كلية العلوم و التقنيات فاس
ⵜⴰⵙⴷⵍⵉⵙⵜ ⵏ ⵜⵎⴰⵙⵙⴰⵏⵉⵏ ⴷ ⵜⵉⵏⵉⵍⵉⵏ
Faculté des Sciences et Techniques de Fès

جامعة سيدي محمد بن عبد الله
Université Sidi Mohamed Ben Abdellah

Licence Mathématiques et Applications

(MA)

MEMOIRE DE FIN D'ETUDES

Pour l'obtention du Diplôme de Licence Sciences et Techniques (LST)

Inégalités de type Gronwall et quelques applications

Réalisé par : ADAM Andjib

Encadré par : Pr. EL AYADI Rachid

Soutenu le 05/07/2022

Devant le jury composé de :

-Pr. CHAIBI Ghizlane	FST FES
-Pr. EL AYADI Rachid	FST FES
-Pr. HILALI Abdelmajid	FST FES
-Pr. OUADGHIRI Anisse	FST FES

Année Universitaire 2021 / 2022

FACULTE DES SCIENCES ET TECHNIQUES FES – SAISS

B.P. 2202 – Route d'Imouzzer – FES

☎ 212 (0)5 35 61 16 86 – Fax : 212 (0)5 35 60 82 14

Site web: http://www.fst-usmba.ac.ma

" *Bien consommer ne veut pas dire consommer en qualité et en quantité, mais de savoir d'où viennent ces choses de qualité.*"

Remerciements

Avant tout, je remercie ALLAH qui m'a toujours donné la patience et le courage durant ces années d'étude.

Je tiens ici à exprimer ma profonde gratitude envers mon encadrant Pr. EL AYADI Rachid enseignant de la faculté des sciences et techniques de Fès, à qui je profère toute ma reconnaissance de m'avoir encadré dans ce projet, encouragé et discuté tout au long de mon parcourt. Merci pour sa bonne volonté, la persévérance, sa bonté, sa patience et ses précieux conseils ainsi que ses remarques pertinentes.

J'adresse mes vifs remerciements aux membres du jury Pr. CHAIBI Ghizlane, Pr. EL AYADI Rachid, Pr. HILALI Abdelmajid et Pr. OUADGHIRI Anisse professeurs de la faculté des sciences et techniques de Fès, pour l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail en acceptant de l'examiner et l'enrichir par leurs remarques.

Je saurai jamais assez remercier mes parents, frères et sœurs, qui par leurs prières et encouragements, j'ai pu surmonter des nombreux obstacles.

Pour finir, je souhaite adresser mes remerciements à l'ensemble des professeurs de mathématiques de la faculté des sciences et techniques de Fès ainsi que tous ceux, qui m'ont, de près comme de loin, aidé pendant la réalisation de cette mémoire.

Table des matières

Introduction

Les inégalités jouent un rôle important dans diverses branches de mathématiques modernes telles que la théorie des espaces de Hilbert, des probabilités et des statistiques, l'analyse réelle, l'analyse complexe, l'analyse numérique, ainsi que la théorie qualitative des équations différentielles et des équations aux dérivées partielles...etc. Elles sont un outil puissant et indispensable. Le fondement mathématique de cette théorie a été établi en partie au cours de 18ème et 19ème siècles par d'éminents mathématiciens tels que : Gauss, Cauchy, Tchebychev, dans les années qui suivirent, le sujet attira encore plus de chercheurs : Poincaré, Lyapounov, Gronwall, Hölder, Hadamard, Polva, Bellman et Ostrowski.

L'une des méthodes les plus utiles pour étudier un système d'équation différentielle non linéaire est de comparer ce système à une équation de premier degré. Cependant, il est difficile d'estimer explicitement les solutions données par la méthode de comparaison. En effet, dans plusieurs applications, les estimations explicites sont plus utiles lors de l'étude du comportement des solutions de tels systèmes. Il s'avère que l'utilisation des inégalités intégrales donne des bornes explicites pour les fonctions inconnues. Pour ces raisons, la mise en œuvre des inégalités intégrales dans l'étude des propriétés des solutions des équations différentielles est indispensable.

L'inégalité de Gronwall qui est un outil fondamental en mathématiques a attiré l'attention de plusieurs mathématiciens et plusieurs généralisations sont apparues dans la littérature mathématique. Inspiré par cette inégalité, Bellman, en 1943, a introduit une inégalité plus générale qui porte le nom d'inégalité de Gronwall-Bellman et en 1956, Bihari a généralisé cette dernière. Cette mémoire propose quelques résultats classiques des inégalités de Gronwall unidimensionnelles ainsi que quelques unes de leurs généralisations. Au chapitre 1, les notions clés d'espaces vectoriels normés, des applications continues, différentiables sont introduites. La connaissance de telles notions est fondamentale pour la suite de ce chapitre. Au chapitre 2, on donne quelques inégalités intégrales de Gronwall linéaires et certaines applications de ces inégalités dans le domaine des équations différentielles. Au chapitre 3, on cite quelques inégalités intégrales de Gronwall non linéaires ainsi quelques applications de ces inégalités. Au chapitre 4, on parlera de quelques inégalités de Gronwall à retard avec ses applications aux équations à retard. En fin, le chapitre 5, est consacré aux inégalités de Gronwall discrètes et quelques unes de ses applications.

Chapitre 1

Préliminaires et Rappels

On commence à citer dans ce chapitre quelques définitions, rappels et propriétés de base qui seront utilisés par la suite soit explicitement ou implicitement. Le lecteur pourra esquiver la lecture de ce chapitre.

Soient $\boldsymbol{E}$ et $\boldsymbol{F}$ des espaces vectoriels normés.

Notations :
$\mathcal{L}(E, F)$: ensemble des applications linéaires continues de E vers F.
$\mathbf{R}$: ensemble des nombres réels.
$\mathbf{R}_+$: ensemble des nombres réels positifs.
$\mathbf{N}$: ensemble des nombres entiers naturels.
$\mathbf{R}^*$: ensemble des nombres réels non nul.
$C(I, J)$: ensemble des fonctions continues de I vers J.
$Dom(g)$: domaine de g.
C^k : ensemble des fonctions de classe C^k.

Définition 1.0.1. *Une fonction $f : E \longrightarrow F$ est dit continue en $x_0 \in E$ si :*

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \|x - x_0\|_E < \delta,\ \|f(x) - f(x_0)\|_F < \epsilon \tag{1.1}$$

Définition 1.0.2. *Une fonction $f : E \longrightarrow F$ est dit différentiable en $a \in U$ (un ouvert de E), s'il existe une application linéaire continue $g : E \longrightarrow F$ telle que :*

$$\lim_{x \to a} \frac{\|f(x) - f(a) - g(x-a)\|_F}{\|x - a\|_E} = 0 \tag{1.2}$$

Définition 1.0.3. *Soient $f : E \longrightarrow F$ une application. On dit que f est une application linéaire si : $\forall x, y \in E$ et $\forall \alpha \in \mathbf{R}$*

1. $f(x + y) = f(x) + f(y)$
2. $f(\alpha x) = \alpha f(x)$

Remarque 1.0.1. *Pour montrer qu'une application est linéaire, on peut vérifier la condition équivalente de la définition qui est : $\forall x, y \in E$ et $\forall \alpha \in \mathbf{R}$,*

$$f(x + \alpha y) = f(x) + \alpha f(y).$$

Proposition 1.0.1. *Soit $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire. On a les équivalences suivantes :*

1. *f est continue en $\mathbf{0}$.*
2. *f est continue en $x_0 \in E$.*

3. f vérifie l'inégalité suivante des normes :

$$\exists k > 0, \ \forall x \in E, \ \|f(x)\|_F \leq k \times \|x\|_E$$

Remarque 1.0.2. *[8] Soit I un intervalle de R. Soit l'application $f : I \longrightarrow F$ qui à x associe $f(x) \in F$. On dit que f est dérivable au point $a \in I$ s'il existe $l \in F$ tel que :*

$$l = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

on pose $l = f'(a) \in F$; $f'(a)$ est la dérivée de f au point a.
Dans la définition précédente, on a défini $f'(a) = (df)(a)$ comme un élément de $\mathcal{L}(\mathrm{R}, F)$, on enlèvera le doute en montrant que $\mathcal{L}(\mathrm{R}, F)$ est isomorphe à F (on note : $\mathcal{L}(\mathrm{R}, F) \cong F$). Ce qui donne le résultat suivant.

Proposition 1.0.2. *$f : I \longrightarrow F$ est différentiable en a si et seulement si elle est dérivable en a et on a $f'(a) = (df)(a)$*

En effet, soit l'application $\phi : F \longrightarrow \mathcal{L}(\mathrm{R}, F)$ définie par :

$$\Omega = \phi(l) \text{ définie par } \Omega(x) = xl \text{ pour tout } x \in \mathrm{R}$$

1. *Il est facile de vérifier que ϕ est linéaire.*
2. *ϕ est une isométrie de norme égale à 1 : $\|\phi(l)\| = \|\Omega\|_{\mathcal{L}(\mathrm{R},F)} = \sup\limits_{|x| \leq 1} |x| \|l\| = \|l\|$ (D'après la propriété 2 d'une norme).*
   En particulier, ça entraine que ϕ est injective.
   On rappelle que la norme d'une application linéaire de E vers F est définie par :

   $$\|\phi\|_{\mathcal{L}(E,F)} = \sup_{\|x\|_E \leq 1} \|\phi(x)\|_F = \sup_{\|x\|_E = 1} \|\phi(x)\|_F$$

3. *ϕ est surjective : soit $g \in \mathcal{L}(\mathrm{R}, F)$. Posons $l = g(1) \in F$. Ce qu'implique que $\phi(l) = g$. On identifie $g \in \mathcal{L}(\mathrm{R}, F)$ avec l'élément $l = g(1)$ de F.*

   $$\left\| \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} - l \right\| = \left\| \frac{f(t) - f(t_0) - (t - t_0)l}{t - t_0} \right\| = \left\| \frac{f(t) - f(t_0) - \Omega(t - t_0)}{t - t_0} \right\|$$

   D'où la compatibilité des deux définitions.

Remarque 1.0.3. *La propriété (1.2) est équivalente à l'une des propriétés suivantes :*

1. $\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in U, \|x - a\|_E < \eta \Rightarrow \|f(x) - f(a) - g(x - a)\|_F < \epsilon \|x - a\|_E$
2. $\|f(x) - f(a) - g(x - a)\|_F = o(\|x - a\|_E)$ *pour x voisin de a.*
3. $\|f(a + h) - f(a) - g(h)\|_F = o(\|h\|_E)$ *pour h voisin de 0.*

Définition 1.0.4.

1. *Une fonction est différentiable sur E, si elle est différentiable en tout point de E.*
2. *Une fonction est continue sur E, si elle est continue en tout point de E.*

Remarque 1.0.4. *Une fonction dérivable est toujours continue. Mais l'inverse n'est pas toujours vraie.*

Un exemple simple sur l'étude de la dérivabilité d'une fonction montre que la fonction $t \longmapsto |t|$ est continue en 0 mais non dérivable en 0.

Le résultat suivant sera très utile dans la suite pour justifier la dérivabilité des fonction particulières (voir la proposition 1.0.3).

Proposition 1.0.3. *Soit I un intervalle de* $\mathbb{R}$.

Soient $a \in I$ *et* $f : t \longmapsto f(t) = \int_a^t g(s)ds$ *une fonction.*

Si $t \longmapsto g(t)$ *est continue sur* I *alors* $t \longmapsto f(t) = \int_a^t g(s)ds$ *est dérivable sur* I *et sa dérivée* $f'(t) = g(t)$ *est continue sur* I*. Dans ce cas, on dit que* f *est de classe* C^1 *sur* I*.*

Définition 1.0.5. *On dit qu'une fonction est de classe* C^k *sur un intervalle I, si elle est* k *fois dérivable sur I et sa dérivée* k^{me} *est continue sur* I*.*

Définition 1.0.6. *Soit* $(x_n)_n$ *une suite de* E*. On dit que* $(x_n)_n$ *est une suite de Cauchy dans* E *si :*

$$\forall \epsilon > 0, \ \exists n_0 \in \mathbb{N}, \ \forall n, m \geq n_0, \ \|x_n - x_m\|_E < \epsilon.$$

Définition 1.0.7. *(Espace de* Banach*) Un espace vectoriel normé* $(E, \|.\|)$ *est un espace de Banach s'il est complet. En d'autre terme, si toute suite de Cauchy de* E *converge dans* E*, on dit que* E *est un espace complet.*

Définition 1.0.8. *[8] Soit* $f : E \longrightarrow F$ *une fonction. On dit que* f *admet une limite* $l \in F$ *en* $x_0 \in E$ *si :*

$$\forall \epsilon > 0, \ \exists \delta > 0, \ \|x - x_0\|_E < \delta, \ \|f(x) - l\|_F < \epsilon.$$

Proposition 1.0.4. *(Critère séquentiel de la limite)* f *admet une limite* $l \in F$ *en* $x_0 \in E$ *si et seulement si pour toute suite* $(x_n) \subset E$ *telle que* $x_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} x_0$, $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = l$ *et elle est indépendante de* (x_n)*.*

Théorème 1.0.1. *(Inégalité des accroissements finis) Soit* a *et* b *deux points de* $\mathbb{R}$, $a < b$*. Soit* F *un espace vectoriel normé sur* $\mathbb{R}$*. Soit* $f : [a, b] \longrightarrow F$ *une application continue.*

1. *Si* f *est différentiable sur* $]a, b[$*, et s'il existe une constante* $M > 0$ *telle que pour tout* $x \in]a, b[$ *on a* $\|f'(x)\|_F \leq M$ *alors*

$$\|f(b) - f(a)\| \leq M(b - a).$$

2. *Plus généralement, si* $g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *est une application continue, et si*
   (i) f *et* g *sont différentiable sur* $]a, b[$
   (ii) $\forall x \in]a, b[, \ \|f'(x)\|_F \leq g'(x)$
   Alors on a

$$\|f(b) - f(a)\| \leq g(b) - g(a)$$

Corollaire 1.0.1. *(Inégalité de la moyenne) Soit* U *un ouvert convexe de* E *et* $f : U \longrightarrow F$ *une application différentiable. On suppose que*

$$\exists k \geq 0, \ \forall x \in U, \ \|f'(x)\| \leq k.$$

Alors pour tous $x, y \in U$ *on a*

$$\|f(x) - f(y)\| \leq k\|x - y\|$$

Chapitre 2

Inégalités de Gronwall linéaires

Dans ce chapitre, on va citer et démontrer quelques inégalités intégrales continues linéaires unidimensionnelles de base, qui ont trouvé des applications importantes dans le domaine des équations intégrales et équations différentielles. Et à la fin de ce chapitre, on verra quelques applications de ces inégalités.

