كلية العلوم و التقنيات فاس
ⵜⴰⵖⵙⵓⵏⵜ ⵏ ⵜⵎⴰⵙⵙⵏⵉⵏ ⴷ ⵜⵉⴽⵏⵉⴽⵉⵏ
Faculté des Sciences et Techniques de Fès

جامعة سيدي محمد بن عبد الله
Université Sidi Mohamed Ben Abdellah

Licence Sciences et Techniques (LST)

MATHEMATIQUES ET APPLICATIONS

MEMOIRE DE FIN D'ETUDES

Pour l'obtention du Diplôme de Licence Sciences et Techniques

Normes des applications linéaires continues

Présenté par :

- **Boulagouaz Asmae.**

Encadré par :

- **Pr. Ouadghiri Anisse.**

Soutenu le 10 juillet 2021 devant le jury composé de :

- Pr. Hilali Abdelmajid.
- Pr. Ouadghiri Anisse.
- Pr. El Ayadi Rachid.

Stage effectué à Faculté des sciences et technique de Fès

Année Universitaire 2020/2021

FACULTE DES SCIENCES ET TECHNIQUES FES – SAISS
B.P. 2202 – Route d'Imouzzer – FES
☎ 212 (0)5 35 61 16 86 – Fax : 212 (0)5 35 60 82 14
Site web : http://www.fst-usmba.ac.ma

Table des matières

0.1 Remerciement

Je profite par le biais de ce rapport, pour exprimer mes vifs remerciements à toute personne contribuant de prés ou de loin à l'élaboration de ce modeste travail.

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à mon encadrant Monsieur le Professeur Ouadghiri Anisse pour ses conseils, ses précieuses informations et sa disponibilité.

J'adresse aussi mes vifs remerciements aux :
— P.r. Hilali Abdelmajid
— P.r. El Ayadi Rachid
pour avoir bien voulu examiner et juger ce travail.

Je ne laisserai pas cet occasion passer, sans remercier mes parents, qui ont toujours été là pour moi, mes frère et mes soeurs, pour leurs encouragements.

Je remercie Madmoizelle El Baz Asmae, pour son aide et ses précieuses informations.

Introduction

En mathématiques, il existe de nombreuses classes d'applications caractérisées par des propriétés remarquables, les applications linéaires continues en sont un exemple fondamentale.
En effet, les applications linéaires interviennent dans de nombreuses situations :

— En Analyse, elles servent à approximer localement des fonctions.
— En Algèbre, on les utilise pour représenter des équations.
— En Géométrie, elles modélisent les symétries d'un objet...

Le but du présent travail est l'exposé de quelques notions relatives aux applications linéaires continues. Autrement dit, le but est la réponse aux questions suivantes :

— Quand est ce qu'une application linéaire définie sur un espace vectoriel normé de dimension finie ou infinie est continue ?

— Comment on définit et on calcule la norme d'une application linéaire continue ?

Pour ce faire on va introduire d'abord la notion de distance liée aux espaces métriques, ensuite on va aborder les proprités d'une norme qui va donner naissance à la notion de topologie associée à une norme donnée. Et enfin on va donner quelques caractérisations des applications linéaires continues, en particulier les formes linéaires continues, et on va calculer la norme dite "trois barres" de ces dernières.

Chapitre 1

Espaces métriques

Un espace métrique est la donnée d'un ensemble dont les éléments sont considérés comme des points et d'une application qui permet de mesurer si deux points sont "proches" ou "éloignés". Plus précisément on a :

1.1 Distance

Définition 1.1.1 .
Soit E un ensemble. On appelle distance (métrique) définie sur E toute application :

$$d : E \times E \to \mathbb{R}^+,$$

qui vérifie les trois axiomes suivants pour tout $x,y,z \in E$:

1. *$d(x,y)=0 \iff x=y$ (axiome de séparation).*
2. *$d(x,y)=d(y,x)$ (axiome de symétrie).*
3. *$d(x,y)\leq d(x,z)+d(z,y)$ (inégalité triangulaire).*

Un ensemble E muni d'une distance d est appelé espace métrique.
On le note (E,d). Ses éléments sont appelés points.

Remarques 1.1.1 .

1. *L'axiome de séparation exprime le fait que la distance entre un point et lui-même est nulle et c'est le seul cas.*
2. *L'axiome de symétrie exprime que la distance entre le départ et l'arrivée est la même.*
3. *L'inégalité triangulaire peut s'interpréter dans certains cas par la maxime suivante : " le plus court chemin est la ligne droite ".*

Propriétés 1.1.1 .

1. *Soit (X,d) un espace métrique. Soit A une partie de X.*
   On dit que A est un sous espace métrique de X si A est muni de la distance :

$$d_A(x,y) = d(x,y), \ \ \forall\, x,y \in A.$$

   La distance est la restriction de d à $A \times A$, elle s'appelle la distance induite par E sur A.
   En effet, il est claire que d est une distance sur A.

2. *Soient (E_1, d_1) et (E_2, d_2) deux espaces métriques alors l'application :*

$$\begin{array}{rcl} d : (E_1, E_2) \times (E_1, E_2) & \to & \mathbb{R}^+ \\ ((x,y),(x^{'},y^{'})) & \longmapsto & d_1(x,x^{'}) + d_2(y,y^{'}). \end{array}$$

   d est une distance sur $E \times E$.
   En effet, En effet, soit (x,y), $(x^{'},y^{'}),(x^{''},y^{''}) \in E_1 \times E_2$.

   (a) *Axiome de séparation :*

$$\begin{array}{rcl} d((x,y),(x^{'},y^{'})) = 0 & \Longleftrightarrow & d_1(x,x^{'}) + d_2(y,y^{'}) = 0 \\ & \Longleftrightarrow & d_1(x,x^{'}) = 0 \ \ et \ \ d_2(y,y^{'}) = 0 \\ & \Longleftrightarrow & x = x^{'} \ \ et \ \ y = y^{'} \\ & \Longleftrightarrow & (x,y) = (x^{'},y^{'}). \end{array}$$

   (b) *Axiome de symétrie :*

$$\begin{array}{rcl} d((x,y),(x^{'},y^{'})) & = & d_1(x,x^{'}) + d_2(y,y^{'}) \\ & = & d_1(x^{'},x) + d_2(y^{'},y) \\ & = & d((x^{'},y^{'}),(x,y)). \end{array}$$

   (c) *Inégalité triangulaire :*

$$\begin{array}{rcl} d((x,y),(x^{'},y^{'})) & = & d_1(x,x^{'}) + d_2(y,y^{'}) \\ & \leq & d_1(x,x^{''}) + d_1(x^{''},x^{'}) + d_2(y,y^{''}) + d_2(y^{''},y^{'}) \\ & = & d((x,y),(x^{''},y^{''})) + d((x^{''},y^{''}),(x^{'},y^{'})). \end{array}$$

   Donc d est une distance sur$E \times E$

3. *Soit (E,d) un espace métrique, $a \in E$ alors*

$$\begin{array}{rcl} f : E & \to & \mathbb{R}^+ \\ x & \longmapsto & f(x) = d(x,a), \end{array}$$

est continue sur (E,d). En effet,
soit $x, y \in E$ on a :

$$\begin{array}{rcl} |f(x) - f(y)| & = & |d(x,a) - d(y,a)| \\ & \leq & d(x,y). \end{array}$$

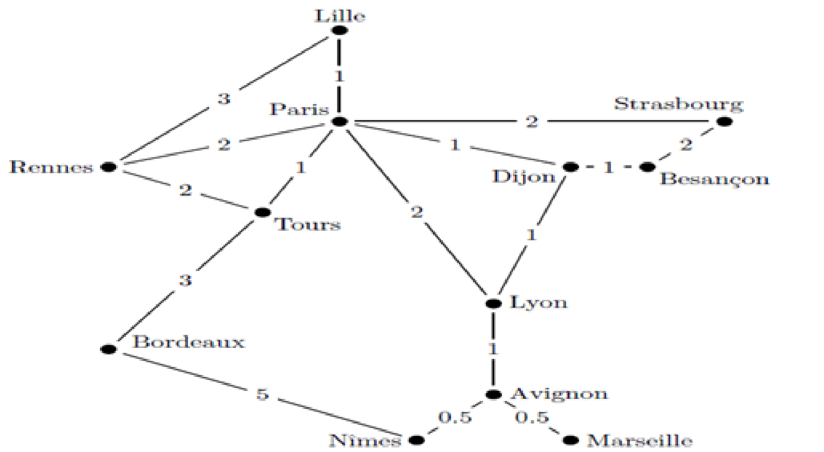
Donc f est lipschitzienne sur E de rapport 1 donc continue sur E.

Exemples 1.1.1 .

1. *$\mathbb{R}$ muni de la valeur absolue $|.|$ est un espace métrique.*
2. *Distance discrète :*
   Soit E un ensemble non vide. Pour $x, y \in E$, on pose :

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & si \;\; x = y \\ 1 & si \;\; x \neq y \end{cases}$$

   d est une distance sur E.
3. *Distance SNCF :*
   NB :SNCF signifie Société Nationale des Chemins de fer Français. Prenons une partie du réseau SNCF que l'on peut modéliser par le graphe suivant :



   Les noeuds modélisent les gares, les arcs les lignes de chemin de fer tandis que les valeurs de ces arcs représentent le temps de trajet en heures (le poids d'un arc).
   On munit ce graphe de la distance du plus court chemin i.e. la distance entre deux gares distincts de ce graphe est la plus petite somme des temps de trajet entre les deux gares prises sur l'ensemble des itinéraires entre ces deux gares.
   On remarquera que Dijon est à la même distance SNCF de Paris que

de Besançon, alors que la distance " à vol d'oiseau " entre Paris et Dijon est plus grande que celle entre Dijon et Besançon. La distance entre deux points est fondamentalement sujette à diverses contraintes qui peuvent nous être imposées.

4. *La distance du maximum dans le plan :*
La pression artérielle se mesure au moyen de deux valeurs. La plus grande des deux est la pression systolique et la plus petite, la pression diastolique. Supposons que la pression artérielle d'un patient varie anormalement et que l'on veuille mesurer la différence entre deux mesures de la pression systolique ou entre les deux mesures correspondantes de la diastolique, afin de déterminer laquelle varie le plus. Une modélisation possible est la suivante :
Le couple (x_1, y_1) *représente la pression artérielle d'un patient à l'instant t=1, et* (x_2, y_2) *représente la pression artérielle du même patient à l'instant t=2, où* x_1 *et* x_2 *sont les deux pressions systolique,* y_1 *et* y_2 *sont les pressions diastolique. Avec* $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}_+^2$

$$\begin{array}{rcl} d_\infty : \mathbb{R}_+^2 \times \mathbb{R}_+^2 & \to & \mathbb{R}_+ \\ ((x_1, y_1), (x_2, y_2)) & \longmapsto & Max(|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|). \end{array}$$

À l'aide de cette modélisation par la distance du maximum dans le plan on va pouvoir contrôler la variation de la pression artérielle d'un patient, c'est à dire, on va savoir si la pression du patient varie normalement ou pas.

Chapitre 2

Espaces vectoriels normées

La classe des espaces vectoriels normés (e.v.n.) est la classe des espaces métriques la plus importante en analyse. Ainsi, le calcul différentiel a pour théatre les espaces de Banach qui sont des e.v.n. particuliers.

2.1 Espace vectoriel

Soit E un ensemble muni d'une loi de composition interne T.

Définition 2.1.1 *(Un groupe).*
(E,T) est dit un groupe si les axiomes suivants sont vérifiés :

1. *La loi T est associative.*
2. *Il existe un élément neutre.*
3. *Tout élément est symétrisable.*

On dit que (G,T) est un groupe commutatif (ou abélien) si la loi est commutative.

Définition 2.1.2 *(Anneau).*
On appelle anneau un ensemble A muni de deux lois de composition internes, une addition et une multiplication telles que :

1. *A est un groupe commutatif pour l'addition.*
2. *La multiplication est associative.*
3. *la multiplication est disributive par rapport à l'addition, c'est à dire que pour tout $x, y, z \in A$, on a :*
   $x(y+z) = xy + xz$ *et* $(y+z)x = yx + zx$.

Si en outre, la multiplication est commutative, on dit que A est un anneau commutatif.
Si A possède un élément neutre pour la multiplication, on note 1 cet élément unité et on dit que $A - \{0\}$ est un anneau unitaire.

Définition 2.1.3 *(Corps).*
Un corps est un anneau unitaire dans lequel tout élément non nul est inversible, c'est à dire que $A - \{0\}$ est un groupe pour la multiplication. Si la multiplication d'un corps est commutative, on dit que le corps est commutatif.

Exemple 2.1.1 .
$(\mathbb{R}, +, .)$, $(\mathbb{C}, +, .)$, $(\mathbb{Q}, +, .)$, sont tous des corps commutatifs.

Définition 2.1.4 *(espace vectoriel).*
On dit que (E,+,.) est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ ou encore (E,+,.) est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel si :

1. *E est un ensemble et $\mathbb{K}$ est un corps (dans la pratique souvent $\mathbb{K}$est l'un des trois corps suivants $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, ou $\mathbb{C}$).*
2. *+ est une loi de composition interne sur E et (E,+) est un groupe abélien.*
3. *. est une lois de composition externe sur E à opérateurs dans $\mathbb{K}$ vérifiant les propriétés suivantes :*
   (a) $(\forall a \in \mathbb{K})(\forall b \in \mathbb{K})(\forall x \in E)$:
   $(a + b).x = (a.x) + (b.x)$ *et* $(ab).x = a.(b.x)$.
   (b) $(\forall a \in \mathbb{K})(\forall x \in E)(\forall y \in E)$:
   $a.(x + y) = (a.x) + (a.y)$.
   (c) $(\forall x \in E) : \quad 1.x = x$.

Les éléments de $\mathbb{K}$ sont appelés les scalaires, les éléments de E les vecteurs.

Exemples 2.1.1 .

