonstration, le lecteur pourra se référer à [25]

**Théorème 2.3.1.** *On considère le système (2.1). Si le système admet une fonction de Lyapunov au sens large sur  $U(0)$ , alors l'origine  $x = 0$  est un point d'équilibre stable. Si de plus  $V$  est décroissante, alors  $x = 0$  est un point d'équilibre uniformément stable.*

**Théorème 2.3.2.** *Soit  $x = 0$  un point d'équilibre du système (2.1) et  $U(0) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < r\}$  soit  $V : \mathbb{R}_+ \times U(0) \mapsto \mathbb{R}$  une fonction de classe  $C^1$  telle qu'il existe des fonctions de classe  $\mathcal{K}$   $\alpha_1, \alpha_2$  et  $\alpha_3$  définies sur  $[0, r[$  vérifiant :  $\forall t \geq t_0 \text{ et } \forall x \in U(0)$  ,*

$$\alpha_1(\|x\|) \leq V(t, x) \leq \alpha_2(\|x\|) \tag{2.2}$$

$$\dot{V}(t, x) \leq -\alpha_3(\|x\|) \tag{2.3}$$

*Alors,  $x = 0$  est un point d'équilibre uniformément asymptotiquement stable. Si  $U(0) = \mathbb{R}$  et  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  sont de classe  $\mathcal{K}_\infty$ , alors  $x = 0$  est un point d'équilibre globalement uniformément asymptotiquement stable*

**Théorème 2.3.3.** *Considérons le système (2.1). Supposons que ce système admet une fonction de Lyapunov  $V(t, x)$  et supposons qu'il existe des constantes  $c_1, c_2, c_3$  et  $c_4 > 0$ , telles que,  $\forall t \geq t_0 \text{ et } \forall x \in U(0)$  on a :*

$$c_1\|x\|^2 \leq V(t, x) \leq c_2\|x\|^2 \tag{2.4}$$

$$\dot{V}(t, x) \leq -c_3\|x\|^2 \tag{2.5}$$

$$\left\| \frac{\partial V}{\partial x} \right\| \leq c_4\|x\| \tag{2.6}$$

*alors,  $x = 0$  est un point d'équilibre exponentiellement stable. Si  $U(0) = \mathbb{R}^n$ , alors l'origine est un point d'équilibre globalement exponentiellement stable.*

**Définition 15.** *Soit  $f : I \times U \mapsto \mathbb{R}^n$  on dit que :*

1. *est localement lipschitzienne pour la première variable, si pour tout  $(t_0, x_0) \in I \times U$  il existe un voisinage  $\mathcal{V}$  de  $(t_0, x_0)$  dans  $I \times U$  et une constante  $c > 0$  telle que :*

$$\forall ((t, y), (t', y)) \in \mathcal{V}^2, \|f(t, y) - f(t', y)\| \leq c\|t - t'\|$$

On note  $Lip_t(I \times U)$  l'ensemble des fonctions localement lipschitziennes pour la première variable.

2. est localement lipschitzienne pour la deuxième variable, si pour tout  $(t_0, x_0) \in I \times U$  il existe un voisinage  $\mathcal{V}$  de  $(t_0, x_0)$  dans  $I \times U$  et une constante  $c > 0$  telle que :

$$\forall ((t, y), (t, y')) \in \mathcal{V}^2, \|f(t, y) - f(t, y')\| \leq c \|y - y'\|$$

On note  $Lip_y(I \times U)$  l'ensemble des fonctions localement lipschitziennes pour la deuxième variable.

On note  $Lip_{(t,y)}(I \times U)$  l'ensemble des fonctions localement lipschitziennes pour la première et la deuxième variable.

**Théorème 2.3.4 (Lyapunov inverse).** *On considère le système (2.1) avec  $f \in C^0(\mathcal{V}t_0)$  et  $f \in Lip_y(\mathcal{V})$  où 0 est un équilibre uniformément asymptotiquement stable. Alors, il existe un voisinage  $\mathcal{V}'_{t_0} \subset \mathcal{V}$  et une fonction de Lyapunov associée au système*

$$V : \mathcal{V}'_{t_0} \mapsto \mathbb{R}^+$$

telle que :

1.  $V$  est décroissante,
2.  $V \in Lip_{(t,y)}(\mathcal{V}'_{t_0})$
3.  $\dot{V}$  est définie négative.

**Remarque 2.** *Dans le théorème précédent, on peut remplacer  $\dot{V}$  définie négative par*

$$\exists c; \forall (t, y) \in \mathcal{V}'_{t_0}, \quad \dot{V}(t, y) \leq -cV(t, y)$$

## CHAPITRE

### 3

# COMMANDE A BASE DE LYAPUNOV AVEC ÉCHANTILLONNAGE SYNCHRONES DES MESURES

Dans ce chapitre nous allons combiner les notions qu'on a vu dans l'introduction et le premier chapitre. Il s'agit d'une application à un procédé chimique, une étude de stabilité est en charge on se base sur la notion de la **Fonction de Lyapunov** avec une discrétisation constante des mesures

## Sommaire

---

<b>3.1</b>	<b>Classe des systèmes non-linéaire</b>	<b>37</b>
<b>3.2</b>	<b>Commande a base de Lyapunov</b>	<b>37</b>
<b>3.3</b>	<b>commande a base de Lyapunov avec échantillonnage syn- chrone des mesures</b>	<b>39</b>
<b>3.4</b>	<b>Stratégie d'implémentation</b>	<b>40</b>
<b>3.5</b>	<b>La formulation du LEMPC</b>	<b>41</b>
<b>3.6</b>	<b>Analyse de la stabilité</b>	<b>42</b>

---

### 3.1 Classe des systèmes non-linéaire

On considère une classe de systèmes non linéaires, décrits par le modèle d'espace d'état suivant :

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u_1(t), \dots, u_m(t), w(t)) \quad (3.1)$$

où  $x \in \mathbb{R}^{n_x}$  désigne le vecteur d'état variables du système et  $u_i(t) \in \mathbb{R}$  pour  $i = 1 \dots m$  désignent les  $m$  entrées de commande (manipulées) et,  $w(t) \in \mathbb{R}^{n_w}$  représente le vecteur de perturbation.

Les  $m$  entrées de commande sont restreintes pour être dans  $m$  ensembles convexes non vides  $U_i \subset \mathbb{R}, i = 1 \dots m$  définis par  $U_i := \{u_i \in \mathbb{R} : |u_i| \leq u_i^{max}\}$ .

le vecteur de perturbation  $w(t) \in \mathbb{R}^{n_w}$  est borné c'est-à-dire  $w(t) \in W$  où  $W := \{w \in \mathbb{R}^{n_w} \text{ et } |w| \leq \theta \text{ et } \theta > 0\}$  on suppose que  $f$  est un champ de vecteurs localement lipschitzienne. On note par  $\Omega_r$  l'ensemble  $\Omega_r := \{x \in \mathbb{R}^{n_x} : V(x) \leq r\}$  (Courbe de niveau) où  $V$  est une fonction scalaire

**Définition 16.** Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^d$ . On appelle champ de vecteurs, une application

$$f : (t, x) \in I \times \Omega \mapsto f(t, x) \in \mathbb{R}^d$$

—  $t$  est la variable de temps.

—  $x$  est la variable d'état.

Si  $f$  ne dépend pas du temps, on dit qu'il est autonome.

**Définition 17.** On dit qu'un champ de vecteurs continu  $f : I \times \Omega \mapsto \mathbb{R}^d$  est localement lipschitzien par rapport à la variable d'état si :

pour tout  $(t_0, x_0) \in I \times \Omega$  , il existe  $L > 0, \delta > 0$ , un voisinage ouvert  $U$  de  $x_0$  tels que pour tout  $t \in I \cap [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$  la fonction  $f(t, \cdot)$  est  $L$ -lipschitzienne sur  $U$  .

Ceci s'exprime aussi sous la forme

$$\forall t \in I \cap [t_0 - \delta, t_0 + \delta], \forall x_1, x_2 \in U, \|f(t, x_1) - f(t, x_2)\| \leq L \|x_1 - x_2\|$$

et que l'origine est un point d'équilibre du système nominal non forcé (i.e le système d'équation (3.1) avec  $u_i(t) \equiv 0, i = 1, \dots, m$  et  $w(t) \equiv 0 \forall t$ )

ce qui implique que  $f(0, 0, \dots, 0, 0) = 0$

### 3.2 Commande a base de Lyapunov

on suppose qu'il existe une commande a base de Lyapunov  $h(x) = [h_1(x), h_2(x), \dots, h_m(x)]^T$  qui rendre asymptotiquement stable l'origine du système nominal en boucle fermée. avec  $u_i = h_i(x), i = 1 \dots m$  tout en satisfaisant les contraintes d'entrée pour tous les états  $x$  à

l'intérieur d'une région de stabilité donnée.

on note que cette hypothèse est essentiellement équivalente à l'hypothèse selon laquelle le système est stabilisable ou que la paire  $(A, B)$  (voir chapitre 5) dans le cas des systèmes linéaires est stabilisable. En utilisant les théorèmes de Lyapunov inverses 2.3.4, cette hypothèse implique qu'il existe des fonctions de classe  $\mathcal{K}$  on les note  $\alpha(\cdot)_i, i = 1, 2, 3, 4$ , et une fonction continuellement différentiable  $V$  de Lyapunov pour le système nominal en boucle fermée satisfont les inégalités suivantes

$$\alpha_1(|x|) \leq V(x) \leq \alpha_2(|x|) \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial V(x)}{\partial x} f(x, u_1(t), \dots, u_m(t), 0) \leq -\alpha_3(|x|)$$

$$\left| \frac{\partial V(x)}{\partial x} \right| \leq \alpha_4(|x|)$$

$$h_i(x) \in U_i, i = 1, \dots, m$$

$\forall x \in O \subset \mathbb{R}^{n_x}$  où  $O$  est un voisinage ouvert de l'origine, On note par  $\Omega_\rho \subset O$  la région de stabilité du système en boucle fermée sous la commande basée sur Lyapunov  $h(x)$ , Notez que les lois de contrôle de stabilisation explicites qui assurent des régions d'attraction explicitement définies pour le système en boucle fermée ont été développées en utilisant des techniques de Lyapunov pour des classes particulières de systèmes non linéaires et plus précisément les systèmes non linéaires avec des entrées-affine.