2.1 Inégalité différentielle linéaire

Le lemme suivant sera très utile pour démontrer certains résultat de Gronwall, Bihari...etc. Certains l'appellent *Inégalité différentielle linéaire ou lemme de Gronwall.* Elle est l'une des très célèbre des inégalités de ce type, qui joue un rôle crucial dans l'analyse, à titre d'exemple, l'étude de l'existence, de l'unicité et de la stabilité et des estimations des solutions aux équations différentielles. (le lecteur pourra consulter [23] pour plus de détails).

Lemme 2.1.1. *(Lemme de Gronwall [9]) Soient b et f deux fonctions continues sur $J = [\alpha, +\infty[$. Soit v une fonction différentiable sur J, et on suppose que pour tout $t \in J$,*

$$v'(t) \leq b(t)v(t) + f(t), \tag{2.1}$$

alors pour tout $t \in J$, on a

$$v(t) \leq v(\alpha) \times \exp\left(\int_\alpha^t b(s)ds\right) + \int_\alpha^t f(s) \times \exp\left(\int_s^t b(u)du\right) ds. \tag{2.2}$$

Preuve : l'inégalité (2.1) donne :

$$(v'(s) - b(s)v(s)) \times \exp\left(\int_s^t b(u)du\right) \leq f(s) \times \exp\left(\int_s^t b(u)du\right)$$

$$i.e : \frac{d}{ds}\left\{v(s)\exp\left(\int_s^t b(u)du\right)\right\} \leq f(s) \times \exp\left(\int_s^t b(u)du\right) \tag{2.3}$$

Puis en intégrant (2.3) entre α et t, on obtient l'inégalité suivante :

$$v(t) - v(\alpha) \times \exp\left(\int_\alpha^t b(s)ds\right) \leq \int_\alpha^t f(s) \times \exp\left(\int_s^t b(u)du\right) ds$$

$$i.e : v(t) \leq v(\alpha) \times \exp\left(\int_\alpha^t b(s)ds\right) + \int_\alpha^t f(s) \times \exp\left(\int_s^t b(u)du\right) ds \tag{2.4}$$

Ainsi, termine la preuve du lemme 2.1.1.

2.2 Quelques inégalités intégrales linéaires

Théorème 2.2.1. *(Inégalités de Gronwall [10]) Soit u une fonction continue, définie dans un intervalle $I = [\alpha, \alpha + h]$ et pour tout $t \in I$,*

$$0 \leq u(t) \leq \int_{\alpha}^{t} [bu(s) + a] ds \tag{2.5}$$

où $a, b \in \mathrm{R}_{+}$, alors :

$$\forall t \in I,\ 0 \leq u(t) \leq ah \exp(bh). \tag{2.6}$$

Preuve : On considère la fonction $g(t) := \int_{\alpha}^{t} [bu(s) + a] ds$ qui est bien dérivable (d'après la proposition 1.0.3) avec $a, b \in \mathrm{R}_{+}$, $g(\alpha) = 0$ et $g'(t) = bu(t) + a$
D'après (2.5), on obtient :

$$g'(t) \leq bg(t) + a$$

Le lemme 2.1.1 appliqué à g donne :

$$g(t) \leq a \int_{\alpha}^{t} \exp\left(\int_{s}^{t} bdu\right) ds \tag{2.7}$$

Or : $b|t - s| \leq bh, \forall t, s \in I$, la croissance de $\exp$ et $\int$ donne l'inégalité souhaitée (2.6)

Remarque 2.2.1. Peano *a explicitement traité le cas particulier du théorème 2.2.1 ci dessus avec $a = 0$ et quelques résultats généraux sur les inégalités différentielles et les solutions maximales et minimales des équations différentielles [22].*

Le théorème précédant a été énoncer et démontrer pour la première fois par Gronwall, *ce qui ne cesse de soulever la curiosité des chercheurs tels que* Bihari, Bellman...*(Voir les résultats qui suivent) .*

Théorème 2.2.2. *(*Inégalité de Bellman *[3])*
Soient y et g deux fonctions continues positives pour tout $t \in [0, T]$ tel que l'inégalité suivante est satisfaite : $\forall t \in [0, T]$,

$$y(t) \leq \eta + \int_{0}^{t} g(s)y(s) ds \tag{2.8}$$

avec η une constante positive. Alors pour tout $t \in [0, T]$, on a

$$y(t) \leq \eta \exp\left(\int_{0}^{t} g(s) ds\right) \tag{2.9}$$

Preuve : On considère la fonction v définie par $t \longmapsto v(t) = \eta + \int_{0}^{t} g(s)y(s) ds$ qui est bien dérivable et (2.8) résulte que :

$$v'(t) = g(t)y(t) \leq \eta g(t) + g(t) \times \int_{0}^{t} g(s)y(s) ds = g(t)v(t)$$

En multipliant l'inégalité précédente par $\exp(-\int_{0}^{t} g(s) ds)$, on obtient :

$$(v'(t) - g(t)v(t)) \exp\left(-\int_{0}^{t} g(s) ds\right) \leq 0 \tag{2.10}$$

$$i.e: \frac{d}{ds}\left\{v(s)\exp\left(-\int_0^s g(u)du\right)\right\} \leq 0. \tag{2.11}$$

Dès lors, on intègre dans $[0, t]$ et en multipliant l'inégalité précédente par $\exp(\int_0^s g(u)du) \geq 0$, on obtient l'inégalité souhaitée (2.9).

Corollaire 2.2.1. *[23] Soient u et b deux fonctions continues positives sur $[\alpha, +\infty[$, et soit pour tout $t \in [\alpha, T]$,*

$$u(t) \leq a\exp(-\gamma(t-\alpha)) + \int_\alpha^t \exp(-\gamma(t-s))b(s)u(s)ds \tag{2.12}$$

avec $a \geq 0$ et γ des constantes. Alors pour tout $t \in [\alpha, T]$, on a

$$u(t) \leq a\exp\left(\gamma(t-\alpha) + \int_\alpha^t b(s)ds\right) \tag{2.13}$$

Preuve :
On considère la fonction $\omega(t) = u(t)\exp(\gamma t)$, De l'hypothèse du corollaire, on obtient : $\forall t \geq \alpha$,

$$\omega(t) = \exp(\gamma t)u(t) \leq a\exp(\gamma t - \gamma t + \gamma\alpha) + \int_\alpha^t \exp(-\gamma t + \gamma t + \gamma s)b(s)u(s)ds$$

$$\Longleftrightarrow \omega(t) \leq a\exp(\gamma\alpha) + \int_\alpha^t b(s)\omega(s)ds \tag{2.14}$$

(2.14) qui satisfait l'hypothèse du théorème 2.2.2 résulte que :

$$\omega(t) \leq a\exp(\gamma\alpha) \times \exp\left(\int_\alpha^t b(s)ds\right) \tag{2.15}$$

Il s'en suit que :

$$u(t) \leq a\exp\left(-\gamma(t-\alpha) + \int_\alpha^t b(s)ds\right) \tag{2.16}$$

Ainsi termine la preuve du corollaire.

Remarque 2.2.2. *L'importance et la puissance de ce type d'inégalités en analyse, ont fait l'objet d'améliorations et généralisations du théorème 2.2.2.*

Remarque 2.2.3. *Le théorème 2.2.2 peut fournir des bornes de solution en terme de solution d'une équation intégrale linéaire Connexe*

$$v(t) \leq \eta + \int_0^t g(s)v(s)ds$$

et les fondements de base de la théorie des équations différentielles. Elle a été introduite et étendue dans des divers contextes tel que : dans l'itération de type Picard-Cauchy *pour établir l'existence et l'unicité des solutions. Des inégalités de ce type sont souvent rencontrés dans la théorie des perturbations et de la stabilité des équations différentielles.*

Bellman a montré la variante suivante du théorème pour étudier le comportement asymptotique des solutions des équations différentielles linéaires [4].

Théorème 2.2.3. *(Inégalité de Bellman [4]) Soient u et f deux fonctions continues positives dans $J = [\alpha, \beta]$, et soit η une fonction continue, positive et croissante dans J satisfaisant pour tout $t \in J$,*

$$u(t) \leq \eta(t) + \int_{\alpha}^{t} f(s)u(s)ds. \tag{2.17}$$

Alors pour tout $t \in J$, on a

$$u(t) \leq \eta(t) \times \exp\left(\int_{\alpha}^{t} f(s)ds\right) \tag{2.18}$$

Preuve : On suppose que $\eta(t) > 0$ et on considère la fonction $\omega(t) = \dfrac{u(t)}{\eta(t)}$, alors dans (2.17) et puisque η est croissante, on a :

$$\omega(t) \leq 1 + \int_{\alpha}^{t} f(s)\omega(s)ds$$

Le *théorème 2.2.2* résulte que

$$\omega(t) \leq \exp\left(\int_{\alpha}^{t} f(s)ds\right)$$

D'où le résultat.

Remarque 2.2.4. *Dans le cas où $\eta(t)$ est simplement positive, on peut faire la même démonstration en remplaçant $\eta(t)$ par $\eta(t) + \epsilon$ avec $\epsilon > 0$ une constante arbitraire très petite et ensuite passer à la limite.*

Théorème 2.2.4. *[4] Soient f une fonction continue positive définie dans $\mathbf{R}_+$ telle que $\int_0^{+\infty} f(s)ds < +\infty$ et η est une fonctions continue positive et décroissante définie sur $\mathbf{R}_+$. Si u est une fonction continue positive bornée dans $\mathbf{R}_+$ et vérifie : $\forall t \in \mathbf{R}_+$,*

$$u(t) \leq \eta(t) + \int_{t}^{+\infty} f(s)u(s)ds, \tag{2.19}$$

alors pour tout $t \in \mathbf{R}_+$,

$$u(t) \leq \eta(t) \times \exp\left(\int_{t}^{+\infty} f(s)ds\right). \tag{2.20}$$

Preuve : Soit $\eta(t) > 0$, l'hypothèse (2.19) résulte que :

$$\frac{u(s)}{\eta(s)} \leq 1 + \int_{s}^{+\infty} f(\tau)\frac{u(\tau)}{\eta(\tau)}d\tau. \tag{2.21}$$

On définit une fonction $z(t)$ à droite de (2.21), définie par $z(s) = 1 + \int_{s}^{+\infty} f(\tau)\dfrac{u(\tau)}{\eta(\tau)}d\tau$. on a : $z(+\infty) = 1$.

$\rightarrow z'(s) = -f(s)\dfrac{u(s)}{\eta(s)} \geq -f(s)z(s)$ En intégrant de $[t, +\infty]$ dans l'inégalité précédente, on obtient :

$$\int_{t}^{+\infty} \frac{z'(s)}{z(s)}ds \geq \int_{t}^{+\infty} -f(s)ds$$

$$i.e : \int_{+\infty}^{t} \frac{z'(s)}{z(s)}ds \leq \int_{t}^{+\infty} f(s)ds$$

$$[\ln |z(s)|]_{+\infty}^{t} \leq \int_t^{+\infty} f(s)ds$$

D'où :

$$z(t) \leq \exp\left(\int_t^{+\infty} f(s)ds\right)$$

Il s'en suit que :

$$u(t) \leq \eta(t) \times \exp\left(\int_t^{+\infty} f(s)ds\right)$$

On obtient l'inégalité cherchée.
Si $\eta(t)$ est tout simplement positive, on remplace $\eta(t)$ par $\eta(t) + \epsilon$ avec $\epsilon > 0$ une constante arbitraire très petite, et faire tendre ϵ vers 0. Le raisonnement est similaire.