1. *Tout corps $\mathbb{K}$ se présente comme un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. L'addition et la multiplication de $\mathbb{K}$ fournissent respectivement l'addition vectorielle et la multiplication par un scalaire.*
2. *L'ensemble $\mathcal{C}_0(X)$ des fonctions continues réelles ou complexes définies sur un intervalle $]a, b[$ est un espace vectoriel (réel ou complexe) munit d'une addition entre ses fonctions et d'une multiplication par un scalaire.*
3. *L'ensembles des fonctions polynomes sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est un espace vectoriel munit d'une addition et d'une multiplication par un scalaire.*

2.2 Base et dimension d'un espace vectoriel

Les bases constituent un outil pratique : elles permettent d'engendrer un espace vectoriel E (au moyen des combinaisons linéaires) et contiennent un nombre de vecteurs aussi petit que possible.
La dimension est un invariant associé à tout espace vectoriel E sur un corps $\mathbb{K}$.
La dimension de E est le cardinal commun à toutes ses bases. Ce nombre est noté dim(E).
Si E admet une partie génératrice finie, alors sa dimension est finie et elle vaut le nombre de vecteurs constituant une base de E.

Définition 2.2.1 .*(Famille liée)*
Une famille $\mathcal{F}$=$\{V_1, ..., V_n\}$ d'un espace vectoriel E sur un corps $\mathbb{K}$ est dite libre, et ses vecteurs sont dits linéairement indépendants, lorsque :
$\forall\ (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, ..., \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$, *si*
$\lambda_1 V_1 + V_2 + ... + \lambda_n V_n = 0$, *alors,* $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = 0$.
Une famille qui n'est pas libre est dite liée.

Définition 2.2.2 .*(Famille génératrice)*
Une famille $\mathcal{F}$=$\{V_1, ..., V_n\}$ d'un espace vectoriel E sur un corps $\mathbb{K}$ est dite génératrice lorsque tout vecteur V de E est combinaison linéaire de ses vecteurs.

Définition 2.2.3 .*(Base)*
Une famille $\mathcal{F}$=$\{V_1, ..., V_n\}$ d'un espace vectoriel E sur un corps $\mathbb{K}$ est dite base de E lorsqu'elle est libre et génératrice.

2.3 Espaces vectoriels de dimension finie.

Théorème 2.3.1 .
Toutes les bases d'un espace vectoriel E de dimension finie ont le même nombre d'éléments appelé dimension de l'espace E.

Définition 2.3.1 .
Un $\mathbb{K}$-espace vectoriel est dit de dimension finie sur $\mathbb{K}$ s'il admet une base finie.

Exemples 2.3.1 .

1. $\mathbb{R}^n$ *est un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel de dimension n.*

2. $\mathbb{R}[X]$ *l'espace vectoriel des polynomes à coefficients réelles est un* $\mathbb{R}$-*espace vectoriel de dimension infinie.*
3. *l'espace vectoriel des fonctions continues de [0,1] à valeurs dans* $\mathbb{R}$ *est un* $\mathbb{R}$-*espace vectoriel de dimension infinie.*

2.4 Norme

Définition 2.4.1 *(Norme).*
Soit E *un espace vectoriel sur le corps* $\mathbb{K}$ *(*$\mathbb{K}$=$\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$*).*
Une norme est une application de E *à valeurs positives et qui vérifie les trois axiomes suivants pour tout* $x, y \in E$ *et* $\lambda \in \mathbb{R}$ *:*

1. $||x|| = 0 \iff x = 0$ *(axiome de séparation).*
2. $||\lambda.x|| = |\lambda|||x||$ *(axiome d'homogénéité).*
3. $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$ *(inégalité triangulaire).*

Le couple $(E, ||.||)$ *est appelé espace vectoriel normé (en abrégé e.v.n.) sur* $\mathbb{K}$.

Remarque 2.4.1 .
E est un espace vectoriel normé veut dire que E est un ensemble de points (les vecteurs), muni d'une addition et d'une multiplication qui permet de former des combinaisons linéaires qui restent dans l'ensemble. On donne ainsi un sens à des expressions de la forme $(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + ... + \lambda_n x_n)$ *les* λ_i, *sont des scalaires et les* x_i *des vecteurs de E. Ensuite on équipe cet espace vectoriel d'une norme qui rend compte de la taille des vecteurs de E.*

Propriétés 2.4.1 .

1. *Pour tout* $x, y \in E$ *on a :*
   $|||x|| - ||y||| \leq ||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$,
   en effet, soit $x, y \in E$
   $$||x|| = ||x + y - y|| \leq ||x + y|| + ||y||,$$
   ceci implique :
   $$||x|| - ||y|| \leq ||x + y||$$
   par symétrie, et en échangeant le rôle de x et de y on obtient :
   $$||y|| - ||x|| \leq ||y + x||,$$
   D'où on obtient :
   $$|||y|| - ||x||| \leq ||y + x||,$$

la deuxième inégalité provient de l'inégalité triangulaire (3) de la définition de la norme.

2. *La norme est sous-linéaire, c'est à dire qu'elle vérifie la propriété suivante :*

$$\forall\,(\lambda,x,y)\in\mathbb{K}\times\mathbb{E}^2\ , \qquad ||\lambda.x+y||\leq|\lambda|||x||+||y||.$$

qui se généralise par récurrence en :

$$||\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+....+\lambda_nx_n||\leq|\lambda_1|||x_1||+|\lambda_2|||x_2||+...+|\lambda_n|||x_n||.$$

Exemples 2.4.1 .

1. *Normes sur* $\mathbb{K}^n$ *:*
   Soit E=$\mathbb{K}^n$ *avec* $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$.
   Pour $x=(x_k)_{1\leq k\leq n}$ *, on pose :*
   (a) $||x||_1=\sum_{k=0}^n|x_k|$.
   (b) $||x||_2=(\sum_{k=0}^n|x_k|^2)^{1/2}$.
   (c) $||x||_\infty=Sup\{|x_k|,1\leq k\leq n\}$. $n\in\mathbb{N}$
   (d) $||x||_p=(\sum_{k=0}^n|x_k|^p)^{1/p}$ *avec* $p>1$.

   En effet,

   (a) *Soit* $x,y\in\mathbb{K}^n$, *et* $\lambda\in\mathbb{R}$.
   Soit $||.||_1$ *la norme définit sur* $\mathbb{K}$ *par :*
   $||x||_1=\sum_{k=0}^n|x_k|$,
   montrons que $||.||_1$ *est une norme sur* $\mathbb{K}^n$.
   En effet,
   i. *Axiome de séparation :*

$$\begin{aligned}||x||_1=0 &\iff \sum_{k=0}^n|x_k|=0\\ &\iff |x_k|=0\quad\forall\ k\in\{1,2,...,n\}\\ &\iff x_k=0\quad\forall\ k\in\{1,2,...,n\}\\ &\iff x=0.\end{aligned}$$

ii. Axiome d'homogénéité :

$$\begin{aligned}||\lambda.x|| &= \sum_{k=0}^{n}|\lambda.x_k| \\ &= \sum_{k=0}^{n}|\lambda|.|x_k| \\ &= |\lambda|.\sum_{k=0}^{n}|x_k| \\ &= |\lambda|.||x||_1.\end{aligned}$$

iii. Inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned}||x+y|| &= \sum_{k=0}^{n}|x_k+y_k| \\ &\leq \sum_{k=0}^{n}|x_k| + \sum_{k=0}^{n}|y_k| \\ &= ||x||_1 + ||y||_1.\end{aligned}$$

D'où $||.||_1$ *est une norme sur* $\mathbb{K}^n$

(b) *sa démonstration sera incluse dans la démonstration de la norme p.*

(c) $||x||_\infty = Sup\{|x_k|, 1 \leq k \leq n\}$ *est une norme sur E.*
En effet, soit $x, y \in E$ *et* $\lambda \in \mathbb{R}$*, avec :*

$$x = (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \text{ et } y = (y_k)_{k\in\mathbb{N}}.$$

i. Axiome de séparation :

$$\begin{aligned}||x||_\infty = 0 &\iff Sup\{|x_k|, 1 \leq k \leq n\} = 0 \\ &\iff |x_k| = 0 \quad \forall\ k\ \in \{1,2,...,n\} \\ &\iff x_k = 0 \quad \forall\ k\ \in \{1,2,...,n\} \\ &\iff x = 0.\end{aligned}$$

ii. Axiome d'homogénéité :

$$\begin{aligned}||\lambda.x||_\infty &= Sup\{|\lambda.x_k|, 1 \leq k \leq n\} \\ &= Sup\{|\lambda|.|x_k|, 1 \leq k \leq n\} \\ &= |\lambda|.Sup\{|x_k|, 1 \leq k \leq n\} \\ &= |\lambda|.||x||_\infty.\end{aligned}$$

iii. *Inégalité triangulaire :*

$$\begin{aligned}
|x_k + y_k| &\leq |x_k| + |y_k| \ \ \forall\, k \ \in \{1, 2, ..., n\} \\
|x_k + y_k| &\leq Sup\,\{|x_k|, 1 \leq k \leq n\} + Sup\,\{|y_k|, 1 \leq k \leq n\} \\
Sup\,\{|x_k + y_k|, 1 \leq k \leq n\} &\leq Sup\,\{|x_k|, 1 \leq k \leq n\} + Sup\,\{|y_k|, 1 \leq k \leq n\}\,.
\end{aligned}$$

ce qui est équivalent à :

$$||x + y||_\infty \leq ||x||_\infty + ||y||_\infty.$$

Donc $||.||_\infty$ *est une norme sur* $\mathbb{K}^n$.

(d) $(\sum_{k=0}^{n} |x_k|^p)^{1/p}$ *est une norme sur* $\mathbb{K}^n$.
En effet, soit $x, y \in E$ *et* $\lambda \in \mathbb{R}$*, avec :*

$$x = (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \ \text{et} \ y = (y_k)_{k\in\mathbb{N}}.$$

i. *Axiome de séparation :*

$$\begin{aligned}
||x||_p = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad (\sum_{k=0}^{n} |x_k|^p)^{1/p} = 0. \\
&\Longleftrightarrow \quad \sum_{k=0}^{n} |x_k|^p = 0. \\
&\Longleftrightarrow \quad |x_k|^p = 0 \quad \forall\, k \ \in \{1, 2, ..., n\}\,. \\
&\Longleftrightarrow \quad |x_k| = 0 \quad \forall\, k \ \in \{1, 2, ..., n\}\,. \\
&\Longleftrightarrow \quad x_k = 0 \quad \forall\, k \ \in \{1, 2, ..., n\}\,. \\
&\Longleftrightarrow \quad x = 0.
\end{aligned}$$

ii. *Axiome d'homogénéité :*

$$\begin{aligned}
||\lambda.x||_p &= (\sum_{i=0}^{n} |\lambda.x_k|^p)^{1/p}. \\
&= (\sum_{i=0}^{n} |\lambda|^p.|x_k|^p)^{1/p}. \\
&= |\lambda|.(\sum_{k=0}^{n} x_k|^p)^{1/p}. \\
&= |\lambda|.||x||_\infty.
\end{aligned}$$

iii. *L'inégalité triangulaire pour cette norme s'appelle l'inégalitée de Minkowski :*

$(\sum_{k=0}^{n} |x_k + y_k|^p)^{1/p} \leq (\sum_{k=0}^{n} |x_k|^p)^{1/p} + (\sum_{k=0}^{n} |y_k|^p)^{1/p}.$

Cette inégalité est fausse si p<1, et elle est évidente si p=1.
Supposons p>1 :
L'inégalité de Minkowski découle de l'inégalité de Hôlder suivante :

$$\sum_{k=1}^{n} |x_k.y_k|^p \leq (\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p)^{1/p}.(\sum_{k=0=1}^{n} |y_k|^q)^{1/q}.$$

ou q est le conjugué de p :

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \quad i.e. \quad q = \frac{p}{p-1},$$

(p>1$\Rightarrow q > 1)$

Preuve de l'inégalité de Minkowski :
On a

$$\sum_{k=0}^{n} |x_k + y_k|^p \leq \sum_{k=1}^{n} (|x_k| + |y_k|)^p.$$

et

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} (|x_k| + |y_k|)^p &= \sum_{k=1}^{n} (|x_k| + |y_k|)^{p-1}(|x_k| + |y_k|) \\
&= \sum_{k=1}^{n} |x_k|(|x_k| + |y_k|)^{p-1} + \sum_{k=1}^{n} |y_k|(|x_k| + |y_k|)^{p-1}.
\end{aligned}$$

Et à l'aide de l'inégalité de Hôlder, on obtient :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}(|x_k + y_k|)^p &\leq \sum_{k=1}^{n}(|x_k|^p)^{1/p}(\sum_{k=1}^{n} (|x_k| + |y_k|)^{(p-1)q})^{1/q} \\
&+ (\sum_{k=1}^{n}(|y_k|^p)^{1/p}(\sum_{k=1}^{n} (|x_k| + |y_k|)^{(p-1)q})^{1/q}.
\end{aligned}$$

or (p-1)q=p

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}(|x_k + y_k|)^p &\leq \sum_{k=1}^{n}(|x_k|^p)^{1/p}(\sum_{k=1}^{n} (|x_k| + |y_k|)^p)^{1/q} \\
&+ (\sum_{k=1}^{n}(|y_k|^p)^{1/p}(\sum_{k=1}^{n} (|x_k| + |y_k|)^p)^{1/q} \\
&= ((\sum_{k=1}^{n}(|x_k|^p)^{1/p} + (\sum_{k=1}^{n}(|y_k|^p)^{1/p}))(\sum_{k=1}^{n} (|x_k| + |y_k|)^p)^{1/q})
\end{aligned}$$

D'ou,
$(\sum_{k=1}^{n}(|x_k|+|y_k|)^p)^{1-1/q=1/p} \leq (\sum_{k=1}^{n}(|x_k|^p)^{1/p}+(\sum_{k=1}^{n}(|y_k|^p)^{1/p})$.
i.e.

$$||x+y||_p \leq ||x||_p + ||y||_p.$$

2. *Norme hilbertienne :*
Soit E *un espace vectoriel sur* $\mathbb{K}$, *par exemple* $E = \mathbb{R}^n$. *Un produit scalaire sur* E *est une application, notée* $< .,. >$, *définie de* $E \times E$ *dans* $\mathbb{R}^+$, *vérifiant :*
pour tout $x, y, z \in E$ *et* $\lambda \in \mathbb{R}$:
   (a) $< x, y >=< y, x >$ *(symétrie).*
   (b) $< x+z, y >=< x, y > + < z, y >$
   (c) $< \lambda.x, y >= \lambda. < x, y >$
   (d) $< x, x >= 0 \iff x = 0$ *et* $< x, x >\geq 0$ *(positivité).*
   Un espace préhilbertien est défini comme un espace vectoriel réel ou complexe muni d'un produit scalaire .