Par continuité et le fait que le champ vectoriel  $f$  possède la propriété Lipschitz locale (supposée) et en tenant compte que les entrées manipulées  $u_i, i = 1, \dots, m$  sont bornés, il existe une constante positive  $M$  telle que

$$|f(x, u_1(t), \dots, u_m(t), w)| \leq M \quad (3.3)$$

$\forall x \in \Omega_\rho$  et  $u_i \in U_i, i = 1, \dots, m$  de plus par la propriété de la continuité différentiable de la fonction de Lyapunov  $V(x)$  et la propriété de Lipschitz supposée pour le champ vectoriel  $f$  il existe des constantes positives  $L_x, L_w, L'_x$  et  $L'_w$  telles que que

$$|f(x, u_1(t), \dots, u_m(t), w) - f(x', u_1(t), \dots, u_m(t), 0)| \leq L_x |x - x'| + L_w |w| \quad (3.4)$$

$$\left| \frac{\partial V(x)}{\partial x} f(x, u_1(t), \dots, u_m(t), w) - \frac{\partial V(x')}{\partial x} f(x', u_1(t), \dots, u_m(t), 0) \right| \leq L'_x |x - x'| + L'_w |w|$$

pour tout  $x, x' \in \Omega_\rho, u_i \in U_i, i = 1, \dots, m$  et  $w \in W$

**Remarque 3.** notons que, bien qu'il n'existe pas actuellement de méthodes générales de construction de fonctions de Lyapunov pour les systèmes non linéaires, pour les grandes classes de systèmes non linéaires apparaissant dans le contexte du contrôle des procédés chimiques, les fonctions de Lyapunov quadratiques ont été largement utilisées et il a été démontré qu'elles donnent une très bonnes estimations des régions de stabilité en boucle

fermée , voir également chapitre 5

**Remarque 4.** Notons que dans le présent travail, nous utilisons la courbe de niveau  $\Omega_\rho$  de la fonction de Lyapunov  $V(x)$  pour estimer la région de stabilité (c'est-à-dire le domaine d'attraction) du système en boucle fermée sous le contrôleur  $h(x)$ . Plus précisément, une estimation du domaine d'attraction du système en boucle fermée est effectuée comme suit :

1. un contrôleur (par exemple,  $h(x)$ ) qui rend définie positive la dérivée par rapport au temps d'une fonction de Lyapunov,  $V(x)$ , le long de la trajectoire du système en boucle fermée autour du point d'équilibre
2. une estimation de l'ensemble où  $V$  est négative est donnée
3. une courbe de niveau de  $\dot{V}$  (désigné par  $\Omega_\rho$ ) prolonger dans l'ensemble où  $\dot{V}$  est négative, est estimée.

De cette approche pour calculer  $\Omega_\rho$ , nous pouvons conclure que l'ensemble  $\Omega_\rho$  est un ensemble de stabilité en boucle fermée garanti, mais il est possible que le contrôleur  $h(x)$  stabilise le système en boucle fermée pour des conditions initiales en dehors de l'ensemble  $\Omega_\rho$ .

### 3.3 commande a base de Lyapunov avec échantillonnage synchrone des mesures

Dans cette section, nous concevons LEMPC pour le système de (3.1) avec échantillonnage synchrone des mesures. Nous supposons que l'état  $x$  du système est échantillonné de manière synchrone et les instant où nous avons des mesures d'état sont indiqués par la séquence  $\{t_{k \geq 0}\}$  avec  $t_k = t_0 + k\Delta$  et  $k = 0, 1, \dots$  où  $t_0$  est le temps initiale et  $\Delta$  représente le temps d'échantillonnage .

Dans la conception proposée, le LEMPC maximise une fonction de coût qui tient compte de considérations économiques spécifiques, et il a deux modes de fonctionnement :

Dans le premier mode , le LEMPC optimise la fonction de coût économique tout en maintenant l'état du système dans la région de stabilité Dans le deuxième mode de fonctionnement, le LEMPC amène l'état du système à un état stable souhaité. Le MPC économique est construit à l'aide de l'MPC basées sur les techniques de Lyapunov pour profiter des propriétés de stabilité du contrôleur basé sur Lyapunov  $h(x)$ .

Plus précisément, nous supposons qu'à partir de l'instant initial  $t_0$  jusqu'à un instant précis  $t'$ , le LEMPC fonctionne dans le premier mode de fonctionnement afin de maximiser la fonction de coût économique, après l' instant  $t_0$ , nous supposons que le LEMPC fonctionne dans le deuxième mode de fonctionnement et calcule les entrées de manière à ce que l'état du système en boucle fermée soit conduit à un voisinage de l'état stable désiré (c'est-à-dire l'origine  $x = 0$ ). Le LEMPC proposé, offre plus de degrés de liberté dans le fonctionnement optimal économique du système et peut finalement conduit l'état du système à un état d'équilibre souhaité. Pour des raisons de simplicité et sans perte de



généralité dans la suite de ce document, nous supposons que le temps spécifique  $t_0$  est un multiple entier du temps  $\Delta$  d'échantillonnage de l'MPC [26].

### 3.4 Stratégie d'implémentation

De l'instant initial  $t_0$  à  $t'$ , le LEMPC fonctionne dans le premier mode . Dans la conception du LEMPC, une problématique importante à prendre en compte est l'effet de la perturbation bornée  $w$  sur la stabilité du système à boucle fermée.

Pour prendre en compte la perturbation  $w$  de manière explicite, nous considérons une région  $\Omega_{\tilde{\rho}}, \rho < \tilde{\rho}$ , Plus précisément, lorsque  $x(t_k)$  est reçu à un instant d'échantillonnage  $t_k$ , si  $x(t_k)$  est dans la région  $\Omega_{\tilde{\rho}}$ , le LEMPC maximise la fonction de coût dans la région  $\Omega_{\tilde{\rho}}$ , si  $x(t_k)$  est dans la région  $\Omega_{\rho}/\Omega_{\tilde{\rho}}$ , le LEMPC amène d'abord l'état du système dans la région  $\Omega_{\rho}$  et maximise ensuite la fonction de coût à l'intérieur de  $\Omega_{\tilde{\rho}}$ .

On notera que la région  $\Omega_{\tilde{\rho}}$  joue le rôle d'une zone " sécurisée " dans laquelle le LEMPC peut maximiser la fonction de coût au maximum tout en tenant compte de l'effet de la perturbation  $w$  sur la stabilité de la boucle fermée, Notez également que la relation entre  $\tilde{\rho}$  et  $\rho$  est déterminée par la propriété du système (c'est-à-dire, les propriétés de la fonction vectorielle  $f$ ), la limite supérieure de la perturbation (c'est-à-dire  $\theta$ ) et le temps d'échantillonnage du LEMPC. Cette relation sera caractérisée dans l'équation (3.17) du théorème 3.6.1

Après l'instant  $t_0$ , le système fonctionne dans le second mode . Dans ce mode de fonctionnement, le LEMPC calcule les entrées de manière à ce que la fonction de Lyapunov du système décroît d'une manière continue pour amener l'état du système au voisinage de l'origine.

La Stratégie d'implémentation de la LEMPC proposée avec l'échantillonnage de mesure synchrone peut être résumée comme suivante :

1. A un instant d'échantillonnage  $t_k$ , le contrôleur reçoit à partir des capteurs l'état  $x(t_k)$  du système.
2. si  $t_k < t$  passer à l'étape 3 sinon passer a l'étape 4
3. si  $x(t_k) \in \Omega_{\tilde{\rho}}$  passer à l'étape 3.a sinon passer a l'étape 3.b
  - (a) Le contrôleur maximise la fonction de coût économique dans  $\Omega_{\tilde{\rho}}$  . Passer à l'étape 5.
  - (b) Le contrôleur amène l'état du système dans la région  $\Omega_{\tilde{\rho}}$ . Passez à l'étape 5.
4. Le contrôleur amène l'état du système à un petit voisinage de l'état d'équilibre souhaité.
5. Passer à l'étape 1 ( $k \leftarrow k + 1$ )

### 3.5 La formulation du LEMPC

Le problème d'optimisation de la LEMPC proposée pour le système d'équation (3.1) avec échantillonnage synchrone des mesures est comme suit :

$$\max_{u_1, \dots, u_m \in S(\Delta)} \int_{t_k}^{t_{k+N}} L(\tilde{x}(\tau), u_1(\tau), \dots, u_m(\tau)) d\tau \quad (3.5)$$

st

$$\dot{\tilde{x}}(t) = f(\tilde{x}(t), u_1(t), \dots, u_m(t), 0) \quad (3.6)$$

$$u_i(t) \in U_i, i = 1, \dots, m \quad (3.7)$$

$$\tilde{x}(t_k) = x(t_k) \quad (3.8)$$

$$V(\tilde{x}(t)) \leq \tilde{\rho}, \forall t \in [t_k, t_{k+N}) \quad \text{si } t_k \leq t' \quad \text{et } V(x(t_k)) \leq \tilde{\rho}$$

$$\frac{\partial V(x(t_k))}{\partial x} f(x(t_k), u_1(t_k), \dots, u_m(t_k), 0) \leq \frac{\partial V(x(t_k))}{\partial x} f(x(t_k), h_1(t_k), \dots, h_m(t_k), 0) \quad (3.9)$$

$$\text{si } t_k > t' \quad \text{ou } \tilde{\rho} < V(x(t_k)) \leq \rho \quad (3.10)$$

où  $S(\Delta)$  est la famille de fonctions constantes par morceaux avec période d'échantillonnage  $\Delta$ ,  $N$  est l'horizon de prédiction de ce LEMPC,  $L(\tilde{x}(\tau), u_1(\tau), \dots, u_m(\tau))$  est la mesure économique qui définit la fonction de coût, l'état  $\tilde{x}$  est la trajectoire prédite du système avec  $u_1, \dots, u_m$ , calculé par le LEMPC et  $x(t_k)$  est la mesure de l'état obtenue à l'instant  $t_k$ . La solution optimale de ce problème d'optimisation est désignée par  $u_i^*(t|t_k), i = 1, \dots, m$  qui est défini pour  $t$  dans l'intervalle  $[t_k, t_{(k+N)}[$ .