Théorème 2.2.5. *(Rodrigues [27]) Soient f et g deux fonctions continues positives définies sur $\mathbb{R}_+$. Soit y une fonction continue décroissante strictement positive pour tout $t \geq \alpha$ et α suffisamment grand tel que :*

$$\beta = \int_\alpha^{+\infty} g(s)ds + \int_\alpha^{+\infty} f(s)ds < 1. \tag{2.22}$$

On suppose que u est une fonction continue positive telle que $y \times u$ est bornée et pour tout $t \geq \alpha$, on a :

$$u(t) \leq C + \int_\alpha^t f(s)u(s)ds + \frac{1}{y(t)} \int_t^{+\infty} y(s)g(s)u(s)ds \tag{2.23}$$

avec $C \geq 0$ une constante. Alors pour tout $t \in \mathbb{R}_+$,

$$u(t) \leq \left(\frac{C}{1-\beta}\right) \times \exp\left(\frac{1}{1-\beta}\int_t^{+\infty} g(s)ds\right). \tag{2.24}$$

Preuve : Soit $v(t) := \max\limits_{\alpha \leq s \leq t} u(s)$. Alors $v(t)$ est une fonction continue croissante telle que : $u(t) \leq v(t)$ et $y(t) \times v(t)$ est bornée pour tout $t \in \mathbb{R}_+$. Pour tout $t \geq \alpha$, il existe $t_1 \in [\alpha, t]$ satisfaisant $v(t) = u(t_1)$ (D'après le théorème Weierstrass).
D'où (2.23) résulte que :

$$v(t) \leq C + \int_\alpha^{t_1} f(s)v(s)ds + \frac{1}{y(t_1)} \int_{t_1}^{+\infty} y(s)g(s)v(s)ds \tag{2.25}$$

Sachant que :

$$\int_{t_1}^{+\infty} y(s)g(s)v(s)ds = \int_{t_1}^{t} y(s)g(s)v(s)ds + \int_t^{+\infty} y(s)g(s)v(s)ds,$$

la décroissance de y et la croissance de v sur $[t_1, t]$ donne l'inégalité suivante :

$$\int_{t_1}^{+\infty} y(s)g(s)v(s)ds \leq y(t_1) \times v(t) \int_\alpha^t g(s)ds + \int_t^{+\infty} y(s)g(s)v(s)ds. \tag{2.26}$$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow \frac{1}{y(t_1)} \int_{t_1}^{+\infty} y(s)g(s)v(s)ds &\leq v(t) \int_\alpha^t g(s)ds + \frac{1}{y(t_1)} \int_t^{+\infty} y(s)g(s)v(s)ds \\ &\leq v(t) \int_\alpha^t g(s)ds + \frac{1}{y(t)} \int_t^{+\infty} y(s)g(s)v(s)ds \end{aligned}$$

Et par suite (2.25) résulte que :

$$v(t) \leq C + v(t)\left\{\int_{\alpha}^{+\infty} f(s)ds + \int_{\alpha}^{+\infty} g(s)ds\right\} + \frac{1}{y(t)}\int_{t}^{+\infty} y(s)g(s)v(s)ds$$

ça implique :

$$v(t) \times y(t)\left(1 - \left[\int_{\alpha}^{+\infty} f(s)ds + \int_{\alpha}^{+\infty} g(s)ds\right]\right) \leq C \times y(t) + \int_{t}^{+\infty} y(s)g(s)v(s)ds$$

Or $1 - \beta > 0$ par hypothèse, d'où :

$$y(t) \times v(t) \leq \frac{1}{1-\beta}\left(C \times y(t) + \int_{t}^{+\infty} y(s)g(s)v(s)ds\right). \tag{2.27}$$

Dès lors, (2.27) satisfait l'hypothèse du théorème 2.2.4, on obtient :

$$y(t) \times v(t) \leq \frac{C \times y(t)}{1-\beta}\exp\left(\frac{1}{1-\beta}\int_{t}^{+\infty} g(s)ds\right). \tag{2.28}$$

Ainsi termine la preuve du théorème .

Théorème 2.2.6. *[24] On suppose que g est une fonction positive intégrable dans $[0, T](0 < T)$, f et y sont des fonctions positives* absolument continues *dans $[0, T]$ vérifiant pour tout $t \in [0, T]$,*

$$y(t) \leq f(t) + \int_{0}^{t} g(s)y(s)ds. \tag{2.29}$$

Alors nous avons :

$$y(t) \leq f(0)\exp\left(\int_{0}^{t} g(s)ds\right) + \int_{0}^{t} \exp\left(\int_{s}^{t} g(u)du\right) f'(s)ds. \tag{2.30}$$

Avant de passer à la preuve de ce théorème, nous allons rappeler quelques notions qui seront utiles pour prouver ce théorème.

Définition 2.2.1. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. on dit qu'une fonction $F : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est absolument continue si :*

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 / \ \forall(([a_n, b_n])_{n \leq N} \subset I \text{ disjoints}), \ \sum_{n \geq 0}(b_n - a_n) < \delta, \ \sum_{n \geq 0}|F(a_n) - F(b_n)| < \epsilon.$$

Voici un résultat connu sur la *continuité absolue.*

Proposition 2.2.1. *[36]*

1. *F est* absolument continue *sur $[a, b]$ si et seulement s'il existe une fonction f intégrable sur $[a, b]$ (au sens de Lebesgue) tel que pour tout $x \in [a, b]$,*

$$F(x) - F(a) = \int_{a}^{x} f(t)dt$$

2. *D'après le second théorème fondamental de l'analyse, si sur ($[a, b]$) F est dérivable partout et à dérivée intégrable, alors F est absolument continue.*
3. *Le produit de deux fonctions absolument continue est continue .*
4. *Si F est absolument continue, sur $[a, b]$ alors :*
   — *Elle est continue.*
   — *Elle est dérivable presque partout.*

Passons maintenant à la preuve du théorème précédent.

Preuve : Puisque $f(t)$ et $y(t)$ sont des fonctions positives *absolument continues* dans $[0,T]$, $y'(t)$ et $f'(t)$ existent presque tout $t \in [0,T]$. Alors, si on prend $\omega(t) = f(t) + \int_0^t g(s)y(s)ds$, on a pour presque tout $t \in [0,T]$ et d'après (2.29) :

$$\omega'(t) = f'(t) + g(t)y(t) \leq f'(t) + \omega(t)g(t)$$

D'après le lemme 2.1.1, on obtient :

$$\omega(t) \leq \omega(0) \times \exp\left(\int_0^t g(s)ds\right) + \int_0^t f'(s) \times \exp\left(\int_s^t g(u)du\right) ds \tag{2.31}$$

D'où :

$$y(t) \leq \omega(t) \leq \omega(0) \times \exp\left(\int_0^t g(s)ds\right) + \int_0^t f'(s) \times \exp\left(\int_s^t g(u)du\right) ds \tag{2.32}$$

Ce qui achève la preuve .

Remarque 2.2.5. *Si* $f(t) \equiv \eta = constante > 0$, *on tombe sur le théorème 2.2.2. c-à-d :*

$$y(t) \leq \eta \times \exp\left(\int_0^t g(s)ds\right)$$

Ce qui généralise le théorème 2.2.2.

Théorème 2.2.7. *(Gollwitzer [11]) Soient* $u,\ f,\ g$ *et* h *des fonctions continues positives dans* $J = [\alpha, \beta]$, *et pour tout* $t \in J$,

$$u(t) \leq f(t) + g(t) \int_\alpha^t h(s)u(s)ds. \tag{2.33}$$

Alors pour tout $t \in J$,

$$u(t) \leq f(t) + g(t) \int_\alpha^t h(s)f(s) \exp\left(\int_s^t h(\tau)g(\tau)d\tau\right) ds \tag{2.34}$$

Preuve : Soit $z(t) := \int_\alpha^t h(s)u(s)ds$. Alors $z(\alpha) = 0$, et (2.33) donne,

$$z'(t) = h(t)u(t) \leq h(t)f(t) + h(t)g(t)z(t)$$

En exploitant le lemme 2.1.1 et puisque $g(t) \geq 0$, on obtient :

$$g(t) \times z(t) \leq g(t) \times \int_\alpha^t h(s)f(s) \exp\left(\int_s^t h(\tau)g(\tau)d\tau\right) ds$$

Dès lors, $u(t) \leq f(t) + g(t) \times z(t)$, le résultat est clair.

Dans ce chapitre, on a cité quelques inégalités intégrales linéaires unidimensionnelles de base, mais elles en existent plusieurs déduites de ce type par d'autres chercheurs tel que Pachpatte, Chandirov, Qude, Filatov, Rudakov, Bykov-Salpagarov*...etc (voir [23] pour plus de détaille).*

2.3 Applications

2.3.1 Application du théorème 2.2.2 au théorème de Cauchy Lipschitz pour démontrer l'unicité de la solution d'un problème de Cauchy

On considère le *problème de Cauchy* :

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), \\ y(t_0) = \alpha \in \mathbb{R}^n \end{cases} \tag{2.35}$$

Où $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et L-Lipschitzienne en y (hypothèse du *théorème de Cauchy Lipschitz*). On cherche à démontrer l'unicité de la solution de ce problème. Pour prouver l'unicité de la solution du (2.35), on admet l'existence de cette solution. Soit y cette solution. Il est facile de voir que (2.35) est équivalente à l'équation intégrale :

$$y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))ds \tag{2.36}$$

Soit ψ une autre solution de (2.35), c-à-d :

$$\psi'(t) = f(t, \psi(t)) \text{ et } \psi(t_0) = \alpha$$

D'où,

$$\|y(t) - \psi(t)\| \leq 0 + L \int_{t_0}^{t} \|y(s) - \psi(s)\| ds$$

Il en résulte du théorème 2.2.2 que

$$\|y(t) - \psi(t)\| \leq 0 \times \exp(\int_{t_0}^{t} L ds)$$

ça entraine que $y(t) = \psi(t)$. D'où l'unicité.

Noter qu'ici on a montrer juste l'unicité de la solution d'un problème de Cauchy satisfaisant les hypothèses du théorème de Cauchy Lipschitz, en utilisant le théorème 2.2.2. Mais, dans d'autres ouvrages, on montre à la fois l'existence et l'unicité de la solution par le biais du théorème de point fixe de Banach Picard.

La proposition suivante est une application du théorème 2.2.2 pour étudier la durée de vie d'une solution.

Proposition 2.3.1. *[35] Si $y > 0$ est une solution sur $\mathbb{R}$ de $y' = \psi(y)$ tel que $|\phi(x)| \leq C|x|$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, alors*

$$y(t) \leq y(0) \exp(tC)$$

Preuve : La preuve ici consiste à remarquer que :

$$y(t) \leq y(0) + \int_{0}^{t} C \times y(s)ds$$

et appliquer le théorème 2.2.2.

2.3.2 Application du théorème 2.2.4 à la résolution du problème de valeur terminale

On considère le problème de valeur terminale suivant :

$$\begin{cases} u'(t) = f(t, u(t)) + p(t), \\ u(+\infty) = u_\infty \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{2.37}$$

avec $f : \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$, $p : \mathbf{R}_+ \longrightarrow \mathbf{R}$ des fonctions continues. On s'intéresse à trouver une estimation d'une solution de (2.37) et prouver l'unicité de la solution du problème de valeur terminal.
Le théorème suivant fournit une estimation pour une solution du problème de ce type (2.37) :

Théorème 2.3.1. *(Pachpatte-Pachpatte [18]) On suppose que :*

$$|f(t,u)| \leq b(t)|u| \tag{2.38}$$

et

$$|u_\infty - Q(t)| \leq a(t) \tag{2.39}$$

avec a est une fonction continue décroissante définie dans $\mathbf{R}_+$ et b est une fonction continue positive définie dans $\mathbf{R}_+$ satisfaisant $\displaystyle\int_0^{+\infty} b(t)dt < +\infty$ et $Q(t) = \displaystyle\int_t^{+\infty} p(s)ds$.
Si $u(t)$ est une solution du problème (2.37), alors pour tout $t \in \mathbf{R}_+$,

$$|u(t)| \leq a(t) \times \exp\left(\int_t^{+\infty} b(s)ds\right)$$

Preuve :
Si $u(t)$ est une solution du problème (2.37), alors on peut faire :

$$\int_t^{+\infty} u'(s)ds = \int_t^{+\infty} [f(s,u(s)) + p(s)]ds$$

$$i.e : u(t) - u(+\infty) = -\int_t^{+\infty} [f(s,u(s)) + p(s)]ds \tag{2.40}$$

c-à-d :

$$u(t) = u_\infty - \int_t^{+\infty} [f(s,u(s)) + p(s)]ds$$

D'où :

$$|u(t)| \leq |u_\infty - Q(t)| + \int_t^{+\infty} |f(s,u(s))|ds$$

D'après (2.38) et (2.39), on obtient :

$$|u(t)| \leq a(t) + \int_t^{+\infty} b(s)|u(s)|ds \tag{2.41}$$

Donc, le théorème 2.2.4 résulte que :

$$|u(t)| \leq a(t) \times \exp\left(\int_t^{+\infty} b(s)ds\right) \tag{2.42}$$

En suite, nous allons montrer l'unicité de la solutions d'un problème de ce type (2.37).
Si de plus f satisfait l'hypothèse du théorème suivant, on aura l'unicité de la solution :

Théorème 2.3.2. *[18] On suppose que la fonction f satisfait la condition :*

$$|f(t,u) - f(t,v)| \leq b(t)|u - v|, \tag{2.43}$$

avec $b(t)$ définie comme dans le théorème précédent. Alors le problème (2.37) admet une unique solution dans $\mathbf{R}_+$.