   Dans un espace préhilbertien réel E *on définit une norme :*

$$\begin{array}{rcl} ||.|| : E & \rightarrow & \mathbb{R}^+ \\ x & \longmapsto & ||x|| = \sqrt[2]{< x, x >}. \end{array}$$

   qui est une norme sur E.
   Cette norme est la norme hilbertienne associée au produit scalaire $< .,. >$.

En effet, soit $x, y \in E$ *et* $\lambda \in \mathbb{R}$ *:*
   (a) *Axiome de séparation :*

$$\begin{array}{rcl} ||x|| = 0 & \iff & \sqrt[2]{< x, x >} = 0 \\ & \iff & < x, x >= 0 \\ & \iff & x = 0. \end{array}$$

   (b) *Axiome d'homogénéité :*

$$\begin{array}{rcl} ||\lambda.x|| & = & \sqrt[2]{< \lambda.x, \lambda.x >} \\ & = & \sqrt[2]{\lambda^2 < x, x >} \\ & = & |\lambda|\sqrt[2]{< x, x >} \\ & = & |\lambda| \; ||x||. \end{array}$$

(c) *Inégalité triangulaire :*

$$||x+y|| \leq ||x|| + ||y||$$

découle de l'inégalité de Cauchy -Schwartz suivante :

$$| < x, y > | \leq ||x||.||y||.$$

En effet, soit $x, y \in E$,

$$\begin{aligned} ||x+y||^2 &= < x+y, x+y > \\ &= < x, x > +2 < x, y > + < y, y > \\ &\leq ||x||^2 + 2||x||\ ||y|| + ||y||^2 \\ &= [\ ||x|| + ||y||\ ]^2. \end{aligned}$$

D'où :

$$||x+y|| \leq ||x|| + ||y|| \quad \forall\, x, y \in E.$$

Preuve de l'inégalité de Cauchy-Schwartz :

$$\forall (x, y) \in E^2 \quad | < x, y > | \leq ||x||\ ||y||.$$

En effet, soit $(x, y) \in E^2$ *et* $\lambda \in \mathbb{R}$, *on a :*

$$\begin{aligned} ||x + \lambda\, x||^2 &= < x + \lambda\, y, x + \lambda y > \\ &= < x, x > +2\lambda < x, y > +\lambda^2 < y, y > \end{aligned}$$

qui est un polynôme positif en λ *donc son discriminant est négatif, c'est à dire :*

$$\begin{aligned} \delta \leq 0 &\iff 4 < x, y >^2 - 4 < x, x >< y, y > \leq 0 \\ &\iff 4 < x, y >^2 - 4||x||^2.||y||^2 \leq 0 \\ &\iff < x, y > \leq ||x||\ ||y||, \quad \forall (x, y, \lambda) \in E^2 \times \mathbb{R}. \end{aligned}$$

3. *Normes sur un espace vectoriel des fonctions continues :*
   Soit $E = C([0,1])$ *l'espace vectoriel des fonctions continues de[0,1] à valeurs dans* $\mathbb{R}$, *qui est un espace vectoriel normé pour chacune des normes suivantes :*
   Avec, $f \in E$, *et* $x \in [0,1]$ *:*
   (a) $||f||_1 = \int_0^1 |f(x)|\,\mathrm{d}x$.
   (b) $||f||_2 = (\int_0^1 |f(x)|^2\,\mathrm{d}x)^{1/2}$.
   (c) $||f||_p = (\int_0^1 |f(x)|^p\,\mathrm{d}x)^{1/p}$, *où* p *est un réel fixé* $p \geq 1$.
   (d) $||f||_\infty = \sup_{x\in[0,1]}|f(x)| \quad (norme\ de\ la\ convergence\ uniforme)$.
   Ces démonstrations sont analogues à celles de l'exemple 2.4.1.1.

Chapitre 3

La relation entre norme et distance

Proposition 3.0.1 .
Tout e.v.n. $(E, ||.||)$ sur $\mathbb{K}$, est un espace métrique pour la distance canonique associée à la norme $||.||$:

$$d(x,y) = ||x-y||, \ \ \forall (x,y) \in E^2.$$

Démonstration 3.0.1 .
En effet, soit $(x,y,z) \in E^3$

1. *Axiome de séparation :*

$$\begin{aligned} d(x,y) = 0 &\iff ||x-y|| = 0 \\ &\iff x - y = 0 \\ &\iff x = y. \end{aligned}$$

2. *Axiome de symétrie :*

$$\begin{aligned} d(x,y) &= ||x-y|| \\ &= ||y-x|| \\ &= d(y,x). \end{aligned}$$

3. *Inégalité triangulaire :*

$$\begin{aligned} d(x,y) &= ||x-y|| \\ &= ||x-z+z-y|| \\ &\leq ||x-z|| + ||z-y|| \\ &= d(x,z) + d(z,y). \end{aligned}$$

Donc (E,d) est un espace métrique.

Remarque 3.0.1 .
Dans un e.v.n. E on dispose d'une addition entre les éléments de E et d'une multiplication par un scalaire, ce qui n'est pas toujours le cas pour un espace métrique. Donc pour dire qu'une distance provient d'une norme, cette distance doit vérifier en plus, pour tout $(x, y, z, \lambda) \in E^3 \times \mathbb{K}$:

1. $d(x+z, y+z) = d(x, y)$ *(invariance par translation).*
2. $d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| d(x, y)$ *(homogénéité positive).*

Ils existent donc des distances sur des espaces vectoriels qui ne proviennt pas des normes en voici quelques exemples :

Contre-exemples 3.0.1 .

1. *Soit l'application d :*

$$\begin{array}{rcl} d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^+ \\ (x, y) & \longmapsto & d(x, y) = |\dfrac{|x|}{1+|x|} - \dfrac{|y|}{1+|y|}| \end{array}$$

qui est une distance sur $\mathbb{R}$, mais d ne provient d'aucune norme sur $\mathbb{R}^2$.

En effet , soit $(x, y, z, \lambda) \in \mathbb{R}^4$,

(a) *Axiome de séparation :*

$$\begin{aligned} d(x, y) = 0 & \iff |\frac{|x|}{1+|x|} - \frac{|y|}{1+|y|}| = 0 \\ & \iff \frac{|x|}{1+|x|} - \frac{|y|}{1+|y|} = 0 \\ & \iff \frac{|x|}{1+|x|} = \frac{|y|}{1+|y|} \\ & \iff x = y. \end{aligned}$$

(b) *Axiome de symétrie :*

$$\begin{aligned} d(x, y) & = |\frac{|x|}{1+|x|} - \frac{|y|}{1+|y|}| \\ & = |\frac{|y|}{1+|y|} - \frac{|x|}{1+|x|}| \\ & = d(y, x). \end{aligned}$$

(c) *Inégalité triangulaire :*

$$\begin{aligned}
d(x,y) &= |\frac{|x|}{1+|x|} - \frac{|y|}{1+|y|}| \\
&\leq |\frac{|x|}{1+|x|} - \frac{|z|}{1+|y|}| + |\frac{|z|}{1+|z|} - \frac{|y|}{1+|y|}| \\
&= d(x,z) + d(z,y)
\end{aligned}$$

donc,

$$d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y).$$

D'ou d est une distance sur $\mathbb{R}^2$ mais d ne provient d'aucune norme sur $\mathbb{R}^2$,car d ne vérifie pas la propriété de l'homogénéité positive,
En effet, soit $(x,y,z,\lambda) \in \mathbb{R}^4$:

$$\begin{aligned}
d(\lambda x, \lambda y) &= |\frac{|\lambda x|}{1+|\lambda x|} - \frac{|\lambda y|}{1+|\lambda y|}| \\
&= |\lambda| \, ||\frac{|x|}{1+|\lambda x|} - \frac{|y|}{1+|\lambda y|}| \\
&\neq |\lambda| d(x,y).
\end{aligned}$$

2. *Soit $\mathcal{S}$ l'espace vectoriel des suites réelles, muni de la distance suivante :*

$$d(x,y) = \textstyle\sum_{n\geq 1}(\frac{1}{2^n}\frac{|x_n-y_n|}{1+|x_n-y_n|}),$$

Pour tout $x, y \in \mathcal{S}$ avec $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
(E,d) est un espace métrique.
En effet, soit $(x,y,z,\lambda) \in \mathbb{S}^3 \times \mathbb{R}$, soit $n \in \mathbb{N}$:

(a) *Axiome de séparation :*

$$\begin{aligned}
d(x,y) = 0 &\iff \sum_{n\geq 1}(\frac{1}{2^n}\frac{|x_n-y_n|}{1+|x_n-y_n|}) = 0 \\
&\iff \frac{1}{2^n}\frac{|x_n-y_n|}{1+|x_n-y_n|} = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \\
&\iff |x_n - y_n| = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \\
&\iff x_n - y_n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \\
&\iff x_n = y_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \\
&\iff x = y.
\end{aligned}$$

(b) *Axiome de symétrie :*

$$\begin{aligned} d(x,y) &= \sum_{n\geq 1}\left(\frac{1}{2^n}\frac{|x_n-y_n|}{1+|x_n-y_n|}\right) \\ &= \sum_{n\geq 1}\left(\frac{1}{2^n}\frac{|y_n-x_n|}{1+|y_n-x_n|}\right) \\ &= d(y,x). \end{aligned}$$

(c) *Pour démontrer l'inégalité triangulaire de la distance d, on utilise le fait que :*

$$\begin{aligned} f:\mathbb{R}_+ &\to \mathbb{R}_+ \\ t &\longmapsto \frac{t}{1+t} \end{aligned}$$

est une application strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$*.*
En effet ,
$|.|$*est une distance sur* $\mathcal{S}$ *donc,* $\forall\ x,y,z\in\mathbb{S}$ *et* $n\in\mathbb{N}$:

$$|x_n-y_n|\leq|x_n-y_n|+|z_n-y_n|.$$

f *est une application croissante sur* $\mathbb{R}^+$ *donc ,*

$$\begin{aligned} \frac{|x_n-y_n|}{1+|x_n-y_n} &\leq \frac{|x_n-z_n|+|z_n-y_n|}{1+|x_n-z_n|+|z_n-y_n|} \\ \Rightarrow \frac{|x_n-y_n|}{1+|x_n-y_n} &\leq \frac{|x_n-z_n|}{1+|x_n-z_n|+|z_n-y_n|}+\frac{|z_n-y_n|}{1+|x_n-z_n|+|z_n-y_n|} \\ \Rightarrow \frac{|x_n-y_n|}{1+|x_n-y_n} &\leq \frac{|x_n-z_n|}{1+|x_n-z_n|}+\frac{|z_n-y_n|}{1+|z_n-y_n|} \\ \Rightarrow \frac{1}{2^n}\frac{|x_n-y_n|}{1+|x_n-y_n|} &\leq \frac{1}{2^n}\frac{|x_n-z_n|}{1+|x_n-z_n|}+\frac{1}{2^n}\frac{|z_n-y_n|}{1+|z_n-y_n|} \\ \Rightarrow \sum_{n\geq 1}\left(\frac{1}{2^n}\frac{|x_n-y_n|}{1+|x_n-y_n|}\right) &\leq \sum_{n\geq 1}\left(\frac{1}{2^n}\frac{|x_n-z_n|}{1+|x_n-z_n|}\right)+\sum_{n\geq 1}\left(\frac{1}{2^n}\frac{|z_n-y_n|}{1+|z_n-y_n|}\right) \\ \Rightarrow d(x,y) &\leq d(x,z)+d(z,y). \end{aligned}$$

D'où, d est une distance sur $\mathbb{S}$*, qui ne provient d'aucune norme car sinon, d doit vérifier la propriété d'homogénéité positive .*

Or, soit $x, y \in \mathbb{S}$ *et* $\lambda \in \mathbb{R}$ *:*

$$\begin{aligned} d(\lambda x, \lambda y) &= \sum_{n\geq 1}(\frac{1}{2^n}\frac{|\lambda x_n - \lambda y_n|}{1+|\lambda x_n - \lambda y_n|}) \\ \Rightarrow d(x,y) &= \sum_{n\geq 1}(\frac{1}{2^n}\frac{|\lambda||x_n - y_n|}{1+|\lambda||z_n - y_n|}) \\ \Rightarrow d(\lambda x, \lambda y) &\neq |\lambda| d(x,y). \end{aligned}$$

.

Chapitre 4

Topologie associée à une norme

Le but de ce chapitre est de rappeler les bases du cours de topologie qui vont nous permettre de démontrer les parties restantes de ce document.
On introduit donc tout d'abord les boules ce qui permet de définir les ouverts et donc la topologie associé au norme.
On s'intéresse ensuite à la convergence des suites
Une des notions clé est la notion d'espace complet, ce qui permet d'énoncer des théorèmes fondamentaux en analyse.
Dans tout ce chapitre (E,$||.||$) désigne un espace vectoriel normé sur un corps $\mathbb{K}$ où $\mathbb{K}$= $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

4.1 Boules et sphères

Définition 4.1.1 .
Soit$(E, ||.||)$ *un e.v.n. Pour tout* $a \in E$ *et pour tout* $r \in \mathbb{R}^*$*, on appelle :*

1. *Boule ouverte de centre a et de rayon r, l'ensemble,*
$$B(a, r) = \{x \in E \ / \ \ ||x - a|| < r\} .$$
2. *Boule fermé de centre a et de rayon r, l'ensemble,*
$$B_f = \{x \in E \ / \ \ ||x - a|| \leq r\}.$$
3. *Sphère de centre a et de rayon r, l'ensemble,*
$$S = \{x \in E \ / \ \ ||x - a|| = r\}.$$

Remarque 4.1.1 .
Dans un e.v.n. $(E, ||.||)$*, lorsque* $a = 0$ *et* $r = 1$*, on parle de boule unité ouverte, boule unité fermée et sphère unitée.*

4.2 Voisinages et ouvets

Définition 4.2.1 .