Dans le problème d'optimisation d'Eq (3.5), la contrainte de Eq (3.6) est le modèle nominal du système d'Eq (3.1) (c'est-à-dire,  $w(t) = 0$  pour tout  $t$ ) et est utilisé pour prédire l'évolution future du système en boucle fermée; la contrainte de l'Eq (3.7) définit les contraintes sur toutes les entrées, la contrainte de l'Eq (3.8) définit la condition initiale du problème d'optimisation; la contrainte de l'équation (3.9) n'est active que lorsque  $x(t_k) \in \Omega_{\tilde{\rho}}$  dans le premier mode de fonctionnement et est incorporée pour garantir que l'évolution prédite de l'état du système en boucle fermée est maintenue dans la région  $\Omega_{\tilde{\rho}}$  (ainsi, l'état réel du système en boucle fermée est dans la région de stabilité  $\Omega_{\rho}$ ); la contrainte de l'Eq (3.9) n'est active que dans le deuxième mode de fonctionnement ou lorsque  $\tilde{\rho} < V(x(t_k)) \leq \rho$  dans le premier mode de fonctionnement. Cette contrainte est utilisée pour faire en sorte que la fonction de Lyapunov de du système diminue au moins à la vitesse donnée par le contrôleur basé sur la fonction de Lyapunov  $h(x)$  mis en œuvre dans un mode d'échantillonnage et de maintien.

Les entrées manipulées de la conception de commande proposée, de l'instant  $t_k$  à  $t - k + 1$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ) sont définies comme suit :

$$u_i(t) = u_i^*(t|t_k), i = 1, \dots, m, \forall t \in [t_k, t_{(k+N)}[ \quad (3.11)$$

### 3.6 Analyse de la stabilité

Dans cette sous-section, nous présentons les propriétés de stabilité du LEMPC proposé de l'équation (3.5) pour le système de l'équation (3.1) avec échantillonnage synchrone des mesures. pour aller plus loin , nous avons besoin les deux propositions suivantes.

**Proposition 4.** *Considérons les systèmes [23]*

$$\begin{aligned} \dot{x}_a(t) &= f(x_a(t), u_1(t), \dots, u_m(t), w(t)) \\ \dot{x}_b(t) &= f(x_b(t), u_1(t), \dots, u_m(t), 0) \end{aligned} \quad (3.12)$$

dont les états initiaux sont  $x_a(t_0) = x_b(t_0) \in \Omega_\rho$  , Il existe une fonction  $f_W(\cdot)$  de classe  $\mathcal{K}$  telle que

$$|x_a(t) - x_b(t)| \leq f_w(t - t_0) \quad (3.13)$$

$\forall x_a(t) = x_b(t) \in \Omega_\rho$  et  $w(t) \in W$  avec

$$f_W(\tau) = \frac{L_w \theta}{L_x} (e^{L_x \tau} - 1) \quad (3.14)$$

La proposition 4 donne une limite supérieure à la déviation de la trajectoire de l'état obtenue à l'aide du modèle nominal, à partir de la trajectoire de l'état actuel du système lorsque les trajets d'entrée de contrôle sont les mêmes .

La proposition 5 ci-dessous limite la différence entre les amplitudes de la fonction de Lyapunov dans deux états différents sur  $\Omega_\rho$

**Proposition 5.** *Considérons la fonction de Lyapunov  $V(\cdot)$  du système de l'équation (3.1). Il existe une fonction quadratique  $f_V(\cdot)$  telle que*

$$V(x) \leq V(\hat{x}) + f_V(|x - \hat{x}|) \quad (3.15)$$

$\forall x, \hat{x} \in \Omega_\rho$  avec

$$f_V(s) = \alpha_4(\alpha_1^{-1}(\rho))s + M_v s^2 \quad (3.16)$$

où  $M_v$  est une constante positive.

Le théorème 3.6.1 ci-dessous fournit des conditions suffisantes sous le LEMPC de l'équation (3.5) garantit que l'état du système en boucle fermée de l'équation (3.1) est toujours borné dans  $\Omega_\rho$  et borné dans une petite région contenant l'origine.

**Théorème 3.6.1.** *Considérons le système de l'équation (3.1) en boucle fermée sous la forme LEMPC de l'équation (3.5) basée sur un contrôleur  $h(x)$  qui satisfait les conditions de l'équation (3.2) Soient  $\epsilon_w > 0, \Delta > 0, \rho > \tilde{\rho} > 0$ , et  $\rho > \rho_s > 0$  satisfont*

$$\tilde{\rho} \leq \rho - f_V(f_W(\Delta)) \quad (3.17)$$

et

$$-\alpha_3(\alpha_2^{-1}(\rho_s)) + L'_x M \Delta + L'_w \theta \leq \frac{-\epsilon_w}{\Delta} \quad (3.18)$$

$$\text{si } x(t_0) \in \Omega_\rho, \rho_s \leq \tilde{\rho}, \rho_{min} \leq \rho \quad \text{et } N \geq 1$$

où

$$\rho_{min} = \max\{V(x(t+\Delta)) : V(x(t)) \leq \rho_s\} \quad (3.19)$$

alors l'état  $x(t)$  du système en boucle fermée est toujours borné dans  $\Omega_\rho$  et est ultimement borné dans  $\Omega_{\rho_{min}}$

*Démonstration.* La preuve se compose de trois parties. Nous démontrons d'abord que le problème d'optimisation de l'équation (3.5) est réalisable pour tous les états  $x \in \Omega_\rho$ . Par la suite, on montre que, dans le premier mode de fonctionnement, sous la conception LEMPC de l'équation (3.5), l'état en boucle fermée du système de l'Eq. (3.1) est toujours borné dans  $\Omega_\rho$ . enfin On prouve que, dans le second mode de fonctionnement, sous le LEMPC de l'équation (3.5), l'état en boucle fermée du système de Eq. (3.1) est ultimement borné en  $\Omega_{\rho_{min}}$ .

- *partie 1* : Lorsque  $x(t)$  est maintenue dans  $\Omega_\rho$  (ce qui sera prouvé dans la partie 2), la faisabilité de la LEMPC de l'équation (3.5) s'ensuit car les trajectoires d'entrée  $u_i(t)$ ,  $i = 1, \dots, m$ , telle que  $u_i(t) = h_i(x(t_{k+j}))$ ,  $\forall t \in [t_{k+j}, t_{k+j+1})$  avec  $j = 0, \dots, N-1$  sont des solutions réalisables du problème d'optimisation de l'Eq(3.5). puisque ces trajectoires satisfont la satisfont la contrainte d'entrée de l'équation (3.7) et les contraintes de Lyapunov des équations (3.9) et (3.10). Ceci est garanti par la propriété de stabilité en boucle fermée de la commande basée sur Lyapunov  $h(x)$ ; le lecteur peut se référer à [7] pour une discussion plus détaillée sur la propriété de stabilité du contrôleur  $h(x)$ .
- *partie 2* : Nous supposons que le LEMPC de l'Eq (3.5) fonctionne dans le le premier mode de fonctionnement. On prouve que si  $x(t_k) \in \Omega_{\tilde{\rho}}$ , alors  $x(t_{k+1}) \in \Omega_\rho$ ; et si  $x(t_k) \in \Omega_\rho / \Omega_{\tilde{\rho}}$  alors  $V(x(t_{k+1})) < V(x(t_{k+j}))$  et l'état converge vers  $\Omega_{\tilde{\rho}}$  dans un nombre finie des étapes (c'est-à-dire  $x(t_{k+j}) \in \Omega_{\tilde{\rho}}$  où  $j$  est un entier positif fini). Lorsque  $x(t_k) \in \Omega_{\tilde{\rho}}$  a partir la contrainte (3.9) on obtient que  $\tilde{x}(t_{k+1}) \in \Omega_{\tilde{\rho}}$ , de la proposition 4 et 5 on a

$$V(x(t_{k+1})) \leq V(\tilde{x}(t_{k+1})) + f_V(f_W(\Delta)) \quad (3.20)$$

puisque  $V(\tilde{x}(t_{k+1})) \leq \tilde{\rho}$ , si la condition de Eq (3.17) est satisfaite, on peut conclure

$$x(t_{k+1}) \in \Omega_\rho$$

Lorsque  $x(t_k) \in \Omega_\rho/\Omega_{\tilde{\rho}}$ , a partir la contrainte de (3.10) et la condition (3.2), on peut écrire

$$\begin{aligned} \frac{\partial V(x(t_k))}{\partial x} f(x(t_k), u_1^*(t_k), \dots, u_m^*(t_k), 0) &\leq \frac{\partial V(x(t_k))}{\partial x} f(x(t_k), h_1(t_k), \dots, h_m(t_k), 0) \\ \frac{\partial V(x(t_k))}{\partial x} f(x(t_k), h_1(t_k), \dots, h_m(t_k), 0) &\leq -\alpha_3(|x(t_k)|) \end{aligned} \quad (3.21)$$

La dérivée par rapport au temps de la fonction de Lyapunov le long des trajectoires optimales calculées  $u_1^*(t_k), \dots, u_m^*(t_k)$  pour  $\forall \tau \in [t_k, t_{k+1})$  peut s'écrire comme suit :

$$\dot{V}(x(\tau)) = \frac{\partial V(x(\tau))}{\partial x} f(x(\tau), u_1^*(t_k), \dots, u_m^*(t_k), w(\tau)) \quad (3.22)$$

on ajout et on retranche le terme  $\frac{\partial V(x(t_k))}{\partial x} f(x(t_k), u_1^*(t_k), \dots, u_m^*(t_k), 0)$  dans l'équation (3.21) ci-dessus, on obtient

$$\begin{aligned} \dot{V}(x(\tau)) &\leq -\alpha_3(|x(t_k)|) + \frac{\partial V(x(\tau))}{\partial x} f(x(\tau), u_1^*(t_k), \dots, u_m^*(t_k), w(\tau)) \\ &\quad - \frac{\partial V(x(t_k))}{\partial x} f(x(t_k), u_1^*(t_k), \dots, u_m^*(t_k), 0) \end{aligned} \quad (3.23)$$

et puisque la perturbation est bornée  $|w| \leq \theta$  et la propriété de Lipthiz de Eq (3.4) on peut écrire

$$\dot{V}(x(\tau)) \leq -\alpha_3(|x(t_k)|) + L'_x |x(\tau) - x(t_k)| + L_w \theta \quad (3.24)$$

on prendre par considération Eq (3.3) et la continuité de  $x(t)$  La borne suivante peut être écrite pour tout  $\tau \in [t_k, t_{k+1})$

$$|x(\tau) - x(t_k)| \leq M\Delta \quad (3.25)$$

puisque  $x(t_k) \in \Omega_\rho/\Omega_{\tilde{\rho}}$  on peut conclure que  $x(t_k) \in \Omega_\rho/\Omega_s$ . ainsi on peut écrire

$$\dot{V}(x(\tau)) \leq -\alpha_3(\alpha_2^{-1}(\rho_s)) + L'_x M\Delta + L'_w \theta \quad (3.26)$$

Si la condition de Eq.(3.18) est satisfait, alors il existe  $\epsilon_w > 0$  tel que l'inégalité suivante reste valable pour  $x(t_k) \in \Omega_\rho/\Omega_{\tilde{\rho}}$

$$\dot{V}(x(t)) \leq \frac{-\epsilon_w}{\Delta}, \forall t \in [t_k, t_{k+1})$$

En intégrant cette borne sur  $t \in [t_k, t_{k+1})$  on obtient que

$$V(x(t_{k+1})) \leq V(x(t_k)) - \epsilon_w$$

$$V(x(t)) \leq V(x(t_k)), \forall t \in [t_k, t_{k+1}) \quad (3.27)$$

$\forall x(t_k) \in \Omega_\rho/\Omega_{\tilde{\rho}}$  en utilisant Eq. (3.27) il est prouvé que si  $\forall x(t_k) \in \Omega_\rho/\Omega_{\tilde{\rho}}$ , l'état converge vers  $\Omega_{\tilde{\rho}}$  dans un nombre fini de temps d'échantillonnage sans sortir de la région de stabilité.