Preuve : Le problème (2.37) est équivalent à l'équation intégrale (2.40). Soient $u(t)$ et $v(t)$ deux solutions du problème (2.37), Ainsi d'après (2.40) et (2.43), il s'ensuit que :

$$|u(t) - v(t)| = |\int_t^{+\infty} [f(s, u(s)) - f(s, v(s))] ds|$$

$$|u(t) - v(t)| \leq \int_t^{+\infty} |f(s, u(s)) - f(s, v(s))| ds$$

$$\Longrightarrow |u(t) - v(t)| \leq \int_t^{+\infty} b(s) \times |u(s) - v(s)| ds + 0$$

Le théorème 2.2.4 résulte que :

$$|u(t) - v(t)| \leq 0 \times \exp\left(\int_t^{+\infty} b(s) ds\right) = 0 \tag{2.44}$$

$$\Longrightarrow u(t) = v(t)$$

D'où l'unicité de la solution du problème de valeur terminal (2.37) .

2.3.3 Application du lemme 2.1.1 à une étude particulière d'équation différentielle

On considère l'équation différentielle suivante :

$$y'(t) = \sin(\|y(t)\|) g(t) \tag{2.45}$$

où $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ continue telle que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $g(t) \neq 0$.
Ici, On se propose de chercher l'intervalle maximale de la solution de l'équation différentielle (2.45). Pour se faire, on va appliquer le lemme 2.1.1 en montrant que cette solution maximale est définie sur $\mathbb{R}$.

1. Soit $(t_0, \alpha) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, (2.45) admet une unique solution maximale ϕ définie sur un intervalle I tel que $\phi(t_0) = \alpha$. En effet :
   (a) $(t, y) \mapsto \sin(\|y\|) g(t)$ est continue sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ comme composées, puis produit de telles fonctions.
   (b) En posant $f(t, y) = \sin(\|y(t)\|) g(t)$, f est *localement Lipschitzienne* en y. En effet : Soit (t, y), $(t, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, on a :

   $$\|f(t, y) - f(t, z)\| \leq \|g(t)\| \|y - z\|$$

   La continuité de g et y entraine que pour $(t_0, y_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, il existe un voisinage $V = [t_0 - h, t_0 + h] \times \tilde{B}(y_0, r)$ et il existe $k \geq 0$ tel que pour tout (t, y),$(t, z) \in V$,

   $$\|f(t, y) - f(t, z)\| \leq k \|y - z\|$$

   Noter que $\tilde{B}(y_0, r)$ désigne la boule fermée de centre y_0 et de rayon r

   Il s'ensuit du *théorème classique de Cauchy-Lipschitz* que (2.45) admet une solution maximale unique vérifiant $\phi(t_0) = \alpha$
2. Il est facile de trouver que les solutions maximales constantes de (2.45) sont :

   $$\|\phi(t)\| = n\pi$$

   où $n \in \mathbb{N}$

3. La solution maximale ϕ est définie sur $I = \mathbf{R}$. En effet, par l'absurde soit ϕ définie sur $I =]a, b[\neq \mathbf{R}$ $(a, b \in \mathbf{R})$. Soit $M = \sup_{t_0 \leq t \leq b} \|g(t)\|$ qui existe puisque g est continue sur $\mathbf{R}$ donc continue dans $[t_0, b] \subset \mathbf{R}$.
   (a) on vérifie facilement que
   $$\|\phi'(t)\| \leq M\|\phi(t)\|.$$
   D'où le *lemme* 2.1.1 résulte que
   $$\|\phi(t)\| \leq \|\phi(t_0)\| \exp(M(b - t_0)).$$
   ça entraine que pour tout $t \in [t_0, b[$
   $$\|\phi'(t)\| \leq K$$
   où $K = M\|\phi(t_0)\| \exp(M(b - t_0))$.
   D'où le *théorème des accroissement fini* résulte que pour tout $t, s \in [t_0, b[$,
   $$\|\phi(t) - \phi(s)\| \leq K|t - s| \tag{2.46}$$
   (b) Soit $(t_n)_n \subset [t_0, b[$ tel que $\lim_{n\to\infty} t_n = b$
      i. $(\phi(t_n))$ converge. En effet, soit $m, n \in \mathbf{N}$ tel que $(t_n), (t_m) \subset [t_0, b[$. (2.46) entraine que :
      $$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbf{N},\ \forall n, m \geq n_0,\ \|\phi(t_n) - \phi(t_m)\| < \epsilon.$$
      Donc $(\phi(t_n))$ est une suite de *Cauchy* dans $\mathbf{R}^n$ qui est complet, donc convergente. Posons $\lim \phi(t_n) = l \in \mathbf{R}^n$
      ii. l ne dépend pas de la suite (t_n). En effet, soit $(s_n) \subset [t_0, b[$ tel que $s_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} b$. Il s'avère que $\lim_{n\to\infty} \phi(s_n) = l$ car :
      $$\|\phi(s_n) - l\| \leq K|s_n - b| + K|t_n - b| + \|\phi(t_n) - l\| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0\,.$$
   Donc $\lim_{t\to b^-} \phi(t)$ existe et est finie, de même on montre par la même procédure que $\lim_{t\to a^+} \phi(t) < \infty$ ce qui contredit le fait que ϕ est une solution maximale de (2.45) définie sur $I =]a, b[\neq \mathbf{R}$ et vérifiant $\phi(t_0) = \alpha$. Donc on peut affirmer que la solution maximale ϕ est définie sur $I = \mathbf{R}$.

2.3.4 Application du théorème 2.2.3 à l'étude de la stabilité entrée-état des systèmes à retard

Dans cette section, on présente une application du théorème 2.2.3 pour étudier la stabilité entrée-état de quelques systèmes à retard (Voir [31]). Pour faire cela, on considère les notations suivantes :
C : ensemble des fonctions continue de $[-h, 0]$ dans $\mathbf{R}^n$.
C_a : ensemble des fonctions continues dans C bornées par une constante $a > 0$.
$\mathcal{K}$: ensemble des fonctions continues de $[0, a) \longrightarrow [0, \infty)$ ($a > 0$ est un réel), strictement croissante et nulle en 0.
$\mathcal{K}_\infty$: ensemble des fonctions continues de $[0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$ de classe $\mathcal{K}$ tendant vers ∞.
$\mathcal{KL}$: une fonction continue $\beta : [0, a) \times [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$ est dit de classe $\mathcal{KL}$ si pour s fixé, la fonction $\beta(., s)$ est de classe $\mathcal{K}$ par rapport à la première variable et si, pour r fixé, la fonction $\beta(r, .)$ est décroissante par rapport à la deuxième variable avec $\beta(r, s) \to 0$ quand $s \to 0$.

Considérons les systèmes sous la forme suivante :

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t), u_t), t \geq 0 \\ x(t_0) = \varphi_0 \equiv \varphi(t_0) \in C \end{cases} \tag{2.47}$$

où f est une fonction continue définie sur $\mathbf{R}_+ \times C \times C$. L'entrée de perturbation u_t est considérée comme bornée.

Définition 2.3.1. *Le système (2.47) est dit stable entrée-état s'il existe une fonction β de classe $\mathcal{KL}$ et une fonction γ de classe $\mathcal{K}_\infty$ telles que, quelle que soit la fonction initiale φ_0 et une entrée bornée u, la solution $x_t(t_0, \varphi_0) \equiv x(t; t_0, \varphi_0)$ existe pour tout $t \geq t_0$ et vérifie l'inégalité*

$$\|x(t; t_0, \varphi_0)\| \leq \beta(\|\varphi_0\|_C, t - t_0) + \gamma(|u_t|_\infty). \tag{2.48}$$

L'inégalité (2.48) est en cohérence avec celle obtenu dans le cas linéaire. Pour se rendre compte, on considère l'équation différentielle à retard de la forme :

$$x'(t) = Ax(t) + A_d x(t - \tau) + Bu(t), t \geq 0$$

où A est supposée de Hurwitz, A_d et B sont des matrices de dimensions appropriées, $\tau > 0$ est une constante représentant le retard, $x(t) \in \mathbf{R}^n$ et $u(t) \in \mathbf{R}^m$ représente la valeur du signal exogène. La solution de cette équation avec la condition initial $\varphi_0 \in C$ vérifie

$$x(t; t_0, \varphi_0) = e^{At}\varphi_0(0) + \int_0^t e^{A(t-s)} \left[A_d x(s - \tau) + Bu(s)\right] ds$$

Il est clair que $\|\varphi_0(0)\| \leq \|\varphi_0\|_C$, on peut majorer cette quantité par

$$\|x(t; t_0, \varphi_0)\| \leq ce^{-rt}\|\varphi_0\|_C + \int_{-\tau}^0 ce^{-r(t-s)}e^{r\tau}\|A_d\|\|x(s)\|ds$$

$$+ \int_0^t ce^{-r(t-s)}e^{r\tau}\|A_d\|\|x(s)\|ds + \int_0^t ce^{-r(t-s)}\|B\|\|u(s)\|ds$$

$$\leq c\left(1 + \frac{\|A_d\| e^{r\tau}}{r}\right)\|\varphi_0\|_C e^{-rt} + \int_0^t ce^{-r(t-s)}e^{r\tau}\|A_d\|\|x(s)\|ds + \frac{c\|B\|}{r}|u|_\infty$$

où c et r sont des constantes positives choisies de telle sorte que $\left\|e^{At}\right\| \leq ce^{-rt}$. En notant que $\frac{c\|B\|}{r}|u|_\infty$ est une fonction croissante en t, nous pouvons appliquer le théorème 2.2.3 de Gronwall judicieusement et obtenir :

$$\|x(t; t_0, \varphi_0)\| \leq c\left(1 + \frac{\|A_d\| e^{r\tau}}{r}\right)\|\varphi_0\|_C e^{-rt} + \frac{c\|B\|}{r}|u|_\infty e^{\int_0^t ce^{-r(t-s)}e^{r\tau}\|A_d\|ds}$$

$$\leq c\left(1 + \frac{\|A_d\|e^{r\tau}}{r}\right)\|\varphi_0\|_C e^{-rt} + \frac{c\|B\|}{r}e^{\frac{c^{r\tau}\|A_d\|}{r}} \times |u|_\infty$$

La solution vérifie bien l'équation (2.47) avec les fonctions

$$\beta(s, t) = c\left(1 + \frac{\|A_d\| e^{r\tau}}{r}\right)se^{-rt} \in \mathcal{KL}$$

et

$$\gamma(s) = \frac{c\|B\|}{r}se^{\frac{c^{r\tau}\|A_d\|}{r}} \in \mathcal{K}_\infty.$$

Remarque 2.3.1. *Il y' en a d'autres applications des théorèmes de ce type par exemple* l'étude des perturbations des systèmes différentielles non linéaires *où les chercheurs (*Brauer, Strauss...etc*) ont travaillé là dessus.*

Chapitre 3

Inégalités de Gronwall non linéaires

Dans ce chapitre, on va présenter quelques inégalités intégrales non linéaire et des applications de quelques théorèmes qui seront cités par la suite. À noter que ce chapitre généralise quelques théorèmes énoncés dans le chapitre précédent(cf chapitre 2).

3.1 Quelques inégalités intégrales non linéaires

Théorème 3.1.1. *(Inégalité de Bihari [5]) On suppose que x et v sont des fonctions continues positives dans $[0, \tau)$, et $f(u)$ est une fonction continue positive croissante pour tout $u \in [0, +\infty)$ tel que pour tout $t \in [0, \tau)$,*

$$x(t) \leq \eta + \int_0^t v(s) f(x(s)) ds \tag{3.1}$$

où $\eta > 0$ une constante, alors pour tout $t \in [0, \tau_1)$,

$$x(t) \leq \phi^{-1}\left(\phi(\eta) + \int_0^t v(s) ds\right), \tag{3.2}$$

où

$$\phi(u) = \int_{u_0}^u \frac{1}{f(s)} ds, \ u \geq u_0 > 0, \tag{3.3}$$

ϕ^{-1} est l'inverse de ϕ et

$$\tau_1 = \sup\left\{t \in [0, \tau); \phi(+\infty) \geq \phi(\eta) + \int_0^t v(s) ds\right\}$$

Preuve : On considère la fonction définie par

$$y(t) := \int_0^t f(x(s)) v(s) ds$$

pour tout $t \in [0, \tau)$, on a bien $y(0) = 0$ et (3.1) donne :

$$y'(t) = f(x(t)) v(t) \leq f(\eta + y(t)) v(t)$$

$$\implies \phi'(y(t) + \eta) \leq v(t)$$

Et en intégrant dans $[0, t]$ l'inégalité précédente, on obtient pour tout $t \in [0, \tau]$,

$$\phi(y(t) + \eta) \leq \int_0^t v(s) ds + \phi(\eta)$$

comme ϕ croissante, donc ϕ^{-1} l'est aussi, on obtient l'inégalité souhaitée :

$$x(t) \leq y(t) + \eta \leq \phi^{-1}\left(\int_0^t v(s)ds + \phi(\eta)\right)$$

Ce qui termine la preuve.