1. *Soit* $x \in E$ *et* V *une partie de* E.
   On dit que V *est un voisinage de* x *si :*
   $$\exists r > 0 \text{ tel que } B(x,r) \subset V.$$
2. *On dit qu'une partie* U *de* E *est un ouvert s'il est voisinage de chacun des points. Autrement dit,* U *est ouvert de* E *si :*
   $$\forall x \in U \ \ \exists r > 0 \text{ tel que } B(x,r) \subset U.$$
3. *On dit qu'une partie* F *de* E *est un fermé de* E *si son complémentaire est un ouvert de* E.
4. $\overline{A}$*=l'adhérence de* A.
   $$x \in \overline{A} \iff \forall v \in V(x), \ \ v \cap A \neq \emptyset.$$
5. $\mathring{A}$*= l'intérieur de* A *:*
   $$x \in \mathring{A} \iff \exists \varepsilon > 0, \ B(x,\varepsilon) \subseteq A.$$
6. *Fr(A)= frontière de* A *:*
   $$x \in Fr(A) \iff \forall \varepsilon > 0, \ B(x,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset, et \ B(x,\varepsilon) \cap A^c \neq \emptyset.$$

4.3 Suites

Définition 4.3.1 .
Une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *d'un e.v.n.* E *est dite convergente vers* $x \in E$ *si pour chaque* $\varepsilon > 0$*, il existe un entier* $N \in \mathbb{N}$ *tel que tous les entiers* $n \geq N$ *vérifient* $||x_n - x||_E \leq \varepsilon$ *i.e. :*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N \in \mathbb{N}, \ n \geq N \Longrightarrow ||x_n - x||_E \leq \varepsilon.$$

Définition 4.3.2 *(Suite de Cauchy).*
Une suite d'un espace vectoriel normé $(E, ||.||_E)$ *est dite de Cauchy si pour chaque* $\varepsilon > 0$*, il existe un entier naturel* N *tel que* $||x_n - x_m||_E < \varepsilon$ *dès que* $n, m \geq N$.
C'est équivalent à dire que :

$$\forall \varepsilon > 0, \ N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall p \in \mathbb{N}, \ \ n \geq N \Rightarrow ||x_n - x_{n+p}||_E \leq \varepsilon.$$

Proposition 4.3.1 .
Toute suite convergente de $(E, ||.||_E)$ *est de Cauchy.*

Démonstration 4.3.1 .
Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite convergente dans* $(E, ||.||_E)$ *et* $lim_{n\to+\infty}x_n = l$. *Donc,*

$$\forall\varepsilon > 0, \ \ \exists N \in \mathbb{N} \ \ tel\ que\ n \geq N \ \ ||x_n - l||_E < \tfrac{\varepsilon}{2}.$$

Si $n, m \geq N$, *l'inégalité triangulaire de la norme* $||.||_E$ *donne :*

$$||x_n - x_m||_E \leq ||x_n - l||_E + ||l - x_m||_E < \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

et donc $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite de Cauchy.*

4.4 Caractérisation séquentielle des fermés

Proposition 4.4.1 .
Une partie F *est un fermé de* $(E, ||.||)$ *si et seulement si pour toute suite convergente* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *d'éléments de* F, *sa limite* $x = lim\ x_n$ *appartient à* F.

Démonstration 4.4.1 .
Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in F$ *telle que* $limx_n = x$, *montrons que* $x \in F$.
Par l'absurde, si $x \notin F$ *i.e.* $x \in C_E^F$, *et comme* F *est fermé alors* C_E^F *est un ouvert.*
Donc,$\exists r > 0/B(x, r) \subset C_E^F \iff B(x, r) \cap F = \emptyset$.
Or $limx_n = x$, *donc pour* $\varepsilon = r > 0$:
$\exists n_0 \in \mathbb{N}/n \geq n_0 \Rightarrow x_n \in B(x, r)$,
mais comme $x_n \in F$ *on aura :*
$x_n \in B(x, r) \cap F \Rightarrow B(x, r) \cap F = \emptyset$ *et* $B(x, r) \cap F \neq \emptyset$, *ce qui est absurde.*
Supposons que $\forall(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in F$ *telle que* $limx_n = x$ *alors* x *et montrons par contrapposée que* F *est un fermé i.e.* C_E^F *est un ouvert.*
Supposons que C_E^F *n'est pas un ouvert de E, ce qui veut dire que :*

$$\exists \in C_E^F/\forall r > 0, B(y, r) \not\subset C_E^F \ \ i.e.\ B(y, r) \cap F \neq \emptyset.$$

En particulier et pour $r = \frac{1}{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}, B(y, \frac{1}{n+1}) \cap F \neq \emptyset$
donc $\exists(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (B(y, \frac{1}{1+n}) \cap F)$.
D'où une suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *telle que :* $y_n \in F$ *et* $y_n \in B(y, \frac{1}{1+n}) \Rightarrow ||y_n - y|| \leq \frac{1}{1+n}$
donc $limy_n = y$ *ce qui contredit l'hypothèse.*

4.5 Normes équivalentes

Définition 4.5.1 .
Soit E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel, puis* N *et* N' *deux normes sur* E.
On dit que N *est équivalente à* N' *si et seulement si ils existent deux réels strictement positifs* α *et* β *tels que :*

$$\forall x \in E, \quad \alpha N(x) \leq N^{'}(x) \leq \beta N(x).$$

Théorème 4.5.1 *.*
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
La relation "$N^{'}$ est équivalente à N" est une relation d'équivalence sur l'ensemble des normes de E.

Démonstration 4.5.1 *.*
Notons R la relation considérée .

1. *Réflexivité :*
   Soit N une norme sur E, soit $\alpha = \beta = 1$,
   α et β sont deux réels strictement positifs tels que pour tout x de E, on ait :
   $$\alpha N(x) \leq N(x) \leq \beta N(x).$$
   Donc N est équivalente à N.
   Donc R est reflexive.
2. *Symétrie :*
   Soient N et $N^{'}$ deux normes sur E. Supposons que $N^{'}$soit équivalente à N. Il existe alors deux réels strictement positifs α et β tels que pour tout x de E,
   $$\alpha N(x) \leq N^{'} \leq \beta N(x),$$
   ceci implique que pour tout x de E,
   $$\frac{1}{\beta} N^{'} \leq N(x) \leq \frac{1}{\alpha} N^{'}.$$
   Puisque$\frac{1}{\beta}$ et $\frac{1}{\alpha}$ sont deux réels positifs, N est équivalente à $N^{'}$. Ceci montre que R est symétrique.
3. *Transitivité :*
   Soient N, $N^{'}$ et $N^{''}$ trois normes sur E.
   Supposons $N^{'}$ équivalente à N et $N^{''}$ équivalente à $N^{'}$. Il existe alors quatres réels strictement positifs $\alpha, \beta, \alpha^{'}$ et $\beta^{'}$ tels que pour tout x de E,
   $$\alpha N(x) \leq N(x)^{'} \leq \beta N(x) \text{ et } \alpha^{'} N(x)^{'} \leq N(x)^{''} \leq \beta^{'} N(x)^{'}$$
   ceci implique, pour tout $x \in E$, on a :
   $$\alpha\alpha^{'} N(x) \leq \alpha^{'} N(x)^{'} \leq N(x)^{''} \leq \beta^{'} N(x)^{'} \leq \beta\beta^{'} N(x).$$
   Puisque $\alpha\alpha^{'}$ et $\beta\beta^{'}$sont deux réels strictement positifs, $N(x)^{''}$est équivalente à N. Ceci montre que R est transitive.
   On a montré que R est symétrique, réflexive et transitive, donc une relation d'équivalence sur l'ensemble des normes sur E.

lemme 4.5.1 *.*
Soit E un espace vectoriel, si E est de dimension finie, alors toute norme N est une application continue de $(E, ||.||_\infty)$ *dans* $(\mathbb{R}, |.|)$.

Démonstration 4.5.2 *.*
Pour montrer que N est une application continue de$(E, ||.||_\infty)$ *vers* $(\mathbb{R}, |.|)$.
On va démonter que N est une application Lipschitzienne de $(E, ||.||_\infty)$ *vers* $(\mathbb{R}, |.|)$.
Soit $(e_1, e, ..., e_n)$ *une base de E et N une norme quelconque sur E.*
Munissons E de la norme $||.||_\infty$*, soit* $x \in E$*,*
donc $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ *avec* $n = dim(E), x_i \in \mathbb{R}$
on a :

$$||x||_\infty = Sup_{i \in \{1,2,...,n\}} |x_i|.$$
$$Soit\ x \in E,$$

on a :

$$N(x) = N(\textstyle\sum_{i=1}^{n} x_i e_i).$$

D'après l'inégalité triangulaire et l'homogénéité de la norme N, on a :

$$N(\textstyle\sum_{i=1}^{n} x_i e_i) \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i| N(e_i) \leq \sum_{i=1}^{n} N(e_i) ||x||_\infty.$$

Posons $M = \sum_{i=1}^{n} N(e_i)$ *avec, M>0 car* $e_i \neq 0$ *,* $\forall i \in \{1, 2, ..., n\}$.
D'où $N(x) \leq M||x||_\infty$
on peut donc écrire :

$$\exists M > 0 \ tel\ que : \forall (x, y) \in E^2 \quad N(x - y) \leq M||x - y||_\infty \ .$$

Or, d'après l'inégalité triangulaire renvérsée :

$$|N(x) - N(y)| \leq N(x - y)$$

donc

$$|N(x) - N(y)| \leq M||x - y||_\infty.$$

Ce qui signifie que :

$$\begin{array}{rcl} N : (E, ||.||) & \rightarrow & (\mathbb{R}, |.|) \\ x & \longmapsto & N(x). \end{array}$$

est une application M-lipschitzienne sur E donc continue sur E.

L'intérêt du théorème suivant est que, en dimension finie, on n'aura plus à préciser quelle est la norme utilisée dans les diverses propriétées topologiques (telles que la continuité,la convergence..)

Théorème 4.5.2 .
Soit E un e.v.n. sur $\mathbb{K}$.
Si E est de dimension finie n, alors toutes les normes sont équivalentes sur E.

Démonstration 4.5.3 .
Soit $(e_1, e, ..., e_n)$ une base de E et N une norme quelconque sur E.
Munissons E de la norme $||.||_\infty$, soit $x \in E$, donc $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ avec,
$n = dim(E), x_i \in \mathbb{R}$, $i \in \{1, 2, ..., n\}$ on a :

$$||x||_\infty = Sup_{i\in\{1,2,...,n\}}|x_i|.$$

On va montrer que N est équivalente à $||.||_\infty$.
Cette démonstration est composée de deux partie :

1. *On va montrer d'abord que la sphère unitée S définit par*

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n \ telque \ ||x||_\infty = 1\}$$

   est un compact sur $\mathbb{R}^n$.

2. *On va appliquer le théoreme des bornes atteintes sur l'application N.*

1. *Considérons la sphère unitée S pour la norme $||x||_\infty$:*

$$\begin{aligned} S &= \{x \in \mathbb{R}^n \ tel\ que \ ||x||_\infty = 1\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R}^n \ telque \ Sup_{i\in\{1,2,...,n\}}|x_i| = 1\right\} \subset \prod_{i=1}^n [-1, 1]. \end{aligned}$$

   L'ensemble $P = \prod_{i=1}^n [-1, 1]$ est un compact de $\mathbb{R}^n$,
   en effet, l'intervalle $[-1, 1]$ est un compact de $\mathbb{R}$ (fermé borné de $\mathbb{R}$).
   De plus un produit finis d'espaces compacts est compact donc
   $P = \prod_{i=1}^n [-1, 1]$ est un compact de $\mathbb{R}^n$.
   S est fermée dans $\mathbb{R}^n$:
   en effet,

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R} \\ x &\longmapsto ||x||_\infty \end{aligned}$$

   est continue, donc l'image réciproque d'un fermé de $\mathbb{R}$ par une application continue f est un fermé de $\mathbb{R}^n$, or $S = f^{-1}(\{1\})$ et le singleton $\{1\}$ est un fermé de $(\mathbb{R}, |.|)$donc S est un fermée dans $\mathbb{R}^n$.
   On a donc montré que S est un fermée et contenu dans le compact P, donc S est compacte dans $(\mathbb{R}^n, ||.||_\infty)$.