- *partie 3* : on suppose que le LEMPC de l'Eq. (3.5) fonctionne dans le second mode de fonctionnement. montrons que si  $x(t_k) \in \Omega_\rho$  alors  $V(x(t_{k+1})) \leq V(x(t_k))$  et l'état du système est ultimement borné dans un ensemble invariant  $\Omega_{\rho_{min}}$ . On suit le même démarche comme dans la deuxième partie, on peut déduire que l'inégalité (3.27) reste valable pour tout  $x(t_k) \in \Omega_\rho/\Omega_{\rho_s}$ .

En utilisant ce résultat de manière récursive on a si  $x(t_k) \in \Omega_\rho/\Omega_{\tilde{\rho}}$  l'état converge vers  $\Omega_{\rho_s}$  dans un nombre fini de temps d'échantillonnage sans sortir de la région de stabilité. Une fois que l'état converge vers  $\Omega_{\rho_s} \subseteq \Omega_{\rho_{min}}$ , il reste à l'intérieur de  $\Omega_{\rho_{min}}$  à tout moment. Cette assertion tient grâce à la définition de  $\rho_{min}$ . Cela prouve que le système en boucle fermée sous le LEMPC de l'Eq. (3.5) est ultimement borné dans  $\Omega_{\rho_{min}}$

□

**Remarque 5.** *On notera que l'ensemble  $\Omega_\rho$  (c'est-à-dire  $V \leq \rho$ ) est un ensemble invariant pour le système nominal à boucle fermée et est également un ensemble invariant pour le système à boucle fermée soumis à des perturbations bornées (c'est-à-dire  $|w| \leq \theta$ ) dans le cadre d'une commande d'implémentation continue par morceaux lorsque les conditions énoncées dans le Théorème 3.6.1 sont satisfaites. Cela peut être interprété comme suit :  $\dot{V}$  est négative partout dans  $\Omega_\rho$  sauf à l'origine lorsqu'il n'y a pas de perturbations et que la mise à jour d'actions de contrôle se fait d'une manière continue, De plus, plus on s'éloigne de l'origine, plus  $\dot{V}$  est négatif.*

*Cela implique que pour des perturbations suffisamment petites (c'est-à-dire  $\theta$  suffisamment petit) et un temps d'échantillonnage suffisamment petit (c'est-à-dire  $\Delta$  suffisamment petit),  $\dot{V}$  du système en boucle fermée continuera d'être négatif pour tous les  $x \in \Omega_\rho$  mais dans une petite boule autour de l'origine (c'est-à-dire  $\Omega_{\rho_{min}}$ ).*

**Remarque 6.** *On notera que le terme " ultimement borné " pour l'état d'un système dynamique non-linéaire (en particulier du système à boucle fermée) signifie qu'après un temps suffisamment grand,  $t_q$ , l'état du système en boucle fermée entre dans un ensemble compact (fermé et borné) contenant l'origine (c'est-à-dire  $\Omega_{\rho_{min}}$  pour le système en boucle fermée de l'Eq (3.1) sous le LEMPC d'Eq (3.5)) et reste dans cet ensemble pour tout  $t \geq t_q$  (c'est-à-dire  $t_q \in \Omega_{\rho_{min}} \forall t \geq t_q$ )*

**Remarque 7.** *Au lieu d'exiger que l'état du système en boucle fermée se stabilise à la*

fin de l'horizon de prédiction comme dans [12], dans la conception proposée, le LEMPC d'Eq (3.5) a deux modes de fonctionnement différents. Dans le premier mode, le LEMPC optimise la fonction de coût économique dans la région  $\Omega_{\tilde{p}}$ . Lorsque le LEMPC proposé est dans le deuxième mode de fonctionnement, il amène l'état du système en boucle fermée à l'état d'équilibre. Le LEMPC de l'équation (3.5) possède également une région de stabilité qui peut être caractérisée explicitement.

**Remarque 8.** Il est à noter que pour obtenir des performances optimales, généralement, l'horizon de prédiction du LEMPC de l'équation (3.5) doit être suffisamment long pour couvrir la période au cours de laquelle le fonctionnement du processus doit être optimisé. En revanche, un horizon de prédiction long peut ne pas être pratique pour une implémentation d'un algorithme MPC (en particulier pour les systèmes non linéaires avec un grand nombre d'entrées manipulés) en raison de la charge de calcul élevée. Pour certaines applications, on peut éviter ce problème en amenant une partie des états du système à certains points optimaux économique particulières et en faisant fonctionner le reste des états du système de manière variable dans le temps afin de maximiser davantage la fonction de coût économique. Cela implique que nous faisons fonctionner une partie du système dans le deuxième mode de fonctionnement et une partie du système dans le premier mode de fonctionnement simultanément.

## CHAPITRE

### 4

# COMMANDE A BASE DE LYAPUNOV AVEC MESURES ASYNCHRONES ET RETARDÉES

Dans ce chapitre nous avons combiner les notions qu'on a vu dans l'introduction et le le premier chapitre. Il s'agit d'une application a un procédé chimique ,une étude de stabilité est en charge on se basent sur la notion da la Fonction de Lyapunov avec une discrétisation des mesures dite retardées

## Sommaire

---

<b>4.1</b>	<b>MPC économique basé sur la méthode de Lyapunov avec mesures asynchrones et retardées.</b>	<b>48</b>
<b>4.2</b>	<b>Stratégie d'implémentation du LEMPC</b>	<b>48</b>
<b>4.3</b>	<b>La formulation du LEMPC</b>	<b>49</b>
<b>4.4</b>	<b>Analyse de stabilité</b>	<b>50</b>

---



## 4.1 MPC économique basé sur la méthode de Lyapunov avec mesures asynchrones et retardées.

Dans cette section, nous considérons la conception de LEMPC pour des systèmes soumis à des mesures asynchrones et retardées. Plus précisément, on suppose que l'état du système d'Eq. (3.1),  $x(t)$  est valable pour des instants de temps asynchrones  $\{t_{a \geq 0}\}$  qui est une séquence aléatoire croissante et que l'intervalle entre deux instants consécutifs n'est pas fixe. Nous supposons également que les mesures sont retardées sous une forme qui sera modéliser on utilisons une variable auxiliaire  $d_a$  pour indiquer le retard correspondant à la mesure reçue à l'instant  $t_a$

Pour étudier les propriétés de stabilité dans un cadre déterministe, nous supposons qu'il existe une limite supérieure  $T_m$  sur l'intervalle entre deux mesures successives (c'est-à-dire  $\max_a \{t_{a+1} - t_a\} \leq T_m$ , et une borne supérieure  $D$  sur les retards (c'est-à-dire  $d_a \leq D$ ). Ces hypothèses sont raisonnables du point de vue du contrôle du processus. Parce que les retards varient dans le temps, il est possible qu'à un instant donné  $t_a$  les contrôleurs peuvent recevoir une mesure  $x(t_a - d_a)$  qui ne fournit pas de nouvelles informations (c'est-à-dire  $t_a - d_a \leq t_{a-1} - d_{a-1}$ ) et la durée maximale pendant laquelle le système peut fonctionner en boucle ouverte après  $t_a$  est  $D + T_m - d_a$ .

Cette borne supérieure sera utilisée dans la formulation du LEMPC pour les systèmes soumis à des mesures asynchrones et retardées [26].

## 4.2 Stratégie d'implémentation du LEMPC

A chaque instant d'échantillonnage asynchrone, lorsqu'une mesure retardée est reçue, nous proposons de profiter de l'avantage de l'utilisation du modèle nominal du système de l'équation (3.1) et les entrées manipulées qui ont été appliquées au système pour estimer l'état actuel du système à partir de la mesure retardée.

Basé sur l'estimation de l'état actuel du système, un problème d'optimisation MPC est résolu pour décider de l'entrée future optimale. d'optimisation MPC est résolu pour décider la trajectoire d'entrée qui sera appliquée jusqu'à la réception de la prochaine nouvelle mesure soit reçue, Comme dans la section précédente, nous introduisons une conception LEMPC qui maximise une fonction de coût tenant compte des considérations économiques spécifiques. Ce LEMPC a également deux modes de fonctionnement.

De l'instant  $t_0$  à  $t'$  le LEMPC fonctionne dans le premier mode de fonctionnement. Dans ce mode de fonctionnement, le LEMPC proposé maximise une fonction de coût économique tout en maintenant l'état du système en boucle fermée dans la région de stabilité  $\Omega_\rho$ . Pour tenir compte de la mesure asynchrone et retardée ainsi que de la perturbation, nous considérons une autre région  $\Omega_{\hat{\rho}}$  avec  $\hat{\rho} \leq \rho$  Plus précisément, lorsqu'une mesure retardée est reçue à un moment d'échantillonnage où l'état actuel du système est estimé. Si l'état actuel estimé est dans la région  $\Omega_{\hat{\rho}}$  le LEMPC maximise la fonction de coût dans

la région  $\Omega_{\hat{\rho}}$ ;

si l'état actuel estimé est dans la région  $\Omega_{\rho}/\Omega_{\hat{\rho}}$ , le LEMPC dirige d'abord l'état du système vers la région  $\Omega_{\hat{\rho}}$ , puis maximise la fonction de coût dans la région  $\Omega_{\rho}$ . La relation entre  $\rho$  et  $\hat{\rho}$  sera caractérisée par l'équation (4.15) dans le théorème 4.4.1.