Théorème 3.1.2. *(Inégalité de Dragomir-Kim [7]) Soit g une fonction continue monotone dans un intervalle I contenant un point u_0 qui disparait dans I. Soient u et k des fonctions continues dans un intervalle $J = [\alpha, \beta]$, tel que $u(J) \subset I$, et supposons que k est de signe constante dans J. Soit $a \in I$.*

1. *supposons que g est croissante et k positive. Si pour tout $t \in J$,*

$$u(t) \leq a + \int_\alpha^t k(s)g(u(s))ds, \tag{3.4}$$

alors pour tout $\alpha \leq t \leq \beta_1$,

$$u(t) \leq G^{-1}\left(G(a) + \int_\alpha^t k(s)ds\right)$$

Où

$$G(u) = \int_{u_0}^u \frac{ds}{g(s)}, u \in I,$$

et $\beta_1 = \min(v_1, v_2)$, avec pour tout $\alpha \leq t \leq v$,

$$\begin{cases} v_1 = \sup\{v \in J : a + \int_\alpha^t k(s)g(u(s))ds\} \in I \\ v_2 = \sup\{v \in J : G(a) + \int_\alpha^t k(s)ds\} \end{cases}$$

2. *On suppose que $J = (\alpha, \beta]$. Si pour tout $t \in J$,*

$$u(t) \leq a + \int_t^\beta k(s)g(u(s))ds. \tag{3.5}$$

Alors pour tout $\alpha_1 \leq t \leq \beta$,

$$u(t) \leq G^{-1}\left[G(a) + \int_t^\beta k(s)ds\right]$$

Où $\alpha_1 = \max(\mu_1, \mu_2)$, avec pour tout $\mu \leq t \leq \beta$,

$$\begin{cases} \mu_1 = \sup\{\mu \in J : a + \int_t^\beta k(s)g(u(s))ds\} \in I \\ \mu_2 = \sup\{\mu \in J : G(a) + \int_t^\beta k(s)ds\} \end{cases}$$

Preuve :

1. On considère la fonction

$$y(t) := \int_\alpha^t k(s)g(u(s))ds,$$

alors $y(\alpha) = 0$, $u(t) \leq a + y(t)$ et avec les hypothèses du théorème, on obtient :

$$y'(t) = k(t)g(u(t)) \leq k(t)g(a + y(t))$$

En intégrant dans $[\alpha, t]$, on obtient pour tout $t \in [\alpha, \beta_1]$ et avec un changement de variable dans le coté gauche :

$$G(a + y(t)) \leq \int_{\alpha}^{t} k(s)ds + G(a)$$

et puisque G est croissante, donc G^{-1} aussi, on obtient :

$$u(t) \leq a + y(t) \leq G^{-1}\left[G(a) + \int_{\alpha}^{t} k(s)ds\right]$$

D'où la preuve.

2. Si

$$y(t) := \int_{t}^{\beta} k(s)g(u(s))ds,$$

alors $y(\beta) = 0$ et $u(t) \leq a + y(t)$
De plus :

$$y'(s) = -k(s)g(u(s)) \geq -k(s)g(a + y(s)).$$

En intégrant dans $[t, \beta]$ l'inégalité précédente et avec un changement de variable à gauche, on obtient :

$$G(a + y(t)) \leq \int_{t}^{\beta} k(s)ds + G(a).$$

Dès lors G^{-1} est croissante, on trouve l'inégalité souhaitée :

$$u(t) \leq a + y(t) \leq G^{-1}\left[G(a) + \int_{t}^{\beta} k(s)ds\right]$$

Théorème 3.1.3. *(Inégalité de Yang [30]) Soient $\phi \in C(\mathrm{R}_+, \mathrm{R}_+)$ une fonction strictement croissante avec $\phi(+\infty) = +\infty$ et $\psi \in C(\mathrm{R}_+, \mathrm{R}_+)$ une fonction croissante. Soit $c \geq 0$ une constante. Si $u, F \in C(\mathrm{R}_+, \mathrm{R}_+)$ et l'inégalité suivante est vérifiée pour tout $t \in \mathrm{R}_+$*

$$\phi(u(t)) \leq c + \int_{0}^{t} F(s)\psi(u(s))ds, \tag{3.6}$$

alors pour tout $t \in [0, T]$,

$$u(t) \leq \phi^{-1}\left[G^{-1}\left(G(c) + \int_{0}^{t} F(s)ds\right)\right]$$

avec ϕ^{-1}, G^{-1} sont les fonctions inverses respectivement de ϕ et G définie par :

$$G(x) := \int_{x_0}^{x} \frac{ds}{\psi[\phi^{-1}(s)]},\ x \geq x_0 > 0$$

et $T > 0$ est choisi de sorte que pour tout $t \in [0, T]$,

$$G(c) + \int_{0}^{t} F(s)ds \in Dom(G^{-1}). \tag{3.7}$$

Preuve : On définit dans $\mathbf{R}_+$ une fonction positive , croissante et différentiable par :

$$z(t) := c + \epsilon + \int_{0}^{t} F(s)\psi(u(s))ds,$$

où $\epsilon > 0$ une constante arbitraire. Alors :

$$\phi(u(t)) \leq z(t)$$

et puisque ϕ est strictement croissante et $\phi(+\infty) = +\infty$, on obtient :

$$u(t) \leq \phi^{-1}(z(t)) \tag{3.8}$$

En suite, la différentiabilité de z et la croissance de ψ donne :

$$z'(t) = F(t)\psi(u(t)) \leq F(t)\psi\left\{\phi^{-1}(z(t))\right\}$$

Par définition de G, l'inégalité précédente s'écrit :

$$\frac{dG[z(s)]}{ds} = \frac{z'(s)}{\psi\{\phi^{-1}(z(s))\}} \leq F(s)$$

En intégrant dans $[0, t]$ et quand $\epsilon \to 0$, on obtient pour tout $t \in [0, T]$:

$$G(z(t)) \leq G(c) + \int_0^t F(s)ds \in Dom(G^{-1}) \tag{3.9}$$

d'après la condition (3.7).
De plus :

$$z(t) \leq G^{-1}\left[G(c) + \int_0^t F(s)ds\right]$$

Comme ϕ^{-1} est croissante et puisque $u(t) \leq \phi^{-1}(z(t))$, on trouve l'inégalité souhaitée.

Lasalle établit le résultat remarquable suivant en 1949 qui n'a pas reçu une grande attention.

Théorème 3.1.4. *(Inégalité de Lasalle [12]) Soient f, g des fonctions continues positives dans $[0, T]$. On suppose que $k > 0$ est une constante, $F(t)$ une fonction croissante, continue et positive pour tout $0 < k \leq u$,*

$$G(u) = \int_k^u \frac{ds}{F(s)}$$

et l'inégalité suivante tient pour tout $0 \leq t \leq T$,

$$g(t) \leq k + \int_0^t f(s)F(g(s))ds. \tag{3.10}$$

Alors nous avons pour tout $0 \leq t \leq T$,

$$G(g(t)) \leq \int_0^t f(s)ds$$

De plus, si F est l'application identité, c-à-d : $F(u) = u$, alors l'inégalité de Lasalle (3.10) se réduit à l'inégalité de Bellman-Gronwall *(cf théorème 2.2.2 (2.8) chapitre 2)*

Preuve : En s'inspirant des preuves précédentes, on considère la fonction définie par :

$$y(t) := \int_0^t f(s)F(g(s))ds$$

D'où (3.10) et par définition de $y(t)$, on a :

$$g(t) \leq k + y(t). \tag{3.11}$$

Par différentiation de y, on obtient l'inégalité suivante en remplaçant t par s :

$$y'(s) = f(s)F(g(s)) \leq f(s)F(k + y(s))$$

En intégrant dans $[0, t]$ l'inégalité précédente et avec un changement de variable à gauche, on obtient :

$$G(k + y(t)) \leq \int_0^t f(s)ds$$

Il s'ensuit avec (3.10) et la croissance de G que :

$$G(g(t)) \leq G(k + y(t)) \leq \int_0^t f(s)ds$$

Ainsi termine la preuve.

Le résultat suivant à été prouver aussi par *Lasalle* [12] (voir [23] volume 2).

Définition 3.1.1. *(*Sous-additivité*) On dit qu'une fonction f est sous-additive si pour tout x et y, $f(x + y) \leq f(x) + f(y)$.*

Théorème 3.1.5. *(Inégalité de Lasalle) Si x, h, et v sont des fonctions continues dans $[0, \tau)$, et $f(u)$ est une fonction continue, positive, croissante et sous-additive pour tout $u \in [0, +\infty)$ telle que pour tout $t \in [0, \tau)$,*

$$x(t) \leq h(t) + \int_0^t v(s)f(h(s))ds,$$

alors pour tout $t \in [0, \tau_3)$,

$$x(t) \leq h(t) + \phi^{-1}\left[\phi\left(\int_0^t v(s)f(h(s))ds\right) + \int_0^t v(s)ds\right]$$

où ϕ et ϕ^{-1} sont définies comme dans le théorème 3.1.1 et

$$\tau_3 = \sup\left\{t \in [0, \tau) : \phi(+\infty) \geq \phi\left(\int_0^t v(s)f(h(s))ds\right) + \int_0^t v(s)ds\right\}$$

Définition 3.1.2. *(Application mesurable) Soient (Ω, τ) et (E, ξ) des espaces mesurables. Soit $f : (\Omega, \tau) \longrightarrow (E, \xi)$ une application. On dit que f est mesurable si :*

$$\forall A \in \xi, f^{-1}(A) \in \tau$$

c-à-d :

$$f^{-1}(\xi) \subset \tau$$

Dans la suite, on dira qu'une fonction $h(t, r)$ possède la propriété I si $h(t, r) \geq 0$ pour l'intervalle de définition de t et r, s'il est mesurable en t pour $r \geq 0$ fixé, continue en r pour t fixé, $t_0 \leq t < +\infty$, $r \geq 0$, et si $r(t)$ est la solution maximale de l'équation différentielle $r' = h(t, r)$ passant par le point $(t_0, 0)$, nous avons le résultat suivant :

Lemme 3.1.1. *(Inégalité de Lakshmikantham [13]) On suppose que la fonction $h(t, r)$ a la propriété I. Soit y une fonction continue sur $[t_0, +\infty)$ et satisfaisant l'inégalité pour tout $t \in [0, +\infty)$,*

$$|\Delta y(t)| \leq \int_t^{t+\Delta t} h(s, y(s))ds, \tag{3.12}$$

alors pour tout $t \in [t_0, +\infty)$, on a

$$y(t) \leq r(t)$$

Preuve : Les hypothèses montrent que y est absolument continue dans $[t_0, +\infty)$, ce qui assure l'existence de $y'(t)$ presque partout dans $[t_0, +\infty)$ (cf proposition 2.2.1). De plus, on peut supposer presque tout que :

$$|y'(t)| \leq h(t, y(t)) \tag{3.13}$$

En suite, supposons que $b(t, \epsilon)$ est une solution de $r' = h(t, r) + \epsilon$, $r(t_0) = 0$, où ϵ est une quantité très petite arbitraire. Il en résulte de ces hypothèses que :

$$y(t) \leq b(t, \epsilon) \tag{3.14}$$

En effet, par l'absurde si (3.14) ne tient pas, choisissons $[t_0, t_1]$ un intervalle où $y(t) \geq b(t, \epsilon)$. En t_0, nous avons $y(t_0) \geq b(t_0, \epsilon)$. Donc en t_0, on a :

$$y'(t_0) \geq b'(t_0, \epsilon)$$

De cela, on obtient :

$$h(t_0, y(t_0)) \geq h(t_0, b(t_0, \epsilon)) + \epsilon$$

ce qui n'est pas possible. Alors (3.14) tient. Dès lors $\lim\limits_{\epsilon \to 0} b(t, \epsilon) = r(t)$, le résultat est clair.

Soient maintenant y et $f(t, y)$ des vecteurs à composantes réels qui sont $(y_1, y_2, ..., y_n)$ et $(f_1(t, y), f_2(t, y), ..., f_n(t, y))$ respectivement. On considère le système suivant :

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y) \\ y(t_0) = 0 \end{cases} \tag{3.15}$$

Où $f(t, y)$ est continue dans $t_0 \leq t < +\infty$, $\|y\| < +\infty$. On peut obtenir les résultats suivants.