2. *On a déja démontré que l'application N est continue sur* $\mathbb{R}^n$*, donc N est continue sur le compact S, et d'après le thèorème des bornes atteints, l'application N est continue sur S et atteints ses bornes, i.e. :*

$$\exists (m, M) \in (\mathbb{R}^+)^2 \text{ tels que } \forall\, x \in S : m \leq N(x) \leq M,$$

mais N atteint ses bornes donc pour un certain $x_0 \in S$, $N(x_0) = m$, *or* $x_0 \neq 0$ *car* $x_0 \in S$ *donc* $N(x_0) \neq 0$ *et* $m > 0$.
Donc :

$$\exists\, (m, M) \in (\mathbb{R}_+{}^*)^2 \quad / \quad \forall\, x \in S \quad : m \leq N(x) \leq M.$$

Soit $x \in \mathbb{R}^n$-$\{0\}$*, posons* $x^{'} = \frac{x}{||x||_\infty}$ *, il est claire que* $x^{'} \in S$*, donc on a* $m \leq N(x^{'}) \leq M$ *ceci implique,*

$$\begin{aligned} N(x^{'}) &= N(\frac{x}{||x||_\infty}) \\ &= \frac{1}{||x||_\infty} N(x), \end{aligned}$$

par homogénéité de la norme N.
D'où,

$$m||x||_\infty \leq N(x) \leq M||x||_\infty \quad \forall x \in \mathbb{R}^n\text{-}\{0\}.$$

Pour x=0, l'inégalitée précédente est vraie.
Donc on a démontré que N est équivalente à $||.||_\infty$ *sur* $\mathbb{R}^n$*, et par transitivité, toutes les normes sont équivalentes sur* $\mathbb{R}^n$

Exemple 4.5.1 .
Pour $E = K^n$ *avec* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$ *:*
$x = x_i$, $i \in \{1, 2, ..., n\}$, *pour tout* $x \in E$.
On pose :

1. $||x||_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$.
2. $||x||_2 = (\sum_{i=1}^n |x_i|^2)^{\frac{1}{2}}$.
3. $||x||_\infty = Sup_1 |x_i|$,

on démontre facilement en élevant au carré que :

$$||x||_\infty \leq ||x||_1 \leq n||x||_\infty \;\Rightarrow\; ||x||_\infty \textit{est équivalente à } ||x||_1,$$

$$||x||_\infty \leq ||x||_2 \leq \sqrt{n}||x||_\infty \;\Rightarrow\; ||x||_\infty \textit{ est équivalente à la norme } ||x||_2 \textit{ et,}$$

$$\tfrac{1}{n}||x||_1 \leq ||x||_2 \leq n||x||_1 \;\Rightarrow\; ||x||_1 \textit{ est équivalente à la norme } ||x||_2.$$

Par transitivité les trois normes sont équivalentes sur E .

Remarque 4.5.1 .
Quand E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension infinie, il est possible que deux normes données sur E ne soient pas des normes équivalentes.

Contre-exemples 4.5.1 .

1. *Soit $E = C([0,1])$ l'espace vectoriel des fonctions continues de $[0,1]$ vers $\mathbb{R}$. Pour toute $f \in E$, on pose :*
$$||f||_1 = \int_0^1 |f(x)|dx, \text{ et } ||f||_\infty = Sup_{x\in[0,1]}|f(x)|$$
les deux normes $||f||_1$ et $||f||_\infty$ sur E ne sont pas équivalentes , en effet, on a :
$$||f||_1 \leq ||f||_\infty.$$
Par contre il n'existe pas $M \in \mathbb{R}^+$ qui vérifie l'inégalitée suivante pour tout $f \in E$:
$$||f||_\infty \leq M||f||_1,$$
car sinon, pour $f_n(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$
$$||f_n||_\infty = Sup_{x\in[0,1]}|f(x)_n| = 1, \forall n \in \mathbb{N}$$
et
$$\begin{aligned} ||f_n||_1 &= \int_0^1 |f(x)|dx \\ &= \int_0^1 |x^n|dx \\ &= \frac{1}{n+1}, \end{aligned}$$
d'où
$$1 \leq \frac{M}{n+1} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N},$$
ce qui est absurde pour n assez grand.
Donc $||.||_1$ et $||.||_\infty$ ne sont pas équivalentes.

Remarque 4.5.2 .
On a dèja démontré dans l'exemple 4.2.1 que $C[0,1]$ est un espace vectoriel complet pour la norme de la convergence uniforme
$$||f_n||_\infty = Sup_{x\in[0,1]}|f(x)_n|$$
et il est non complet pour la norme
$$||f||_1 = \int_0^1 |f(x)|dx,$$

si on considére un espace vectoriel et on le munit de deux normes non équivalentes, les objets mathématiques construites à l'aide de ces deux normes (ouverts) ne seront pas les même ce qui va donner naissance à deux topologies différente chacune est associée à une norme, d'où le théorème 4.3.3.

2. *Soit* $\mathcal{C}[\mathcal{X}]$ *l'espace des pôlynomes à coefficients dans* $\mathbb{C}$.
   Tout $P \in \mathbb{C}[\mathbb{X}])$ *s'écrit sous cette forme* $P(X) = \sum_{k\geq 0} a_k X^k$,
   avec $(a_k)_{1\leq k\leq n} \in \mathbb{C}$, *et* $n \in \mathbb{N}$.
   On pose :
   (a) $||P||_1 = \sum_{k\geq 0} |a_k|$
   (b) $||p||_2 = \sqrt{\sum_{k\geq 0} |a_k|^2}$.
   (c) $||P||_\infty = Sup_{k\geq 0} \{|a_k|\}$,
   On vérifie d'abord que $||.||_1$,$||.||_2$ *et* $||.||_\infty$ *sont des normes sur* $\mathcal{C}[\S]$ *Soit* $(P, Q, \lambda) \in \mathcal{C}[\mathcal{X}]^2 \times \mathbb{R}$
   (a) $||P||_1 = \sum_{k\geq 0} |a_k|$
      i. *Axiome de séparation :*

$$\begin{aligned} ||P||_1 = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad \sum_{k\geq 0} |a_k| = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad |a_k| = 0 \quad \forall k \geq 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad a_k = 0 \quad \forall k \geq 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad P = 0. \end{aligned}$$

      ii. *Axiome d'homogénéité :*

$$\begin{aligned} ||\lambda P||_1 &= \sum_{k\geq 0} |\lambda a_k| \\ &= \sum_{k\geq 0} |\lambda||a_k| \\ &= |\lambda| \sum_{k\geq 0} |a_k| \\ &= |\lambda|||P||_1. \end{aligned}$$

      iii. *Inégalité triangulaire :*

$$\begin{aligned} ||P + Q||_1 &= \sum_{k\geq 0} |a_k + b_k| \\ &\leq \sum_{k\geq 0} |a_k| + \sum_{k\geq 0} |b_k| \\ &= ||P||_1 + ||Q||_1. \end{aligned}$$

D'ou $||.||_1$ *est une norme sur* $\mathcal{C}[\mathcal{X}]$.

(b) $||P||_2 = \sqrt{\sum_{k\geq 0} |a_k|^2}$.

i. *Axiome de séparation :*

$$\begin{aligned} ||P||_2 = 0 &\iff \sqrt{\sum_{k\geq 0} |a_k|^2} = 0 \\ &\iff \sum_{k\geq 0} |a_k|^2 = 0 \\ &\iff |a_k| = 0, \quad \forall k \geq 0 \\ &\iff P = 0. \end{aligned}$$

ii. *Axiome d'homogénéité :*

$$\begin{aligned} ||\lambda P||_2 &= \sqrt{\sum_{k\geq 0} |\lambda a_k|^2} \\ &= \sqrt{\sum_{k\geq 0} |\lambda|^2 |a_k|^2} \\ &= |\lambda| \sqrt{\sum_{k\geq 0} |a_k|^2} \\ &= |\lambda| ||P||_2. \end{aligned}$$

iii. *Inégalité triangulaire :*

$$\begin{aligned} ||P+Q||_2 &= \sqrt{\sum_{k\geq 0} |a_k + b_k|^2} \\ &\leq \sqrt{\sum_{k\geq 0} |a_k|^2} + \sqrt{\sum_{k\geq 0} |b_k|^2} \\ &= ||P||_2 + ||Q||_2. \end{aligned}$$

(c) $||P||_\infty = Sup_{k\geq 0} |a_k|$

i. *Axiome de séparation :*

$$\begin{aligned} ||P||_\infty = 0 &\iff Sup_{k\geq 0} |a_k| = 0 \\ &\iff a_k = 0 \quad \forall k \geq 0 \\ &\iff P = 0. \end{aligned}$$

ii. Axiome d'homogénéité :

$$\begin{aligned} ||\lambda P||_\infty &= Sup_{k\geq 0}|\lambda a_k| \\ &= |\lambda| Sup_{k\geq 0}|a_k| \\ &= |\lambda| ||P||_\infty \end{aligned}$$

iii. Inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned} |a_k+b_k| \leq |a_k|+b_k| &\iff |a_k+b_k| \leq Sup_{k\geq 0}|a_k| + Sup_{k\geq 0}|b_k| \\ &\iff Sup_{k\geq 0}|a_k+b_k| \leq Sup_{k\geq 0}|a_k| + Sup_{k\geq 0}|b_k| \\ &\iff ||P+Q||_\infty \leq ||P||_\infty + ||Q||_\infty. \end{aligned}$$

Donc $||.||_\infty$ *est une norme sur* $\mathcal{C}[\mathcal{X}]$.

Si on considère $P \in \mathcal{C}[\mathcal{X}]$ *tel que :*
$P = \sum_{k\geq 0} X^k$, *on a*

$$||P||_\infty = Sup_{k\geq 0}|a_k| = 1, \text{ et}$$
$$||P||_1 = \sum_{k\geq 0}|a_k| = n+1$$

et

$$||P||_2 = \sqrt{n+1}$$
$$\frac{||P||_1}{||P||_\infty} = \frac{n+1}{1}$$

et

$$\frac{||P||_2}{||P||_1} = \frac{\sqrt{n+1}}{n+1}.$$

Ces deux rapports ne sont pas bornés car pour une valeur assez grande de n les deux rapports tendent vers ∞, *donc les trois normes ne sont pas*
équivalentes sur $\mathcal{C}[\mathcal{X}]$.

Remarque 4.5.3 .
On a démontré que toute suite convergente de $(E, ||.||_E)$ *est de Cauchy. Mais la réciproque est fausse en général, quand la réciproque est vérifiée sur* $(E, ||.||_E)$, *on dit que E est complet pour la norme* $||.||_E$.

4.6 Espace vectoriel normé complet

Définition 4.6.1 .
Un espace vectoriel normé $(E, ||.||_E)$ *est dit complet si toutes ses suites de Cauchy sont convergentes.*
Un espace vectoriel normé complet $(E, ||.||_E)$ *s'appelle un espace de Banach.*

Corollaire 4.6.1 .
Soit E un espace vectoriel normé.
Si E est de dimension finie, alors E est complet.

Démonstration 4.6.1 .
Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie.
Comme E est de dimension finie, alors toutes les normes sur E sont équivalentes.
Sans restreindre à la généralité, on munit E de la norme infinie définie par :

$$\forall x \in E, \quad Sup_{i\in\{1,2,\ldots,n\}}|x_i|$$

avec, $x_i \in \mathbb{K}$. *Soit* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de Cauchy dans* $(E, ||.||_{\infty}$, *c'est à dire :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n, p \in \mathbb{N} \geq, n \leq N \Longrightarrow ||x_n - x_{n+p}||_{\infty} \leq \varepsilon$$

i.e.

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n, p \in \mathbb{N} \geq, n \leq N \Longrightarrow Sup_{i\in\{1,2,\ldots,n\}}|x_n - x_{n+p}| \leq \varepsilon$$

i.e.

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n, p \in \mathbb{N} \geq, n \leq N \Longrightarrow |x_n - x_{n+p}| \leq \varepsilon$$

Donc, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est de Cauchy dans* $(\mathbb{R}, |.|)$ *qui est complet, alors* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge, et par suite,* $(E, ||.||_{\infty})$ *est complet.*

Exemples 4.6.1 .
Soit $\mathcal{C}\ ([0,1])$ *l'espace des fonctions continues de* $[0,1]$ *dans* $\mathbb{R}$.
$\mathcal{C}\ ([0,1])$ *est un espace de Banach pour la norme de la convergence uniforme :*

$$||f||_{\infty} = Sup_{t\in[0,1]}|f(t)|,$$

et il est non complet pour la norme

$$||f||_1 = \int_0^1 |f(t)|dt.$$

Démonstration 4.6.2 .

1. *Soit* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de Cauchy dans*
   $C([0,1]) = \{f : [0,1] \to \mathbb{R} \text{ continues }\}$
   i.e.,

$$\begin{array}{ll} \forall \varepsilon \geq 0 \quad, N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq N, \quad \forall p \geq 0, ||f_n - f_{n+p}||_{\infty} \leq \varepsilon & \\ \forall \varepsilon \geq 0 \quad, \quad N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ \forall p \geq 0, \quad Sup_{t\in[0,1]}|f_n(t) - f_{n+p}(t)| \leq \varepsilon & (*) \\ \forall \varepsilon \geq 0 \quad, N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ \forall p \geq 0, \quad |f_n(t) - f_{n+p}(t)| \leq \varepsilon\ \ \forall t \in [0,1]. & \end{array}$$

   On déduit que pour tout $t \in [0,1]$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite de Cauchy dans* $(\mathbb{R}, |.|)$ *qui est complet donc elle converge vers* $f(t) \in \mathbb{R}$.
   Dans $(*)$ *en faisant tendre p vers* $+\infty$, *on obtient :*

$$Sup_{t\in[0,1]}|f_n(t)-f(t)|<\varepsilon,\ \forall t\in[0,1],$$

ce qui veut dire $f_n \to f$ *lorsque* $n\to+\infty$ *uniformément sur [0,1].*
On a chaque f_n *est continue sur [0,1], et* f_n *converge vers* f *uniformément sur [0,1], donc* f *est continue sur [0,1].*
Alors, $f\in\mathcal{C}\ ([0,1])$ *et de plus* $||f_n-f||_\infty\to 0$ *quand* $n\to+\infty$.