Après le temps  $t'$ , le système fonctionne dans le second mode de fonctionnement. Dans ce mode de, le LEMPC calcule les entrées de manière à ce que la fonction de Lyapunov du système décroît d'une manière continue afin de diriger l'état du système vers un voisinage de l'origine tout en tenant compte les mesures asynchrones et retardées.

La Stratégie d'implémentation de la LEMPC proposée avec l'échantillonnage de mesure asynchrone et retardées peut être résumée comme suivante :

1. A un instant d'échantillonnage  $t_a$ , le contrôleur reçoit à partir des capteurs l'état du système  $x(t_a - d_a)$ , et il estime l'état actuel du système  $x(t_a)$
2. si  $t_a < t'$  passer à l'étape 3 sinon passer a l'étape 4
3. si  $x(t_a) \in \Omega_{\hat{\rho}}$  passer à l'étape 3.a sinon passer a l'étape 3.b
  - (a) Le contrôleur maximise la fonction de coût économique dans  $\Omega_{\hat{\rho}}$  . Passer à l'étape 5.
  - (b) Le contrôleur amène l'état du système dans la région  $\Omega_{\hat{\rho}}$ . Passez à l'étape 5.
4. Le contrôleur amène l'état du système à un petit voisinage de l'état d'équilibre souhaité.
5. Passer à l'étape 1 ( $a \leftarrow a + 1$ )

### 4.3 La formulation du LEMPC

A un instant d'échantillonnage  $t_a$ , le MPC est évalué pour obtenir les trajectoires d'entrée futures on se basant sur l'état du système reçu  $x(t_a - d_a)$ .

Le problème d'optimisation de la LEMPC proposée pour le système avec échantillonnage de mesures asynchrones et retardées est comme suit :

$$\max_{u_1, \dots, u_m \in \mathcal{S}(\Delta)} \int_{t_a}^{t_a + N\Delta} L(\check{x}(\tau), u_1(\tau), \dots, u_m(\tau)) d\tau \quad (4.1)$$

st

$$\dot{\check{x}}(t) = f(\check{x}(t), u_1(t), \dots, u_m(t), 0) \quad (4.2)$$

$$u_i(t) = u_i^*(t), i = 1, \dots, m, t \in [t_a - d_a, t_a) \quad (4.3)$$

$$u_i(t) \in U_i, i = 1, \dots, m, t \in [t_a - d_a, t_a + N\Delta) \quad (4.4)$$

$$\check{x}(t_a - d_a) = x(t_a - d_a) \quad (4.5)$$

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}(t) &= f(\hat{x}(t), h_1(\hat{x}(t_a + l\Delta)), \dots, h_m(\hat{x}(t_a + l\Delta)), 0) \\ \forall t \in [t_a + l\Delta, t_a + l(\Delta + 1)), l &= 0, \dots, N - 1 \end{aligned} \quad (4.6)$$

$$\hat{x}(t_a) = \check{x}(t_a) \quad (4.7)$$

$$V(\check{x}(t)) \leq \hat{\rho}, \forall t \in [t_a, t_a + N\Delta) \quad \text{si } t_a \leq t' \quad \text{et} \quad V(\check{x}(t_k)) \leq \hat{\rho} \quad (4.8)$$

$$V(\check{x}(t)) \leq V(\hat{x}(t)) \forall t \in [t_a, t_a + N_{Da}\Delta) \quad \text{si } t_a > t' \quad \text{ou} \quad \hat{\rho} < V(\check{x}(t_a)) < \rho \quad (4.9)$$

où  $\check{x}$  est la trajectoire prédite du système avec les entrées de commande calculées par ce LEMPC,  $u_i^*(t)$  avec  $i = 1 \dots, m$  représente les entrées actuelles qui ont été appliquées au système,  $x(t_a - d_a)$  est la mesure retardée reçue,  $\hat{x}$  est la trajectoire prédite du système avec les entrées de commande déterminées par  $h(x)$  implémenté dans un mode d'échantillonnage et de maintien, et  $N_{Da}$  est le plus petit entier qui vérifie  $T_m + D - d_a \leq N_{Da}\Delta$ , la solution optimale de ce problème noter par  $u_i^{a,*}(t|t_a), i = 1, \dots, m$ , qui est définie pour  $t \in [t_a, t_a + n\Delta)$ .

Il y a deux types de calculs dans le problème d'optimisation de l'équation (4.1).

Le premier type de calcul consiste à estimer l'état actuel  $\check{x}(t_a)$  on se basant sur la mesure retardée  $x(t_a - d_a)$  et les valeurs d'entrée appliquées au système à partir de  $t_a - d_a$  jusqu'à  $t_a$  (les contraintes (4.2),(4.3),(4.5)).

Le second type de calcul consiste à évaluer la trajectoire d'entrée optimale de  $u_i, (i = 1, \dots, m)$  on se basant sur  $\check{x}(t_a)$  tenant compte la contraintes d'entrée (4.4) et la contrainte de stabilité (4.8) on note que la longueur de la contrainte  $N_{Da}$  dépend du retard actuel  $d_a$  et peut donc avoir des valeurs différentes dans des instants différentes et doit être actualisée avant de résoudre le problème d'optimisation de l'équation (4.1)

Les entrées manipulées du LEMPC de l'équation (4.1) pour des systèmes avec des mesures asynchrones et différées sont définies comme suit :

$$u_j(t) = u_j^{a,*}(t|t_a), \forall t \in [t_a, t_{a+j}) \quad (4.10)$$

pour tout  $t_a$  tel que  $t_a - d_a > \max_{l < a}(t_l - d_l)$ , et si on fixe  $t_a$  la variable  $i$  représente le plus petit entier qui vérifie  $t_{a+j} - d_{a+j} > t_a - d_a$  et  $j = 1, \dots, m$ .

## 4.4 Analyse de stabilité

Dans cette section, nous présentons les propriétés de stabilité du LEMPC proposé de l'équation (4.1) en présence des mesures asynchrones et retardées. Pour continuer, nous avons besoin de la proposition suivante :

**Proposition 6.** *On considère la trajectoire nominale échantillonnée  $\hat{x}(t)$  du système de l'équation (3.1) en boucle fermée. pour un contrôleur  $h(x)$ , qui satisfait la condition de (3.2), obtenue en résolvant de manière récursive*

$$\dot{\hat{x}}(t_k) = f(\hat{x}(t), h_1(\hat{x}(t_k)), \dots, h_m(\hat{x}(t_k)), 0), \forall t \in [t_k, t_{k+1}) \quad (4.11)$$

où  $t_k = t_0 + k\Delta, k = 0, 1, \dots$  soient  $\Delta, \epsilon_s > 0$  et  $\rho > \rho_s > 0$  satisfont

$$-\alpha_3(\alpha_2^{-1}(\rho_s)) + L'_x M \Delta \leq \frac{-\epsilon_s}{\Delta} \quad (4.12)$$

Ensuite, si  $\hat{x}(t_0) \in \Omega_\rho$  et  $\rho_{min} < \rho$  où est définie dans l'équation (3.19) l'inégalité suivante est valable.

$$V(\hat{x}(t)) \leq V(\hat{x}(t_k)), \forall t \in [t_k, t_{k+1}) \quad (4.13)$$

$$V(\hat{x}(t_k)) \leq \max\{V(\hat{x}(t_0)) - k\epsilon_s, \rho_{min}\} \quad (4.14)$$

La proposition 3 assure que si le système nominal contrôlé par la commande basée sur Lyapunov  $h(x)$  implémentée dans un mode d'échantillonnage et de maintien et avec une estimation d'état en boucle ouverte commence dans  $\Omega_\rho$ , alors il est ultimement borné dans  $\Omega_{\rho_{min}}$ .

Le théorème 4.4.1 ci-dessous fournit des conditions suffisantes sous lesquelles le LEMPC de l'équation (4.1) garantit que l'état du système en boucle fermée est toujours borné dans  $\Omega_\rho$  et est ultimement borné dans une petite région contenant l'origine.

**Théorème 4.4.1.** *Considérons le système de l'équation (3.1) en boucle fermée sous la forme LEMPC de l'équation (3.5) basée sur un contrôleur  $h(x)$  qui satisfait les conditions de l'équation (3.2) Soient  $\epsilon_w > 0, \Delta > 0, \rho > \hat{\rho} > 0$ , et  $\rho > \rho_s > 0$  satisfont*

$$\hat{\rho} \leq \rho - f_V(f_W(N\Delta)) \quad (4.15)$$

et

$$-N_R \epsilon_s + f_V(f_W(N_D \Delta)) + f_V(f_W(D)) < 0 \quad (4.16)$$

où  $N_D$  est le plus petit entier vérifie  $N_D \Delta \geq T_m + D$ , et  $N_R$  est le plus petit entier vérifie  $N_R \Delta \geq T_m$ . si  $N \geq N_D, \tilde{\rho} \geq \rho, x(t_0) \in \Omega_\rho, d_0 = 0$  alors l'état en boucle fermée de système de l'équation (3.1) est toujours bornée dans  $\Omega_\rho$  et ultimement bornée sur  $\Omega_{\rho_a} \subset \Omega_\rho$  où

$$\rho_a = \rho_{min} + f_V(f_W(N_D \Delta)) + f_V(f_W(D)) \quad (4.17)$$

*Démonstration.* Lorsque  $x(t)$  est placé dans la zone de stabilité  $\Omega_\rho$ , la faisabilité du problème d'optimisation de l'équation (4.1) peut être prouvée en suivant les mêmes arguments utilisés dans la partie 1 de la preuve du théorème 3.6.1. Dans le reste de cette preuve, nous nous concentrons à prouver que  $x(t)$  est toujours borné dans  $\Omega_\rho$  et qu'il l'est ultimement borné dans  $\Omega_{\rho_a}$ .

La preuve se compose de deux parties Dans la première partie on va montrer que  $x(t)$  restera toujours dans  $\Omega_\rho$  lors de le première mode de fonctionnement, et dans la deuxième

partie on va montrer que dans le deuxième mode de fonctionnement  $x(t)$  est ultimement bornée dans  $\Omega_{\rho_a}$ .