Lemme 3.1.2. *[13] Supposons que $h(t, r)$ a la propriété I et que*

$$\|f(t, y)\| \leq h(t, \|y\|), \tag{3.16}$$

alors si $r(t) = O(1)$ quand $t \to +\infty$, la norme de toute solution de (3.15) tend vers une limite finie lorsque $t \to +\infty$. Si en particulier, $r(t) = o(1)$ alors chaque composante de toute solution de (3.15) tend vers 0 quand $t \to +\infty$.

Preuve : Soit $y(t) = \displaystyle\int_0^t f(s, y(s))ds$ la solution de (3.15) et

$$\Delta y(t) = y(t + \Delta t) - y(t) = \int_0^{t+\Delta t} f(s, y(s))ds + \int_t^0 f(s, y(s))ds$$

$$i.e : \Delta y(t) = \int_t^{t+\Delta t} f(s, y(s))ds$$

$$\Longrightarrow \|\Delta y(t)\| \leq \int_t^{t+\Delta t} \|f(s, y(s))\|ds$$

$$\Longrightarrow \|\Delta y(t)\| \leq \int_t^{t+\Delta t} h(s, \|y(s)\|)ds$$

Le lemme 3.1.1 résulte que

$$\|y(t)\| \leq r(t)$$

Ce qui achève la preuve.
Rappel de la notion de $r(t) = O(1)$ lorsque $t \to +\infty$:

$$r(t) = O(1) \iff \exists M > 0, \exists \delta \geq 0, \ (\forall t \geq \delta \implies \|r(t)\| \leq M \times 1)$$

Lemme 3.1.3. *(Inégalité de Lakshmikantham [14]) Soit $g(t,u)$ une fonction continue positive sur $[a,b]\times\mathbb{R}_+$. Soit la fonction $f(t,y)$ de (3.15) satisfaisant la condition suivante :*

$$|f(t,y)| \leq g(t,|y|). \tag{3.17}$$

Soit $y(t)$ satisfait $|y(t)|>0$ et soit une solution de (3.15) dans la région $a\leq t\leq b$. Alors nous avons pour tout $t\in[a,b]$,

$$|y(t)| \leq M(t) \tag{3.18}$$

et

$$|y(t)| \leq m(t) \tag{3.19}$$

où $M(t)$ et $m(t)$ sont les solutions respectivement maximale et minimale de

$$u'(t)=\begin{cases} g(t,u) \\ ou \\ -g(t,u)\end{cases},$$

$u(a)=|y(a)|$

Preuve : L'inégalité (3.18) découle du lemme 3.1.2. Pour obtenir (3.19), on peut utiliser le même argument mais cette fois-ci, on considère la solution minimal de $u'(t)=-g(t,u)$, $u(a)=|y(a)|$ au lieu de la solution maximale de $u'(t)=g(t,u)$, $u(a)=|y(a)|$ et ça sera terminée.

Théorème 3.1.6. *(Inégalité de Willet-Wong [29]) Soient les fonctions $v(t)$, $w(t)$, $v(t)u(t)$ et $w(t)u^p(t)$ des fonctions positives et localement intégrables dans $\mathbb{R}_+$. Si $u_0>0$, $p\geq 0$, $p\neq 1$ et l'inégalité suivante tient pour tout $t\in\mathbb{R}_+$,*

$$u(t)\leq u_0+\int_0^t v(s)u(s)ds+\int_0^t w(s)u^p(s)ds, \tag{3.20}$$

alors pour tout $t\in\mathbb{R}_+$,

$$u(t)\exp\left(-\int_0^t v(s)ds\right)\leq\left[u_0^q+q\int_0^t w(s)\exp\left(-q\int_0^s v(r)dr\right)ds\right]^{\frac{1}{q}}$$

où $q=1-p$

Preuve : On considère la fonction définie dans le coté droite de (3.20)

$$\phi(t):=u_0+\int_0^t v(s)u(s)ds+\int_0^t w(s)u^p(s)ds.$$

Alors $\phi(0)=u_0$ et (3.20) donne :

$$\phi'(t)=v(t)u(t)+w(t)u^p(t)\leq v(t)\phi(t)+w(t)\phi^p(t)$$

puisque $p\geq 0$. Le lemme 3.1.3 résulte que $\phi(t)$ est bornée supérieurement par la solution maximale $r(t)$ de

$$r'(t)=v(t)r(t)+w(t)r^p(t);\ r(0)=u_0 \tag{3.21}$$

qui correspond à une équation de Bernoulli qu'on sait résoudre. Soit $r(t)\neq 0$.

$$(\mathbf{3.21})\implies\frac{r'(t)}{r^p(t)}=\frac{v(t)}{r^{p-1}(t)}+w(t) \tag{3.22}$$

En posant :

$$z(t)=\frac{1}{r^{p-1}(t)}=r^q(t)$$

$(\boldsymbol{q = 1 - p}$ et $\boldsymbol{p \neq 1})$

$$\Longrightarrow \; z'(t) = q \times r^{q-1}(t) \times r'(t) = q\frac{r'(t)}{r^p(t)}$$

$$\Longleftrightarrow \; \frac{r'(t)}{r^p(t)} = \frac{1}{q}z'(t)$$

D'où (3.22) devient :

$$\frac{1}{q}z'(t) = v(t)z(t) + w(t) \tag{3.23}$$

qui correspond à une équation différentielle linéaire de $\mathbf{1}^{ere}$ ordre.
Pour résoudre ça, on peut procéder par la méthode de la variation de la constante.
Il es facile de résoudre l'équation homogène

$$(E.H): \; \frac{1}{q}z'(t) = v(t)z(t)$$

et obtenir $z(t) = K \exp\left(q\int_0^t v(\tau)d\tau\right)$ comme solution de l'équation homogène $(E.H)$.
En suite, faisons varier la constante K pour obtenir la solution général.
On a : $z(t) = K(t) \times \exp\left(q\int_0^t v(\tau)d\tau\right)$

$$\Longrightarrow \; z'(t) = [K'(t) + qK(t)v(t)] \times \exp\left(q\int_0^t v(\tau)d\tau\right).$$

Si on remplace dans (3.23), on obtient :

$$\frac{1}{q}K'(t)\exp\left(q\int_0^t v(\tau)d\tau\right) = w(t)$$

Puis, en intégrant dans $[0, t]$, on obtient :

$$K(t) = K(0) + q\int_0^t w(s)\exp\left(-q\int_0^s v(\tau)d\tau\right)ds$$

Sachant que : $K(0) = z(0) = r^q(0) = u_0^q$,

$$K(t) = u_0^q + q\int_0^t w(s)\exp\left(-q\int_0^s v(\tau)d\tau\right)ds$$

Or :

$$z(t) = K(t) \times \exp\left(q\int_0^t v(\tau)d\tau\right)$$

$$\Longleftrightarrow \; r^q(t) = K(t) \times \exp\left(q\int_0^t v(\tau)d\tau\right)$$

$$\Longrightarrow \; r(t) = K^{1/q}(t) \times \exp\left(\int_0^t v(\tau)d\tau\right)$$

Dès lors $u(t) \leq r(t)$ et puisque $\exp\left(-\int_0^t v(\tau)d\tau\right) \geq 0$, on obtient l'inégalité souhaitée :

$$u(t)\exp\left(-\int_0^t v(\tau)d\tau\right) \leq \left[u_0^q + q\int_0^t w(s)\exp\left(-q\int_0^s v(\tau)d\tau\right)ds\right]^{1/q}$$

Ce qui achève la preuve.

Théorème 3.1.7. *(Inégalité de Pachpatte [17]) Soient a, $b \in C(I, \mathrm{R}_+)$ des fonctions croissantes avec $\alpha(t) < t$ dans I, $k \geq 0$, $c \geq 1$ et $p > 1$ sont des constantes.*

1. *Si $u \in C(I, \mathrm{R}_+)$ et pour tout $t \in I$,*

$$u(t) \leq k + \int_{t_0}^{t} a(s)u(s)ds + \int_{\alpha(t_0)}^{\alpha(t)} b(s)u(s)ds, \tag{3.24}$$

alors pour tout $t \in I$,

$$u(t) \leq k \times \exp(A(t) + B(t)), \tag{3.25}$$

où pour tout $t \in I$,

$$A(t) = \int_{t_0}^{t} a(s)ds$$

et

$$B(t) = \int_{\alpha(t_0)}^{\alpha(t)} b(s)ds$$

2. *Si $u \in C(I, \mathrm{R}_+)$ et pour tout $t \in I$,*

$$u(t) \leq c + \int_{t_0}^{t} a(s)u(s)\log(u(s))ds + \int_{\alpha(t_0)}^{\alpha(t)} b(s)u(s)\log(u(s))ds, \tag{3.26}$$

alors pour tout $t \in I$,

$$u(t) \leq c^{\exp(A(t)+B(t))} \tag{3.27}$$

où $A(t)$ et $B(t)$ sont définies précédemment.

3. *Si $u \in C(I, \mathrm{R}_+)$ et pour tout $t \in T$,*

$$u^p(t) \leq k + \int_{t_0}^{t} a(s)u(s)ds + \int_{\alpha(t_0)}^{\alpha(t)} b(s)u(s)ds, \tag{3.28}$$

alors pour tout $t \in I$,

$$u(t) \leq \left[k^{\frac{p-1}{p}} + \frac{p-1}{p}\left(A(t) + B(t)\right)\right]^{\frac{1}{p-1}} \tag{3.29}$$

où $A(t)$ et $B(t)$ sont définies précédemment.

Preuve :

1. Soient $k > 0$. On définit la fonction $z(t)$ dans le coté droite de (3.24) qui est :

$$z(t) := k + \int_{t_0}^{t} a(s)u(s)ds + \int_{\alpha(t_0)}^{\alpha(t)} b(s)u(s)ds,$$

alors $z(t) > 0$, $z(t_0) = k$, $u(t) \leq z(t)$, et

$$z'(t) = a(t)u(t) + b(\alpha(t))u(\alpha(t))\alpha'(t) \leq a(t)z(t) + b(\alpha(t))z(\alpha(t))\alpha'(t).$$

Comme $\alpha(t) < t$ et z croit, on obtient :

$$z'(t) \leq a(t)z(t) + b(\alpha(t))z(t)\alpha'(t).$$

C-à-d :

$$\frac{z'(t)}{z(t)} \leq a(t) + b(\alpha(t))\alpha'(t)$$

Puis en intégrant dans $[t_0, t]$ l'inégalité précédente et avec un petit changement de variable à droite, on trouve le résultat cherché :

$$z(t) \leq k \times \exp(A(t) + B(t))$$

2. On définit dans le coté droite de (3.26) la fonction

$$z(t) := c + \int_{t_0}^{t} a(s)u(s)\log(u(s))ds + \int_{\alpha(t_0)}^{\alpha(t)} b(s)u(s)\log(u(s))ds$$

$$\Longrightarrow\ z(t) > 0,\ z(t_0) = c \text{ et } u(t) \leq z(t)$$

$$\Longrightarrow\ \frac{z'(t)}{z(t)} \leq a(t)\log(z(t)) + b(\alpha(t))\log(z(\alpha(t)))\alpha'(t)$$

Il en résulte par intégration dans $[t_0, t]$ que :

$$\log(z(t)) \leq \log c + \int_{t_0}^{t} a(s)\log(z(s))ds + \int_{\alpha(t_0)}^{\alpha(t)} b(s)\log(z(s))ds$$

(3.24) de 1) entraine que

$$\log(z(t)) \leq (\log c)\exp(A(t) + B(t)) = \log c^{\exp(A(t)+B(t))}$$

$$\Longrightarrow\ u(t) \leq z(t) \leq c^{\exp(A(t)+B(t))}$$

3. Soient $k > 0$ et on définie la fonction $z(t)$ dans le coté droite de (3.28). Alors $z(t) > 0$, $z(t_0) = k$, $u(t) \leq [z(t)]^{1/p}$,

$$z(t) := k + \int_{t_0}^{t} a(s)u(s)ds + \int_{\alpha(t_0)}^{\alpha(t)} b(s)u(s)ds$$

$$\Longrightarrow\ z'(t) = a(t)u(t) + b(\alpha(t))u(\alpha(t))\alpha'(t) \leq a(t)[z(t)]^{1/p} + b(\alpha(t))[z(t)]^{1/p}\alpha'(t)$$

$$\Longrightarrow\ [z(s)]^{-1/p}z'(s) \leq a(s) + b(\alpha(s))\alpha'(s)$$

Puis en intégrant dans $[t_0, t]$, on obtient :

$$\left[\frac{1}{-\frac{1}{p}+1} z(s)^{-\frac{1}{p}+1}\right]_{t_0}^{t} \leq \int_{t_0}^{t} a(s)ds + \int_{\alpha(t_0)}^{\alpha(t)} b(s)ds$$

$$\Longleftrightarrow\ \frac{p}{p-1} \times \left(z(t)^{\frac{p-1}{p}} - k^{\frac{p-1}{p}}\right) \leq \int_{t_0}^{t} a(s)ds + \int_{\alpha(t_0)}^{\alpha(t)} b(s)ds$$

$$\Longrightarrow\ [z(t)]^{\frac{p-1}{p}} \leq k^{\frac{p-1}{p}} + \frac{p-1}{p} \times (A(t) + B(t))$$

$$\Longrightarrow\ u(t) \leq z(t)^{1/p} \leq \left[k^{\frac{p-1}{p}} + \frac{p-1}{p} \times (A(t) + B(t))\right]^{\frac{1}{p-1}}.$$

D'où la preuve.