2. $\mathcal{C}\ ([0,1])$ *n'est pas un espace de Banach por la norme* $||f||_1=\int_0^1|f(t)|dt$.
En effet, soit

$$f_n(t)=\begin{cases} n & si\ \ t=0\\ n & si\ \ 0<t<\frac{1}{n}\\ \frac{1}{t} & si\ \ \frac{1}{n}\le t\le 1\end{cases}$$

$f_n(t)\in\mathcal{C}\ ([0,1])$.
Montrons que f_n *est une suite de Cauchy dans* $\mathcal{C}\ ([0,1])$ *pour la norme* $||.||_1$ *:*
Soit $n,p\in\mathbb{N}$,

$$f_{n+p}(t)-f_n(t)=\begin{cases} p & si\ \ t=0\\ p & si\ \ 0<t<\frac{1}{n+p}\\ \frac{1}{t}-n & si\ \ \frac{1}{n+p}\le t\le\frac{1}{n}\\ 0 & si\ \ \frac{1}{n}\le t\le 1.\end{cases}$$

et

$$\begin{aligned} ||f_{n+p}(t)-f_n(t)||_1 &= \int_0^{\frac{1}{n+p}} pdt+\int_{\frac{1}{n+p}}^{\frac{1}{n}}(\frac{1}{t}-n)dt\\ &= ln(\frac{n+p}{n})\end{aligned}$$

Donc,

$$||f_{n+p}(t)-f_n(t)||_1\to 0\ quand\ n\to+\infty,$$

ce qui veut dire que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite de Cauchy dans* $\mathcal{C}\ ([0,1])$ *pour la norme* $||.||_1$.
Montrons que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *n'est pas convergente pour la norme* $||.||_1$ *:*
Par absurde, supposons que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est convergente vers f pour* $||.||_1$.
On a

$$|||f_n||_1-||f||_1|\le||f_n-f||_1.$$

Or

$$||f_n||_1=1+ln(n)\to+\infty$$

et d'autre part $||f_{n+p}(t) - f_n(t)||_1 \to 0$ *quand* $n \to +\infty$*, ce qui est absurde.*
Donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite de Cauchy de* $\mathcal{C}$ $([0,1])$ *non convergente et par suite,* $\mathcal{C}$ $([0,1])$ *muni de la norme* $||\ .\ ||_1$ *n'est pas un espace de Banach.*

Définition 4.6.2 *.*
Soit X *un e.v.n non vide. un ensemble* τ *de parties de* X *s'appelle une topologie sur* X *si on a :*

1. $X \in \tau$ *et* $\emptyset \in \tau$.
2. *Une réunion quelconque d'éléments de* τ *appartient à* τ.
3. *Une interssection finie d'éléments de* τ *est un élément de* τ.

La paire (X, τ) *s'appelle un espace topologique, les éléments de* τ *s'appellent les ouverts de* X *et les complémentaires des ouverts s'appellent des les fermés de* X*. On remarque que* X *et* $\emptyset$ *sont des ouverts et des fermés.*

Théorème 4.6.1 *.*
Soit $(X, ||.||)$ *un e.v.n. :*

1. $A = X$ *et* $A = \emptyset$ *sont ouverts. Soit* τ *une famille d' ouverts de*
2. $(X, ||.||)$*.Alors l'ensemble* $A^* = \bigcup_{A\in\tau} A$ *est aussi un ouvert .*
3. *Si* $A_1, A_2, ..., A_n$ *est une famille finie d'ouverts, alors l'ensemble* $A^* = \bigcap_{A\in\tau} A$ *est aussi un ouvert.*

Ce théorème montre qu'un e.v.n. est un espace topologique.

Théorème 4.6.2 *.*
Deux normes équivalentes sur un espace vectoriel normé E *définissent la même topologie (les mêmes ouverts) sur* E*.*

Démonstration 4.6.3 *.*
Soit E *un espace vectoriel normé.*
Soient N_1 *et* N_2*, deux normes équivalentes.*
On appelle τ_1 *et* τ_2 *les topologies associées.*
On veut montrer que $\tau_1 = \tau_2$.
Soit $A \in \tau_1$*, autrement dit un ouvert pour* N_1
si $A \neq \emptyset$ *, soit* $x \in A$*. Il existe donc* $r_x > 0$ *tel que* $B_1(x, r_x) \subset A$,
où $B_1(x, r_x)$ *désigne la boule ouverte de centre* x *et de rayon* r_x *, pour la norme* N_1.
Or puisque N_1 *et* N_2 *sont supposées équivalentes :*

$$\exists(\alpha,\beta)\in {R_+}^{*2} \quad , \quad \forall x\in E \quad , \quad \alpha N_1(x)\leq N_2(x)\leq \beta N_1(x)$$

on va démontrer à présent que A est un ouvert pour la norme N_2 .
Soit $y\in B_2(x,\alpha r_x)$.
Alors,

$$N_2(y-x)<\alpha r_x \Longrightarrow N_1(y-x)<r_x,$$

d'après la relation si dessus on déduit que

$$B_2(x,\alpha r_x)\subset B_1(x,r_x)\subset A.$$

Posons ${r_x}'=\alpha r_x$, $\forall x\in A$, il existe donc ${r_x}'>0$ tel que $B_2(x,\alpha r_x)\subset A$, autrement dit , A est un ouvert de N_2 , puis $\tau_1\subset\tau_2$. Exactement de la même manière, on démontre que $\tau_2\subset\tau_1$, et on déduit que $\tau_1=\tau_2$.
Donc N_1 et N_2 définissent la même topologie sur E.

Chapitre 5

Les applications linéaires

Les applications linéaires sont parmi les plus importantes en mathématiques. Elles interviennt dans de nombreuses situations :
- En analyse, elles servent par exemple à approximer localement des fonctions ou des équations différentielle.
- En algèbre, on peut les utiliser pour représenter des équations.
- En géométrie, elles modélisent les symétries d'un objet...

5.1 Les applications linéaires continues

Dans tout ce chapitre $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

***Définition 5.1.1** .*
Soient E et F deux espaces vectoriels sur un corps $\mathbb{K}$.
Une application :$f : E \to F$,
est dite $\mathbb{K}$-linéaire si elle satisfait aux deux conditions suivantes :

1. $\forall (x, y) \in E^2,\ \ f(x + y) = f(x) + f(y)$, *(l'additivité).*
2. $\forall (x, \lambda) \in E \times \mathbb{K}\ ,\ \ f(\lambda x) = \lambda f(x)$, *(l'homogénéité).*

Ces deux propriétés peuvent être vérifiées simultanément par la caractérisation suivante :

$$\forall (x, y) \in E^2,\ \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2\ \ f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y).$$

***Définition 5.1.2** .*
Soit $a \in A$, on dit que f est continue en un point $a \in A$ si et seulement si ,

$$\begin{gathered}\forall \varepsilon > 0\ , \exists \eta > 0, \forall x \in A\ , ||x - a||_E \leq \eta\ \Rightarrow\ \ ||f(x) - f(a)||_F \leq \varepsilon \\ i.e\quad x \in B(a, \eta)\ \Rightarrow\ \ f(x) \in B(f(a), \varepsilon) \\ i.e\quad f(B(a, \eta)) \subset B(f(a), \varepsilon) \\ i.e\quad \lim_{x \to a} f(x) = f(a).\end{gathered}$$

L'application f est dite continue sur E si elle est continue en tout point $a \in E$.

Remarque 5.1.1 *.*
La continuitée de f au point a traduit le fait que si x est assez "proche" de a alors f(x) est assez "proche" de f(a).

Propriétés 5.1.1 *.*
Si une fonction est continue en a pour une norme, elle est continue en a pour toute norme équivalente.
L'ensemble des fonctions définies sur A et continues en a est un espace vectoriel.
Une application est continue en a si et seulement si, pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A qui converge vers a, la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(a)$.

Le résultat suivant caractérise les applications linéaires continues :

Proposition 5.1.1 *.*
Soit f une application linéaire de $(E, ||.||_E)$ dans $(F, ||.||_F)$. On a l'équivalence entre les propriétés suivantes :

1. *f est continue sur E.*
2. *f est continues en $x_0 = 0$.*
3. *f est bornée sur la boule $B_f(0,1)$:*
$$\exists M > 0 \ / \ \forall x \in B_f(0,1) \quad ||f(x)||_F \leq M,$$
avec,
$$B_f(0,1) = \{x \in E/ \ ||x||_E \leq 1\}.$$
4. *f est lipschitzienne.*

Démonstration 5.1.1 *.*

1. $(1) \Rightarrow (2)$
si f est continue sur E, alors f est en particulier continue en $x_0 = 0 \in E$.
2. $(2) \Rightarrow (3)$
On suppose que f est continue en $x_0 = 0$ et on démontre que f est bornée sur la boule unitée $B_f(0,1)$ i.e :
$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \eta > 0 \ /||x - 0||_E \leq \eta \Rightarrow ||f(x) - f(0)||_F \leq \varepsilon.$$
et montrons que

$$\exists M > 0 \ / \ \forall y \in B_f(0,1) \quad ||f(y)||_F \leq M.$$

Soit, $y \in B_f(0,1)$, *on pose* $y = \frac{x}{\eta}$ *avec,* $||x||_E \leq \eta$.
On a :

$$||y||_E = ||\frac{x}{\eta}||_E = \frac{1}{\eta}||x||_E \leq \frac{\eta}{\eta} = 1$$

on a aussi,

$$||f(y)||_F = ||f(\frac{x}{\eta})||_F = ||\frac{1}{\eta}f(x)||_F = \frac{1}{\eta}||f(x)||_F \leq \frac{\varepsilon}{\eta}.$$

Si on pose $M = \frac{\varepsilon}{\eta}$ *alors,*

$$||y||_E \leq 1 \Rightarrow ||f(x)||_F \leq M,$$

ce qui veut dire que f *est bornée sur la boule unitée* $B_f(0,1)$.

3. $(3) \Rightarrow (4)$
On va supposer que f est bornée sur la boule unitée et on démontre que f est lipschitzienne .
i.e.

$$\exists M > 0, \ \forall y \in B_f(0,1) : ||f(x)||_F \leq M.$$

On veut montrer que,

$$\exists \alpha > 0 \ / \ \forall x \in E : \ ||f(x)||_F \leq \alpha ||x||_E.$$

Soit, $x \in E$ *et* $x \neq 0$ *:*

$$y = \frac{x}{||x||_E} \Rightarrow ||y||_E = ||\frac{x}{||x||_E||}||_E = \frac{1}{||x||_E}||x||_E = 1.$$

donc,
$||y||_E = 1$ *et* $||f(y)||_F \leq M$ *ce qui est équivalent à :*

$$\begin{aligned} ||f(\frac{x}{||x||_E})||_F \leq M \quad &\Rightarrow \quad ||\frac{1}{||x||_E}f(x)||_F \leq M \\ &\Rightarrow \quad ||f(x)||_F \leq M||x||_E, \end{aligned}$$

avec $M = \alpha$, *donc f est lipschitzienne.*

4. $(4) \Rightarrow (1)$
On va supposer que f *est lipschitzienne et on démontre que f est continue sur E.*

$$i.e. \ \exists M > 0 \ / \ \forall x \in E \ : \ ||f(x)||_F \leq M||x||_E,$$

et on veut démontrer que :

$$\forall x \in E, \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists \eta > 0 \ , \ ||x - x_0||_E \leq \eta \Rightarrow ||f(x) - f(x_0||_F \leq \varepsilon$$

Or,

$$||f(x) - f(x_0)||_F = ||f(x - x_0|| \leq M||x - x_0||_E,$$

car f est supposée lipschitzienne,

$$\forall \varepsilon > 0,\ \eta = \frac{\varepsilon}{M},\ ||x - x_0||_E \leq \eta = \frac{\epsilon}{M} \Rightarrow ||f(x) - f(x_0)||_F \leq \varepsilon.$$

Autrement dit f *est continue en* $x_0 \in E \Rightarrow$ f *est continue sur* E *.*

Proposition 5.1.2 *.*
Soit f *une application linéaire de* $(E, ||.||_E)$ *dans* $(F, ||.||_F)$.
Si E est de dimension finie, alors f est continue de $(E, ||.||_E)$ *dans* $(F, ||.||_F)$.

Démonstration 5.1.2 *.*
Soit $(e_1, e_2, ..., e_N)$*une base de E, n=dim(E), c 'est à dire :*

$$\forall x \in E : \quad x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \quad (x_i)_{i\in\mathbb{N}^*} \in \mathbb{R}$$

On choisit la norme de E définie par :

$$\forall x \in E \quad : \quad ||x||_E = ||x||_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|,$$

f est linéaire, pour démontrer qu'elle est continue on doit verfier l'assertion suivante :
Or f est continue sur E $\iff \exists M > 0\ /\forall x \in E\ \ ||f(x)||_F \leq M||x||_E$.
Aussi on a :

$$||f(x)||_F = ||f(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i)||_F = ||\sum_{i=1}^{n} x_i\ f(e_i)||_F$$

car f est une application linéaire sur E, et d'après l'inégalité triangulaire de la norme $||.||_F$ *on obtient :*

$$||f(x)||_F \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i| ||f(e_i)||_F, \quad (*)$$

on pose :

$$M = Max(||f(e_1)||_F, ||f(e_2)||_F, ..., ||f(e_n)||_F),$$

ce M existe car c'est le maximum d'un nombre finie de termes,
$(*)$ *implique,*

$$||f(x)||_F \leq M \sum_{i=1}^{n} |x_i| = M||x||_1.$$

Alors,

$$\exists M > 0 \ / \quad \forall x \in E\ \ ||f(x)||_F \leq M||x||_E.$$

Donc f est continue sur E.

Remarque 5.1.2 *.*
Quand E est un K-espace vectoriel de dimension infinie, il est possible que des applications linéaires sur E ne soient pas continues sur E.