Dans cette preuve, on suppose que  $x(t_a - d_a)$  est reçu à l'instant  $t_a$  et que la prochaine mesure asynchrone contenant de nouvelles informations est reçue à  $t_{a+i}$  avec  $t_{a+i} = t_a + T_m$  et  $T_m = N\Delta$ , Cela correspond au pire des cas. Lorsqu'il est prouvé que  $x(t)$  est borné dans  $\Omega_{\rho}$  et ultimement borné dans  $\Omega_{\rho_a}$  pour ce pire cas, les résultats sont également garantis pour le cas général c'est-à-dire  $t_{a+i} \leq t_a + T_m$

— *partie 1* : On suppose que le LEMPC d'Eq. (4.1) fonctionne dans le premier mode de fonctionnement.

montrons que si  $\check{x}(t_a) \in \Omega_{\hat{\rho}}$  alors  $x(t_{a+i}) \in \Omega_{\rho}$ ; et si  $\check{x}(t_a) \in \Omega_{\rho}/\Omega_{\hat{\rho}}$  alors  $V(x(t_{a+i})) < V(x(t_a))$  et l'état converge vers  $\Omega_{\hat{\rho}}$  dans un nombre fini d'étapes.

Lorsque  $\check{x}(t_a) \in \Omega_{\hat{\rho}}$ , de (4.15) on obtient que  $\check{x}(t_{a+i}) \in \Omega_{\hat{\rho}}$ , lorsque  $x(t) \in \Omega_{\rho}, \forall t$  on peut appliquer les deux propositions 4 et 5 pour obtenir l'inégalité suivante

$$V(x(t_{a+i})) \leq V(\check{x}(t_{a+i})) + f_V(f_W(N\Delta)) \quad (4.18)$$

puisque  $V(\check{x}(t_{a+i})) \leq \hat{\rho}$  si la condition (4.15) est satisfaite, on peut conclure que

$$x(t_{a+i}) \in \Omega_{\rho} \quad (4.19)$$

Lorsque  $\check{x}(t_a) \in \Omega_{\rho}/\Omega_{\hat{\rho}}$ , de la condition (4.9) on obtient que

$$V(x(t)) \leq V(\check{x}(t)), \forall t \in [t_a, t_a + N_{D_a}\Delta] \quad (4.20)$$

Par la proposition 6 et avec le fait que  $\hat{\rho} > \rho_s$ , on obtient l'inégalité suivante :

$$V(\hat{x}(t_{a+i})) \leq \max\{V(\hat{x}(t_a)) - N_{D_a}\epsilon_s, \rho_{min}\} \quad (4.21)$$

Par la proposition 4,5, on obtient l'inégalité suivante

$$V(\check{x}(t_a)) \leq V(x(t_a)) + f_V(f_W(d_a)) \quad (4.22)$$

partons des deux inégalités (4.18) et (4.21) on peut écrire

$$V(x(t_{a+i})) \leq \max\{V(x(t_a)) - N_{D_a}\epsilon_s, \rho_{min}\} + f_V(f_W(d_a)) + f_V(f_W(N_D\Delta)) \quad (4.23)$$

On note que dans le calcul de la dérivée dans l'inégalité (4.23) nous avons pris en compte que  $N_D\Delta \geq T_m + D + d_a$  pour tout  $d_a$

pour montrer que la fonction de Lyapunov est décroissante entre  $t_a$  et  $t_{a+i}$  l'inégalité suivante doit être valable

$$N_{D_a}\epsilon_s > f_V(f_W(d_a)) + f_V(f_W(N_D\Delta)) \quad (4.24)$$

pour tout  $d_a \leq D$  possible, on prendre par considération que les deux fonctions  $f_W(\cdot)$  et  $f_V(\cdot)$  sont strictement décroissantes, et que  $N_{D_a}$  est aussi une fonction décroissante du retard  $d_a$  et que si  $d_a = D$  alors  $N_{D_a} = N_R$ , si la condition (4.16) est satisfaite alors la condition (4.24) est valable pour tout  $d_a$  possible et il existe  $\epsilon_w > 0$  tel que l'inégalité suivante soit valable

$$V(x(t_{a+i})) \leq \max\{V(x(t_a)) - \epsilon_w, \rho_a\} \quad (4.25)$$

ce qui implique que si  $x(t_a) \in \Omega_\rho/\Omega_{\hat{\rho}}$ , alors  $V(x(t_{a+i})) < V(x(t_a))$ , Cela implique également que l'état converge vers  $\Omega_{\hat{\rho}}$  dans un nombre fini d'itérations sans quitter la région de stabilité.

- *partie 2* : Nous supposons que le LEMPC de (4.1) fonctionne dans le deuxième mode de fonctionnement. on montre que  $x(t)$  est ultimement borné dans  $\Omega_{\rho_a}$ . En suivant des étapes similaires à celles de la partie 1, on peut de nouveau dériver à nouveau la condition de l'équation (4.25).

Utilisons cette condition récursivement, on montre que si  $x(t_0) \in \Omega_\rho$  alors la trajectoire en boucle fermée du système de l'équation (3.1) sous l'LEMPC de (4.1) reste dans  $\Omega_\rho$  est vérifie

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} V(x(t)) \leq \rho_a \quad (4.26)$$

Cela prouve les résultats énoncés dans le théorème 4.4.1[26]. □

# CHAPITRE

## 5

# APPLICATION A UN PROCÉDÉ CHIMIQUE

Dans ce chapitre nous avons présenter une application des notion mentionner précédemment sur un procédé chimique, Il s'agit d'une manipulation des variables d'entrée au sein d'un réacteur **CSTR** afin de maintenir le procédé à un état désiré

## Sommaire

---

<b>5.1</b>	<b>la commande de procédé</b>	<b>55</b>
<b>5.2</b>	<b>Description du réacteur</b>	<b>56</b>
5.2.1	Modélisation du CSTR	56
<b>5.3</b>	<b>application</b>	<b>58</b>
5.3.1	Echantillonnage synchrone des mesures	58
5.3.2	Echantillonnage asynchrones avec retard des mesures	60
5.3.3	Analyse de Simulations	61
<b>5.4</b>	<b>Conclusion</b>	<b>61</b>

---

## 5.1 la commande de procédé

La commande de procédé est une discipline visant à amener et maintenir un procédé à un état désiré. Dans ce cadre, les variables d'état sont celles décrivant la situation dans laquelle se trouve un procédé. Parmi celles-ci, en génie chimique, on retrouve notamment les concentrations et les températures. Les variables d'entrée, ou variables manipulées, sont celles pouvant être ajustées par un actuateur. Par exemple, un débit d'alimentation à une unité peut être manipulé en ouvrant ou fermant une vanne. Enfin, les variables de sortie sont des fonctions des variables d'état, représentant des quantités pour lesquelles des valeurs précises peuvent être souhaitées pour des raisons économiques, de sécurité ou environnementales. Par ailleurs, une variable de sortie pour une opération peut agir comme variable d'entrée d'une autre opération. Ainsi, pour le contrôle d'une vanne, le débit dans la conduite correspondante est la variable de sortie et l'ouverture, la variable d'entrée. Ce même débit peut par la suite devenir une variable d'entrée pour le contrôle d'un réacteur.

Les stratégies de contrôle agissent sur les variables d'entrée en sélectionnant les valeurs qu'elles doivent prendre dans le but d'influencer l'évolution des variables d'état de manière à ce que la ou les variables de sortie atteignent les valeurs souhaitées. Cependant, les variables d'entrée, d'état et de sortie ne peuvent généralement pas prendre n'importe quelle valeur. Diverses contraintes imposent des limites à celles-ci. Ces contraintes peuvent provenir de différentes sources.

- Limitations techniques : il peut s'agir simplement de bornes sur un débit d'alimentation. Celui-ci ne peut être négatif et sa valeur maximale dépend des capacités des pompes, tuyaux et vannes impliqués. Il s'agit alors d'une contrainte sur une variable d'entrée.
- Normes environnementales : notamment, des normes sur la qualité de l'air imposent des limites sur l'impact qu'une usine peut avoir sur la concentration de polluant dans l'air ambiant. Ainsi, si un réacteur émet des rejets gazeux, une contrainte sur une variable de sortie dépendant de la température et de la concentration de polluant sera présente.
- Normes de sécurité : pour éviter des accidents, il est normal d'imposer certaines limites aux conditions d'opération de divers équipements. Par exemple, pour éviter qu'un réacteur atteigne une température trop élevée en cas de dysfonctionnement, une contrainte sur la concentration de réactif maximale peut être imposée.

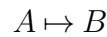
Cependant, cette simplicité implique certaines limites et, à l'occasion, des méthodes de contrôles plus complexes deviennent préférables. Dans ces situations, l'optimisation peut jouer un rôle majeur dans le contrôle de procédé. En mathématiques, l'optimisation consiste à trouver les valeurs maximales ou minimales d'une fonction objectif en déterminant les valeurs des variables indépendantes correspondantes, tout en tenant compte des diverses contraintes applicables. Comme les méthodes de contrôle visent à amener



un système à des états désirés, il est naturel de vouloir déterminer quels sont les états idéaux et les meilleurs chemins pour s'y rendre. L'optimisation est donc un outil de choix, tant pour déterminer les états souhaités que les entrées qui y mèneront. La commande prédictive non-linéaire (NMPC) en est un bon exemple : celle-ci procède par optimisation successive alors que le système évolue dans le temps, utilisant les mesures faites en ligne pour adapter les conditions initiales à chaque fois.

## 5.2 Description du réacteur

Un des réacteurs les plus utilisés dans l'industrie chimiques et pétrochimiques est le réacteur ouvert complètement agité, exothermique irréversible avec chemise de refroidissement ( **Continuously Stirred Tank Reactor**). le processus multivariable suivant correspond à un système emprunté à , auquel il a été fait une légère modification pour pouvoir appliquer la commande NMPC. Le système consiste en un réacteur chimique avec chemise de refroidissement. la décomposition d'un produit A en un autre produit B se produit dans le réacteur figure 5.1. La réaction peut être écrite comme suit :



La réaction est exothermique et par conséquent la température doit être contrôlée par circulation d'eau à travers la chemise de refroidissement qui entoure les parois du réservoir. L'objectif est de régler la température dans le réservoir ( $T_R$ ) et la concentration du produit en sortie ( $C_A$ ) En jouant sur la manipulation du débit d'alimentation ( $F_L$ ) et le débit de refroidissement ( $F_C$ ) .