[1]

1. Noter que les inégalités de ce type peuvent être vu comme inégalités avec retard au niveau du temps t (voir le chapitre qui suit).

Théorème 3.1.8. *(Inégalité de Pachpatte [17]) Soient a, b, α, k, c, p définies comme dans le théorème 3.1.7. Pour $i = 1, 2$, soit $g_i \in C(\mathrm{R}_+, \mathrm{R}_+)$ croissante avec $g_i(u) > 0$ pour tout $u > 0$.*

1. *Si $u \in C(I, \mathrm{R}_+)$ et pour tout $t \in I = [t_0, T)$, il tient que :*

$$u(t) \leq k + \int_{t_0}^{t} a(s) g_1(u(s)) ds + \int_{\alpha(t_0)}^{\alpha(t)} g_2(u(s)) ds, \tag{3.30}$$

alors pour tout $t_0 \leq t \leq t_1$,

(a) *Dans le cas où $g_2(u) \leq g_1(u)$, nous avons*

$$u(t) \leq G_1^{-1}[G_1(t) + A(t) + B(t)] \tag{3.31}$$

(b) *Dans le cas où $g_1(u) \leq g_2(u)$, nous avons*

$$u(t) \leq G_2^{-1}[G_2(t) + A(t) + B(t)] \tag{3.32}$$

où $A(t)$ et $B(t)$ sont définies comme dans le théorème 3.1.7 et pour tout $i = 1, 2$, G_i^{-1} est la fonction inverse de

$$G_i(r) = \int_{r_0}^{r} \frac{ds}{g_i(s)}, \ r \geq r_0 > 0$$

et $t_1 \in I$ est choisi de sorte que :

$$G_i(k) + A(t) + B(t) \in Dom(G_i^{-1})$$

respectivement pour tout $t \in [t_0, t_1]$.

Preuve :

1. D'après les hypothèses, on observe que $\alpha'(t) \geq 0$ pour tout $t \in I$. Soit $k > 0$ et on considère la fonction $z(t)$ définie par

$$z(t) := k + \int_{t_0}^{t} a(s) g_1(u(s)) ds + \int_{\alpha(t_0)}^{\alpha(t)} b(s) g_2(u(s)) ds$$

alors $z(t) > 0;\ z(t_0) = k;\ u(t) \leq z(t)$

$$\Longrightarrow\ z'(t) = a(t)g_1(u(t)) + b(\alpha(t))g_2(u(\alpha(t)))\alpha'(t) \leq a(t)g_1(z(t)) + b(\alpha(t))g_2(z(t))\alpha'(t)$$

(a) et comme $g_2(u) \leq g_1(u)$, il s'ensuit que :

$$z'(t) \leq a(t)g_1(z(t)) + b(\alpha(t))g_1(z(t))\alpha'(t)$$

$$\Longrightarrow\ \frac{dG_1(z(s))}{ds} = \frac{z'(s)}{g_1(z(s))} \leq a(s) + b(\alpha(s))\alpha'(s).$$

En intégrant dans $[t_0, t]$, on obtient :

$$G_1(z(t)) \leq G_1(k) + A(t) + B(t)$$

et puis G_1^{-1} est croissante donne :

$$u(t) \leq z(t) \leq G_1^{-1}[G_1(k) + A(t) + B(t)]$$

(b) La preuve dans le cas où $g_1(u) \leq g_2(u)$ est similaire .

Le sous intervalle $t_0 \leq t \leq t_1$ est évident.

Théorème 3.1.9. *(Inégalité de Lipovan [15]) Soient* $u,\ f \in C([t_0,T],\mathbb{R}_+)$. *De plus, soit* $w \in C(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}_+)$ *croissante avec* $w(u) > 0$ *dans* $(0,+\infty)$ *et* $\alpha \in C^1([t_0,T],[t_0,T])$ *croissante avec* $\alpha(t) \leq t$ *dans* $[t_0,T)$. *Si pour tout* $t_0 \leq t < T$,

$$u(t) \leq k + \int_{\alpha(t_0)}^{\alpha(t)} f(s)w(u(s))ds \tag{3.33}$$

où k *constante positive, alors pour tout* $t_0 \leq t < t_1$,

$$u(t) \leq G^{-1}\left(G(k) + \int_{\alpha(t_0)}^{\alpha(t)} f(s)ds\right)$$

où

$$G(\gamma) = \int_1^{\gamma} \frac{ds}{w(s)}, \gamma > 0$$

et $t_1 \in [t_0,T)$ *est choisi de sorte que pour tout* $t \in [t_0,t_1)$,

$$G(k) + \int_{\alpha(t_0)}^{\alpha(t)} f(s)ds \in Dom(G^{-1})$$

Preuve : Supposons que $k > 0$ et on considère la fonction définie par

$$z(t) := k + \int_{\alpha(t_0)}^{\alpha(t)} f(s)w(u(s))ds.$$

Alors $z(t_0) = k$ et

$$z'(t) = f(\alpha(t))w(u(\alpha(t)))\alpha'(t) \leq f(\alpha(t))w(z(\alpha(t)))\alpha'(t).$$

On en déduit de $\alpha(t) \leq t$ dans $[t_0,T)$,

$$z'(t) \leq f(\alpha(t))w(z(t))\alpha'(t)$$

$$\Longrightarrow \frac{dG(z(t))}{ds} = \frac{z'(s)}{w(z(s))} \leq f(\alpha(t))\alpha'(t).$$

Il en résulte par intégration dans $[t_0,t]$ que :

$$G(z(t)) \leq G(k) + \int_{\alpha(t_0)}^{\alpha(t)} f(s)ds$$

et puisque G^{-1} est croissante dans $Dom(G^{-1})$, pour tout $t_0 \leq t < t_1$,

$$u(t) \leq z(t) \leq G^{-1}\left(G(k) + \int_{\alpha(t_0)}^{\alpha(t)} f(s)ds\right).$$

Ce qui termine la preuve.

Remarque 3.1.1.

1. *pour* $\alpha(t) \equiv t$ *et* $\alpha(t_0) \equiv t_0 = 0$, *on obtient l'inégalité classique de Bihari (théorème 3.1.1).*
2. *Si*
$$\int_1^{+\infty} \frac{ds}{w(s)} = +\infty,$$
alors $G(+\infty) = +\infty$ *et l'inégalité est valide dans* $[t_0,T)$. *Des exemples de telles fonctions sont* $w(u) = u$ *et* $w(u) = (u+1)\ln(1+u)$.

En fixant $w(u) \equiv u$ *dans le théorème 3.1.9, nous pouvons obtenir le corollaire suivant .*

Corollaire 3.1.1. *Soient u, $f \in C([t_0, T], \mathrm{R}_+)$. En plus, soit $\alpha \in C^1([t_0, T], [t_0, T])$ croissante avec $\alpha(t) < t$ dans $[t_0, T)$, et soit $k \geq 0$ une constante. Si l'inégalité suivante tient pour tout $t_0 \leq t < T$,*

$$u(t) \leq k + \int_{\alpha(t_0)}^{\alpha(t)} f(s)u(s)ds,$$

alors pour tout $t_0 \leq t < T$,

$$u(t) \leq k \times \exp\left(\int_{\alpha(t_0)}^{\alpha(t)} f(s)ds\right)$$

Remarque 3.1.2. .

1. *Avec $\alpha(t) \equiv t$ dans le corollaire, on peut obtenir la célèbre inégalité de Gronwall-Bellman du théorème 2.2.2.*
2. *Soit on utilise l'hypothèse que $t_0 = 0$ et $T = +\infty$. Dans ce cas, $\alpha(0) = 0$ et l'hypothèse du théorème 3.1.9 donne pour tout $t \geq 0$,*

   $$u(t) \leq k + \int_0^t f(s)w(u(s))ds.$$

   Par conséquent, le résultat de Bihari pourrait également être appliqué afin d'obtenir une estimation supérieur de $u(t)$. Ce pendant, l'estimation du théorème 3.1.9 est plus précise.

On démontre au préalable l'inégalité célèbre suivante

$$\forall a, b > 0,\ ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \tag{3.34}$$

avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (c-a-d p est le conjugué de q), que l'on utilisera par la suite pour prouver certains résultats.

Preuve : la fonction $x \mapsto \exp(x)$ est convexe. C'est à dire, pour tout $x, y \in \mathbf{R}$ et pour tout $\alpha \in [0, 1]$,

$$\exp(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha \exp(x) + (1 - \alpha)\exp(y).$$

En choisissant, $\alpha = \frac{1}{p}$, $x = \ln a^p$ et $y = \ln b^q$, on retrouve le résultat.

Remarque 3.1.3.

$$(3.34) \iff \forall a, b > 0,\ a^{\frac{1}{p}} \times b^{\frac{1}{q}} \leq \frac{a}{p} + \frac{b}{q}$$

C'est cette équivalence qu'on utilisera directement par la suite.

Lemme 3.1.4. *[19] Soient u et g des fonctions continues positives sur $\mathbf{R}_+$. Si pour tout $t \geq 0$*

$$u^2(t) \leq c^2 + 2\int_0^t g(s)u(s)ds, \tag{3.35}$$

avec $c \geq 0$ est une constante, alors

$$u(t) \leq c + \int_0^t g(s)ds$$

pour tout $t \geq 0$.

Preuve : On définit la fonction $z(t)$ par

$$z(t) := c^2 + 2\int_0^t g(s)u(s)ds.$$

Alors $z(0) = c^2$, $z(t) > 0$ pour tout $t \geq 0$, $u(t) \leq \sqrt{z(t)}$ et

$$z'(t) = 2g(t)u(t) \leq 2\sqrt{z(t)}g(t)$$

$$\Longrightarrow \frac{z'(s)}{2\sqrt{z(s)}} \leq g(s)$$

Par intégration dans $[0, t]$ l'inégalité ci-dessus, on obtient :

$$u(t) \leq \sqrt{z(t)} \leq c + \int_0^t g(s)ds.$$

Ainsi termine la preuve.

Ce lemme a été utilisé fréquemment pour obtenir l'existence, l'unicité, la stabilité, et quelques propriétés autres que ces dernières pour une certaine classe d'équation différentielle non linéaire. D'autres résultats seront établis par la suite à partir de ce lemme (*lemme 3.1.4*).

Théorème 3.1.10. *[33] Soient u, a, b, f et h des fonctions continues positives définies dans $\mathbf{R}_+$ et $p > 1$ une constante.*

1. *Si pour tout $t \in \mathbf{R}_+$*

$$u^p(t) \leq a(t) + b(t)\int_0^t [f(s)u^p(s) + h(s)u(s)]ds, \tag{3.36}$$

alors pour tout $t \in \mathbf{R}_+$

$$u(t) \leq \left\{a(t) + b(t)\int_0^t \left[f(s)a(s) + h(s)\left(\frac{p-1}{p} + \frac{a(s)}{p}\right)\right] \times e^{\int_s^t b(\tau)\left(f(\tau)+\frac{h(\tau)}{p}\right)d\tau} ds\right\}^{1/p}$$

2. *Soit $c(t)$ une fonction à valeur dans $\mathbf{R}_+$ continue et croissante définie dans $\mathbf{R}_+$. Si pour tout $t \in \mathbf{R}_+$*

$$u^p(t) \leq c^p(t) + b(t)\int_0^t [f(s)u^p(s) + h(s)u(s)]ds, \tag{3.37}$$

alors pour tout $t \in \mathbf{R}_+$

$$u(t) \leq c(t)\left\{1 + b(t)\int_0^t [f(s) + h(s)c^{1-p}(s)] \times e^{\int_s^t b(\tau)\left(f(\tau)+\frac{h(\tau)}{p}c^{1-p}(\tau)d\tau\right)} ds\right\}^{1/p}$$

3. *Soient $k(t, s)$ et sa dérivée partielle $\frac{\partial}{\partial t}k(t, s)$ des fonctions continues positives à valeur dans $\mathbf{R}$ pour tout $0 \leq s \leq t < \infty$. Si pour tout $t \in \mathbf{R}_+$*

$$u^p(t) \leq a(t) + b(t)\int_0^t k(t, s)[f(s)u^p(s) + h(s)u(s)]ds, \tag{3.38}$$

alors pour tout $t \in \mathbf{R}_+$

$$u(t) \leq \left\{a(t) + b(t)\int_0^t B(s)\exp\left(\int_s^t A(\tau)d\tau\right)ds\right\}^{1/p},$$

où

$$A(t) = k(t,t)b(t)\left(f(t)+\frac{h(t)}{p}\right) + \int_0^t \frac{\partial}{\partial t}k(t,s)b(s)\left(f(s)+\frac{h(s)}{p}\right)ds,$$

$$B(t) = k(t,t)(f(t)a(t)+h(t))\left(\frac{p-1}{p}+\frac{a(t)}{p}\right)$$
$$+\int_0^t \frac{\partial}{\partial t}k(t,s)\left[f(s)a(s)+h(s)\left(\frac{p-1}{p}+\frac{a(s)}{p}\right)\right]ds$$

pour tout $t \in \mathbb{R}_+$.