Exemples 5.1.1 *.*

1. *Soit* $E = C([0,1], \mathbb{R}$ *l'espace vectoriel réel des formes linéaires continues muni de la norme notée* $||.||_1$ *est définie par :*

$$||.||_1 : f \to ||f||_1 = \int_0^1 |f(t)|dt,$$

et nous munissons $\mathbb{R}$ *de la valeur absolue.*
L'application :

$$\begin{array}{rcl} u : E & \to & \mathbb{R}. \\ x & \longmapsto & u(f) = f(0) \end{array}$$

est une forme linéaire sur E. Nous utilisons la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ *de vecteurs de E, définie par :*

$$\begin{array}{rcl} f_n : [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & f_n(t) = \left\{ \begin{array}{ll} n - n^2 t & si \;\; t \in [0, \frac{1}{n}] \\ 0 & si \;\; t \in]\frac{1}{n}, 1] \end{array} \right. \end{array}$$

et on introduit la suite $(g_n)_{n\geq 1}$ *de vecteurs de E, de terme général :*

$$g_n = \frac{1}{n} f_n,$$

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ *,*

$$u(f_n) = f_n(0) = n$$

donc

$$u(g_n) = g_n(0) = 1 \text{ , et } ||g_n||_1 = \int_0^1 |\frac{1}{n} f_n(t)|dt = \frac{1}{n} \int_0^{\frac{1}{n}} |n - n^2 t| = \frac{1}{2n},$$

il en résulte que la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *converge dans E vers le vecteur zéro de E, c'est à dire l'application nulle 0 de* $[0,1]$ *dans* $\mathbb{R}$*, alors que la suite* $u(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *ne converge pas dans* $\mathbb{R}$ *vers u(0)=0. Par suite u n'est pas une forme linéaire continue sur E .*

2. *Soit* $E = \mathcal{R}[\mathcal{X}]$ *muni de la norme* $||.||_\infty$ *définie par :*

$$||f||_\infty = Sup\{|a_k|, k \in \mathbb{N}\}$$

avec, $P \in E$*, et* $P = \sum_{k\geq 0} a_k X^K$*, et* $a_k \in \mathbb{R}$*,* $\forall k \in \mathbb{N}$*.*
Soit ϕ *l'application linéaire de dérivation :*

$$\begin{array}{rcl} \phi : \mathbb{R}[\mathbb{X}] & \to & \mathbb{R}[\mathbb{X}] \\ P & \longmapsto & P^{'}. \end{array}$$

Considérons la suite (P_n) *définie sur* $\mathbb{N}^*$ *par :*

$$P_n = \frac{1}{n}X^n.$$

On a d'une part :

$$||P_n||_\infty = \frac{1}{n}$$

et d'autre part :

$$||P_n||_\infty = ||X^{n-1}||_\infty = 1.$$

Ainsi , la suite (P_n) converge vers 0 pour la norme $||.||_\infty$ tandis que la suite $\phi(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers $\phi(0) = 0$.
On déduit que ϕ n'est pas continue en 0, et comme ϕ est linéaire , ϕ n'est continue en aucun point de E.

5.2 Le théorème du graphe fermé

Définition 5.2.1 *.*
Soient $(E, ||.||_E), (F, ||.||_F)$ deux espaces vectoriels normés.
On dit que :

$$\begin{array}{rcl} f : E & \to & F \\ x & \longmapsto & f(x), \end{array}$$

est une application ouverte si l'image de tout ouvert de E par f est un ouvert de F.

Théorème 5.2.1 *(Théorème de l'application ouverte).*
Soient E, F deux espaces de Banach et $f \in \mathcal{L}\ (E, F)$ surjective.
Alors, f est ouverte.

Corollaire 5.2.1 *(Théorème d'homéomorphisme de Banach).*
Soient E et F deux espaces de Banach, et f une application linéaire bijective.
Alors f est un homéomorphisme.

Démonstration 5.2.1 .
Soit U un ouvert de E, Comme f est bijective, on a $(f^{-1})^{-1}(U) = f(U)$, mais $f(U)$ est ouvert en vertu du théorème précédent. On peut donc maintenant conclure que l'image réciproque de tout ouvert de E par f^{-1} est ouvert. Donc f^{-1} est continue.

Définition 5.2.2 .
*Soient E et F deux e.v.n. et f une application linéaire de E vers F.
On appelle graphe de f noté $G(f)$ le sous ensemble de $(E \times F)$ suivant :*

$$G(f) = \{(x, y) \in (E \times F) \ \ / \ \ y = f(x)\}.$$

Théorème 5.2.2 *(Graphe fermé).
Soient E, F des espaces de Banach.
Une application linéaire f de E dans F est continue si et seulement si son graphe $G(f)$ est fermé dans $(E \times F)$.*

Démonstration 5.2.2 .
*Supposons d'abord que f est continue et montrons que G(f) est un fermé de $(E \times F)$ i.e. $\overline{G(f)} = G(f)$.
On a, $G(f) \subset \overline{G(f)}$ il nous reste à démontrer l'autre inclusion.
Soit $(x, f(x)) \in \overline{G(f)}$, comme $(E \times F)$ est un espace normé (même chose pour un espace métrique), alors il existe une suite $(x_n, f(x_n))_{n \geq 0}$ dans $(E \times F)$ qui converge vers (x,y).
D'où,*

$$lim_{n \to +\infty} x_n = x,$$

et

$$lim_{n \to +\infty} f(x_n) = y,$$

*et comme f est continue en x alors on a $lim_{n \to +\infty} f(x_n) = f(x)$, et par unicité de la limite dans un espace normé (même espace métrique), on a f(x)=y, d'où $(x, y) \in G(f)$.
Réciproquement, supposons que G(f) est un fermé de $(E \times F)$, et montrons que f est continue sur E.
Comme E et F sont deux espaces de Banach, alors $(E \times F)$ est aussi un banach, également G(f) en étant sous espace fermé de $(E \times F)$ Considérons les restrictions des deux projections suivantes :*

$$\begin{aligned} p_1 : G(f) &\ \to \ E \\ (x, f(x)) &\ \longmapsto \ x. \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} p_2 : G(f) &\rightarrow F \\ (x, f(x)) &\longmapsto f(x), \end{aligned}$$

qui sont deux applications linéaires sur G(f), et p_1 bijective sur G(f) par construction. Alors, on a par construction :

$$f = p_2 \circ {p_1}^{-1}.$$

Comme les projections sur E et F sont continues (par définition de la topologie produit sur $(E \times F)$), les restrictions à G(f) que sont p_1 et p_2 le sont aussi, et par le théorème d'homéomorphisme de Banach ${p_1}^{-1}$ l'est aussi, et on déduit que f est continue comme étant la composé de deux applications continues.

5.3 Formes linéaires continues

Définition 5.3.1 *(Forme linéaire).*
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel .
On appelle une forme linéaire sur E toute application linéaire de E dans $\mathbb{K}$.

Définition 5.3.2 *(Noyau d'une forme linéaire).*
Si f est une forme linéaire d'un espace vectoriel E dans $\mathbb{K}$, alors le noyau de f est défini par :

$$ker(f) = \{x \in E / \ f(x) = 0\}.$$

Le noyau est un sous-espace vectoriel de l'espace E.

Définition 5.3.3 *(Espace dual).*
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
On appelle espace dual de E, noté E^*, l'espace des formes linéaires sur E. Autrement dit,

$$E^* = \mathcal{L}\ (E, \mathbb{K}).$$

Définition 5.3.4 *(Hyperplan).*
Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel.
On appelle hyperplan de E le noyau de toute forme linéaire non nulle sur E .
Autrement dit, une patie H de E est un hyperplan de E s'il existe $\varphi \in E^*$ tel que $H = ker(\varphi)$.

Proposition 5.3.1 *Soit $(E, ||.||)$ un espace normé.*

1. *Tout hyperplan de E est ou bien fermé ou bien dense dans $(E, ||.||)$.*
2. *Une forme linéaire sur E est continue si et seulement si son noyau est fermé dans E.*

Démonstration 5.3.1 .

1. *Soit H un hyperplan de E et $a \in E$ tel que*
   $E = H \oplus \mathbb{K}a$.
   Supposons que H non fermé dans E et montrons qu'alors H est dense dans E.
   Puisque H n'est pas fermé, il existe $x \in \overline{H}$ tel que $x \notin H$.
   Alors il existe $h \in H$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ tels que $x = h + \lambda a$ et $\lambda \neq 0$.
   On en déduit que $a = \frac{x-h}{\lambda} \in \overline{H}$ car $\overline{H}$ est un sous espace vectoriel de E, par conséquent , on a $E = \overline{H}$.
   Donc H est dense dans E.
2. *Soit f une forme linéaire sur E et $H = ker(f)$.*
   Si $f = 0$, alors f est continue et on a $H = E$, d'ou H est fermé dans E.
   Donc on peut supposer f non nulle , si f est continue, alors $H = ker(f) = f^{-1}(\{0\})$ est un fermé dans E car il est l'image réciproque d'un fermé $\{0\}$ de $\mathbb{K}$.

   Soit $a \in E$ tel que $f(a) = 1$, puisque l'application :
   $$x \longmapsto a + x,$$
   est un homéomorphisme de E, alors $(a + H)$ est un fermé dans E ne contenant pas 0, donc il existe r>0 tel que :
   $$B(0, r) \cap (a + H) = \emptyset.$$
   Soit $x \in B(0, r)$.
   Si $|f(x)| > 1$, alors :
   $$||\tfrac{x}{f(x)}|| = \tfrac{||x||}{|f(x)|} < ||x|| < r,$$
   et on en déduit que $\lambda = 1$ donc,
   $$(\tfrac{x}{f(x)} = a + h) \in (a + H),$$
   ce qui est impossible, donc on a $|f(x)| \leq 1$.
   Soit x un élément non nul de E, alors on a :
   $$||\tfrac{rx}{2||x||}|| = \tfrac{r}{2} < r,$$
   d'où,

$$\frac{r}{2||x||}|f(x)| = |f(\frac{rx}{2||x||})| \leq 1.$$

Par conséquent , on a $|f(x)| \leq \frac{2}{r}||x||$, *donc* f *est continue sur* E.

Corollaire 5.3.1 *Soit* E *un espaces vectoriel normé, et soit :*

$$\begin{array}{rcl} f : E & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x). \end{array}$$

le noyau de f *est dense dans* E *si et seulement si* f *est non continue sur* E.

5.4 Norme d'une application linéaire :

Proposition 5.4.1 *.*
Soit f *une application linéaire continue de* $(E, ||.||_E)$ *à valeurs dans* $(F, ||.||_F)$.
On définit alors la norme "trois barres" de f *par :*

$$\begin{array}{rcl} |||f||| & = & Sup_{x\in E,\, x\neq 0}\dfrac{||f(x)||_F}{||x||_E} \\ & = & Sup_{||x||_E\leq 1}||f(x)||_F \\ & = & Sup_{||x||_E=1}||f(x)||_F. \end{array}$$

Démonstration 5.4.1 *.*
On va démontrer que ces trois noemes qu'on vient de définir sont égales.

1. *Montrons d'abord que :*

$$Sup_{x\in E,\, x\neq 0}\frac{||f(x)||_F}{||x||_E} = Sup_{||x||_E\leq 1}||f(x)||_F.$$

En effet, soi $y \in E$ *tel que* $||y||_E \leq 1$, *on a :*

$$\begin{array}{rcl} ||f(y)||_F & \leq & \dfrac{||f(y)||_F}{||y||_E} \\ & \leq & Sup_{x\in E-\{0\}}\dfrac{||f(y)||_F}{||y||_E}, \end{array}$$

d'où

$$Sup_{||x||_E\leq 1}||f(x)||_F \leq Sup_{x\in E,\, x\neq 0}\frac{||f(x)||_F}{||x||_E},$$

de l'autre part on a :
Soit $y \in E - \{0\}$, *on a :*

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{||f(y)||_F}{||y||_E} & = & ||f(\dfrac{y}{||y||_E})||_F \\ & \leq & Sup_{||x||_E\leq 1}||f(x)||_F, \end{array}$$

d'où,

$$Sup_{x\in E-\{0\}}\frac{||f(y)||_F}{||y||_E} \leq Sup_{||x||_E\leq 1}||f(x)||_F,$$

c'est à dire on a l'égalité suivante :

$$Sup_{x\in E-\{0\}}\frac{||f(y)||_F}{||y||_E} = Sup_{||x||_E\leq 1}||f(x)||_F$$

2. *Montrons que :*

$$Sup_{||x||_E=0}||f(x)||_F = Sup_{||x||_E\leq 0}||f(x)||_F.$$

En effet, on a pour tout $y \in E$ *tel que* $||y||_E \leq 1$

$$||f(y)||_F \leq Sup_{||x||_E\leq 1}||f(x)||_F,$$

d'où,

$$Sup_{||y||_E=1}||f(y)||_F \leq Sup_{||x||_E\leq 0}||f(x)||_F.$$

Soit $x \in E$ *avec,* $0 < ||x||_E \leq 1$*, dans ce cas on pose :*

$$y = \frac{x}{||x||_E} \text{ ce qui est équivalent à } ||y||_E = 1$$

on a :

$$\begin{aligned} ||f(x)||_F &= ||f(y||x||_E)||_F \\ &= ||x||_E||f(y)||_F \\ &\leq ||f(y)||_F \\ &\leq Sup_{||y||_E=1}||f(y)||_F, \end{aligned}$$

d'où,

$$Sup_{||x||_E\leq 0}||f(x)||_F \leq Sup_{||y||_E=1}||f(y)||_F.$$

Et par suite, on obtient l 'égalité suivante :

$$Sup_{||x||_E\leq 0}||f(x)||_F = Sup_{||y||_E=1}||f(y)||_F.$$

On conclut donc que les trois quantités qu on a définies sont égales.

Remarque 5.4.1 .
La quantité $|||f|||$ *déja définie existe, car* f *étant continue de* $(E, ||.||_E)$ *dans* $(F, ||.||_F)$ *alors,*

$$\exists M > 0, \ \forall x \in E \quad ||f(x)||_F \leq M||x||_E$$

On a :

$$\frac{||f(x)||_F}{||x||_E} \leq |||f||| = Sup_{x\in Ex\neq 0}\frac{||f(x)||_F}{||x||_E} \leq M,$$

ce qui implique,

$$|||f||| \leq M.$$

Corollaire 5.4.1 .
L'application $f \longmapsto |||f|||$ *est une norme sur* $\mathcal{L}\ (E,F)$.
De plus, $|||f|||$ *est la plus petite constante positive M vérifiant :*

$$||f(x)||_F \leq M||x||_E,$$

pour tout $x \in E$, *c'est à dire s'il existe une constante* $M \geq 0$, *telle que :*

$$||f(x)||_F \leq ||x||_E,$$

pour tout $x \in E$, *alors* $|||f||| \leq M$.