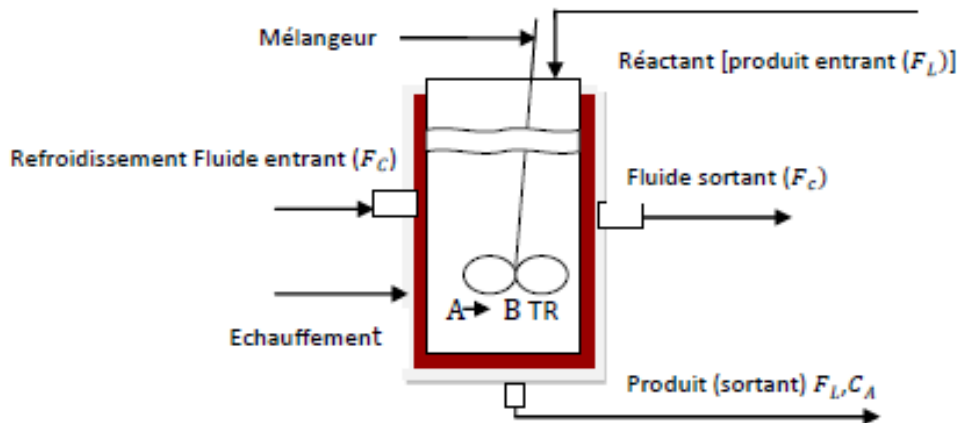


FIGURE 5.1 – Schéma du réacteur complètement agité exothermique irréversible [28]

### 5.2.1 Modélisation du CSTR

Le développement du modèle initial du **CSTR** est basé sur quatre hypothèses

1. Le **CSTR** est parfaitement agité .
2. les densités massiques du composant d'entrée et celui produit sont égaux et identiques (désignés par  $\rho$ ) .
3. le volume de liquide  $V$  dans le réacteur est conservé constant par un conduit d'évacuation .
4. le taux de réaction ( $r$ ) est d'ordre un par rapport à  $A$  est donnée par :

$$r = k \cdot C_A$$

Avec

- $k$  la vitesse de réaction qui suit une loi d'Arrhénius de type :

$$k = k_0 \exp \frac{-E}{RT}$$

- $k_0$  le facteur de fréquence
- $E$  énergie d'activation
- $R$  est la constante universelle des gaz parfaits
- $T$  la température du milieu réactionnelle

Le modèle mathématique du procédé est issu de deux bilans : un bilan de matière et un bilan d'énergie. La modélisation est réalisée sous les hypothèses précédentes.

Le comportement dynamique du réacteur est donnée par un système d'équation différentielle ordinaires non linéaires[20]

$$\frac{dC_A}{dt} = \frac{F}{V}(C_{A0} - C_A) - k_0 \exp\left(\frac{-E}{RT}\right)C_A^2 \quad (5.1)$$

$$\frac{dT}{dt} = \frac{F}{V}(T_0 - T) + \frac{-\Delta H}{\rho C_p} k_0 \exp\left(\frac{-E}{RT}\right)C_A^2 + \frac{Q}{\rho C_p V} \quad (5.2)$$

Avec

- $V$  représente le volume du réacteur
- $C_A$  représente la concentration du produit à la sortie
- $\Delta H$  enthalpie de réaction
- $Q$  représente le taux d'entrée/sortie de la chaleur
- $C_A$  concentration du produit à la sortie
- $C_p$  la capacité thermique
- $\rho$  masse volumique du fluide dans le réacteur
- $F_L$  on le notera  $F$  représente le débit de produit entrant .
- $T_0$  température d'alimentation dans le réacteur
- $C_{A0}$  concentration d'alimentation.

## 5.3 application

Le procédé d'Eq.(5.1) est simulé numériquement en utilisant une méthode d'intégration explicite d'Euler avec un pas  $h_c = 10^{-4}$

Le modèle de procédé a un état d'équilibre instable et un état d'équilibre stable dans le domaine d'intérêt, l'objectif de la commande est de réguler le processus dans une région autour de l'état d'équilibre instable  $(C_{As}, T_s)$  afin de maximiser le taux de production de  $B$ .

Il y a deux entrées manipulées, L'une des entrées est la concentration de  $A$  à l'entrée du réacteur,  $C_{A0}$ , et l'autre est le taux d'entrée/sortie de la chaleur externe  $Q$ , Les valeurs d'entrée associées à l'état d'équilibre sont désignées par  $C_{A0}$  et  $Q_s$ , respectivement.

Le modèle de procédé de l'équation (5.1) appartient à la classe de systèmes non linéaires suivante :

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) + g_1(x(t))u_1(t) + g_2(x(t))u_2(t) + w(t) \quad (5.3)$$

où  $x^T = [C - C_{As}, T - T_s]$  est l'état,  $u_1 = C_{A0} - C_{As}$  et  $u_2 = Q - Q_s$ , sont les entrées,  $f = [f_1, f_2]^T$  et  $g_i = [g_{i1}, g_{i2}]^T$  ( $i = 1, 2$ ) sont des fonctions vecteur,  $w = [w_1, w_2]^T$  et le vecteur de perturbation bornée .

La mesure économique que nous considère dans cet exemple est comme suit :

$$L(x, u_1, u_2) = \frac{1}{t_f} \int_0^{t_f} k_0 \exp\left(\frac{-E}{RT}\right) C_A^2(\tau) d\tau \quad (5.4)$$

où  $t_f = 1$  hr est le temps final de simulation, cette fonction d'objectif économique consiste à maximiser le taux de production moyen durant l'opération du procédé pour  $t_f = 1$  hr, on considère également qu'il y a une limitation de la quantité de matériau utilisée sur la période  $t_f$ . Plus précisément, la trajectoire d'entrée de la commande de  $u_1$  doit satisfaire la contrainte suivante

$$\frac{1}{t_f} \int_0^{t_f} u_1(\tau) d\tau = 1 \text{ kmol/m}^3 \quad (5.5)$$

Cette contrainte signifie que la quantité moyenne de  $u_1$  pendant une période est fixe, Pour des raisons de simplicité et sans perte de généralité, nous appellerons l'équation (5.5) la contrainte intégrale.

### 5.3.1 Echantillonnage synchrone des mesures

Nous allons construire un LEMPC suivant l'équation (3.5) pour manipuler les deux entrées de commande. On suppose que l'état du système complet  $x$  est mesuré et envoyé au LEMPC à des instants synchrones  $t_k = k\Delta, k = 0, \dots$ , avec  $\Delta = 0.01 \text{ hr} = 36 \text{ sec}$ .

L'horizon du LEMPC est  $N = 10$ . Pour la région de stabilité, on considère une fonction

de Lyapunov quadratique  $V(x) = x^T P x$  avec  $P = \text{diag}([716.83 \ 1])$ .

Pour estimer la région de stabilité  $\Omega_\rho$ , nous évaluons  $\dot{V}$  en supposant que  $u_1$  est uniformément distribué sur  $t_f$  (i.e.,  $u_1(\tau) = 1, 0 \leq \tau \leq t_f$ ) et utiliser la linéarisation par rétroaction pour  $u_2$  sous la contrainte d'entrée  $u_2^{max}$  et la perturbation bornée  $|w_1| \leq 1 \text{ kmol/m}^3$  et  $|w_2| \leq 40k$

Puisque le LEMPC est évalué en temps discret au cours de la simulation en boucle fermée, la contrainte intégrale est appliquée comme suit :

$$\sum_{i=0}^{M-1} u_1(t_i) = \frac{t_f}{\Delta} \quad (5.6)$$

où  $M = 100$  Pour s'assurer que la contrainte intégrale est satisfaite au long de la période  $t_f$ , à chaque instant d'échantillonnage au cours duquel le LEMPC obtient la trajectoire optimale de l'entrée de commande, il utilise les entrées  $u_1$  calculées précédemment pour contraindre la valeur de la première étape de la trajectoire d'entrée de commande  $u_1$  à l'échantillonnage actuel, baser sur la formulation de la fonction de coût, pour la maximisation, on s'attend à ce que  $C_A$  et  $T$  soient augmentent, ce qui fait qu'au début de la simulation en boucle fermée,  $u_1$  devrait atteindre sa valeur maximal et après un certain temps, il descendra à sa valeur minimale pour satisfaire la contrainte intégrale.

Nous supposons que la décroissance de la fonction de Lyapunov commence dès le début de la simulation (c'est-à-dire  $t' = 0$ ). pour une partie de l'état du système (c'est-à-dire la température), Pour maximiser le taux de production, nous choisissons une température près de la limite de la région de stabilité ( $T = 430 \text{ K}$ ), on considère les contraintes sur l'entrée de contrôle  $Q$ . En raison du fait que la première équation différentielle ( $C_A$ ) dans l'équation (5.1) est l'entrée de l'état stable (ISS) avec respect de  $T$ , et la contrainte contractive de l'Eq. 45g (voir Eq. 45) assure que la température converge vers le point de référence du système en boucle fermée est garantie dans la zone de fonctionnement d'intérêt.

Dans ce but nous définissons  $V_T(t_k) = T(t_k) - 430$ , La formulation du LEMPC pour l'exemple de procédé chimique est de la forme :

$$\max_{u_1, u_2 \in S(\Delta)} = \frac{1}{N\Delta} \int_{t_k}^{t_{k+N}} k_0 \exp\left(\frac{-E}{RT}\right) C_A^2(\tau) d\tau \quad (5.7)$$

$$\dot{\tilde{x}}(t) = f(\tilde{x}(t)) + \sum_{i=1}^2 g_i(\tilde{x}(t)) u_i(t) \quad (5.8)$$

$$u_1(t) \in g_\zeta, \quad \forall t \in [t_k, t_{k+1}) \quad (5.9)$$

$$\tilde{x}(t_k) = x(t_k) \quad (5.10)$$

$$\tilde{x}(t_k) \in \Omega_{\tilde{\rho}} \quad (5.11)$$

$$u_i(t) \in U_i \quad (5.12)$$

$$\frac{dV_T(t_k)}{dT} (f_2(x(t_k)) + g_{22}(x(t_k)u_2(t_k)) \leq -\gamma V_T(t_k) \quad (5.13)$$

où  $x(t_k)$  est la mesure de l'état du procédé au moment de l'échantillonnage  $x(t_k)$ ,  $\gamma = 9.53$  et la contrainte (5.9) implique que la valeur du premier pas de  $u_1$  doit être choisie pour satisfaire la contrainte intégrale où l'expression explicite de  $g_\zeta$  peut être calculée on se basant sur (5.6) et la contrainte de magnitude sur  $u_1$ .

De même, la contrainte de l'équation (5.13) pousse la fonction de Lyapunov, basée sur la température, à diminuer dès le début de la simulation.

### 5.3.2 Echantillonnage asynchrones avec retard des mesures

Pour cet ensemble de simulations, il est supposé que les mesures d'état du procédé sont disponibles de manière asynchrone à des instants  $\{t_{a \geq 0}\}$  avec une borne supérieur  $T = 6\Delta$  sur l'intervalle maximum entre deux mesures successives d'état asynchrone, où  $\Delta$  est le temps d'échantillonnage du contrôleur et du capteur avec  $\Delta = 0.01 = 36\text{sec}$ .

Pour modéliser la séquence temporelle  $\{t_{a \geq 0}\}$ , nous utilisons un processus de Poisson à borne supérieure ce processus est défini par le nombre d'événements par unité de temps  $W$  L'intervalle entre deux temps d'échantillonnage successifs concentrer (événements du processus de Poisson) est donné par  $\Delta_a = \min\{\ln \chi / W, T_m\}$  où  $\chi$  est une variable aléatoire avec distribution de probabilité uniforme entre 0 et 1, Cette génération garantit que  $\max_a \{t_a - t_{a+1}\} \leq T_m$

La formulation du LEMPC pour l'exemple de procédé chimique est de la forme :

$$\max_{u_1, u_2 \in S(\Delta)} = \frac{1}{N\Delta} \int_{t_a}^{t_a + N\Delta} k_0 \exp\left(\frac{-E}{RT}\right) C_A^2(\tau) d\tau \quad (5.14)$$

$$\dot{\check{x}}(t) = f(\check{x}(t)) + \sum_{i=1}^2 g_i(\check{x}(t)u_i^*(t)) \quad \forall t \in [t_a - d_a, t_a) \quad (5.15)$$

$$\dot{\check{x}}(t) = f(\check{x}(t)) + \sum_{i=1}^2 g_i(\check{x}(t)u_i(t)) \quad \forall t \in [t_a, t_a + N\Delta) \quad (5.16)$$

$$u_1(t) \in g_\zeta, \quad \forall t \in [t_a, t_a + N\Delta) \quad (5.17)$$

$$\check{x}(t_a - d_a) = x(t_a - d_a) \quad (5.18)$$

$$\check{x} \in \Omega_{\check{\rho}} \quad (5.19)$$

$$u_i(t) \in U_i \quad (5.20)$$

$$V_T(t_a + (l+1)\Delta) \leq \beta V_T(t_a + l\Delta) \quad l = 0, \dots, N_{Da} \quad (5.21)$$

où  $x(t_a)$  est la mesure de l'état du procédé à l'instant d'échantillonnage  $t_a$  et  $\beta = 1/1.1$

=0.909, la contrainte (5.21) force la fonction de Lyapunov à décroître en se basant sur la température pour  $N_{Da}$  temps d'échantillonnage.

### 5.3.3 Analyse de Simulations

Les simulations ont été réalisées par **Mohsen Heidarinejad** [26] à l'aide du langage de programmation Java sur un ordinateur Pentium 3,20 GHz. Les problèmes d'optimisation ont été résolus à l'aide du logiciel gratuit Ipopt [27]

L'objectif de ces simulations est de démontrer que :

1. le LEMPC proposé stabilise le système en boucle fermée pour différentes conditions initiales.
2. la conception LEMPC proposée maximise la mesure économique  $L(x, u_1, u_2)$
3. la conception LEMPC proposée permet d'obtenir une stabilité pratique en boucle fermée dans différentes conditions initiales
4. la conception LEMPC proposée offre une valeur de fonction de coût plus élevée par rapport au fonctionnement d'état d'équilibre

pour plus de détails veuillez consulter [26]

## 5.4 Conclusion

Dans ce travail, nous avons proposé des conceptions de la commande prédictive (MPC), qui sont capables d'optimiser la performance en boucle fermée par rapport aux considérations économiques générales pour une large classe de systèmes non linéaires.

Plus précisément, dans les conceptions proposées, le MPC économique optimise une fonction de coût, qui est directement liée aux considérations économiques souhaitées et ne dépend pas nécessairement d'un état stable, contrairement aux modèles conventionnels classiques.

Dans le départ, nous avons considéré les systèmes non linéaires avec un échantillonnage synchrone de mesures. Le MPC économique proposé est conçu via des techniques basées sur Lyapunov et possède deux modes de fonctionnement différents.

Le premier mode de fonctionnement correspond à la période pendant laquelle la fonction de coût doit être optimisée (par exemple, la période de production normale). Dans ce mode de fonctionnement, le MPC maintient l'état du système en boucle fermée dans une zone de stabilité prédéfinie et optimise la fonction de coût au maximum.

Le deuxième mode de fonctionnement correspond à un fonctionnement dans lequel le système est conduit par la commande prédictive économique (MPC) à un état d'équilibre approprié. Dans ce mode de fonctionnement, des contraintes appropriées basées sur le modèle Lyapunov sont incorporées dans la conception du MPC économique afin de garantir que l'état du système en boucle fermée est toujours borné dans la région de stabilité prédéfinie et qu'il est ultimement borné dans une petite région contenant l'origine.

Par la suite, nous avons appliqué ces résultats aux systèmes non linéaires soumis à des mesures asynchrones et retardées. Sous l'hypothèse qu'il existe une borne supérieure sur l'intervalle entre deux mesures asynchrones consécutives et une borne supérieure sur le maximum des mesures, une conception MPC économique qui tient compte explicitement des mesures asynchrones et retardées et assure la stabilité en boucle fermée est proposée.

# Conclusion générale

La commande prédictive à horizon fini est une démarche ouverte, facile à implanter en milieu industriel et extensible, sans peine, aux cas multi-variable et nonlinéaire. Si ses principes sont bien respectés, elle est capable d'intégrer précisément tous les résultats des autres techniques de commande. Dans ce travail, il s'agissait :

- d'adopter et d'appliquer la stratégie de commande MPC sans et avec contraintes.
- de voir la supériorité de cette méthode par rapport à la régulation par contrôleurs PID.
- de distinguer cette technique évoluée de commande qui peut facilement s'adapter avec les systèmes non linéaire

Les résultats obtenus avec ce type de commande avancé et facile d'emploi sont très satisfaisants, tout en remarquant que pour les différentes applications, les objectifs prescrits sont atteints.

Comme perspectives, on pourrait envisager l'application d'un autre algorithme MPC aux cas des procédés non-linéaires avec fusion de cette technique de commande avec d'autres, appelées techniques de commande intelligentes comme celles utilisant les le raisonnement flou ou même les algorithmes génétiques.



# BIBLIOGRAPHIE

- [1] Gerald teschl : Ordinary differential equations and dynamical systems. <http://www.mat.univie.ac.at/~gerald/ftp/book-ode/ode>.
- [2] Hahn . Theory and application of lyapunov's direct method. *Prentice Hall.*, 1980.
- [3] Jury . Inners, approach to some problems of system theory. *Automatic Control.*, 1971.
- [4] Zafiriou . Robust model predictive control of processes with hard constraints. *Comput. and Chem. Eng.*, 1990.
- [5] Gevers et Wertz Bitmead. daptive optimal control. *Prentice Hall, USA.*, 1990.
- [6] Stéphane Bonnet. *Approches numériques pour la commande des systèmes dynamiques*. Université de technologie compiegne, 2008.
- [7] Munoz de la Pena D and Christofides PD. Lyapunov-based model predictive control of nonlinear systems subject to data losses. *IEEE Trans Automatic Control*, 2008.
- [8] Gilles DUC. La commande optimale des systèmes dynamiques, chapitre systèmes linéaires. systèmes automatisés. *Hermès Science Publications, Paris, France.*, 2004.
- [9] D. W. Clarke et al. Generalized predictive control—part in the basic algorithm. *Automatica*.
- [10] J. C. Maxwell et al. I. on governors. *Proceedings of the Royal Society of London*.
- [11] J. Richalet et al. Model predictive heuristic control. *Automatica (Journal of IFAC)*.
- [12] Diehl M et Amrit R et Rawlings JB. A lyapunov function for economic optimizing model predictive control. *IEEE Trans. On Automatic Control*.
- [13] David K. ARROWSMITH et Colin M. An introduction to dynamical systems. *Cambridge University Press, New York, NY, USA.*, 1990.

- [14] Rolf FINDEISEN et Frank ALLGÖWER . an introduction to nonlinear model predictive control. *21st Benelux Meeting on Systems and Control, Veldhoven, Holland., 2002.*
- [15] Stephen BOYD et Lieven VANDENBERGHE. Convex optimization. *Cambridge University Press, New York, NY, USA., 2004.*
- [16] Alberto BEMPORAD et Manfred MORARI et Vivek DUA et Efstratios N. PISTIKOPOULOS . The explicit linear quadratic regulator for constrained systems. *Automatica., 2002.*
- [17] Rawlings et Muske. The stability of constrained receding horizon control. *IEEE Trans. On Automatic Control., 1993.*
- [18] Joe S. QIN et Thomas A. BADGEWELL. An overview of industrial model predictive control technology. *Chemical Process Control., 1997.*
- [19] Joe S. QIN et Thomas A. BADGEWELL. A survey of industrial model predictive control technology. *ontrol Engineering Practice., 2002.*
- [20] SAIDA FLILA. Identification optimal et commande prédictive application en génie des procédés. *université Claude Bernard,Lyon1., 2010.*
- [21] W Hahn. *Stability of Motion.* Springer-Verlag, 1967.
- [22] Alberto ISIDORI. Nonlinear control systems. *Springer-Verlag, Secaucus, NJ, USA., 1995.*
- [23] Liu J, Chen X, Munoz de la Pena D, and Christofides PD. Sequential and iterative architectures for distributed model predictive control of nonlinear process systems. *AIChE J., 2010.*
- [24] Luc JAULIN. Représentation d'état pour la modélisation et la commande des systèmes. automatique de base. *Publications, Paris, France., March 2005.*
- [25] H.K Khalil. *Nonlinear Systems.* Macmillan, New York, 3e edition, 2002.
- [26] Jinfeng Liu and Panagiotis D. Christofides. Economic model predictive control of nonlinear process systems using lyapunov techniques. *Wiley Online Library, 2011.*
- [27] Wachter A. Biegler LT. On the implementation of primal-dual interior point filter line search algorithm for large-scale nonlinear programming. *Math Program., 2006.*
- [28] Nafir Nourreddine. *Application de la Commande Prédictive Généralisée Cas- d'un Procédé de l'industrie Pétrochimique.* Université de 20 août 1955 Skikda, 2012.
- [29] Lawrence PERKO. Differential equations and dynamical systems,in applied mathematics. *Springler-Verlag, New York, NY, USA, 2nd édition., 1996.*
- [30] E. et Marchal. Zafiriou. tability of siso quadratic dynamic matrix control with hard output constraints. *AIChE J., 1991.*