Corollaire 5.4.2 .
Pour tout $x \in E$ *et pour tout* $f \in \mathcal{L}\ (E,F)$ *on a :*

$$||f(x)||_F \leq |||f|||\ ||x||_E.$$

Proposition 5.4.2 .
Si $f \in \mathcal{L}\ (E,F)$ *et* $\mathcal{L}\ (E,G)$, *alors on a :*

$$|||g \circ f||| \leq |||g|||\ |||f|||.$$

Démonstration 5.4.2 .
Soit $f \in \mathcal{L}\ (E,F)$ *et* $g \in \mathcal{L}\ (E,G)$.
On a :

$$|||g \circ f||| = Sup_{||x||_E=1}||g \circ f(x)||_G$$

et

$$\begin{aligned} ||g \circ f(x)||_G &\leq |||f|||\ ||f(x)||_F \\ &\leq |||g|||\ |||f|||\ ||x||_E, \end{aligned}$$

d'où

$$|||g \circ f||| = Sup_{||x||_E=1}||g \circ f(x)||_G \leq |||f|||\ |||g|||.$$

Théorème 5.4.1 .
Soit E, et F deux e.v.n. sur $\mathbb{K}$.
Si F est un espace de Banach alors $\mathcal{L}\ (E,F)$ *est un espace de Banach.*

Démonstration 5.4.3 .
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de Cauchy dans* $\mathcal{L}\ (E,F)$, *c'est à dire*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \ \exists N \in \mathbb{N}^*,\ \ \forall n \geq N,\ \ \forall p \geq 0,\ \ |||f_{n+p} - f_n||| \leq \varepsilon.$$

Or pour tout $x \in E$, pour tout $n \geq N$,

$$\begin{aligned} |||f_{n+p}(x) - f_n(x)||| &= ||(f_{n+p} - f_n)(x)|| \\ &\leq |||f_{n+p} - f_n|||||x|| \\ &\leq \varepsilon||x||(*) \end{aligned}$$

d'où, pour chaque $x \in E$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans F qui est complet, donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans F vers l'élément $f(x)$.
Montrons que $f \in \mathcal{L}\ (E, F)$,

1. *f est linéaire car :*
   $f_n \in \mathcal{L}\ (E, F) \longrightarrow \quad f_n(\lambda x) = \lambda f_n(x)$, *et*

   $$f_n(x + y) = f_n(x) + f_n(y),$$

   lorsque $n \longrightarrow \infty$, on obtient :

   $$f(\lambda x) = \lambda x, \text{ et } f(x + y) = f(x) + f(y),$$

   par unicité de la limite.

2. *f est continue :*
   en faisant tendre p vers $+\infty$ dans $(*)$ on obtient :

   $$\forall \varepsilon > 0,\ \ \exists N \in \mathbb{N},\ \ \forall n \geq N,\ \ \forall p \geq 0,\ \ ||f(x) - f_n(x)|| \leq \varepsilon||x||\ (**)$$

   Donc,

   $$||f(x)|| \leq \varepsilon||x|| + ||f_n(x)|| \leq \varepsilon||x|| + M||X||,$$

   avec $M = |||f_n|||$,d'où

   $$||f(x)|| \leq (\varepsilon + M)||x||,$$

   donc f est continue.
   Montrons que f_n converge vers f dans $\mathcal{L}\ (E, F)$:
   En effet, d'aprés $(**)$ on a :

   $$\forall \varepsilon > 0,\ \ \exists N \in \mathbb{N}^*,\ \ \forall n \geq N,\ \ \forall p \geq 0,\ \ ||f(x) - f_n(x)|| \leq \varepsilon||x||\ ,$$

   ce qui veut dire,

   $$||(f - f_n)(x)|| \leq \varepsilon||x||,$$

   or $|||f - f_n|||$ est la plus petite constante M vérifiant l'inégalitée suivante :

   $$||(f - f_n)(x)|| \leq M||x||,$$

   donc pour tout

$$n \geq N, \quad |||f - f_n||| \leq \varepsilon$$

i.e. f_n *tend vers* f *lorsque* n *tend vers* $+\infty$ *dans* $(\mathcal{L}\ (E, F), |||.|||)$. *Et par suite,* $(\mathcal{L}\ (E, F), |||.|||)$ *est un espace de Banach.*

Remarque 5.4.2 .
Lorsqu'on veut calculer la norme "trois barres", on procède toujours de la même façon suivante :

1. *À l'aide des majorations aussi fines que possible, on détermine la constante* M *la plus petite possible telle que :*
$$\forall x \in E\ , \quad ||f(x)|| \leq M\ ||x||.$$
D'après le corollaire 5.4.1. on en déduit alors que :
$$|||f||| \leq M.$$
2. *Puis on essaie de construire explicitement un vecteur* $x_0 \in E$ *tel que :*
$$||f(x)|| = M.$$
On a alors :
$$|||f||| \geq M.$$
3. *On en déduit finalement que* $|||f||| = M$.

Exemples 5.4.1 .

1. *Soit* f *l'application définie par :*
$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & \alpha x + \beta y\ , \quad avec\ \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}. \end{array}$$
On veut calculer la norme "trois barres" de l'application f, *en effet* f *est une application linéaire sur* $\mathbb{R}^2$ *qui est un espace vectoriel de dimension finie, donc* f *est continue sur* $\mathbb{R}^2$ *i.e.* $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{\in}, \mathbb{R})$.
Soit $X = (x, y) \in \mathbb{R}^2$,
   (a) *Pour la norme 1 :*
   on a $|||f||| = Sup_{||X||_1 \leq 1} \frac{|f(X)|}{||X||_1}$ *D'une part on a :*
$$\begin{aligned} |f(X)| = |f(x, y)| &= |\alpha x + \beta y| \\ &\leq |\alpha x| + |\beta y| \\ &= |\alpha||x| + |\beta||y| \\ &\leq (|x| + |y|) Sup\{|\alpha|, |\beta|\} \\ &= ||X||_1 Sup\{|\alpha|, |\beta|\} \end{aligned}$$
   Ce qui implique,

$$\frac{|f(X)|}{||X||_1} \leq Sup\{\alpha, \beta\}$$

D'où,

$$|||f||| = Sup_{||X||_1 \leq 1} \frac{|f(X)|}{||X||_1} \leq Sup\{|\alpha|, |\beta|\}.$$

D'autre part on a,

i. *Si* $\alpha \geq \beta$,
   on considère le vecteur $X_0 = (1,0) \in \mathbb{R}^2$,
   et on aura,

$$\begin{aligned} |||f||| &\geq |f(1,0)| \\ &= |\alpha| \\ &= Sup\{|\alpha|, |\beta|\} \end{aligned}$$

ii. *Si* $\beta \geq \alpha$,
   on considère le vecteure $X_0 = (0,1) \in \mathbb{R}^2$,
   et on aura,

$$\begin{aligned} |||f||| &\geq |f(0,1)| \\ &= |\beta| \\ &= Sup\{|\alpha|, |\beta|\} \end{aligned}$$

Donc , $|||f||| \geq Sup\{|\alpha|, |\beta|\}$,
et par suite on a

$$|||f||| = Sup\{|\alpha|, |\beta|\}.$$

(b) *Pour la norme 2 :*

$$\begin{aligned} \frac{|f(X)|^2}{||X||_2{}^2} &= \frac{f(x,y)^2}{||(x,y)||_2{}^2} \\ &= \frac{(\alpha x + \beta y)^2}{|x^2 + y^2|} \\ &= \alpha^2 + \beta^2 + \frac{2\alpha\beta xy - (\alpha^2 y^2 + \beta^2 x^2)}{x^2 + y^2} \\ &\leq \alpha^2 + \beta^2, \end{aligned}$$

car,

$$\begin{aligned} (\alpha y - \beta x)^2 &= (\alpha^2 y^2 + \beta^2 x^2) - 2\alpha\beta xy \geq 0 \\ &\Longrightarrow 2\alpha\beta xy - (\alpha^2 y^2 + \beta^2 x^2) \leq 0. \end{aligned}$$

d'où,

$$\frac{|f(X)|}{||X||_2} \leq \sqrt{\alpha^2+\beta^2},$$

ce qui implique,

$$|||f||| = Sup_{X\in\mathbb{R}^2}\frac{|f(X)|}{||X||_2} \leq \sqrt{\alpha^2+\beta^2}$$

On a aussi pour $X_0 = (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, et

$$||X||_2 = ||(\alpha,\beta)||_2 = \sqrt{\alpha^2+\beta^2}$$

$$\begin{aligned} |||f||| &\geq \frac{|f(X_0)|}{||X_0||_2} \\ &= \frac{|\alpha^2+\beta|}{\alpha^2+\beta^2} \\ &= \sqrt{\alpha^2+\beta^2} \end{aligned}$$

D'où :

$$|||f||| = \sqrt{\alpha^2+\beta^2}$$

(c) *Pour la norme infinie :*
D'une part on a :

$$\begin{aligned} |f(X)| &= |\alpha x + \beta y| \\ &\leq |\alpha||x| + |\beta||y| \\ &\leq Sup\{|x|,|y|\}(|\alpha|+|\beta|) \end{aligned}$$

Ce qui est équivalent à :

$$\frac{|f(X)|}{||X||_\infty} \leq |\alpha|+|\beta|,$$

d'où,

$$|||f||| \leq |\alpha|+|\beta|.$$

D'autre part on a :

i. *Si $\alpha, \beta \geq 0$, on considère le vecteur de $\mathbb{R}^2$ $X_0 = (1,1)$, avec $||X_0||_\infty = 1$,*
on a :

$$\begin{aligned} |||f||| &\geq \frac{|f(X_0)|}{||X_0||_\infty} \\ &= |\alpha+\beta| \\ &\geq |\alpha|+|\beta|. \end{aligned}$$

ii. *Si* $\alpha, \beta \leq 0$, *on considère le vecteur de* $\mathbb{R}^2$ $X_0 = (-1, -1)$, *avec* $||X_0||_\infty = 1$,
on a :

$$\begin{aligned} |-\alpha-\beta| &= |-(\alpha+\beta)| \\ &= -(\alpha+\beta) \end{aligned}$$

car $-(\alpha+\beta)$ *est positif*

$$\begin{aligned} |\alpha|+|\beta| &= -\alpha-\beta \\ &= -(\alpha+\beta). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |||f||| &\geq \frac{|f(X_0)|}{||X_0||_\infty} \\ &= |-\alpha-\beta| \\ &\geq |\alpha|+|\beta|. \end{aligned}$$

iii. *Si* $\alpha \geq 0, \beta \leq 0$, *on considère le vecteur de* $\mathbb{R}^2$ $X_0 = (1, -1)$, *avec* $||X_0||_\infty = 1$,
on a :

$$\begin{aligned} |||f||| &\geq |\alpha-\beta| \\ &\geq |\alpha|+|\beta| \\ &= +\alpha-\beta. \end{aligned}$$

iv. *Si* $\alpha \leq 0, \beta \geq 0$, *on considère le vecteur de* $\mathbb{R}^2$ $X_0 = (-1, 1)$, *avec* $||X_0||_\infty = 1$,
on a :

$$\begin{aligned} |||f||| &\geq |-\alpha+\beta| \\ &\geq |\alpha|+|\beta| \\ &= -\alpha+\beta. \end{aligned}$$

Donc, pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^2$, *on a :*

$$|||f||| \geq |\alpha|+|\beta|.$$

D'où l'égalité suivante :

$$|||f||| = |\alpha|+|\beta|.$$

2. *Soit S l'espace des suites réelles qui convergent vers 0.*
Pour $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in S$, *on pose :*

$$||x|| = Sup_{n\in\mathbb{N}^*}|x_n|.$$

Soit l'application suivante : $u(x) = (\frac{x_n}{n})_{n\geq 1}$.
On veut calculer la norme "trois barres" de cet application u, commençons d'abord par montrer que u est bien définie c'est à dire linéaire et continue sur S.

(a) *u est bien définie, en effet, soit* $x \in S$*, on a* $|\frac{x_n}{n}| \leq |x_n| \to 0$, $n \to +\infty$*, donc* $u(x)$ *est aussi convergente vers 0, i.e.* $u(x) \in S$ *.*

(b) *u est linéaire, en effet, soit* $x, y \in S$ *et* $\lambda \in \mathbb{R}$ *:*
On a,

$$\begin{aligned} u(x+\lambda y) &= \frac{x_n + \lambda y_n}{n} \\ &= \frac{x_n}{n} + \lambda \frac{y_n}{n} \\ &= u(x) + \lambda u(y). \end{aligned}$$

(c) *u est continue, en effet,*

$$\begin{aligned} ||u(x)|| &= Sup_{n\geq 1}|\frac{x_n}{n}| \\ &\leq Sup_{n\geq 1}|x_n| \\ &= ||x||, \end{aligned}$$

donc u est continue et $|||u||| \leq 1$.

On a d'autre part,

$$\begin{aligned} |||u||| &= Sup_{||x||=1}|u(x)| \\ &\geq ||u(x_0)|| \\ &= Sup_{n\geq 1}|\frac{x_{0n}}{n}| \\ &= 1. \end{aligned}$$

si on considére le vecteur $x_0 = (1, 0, 0, 0, ...) \in \mathcal{S}$,
donc $|||u||| = 1$.

Bibliographie

[1] Azzeddine El Baraka, polycopié "Topologie générale".

[2] Bertrand HAUCHECORNE,"Les contre-exemples en mathématiques", 2 éme édition, ellipses édition marketing S.A.2007.

[3] Nawfal El Hage Hassan, "Topologie générale et espaces normés",Dunod, 2011.

[4] Mahdou Najib,"Strucures Algébriques", Licence de Mathématiques S5.

[5] Raphael Danchin, "Cours de topologie et d'analyse fonctionnelle", Internet.