Preuve :

1. On considère la fonction définie par

$$z(t) := \int_0^t [f(s)u^p(s)+h(s)u(s)]ds.$$

Alors $z(0)=0$ et

$$(3.36) \implies u^p(t) \le a(t)+b(t)z(t)$$
$$\implies u(t) \le [a(t)+b(t)z(t)]^{1/p} \times (1)^{1/\frac{p}{p-1}}$$

L'inégalité (3.34) résulte que

$$u(t) \le \frac{p-1}{p} + \frac{a(t)}{p} + \frac{b(t)}{p}z(t)$$

D'où

$$z'(t) = f(t)u^p(t)+h(t)u(t) \le f(t)\{a(t)+b(t)z(t)\}+h(t)\left(\frac{p-1}{p}+\frac{a(t)}{p}+\frac{b(t)}{p}z(t)\right)$$

$$i.e : z'(t) \le b(t)\left(f(t)+\frac{h(t)}{p}\right)z(t) + \left[f(t)a(t)+h(t)\left(\frac{p-1}{p}+\frac{a(t)}{p}\right)\right]$$

le lemme 2.1.1 (cf chapitre 2) résulte que :

$$z(t) \le \int_0^t \left[f(s)a(s)+h(s)\left(\frac{p-1}{p}+\frac{a(s)}{p}\right)\right]\times\exp\left(\int_s^t b(\tau)\left(f(\tau)+\frac{h(\tau)}{p}\right)d\tau\right)ds$$

Dès lors,

$$u^p(t) \le a(t)+b(t)z(t),$$

on obtient l'inégalité souhaitée.

2. Soit $\epsilon > 0$ une constante arbitraire très petite, de l'hypothèse (3.37), on a pour tout $t \in \mathbb{R}_+$

$$\left(\frac{u(t)}{c(t)+\epsilon}\right)^p \le 1 + \int_0^t \left[f(s)\left(\frac{u(s)}{c(s)+\epsilon}\right)^p + h(s)c^{1-p}(s)\left(\frac{u(s)}{c(s)+\epsilon}\right)\right]ds$$

Á l'aide du résultat démontré précédemment et dès qu'on fait tendre $\epsilon \to 0$, le résultat est clair.

3. On considère la fonction définie par

$$z(t) := \int_0^t k(t,s)[f(s)u^p(s) + h(s)u(s)]ds,$$

alors $z(0) = 0$ et

$$\begin{aligned}
z'(t) &= k(t,t)[f(t)u^p(t) + h(t)u(t)] + \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} k(t,s)[f(s)u^p(s) + h(s)u(s)]ds \\
&\le k(t,t)\left[f(t)\{a(t) + b(t)z(t)\} + h(t)\left\{\frac{p-1}{p} + \frac{a(t)}{p} + \frac{b(t)}{p}z(t)\right\}\right] \\
&+ \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} k(t,s)\left[f(s)\{a(s) + b(s)z(s)\} + h(s)\left(\frac{p-1}{p} + \frac{a(s)}{p} + \frac{b(s)}{p}z(s)\right)\right] ds \\
&\le \left[k(t,t)b(t)\left(f(t) + \frac{h(t)}{p}\right) + \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} k(t,s)b(s)\left(f(s) + \frac{h(s)}{p}\right) ds\right] z(t) \\
&+ k(t,t)\left(f(t)a(t) + h(t)\left[\frac{p-1}{p} + \frac{a(t)}{p}\right]\right) \\
&+ \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} k(t,s)\left\{f(s)a(s) + h(s)\left(\frac{p-1}{p} + \frac{a(s)}{p}\right)\right\} ds = A(t)z(t) + B(t).
\end{aligned}$$

En appliquant le lemme 2.1.1, on obtient :

$$z(t) \le \int_0^t B(s)\exp\left(\int_s^t A(\tau)d\tau\right) ds$$

dès lors

$$u^p(t) \le a(t) + b(t)z(t),$$

le résultat est clair

Théorème 3.1.11. *Soient u, a, b, g des fonctions à valeur dans $\mathbf{R}$ continues, positives définies sur $\mathbf{R}_+$ et $p > 1$ une constante.*

1. *Soit $\eta : \mathbf{R}_+^2 \longrightarrow \mathbf{R}_+$ une fonction continue telle que :*

$$0 \le \eta(t,x) - \eta(t,y) \le m(t,y)(x-y) \tag{3.39}$$

pour tout $t \in \mathbf{R}_+$ et $x \ge y \ge 0$, où $m : \mathbf{R}_+^2 \longrightarrow \mathbf{R}_+$ une fonction continue. Si

$$u^p(t) \le a(t) + b(t)\int_0^t \eta(s, u(s))ds \tag{3.40}$$

pour $t \in \mathbf{R}_+$, alors

$$u(t) \le \left[a(t) + b(t)\int_0^t \eta\left(s, \frac{p-1}{p} + \frac{a(s)}{p}\right) \times \exp\left(\int_s^t m\left(\tau, \frac{p-1}{p} + \frac{a(\tau)}{p}\right)\frac{b(\tau)}{p}d\tau\right) ds\right]^{1/p}$$

pour $t \in \mathbf{R}_+$

2. *Soit $\eta : \mathbf{R}_+^2 \longrightarrow \mathbf{R}_+$ une fonction continue et $\varphi : \mathbf{R}_+ \longrightarrow \mathbf{R}_+$ une fonction continue et strictement croissante avec $\varphi(0) = 0$ telle que :*

$$0 \le \eta(t,x) - \eta(t,y) \le m(t,y)\varphi^{-1}(x-y), \tag{3.41}$$

pour $t \in \mathrm{R}_+$, *et* $x \geq y \geq 0$ *où* $m : \mathrm{R}_+^2 \longrightarrow \mathrm{R}_+$ *une fonction continue et* φ^{-1} *est l'inverse de* φ *et* φ^{-1} *est sous-multiplicative. Si pour* $t \in \mathrm{R}_+$

$$u^p(t) \leq a(t) + b(t)\varphi\left(\int_0^t \eta(s, u(s))ds\right), \tag{3.42}$$

alors pour $t \in \mathrm{R}_+$

$$u(t) \leq \left[a(t) + b(t)\varphi\left(\int_0^t \eta\left(s, \frac{p-1}{p} + \frac{a(s)}{p}\right) \times e^{\int_s^t m\left(\tau, \frac{p-1}{p} + \frac{a(\tau)}{p}\right)\varphi^{-1}\left(\frac{b(\tau)}{p}\right)d\tau} ds\right]^{1/p}$$

3. *Soit* $W(r)$ *une fonction continue croissante, sous-additive et sous-multiplicative définie dans* R_+ *et* $W(r) > 0$ *dans* R_+. *Si*

$$u^p(t) \leq a(t) + b(t)\int_0^t g(s)W(u(s))ds, \tag{3.43}$$

pour $t \in \mathrm{R}_+$, *alors pour* $0 \leq t \leq T$,

$$u(t) \leq \left\{a(t) + b(t)G^{-1}\left[G(D(t)) + \int_0^t g(s)W\left(\frac{b(s)}{p}\right)ds\right]\right\}^{1/p}$$

où

$$D(t) = \int_0^t g(s)W\left(\frac{p-1}{p} + \frac{a(s)}{p}\right)ds; t \in \mathrm{R}_+$$

et

$$G(u) = \int_{u_0}^u \frac{ds}{W(s)};\ u > 0, u_0 > 0,$$

G^{-1} *est l'inverse de* G, *et* $T \in \mathrm{R}_+$ *est choisit de sorte que*

$$G(D(t)) + \int_0^t g(s)W\left(\frac{b(s)}{p}\right)ds \in Dom(G^{-1})$$

pour tout $0 \leq t \leq T$.

Théorème 3.1.12. *(Inégalité d'Ammari-Tucsnak [1]) Soit* (ξ_k) *une suite de nombre réels positifs satisfaisant pour tout* $k \geq 0$

$$\xi_{k+1} \leq \xi_k - C\xi_{k+1}^{2+\alpha}, \tag{3.44}$$

où $C > 0$ *et* $\alpha > -1$ *sont des constantes. Alors il existe une constante positive* $M(\alpha, C)$ *tel que :*

$$\xi_k \leq \frac{M}{(k+1)^{1/(1+\alpha)}},\ \forall k \geq 0.$$

Preuve : On considère la séquence définie par

$$\mathcal{F}_k := \frac{M}{(k+1)^{1/(1+\alpha)}},$$

où $M > 0$ est à déterminer. Après un calcul simple, on obtient

$$\frac{1}{M}\lim_{k\to\infty}\left[(\mathcal{F}_k - \mathcal{F}_{k+1})k(k+2)^{1/(1+\alpha)}\right] = \frac{1}{1+\alpha}. \tag{3.45}$$

Donc il existe $k_0 > 0$ tel que pour tout $k \geq k_0$,

$$\mathcal{F}_k - \mathcal{F}_{k+1} \leq \frac{2M}{(1+\alpha)k(k+2)^{1/(1+\alpha)}}. \tag{3.46}$$

La relation ci-dessus résulte que pour tout $k \geq k_1 = \max\{k_0, 2\}$,

$$\mathcal{F}_k - \mathcal{F}_{k+1} \leq \frac{4}{(1+\alpha)M^{1+\alpha}} \mathcal{F}_{k+1}^{2+\alpha}. \tag{3.47}$$

Si on suppose que

$$\frac{4}{(1+\alpha)M^{1+\alpha}} < C \text{ et } \frac{M}{(k_1+1)^{1/(1+\alpha)}} \geq \xi_{k_1}, \tag{3.48}$$

De (3.47), on a

$$\mathcal{F}_k - \mathcal{F}_{k+1} \leq C\mathcal{F}_{k+1}^{2+\alpha}, \ \forall k \geq k_1. \tag{3.49}$$

Il suffit de montrer que pour tout $k \geq k_1$,

$$\xi_k \leq \mathcal{F}_k. \tag{3.50}$$

On procède par récurrence sur k.
Pour $k = k_1$, (3.50) découle de (3.48). Si on suppose que (3.50) tient pour $k \leq m$, en combinant (3.44) et (3.49), on obtient

$$\xi_{m+1} + C\xi_{m+1}^{2+\alpha} \leq \mathcal{F}_{m+1} + C\mathcal{F}_{m+1}^{2+\alpha}.$$

Ce qu'implique évidemment que $\xi_{m+1} \leq \mathcal{F}_{m+1}$. Ce qui achève la preuve.

Le théorème précédent a été utilisé par KAIS AMMARI et MARIUS TUCSNAK comme lemme pour démontrer un résultat sur la stabilisation de poutres BERNOULLI-EULER au moyen d'une force de rétroaction ponctuelle.

Lemme 3.1.5. *Soit $\varphi : \mathrm{R}_+ \longrightarrow \mathrm{R}_+$ une fonction décroissante et satisfaisant pour tout $t \geq 0$,*

$$C\varphi^{1+\gamma}(t) \leq \varphi(t) - \varphi(t+T),$$

où $C > 0$, $\gamma > 0$ et $T > 0$ sont des constantes. Alors nous avons $\varphi(t) = O(t^{\frac{-1}{\gamma}})$ quand $t \to +\infty$.

Théorème 3.1.13. *(Généralisation du théorème 2.2.2 de Gronwall-Bellman) Considérons les réels a, b, n et k avec $a < b, n > 1$ et $k > 0$. Soit*

1. *$f : [a, b] \mapsto \mathrm{R}_+$une fonction intégrable telle que, pour tout $\alpha, \beta \in [a, b]$ avec $\alpha < \beta$, on ait*

$$\int_\alpha^\beta f(s)ds > 0, \tag{3.51}$$

2. *$x : [a, b] \mapsto \mathrm{R}_+$ une fonction bornée telle que, pour tout $t \in [a, b]$, on ait*

$$x(t) \leq k + \int_a^t f(s)(x(s))^n ds, \tag{3.52}$$

alors, sous l'hypothèse suivante

$$1 - (n-1)k^{n-1} \int_a^b f(s)ds > 0 \tag{3.53}$$

nous avons l'inégalité suivante

$$x(t) \leq \frac{k}{\left[1 - (n-1)k^{n-1} \int_a^t f(s)ds\right]^{\frac{1}{n-1}}} \quad \forall t \in [a, b] \tag{3.54}$$

Preuve : La relation (3.52) peut s'écrire

$$x(t) \leq k + \int_a^t \left(f(s)(x(s))^{n-1}\right) x(s)ds, \ \forall t \in [a, b]$$

Le théorème 2.2.2 (cf chapitre 2) résulte que

$$x(t) \leq k \times \exp\left(\int_\alpha^t f(s)(x(s))^{n-1} ds\right) \tag{3.55}$$

Cette dernière inégalité est équivalente à

$$(x(t))^{n-1} \leq k^{n-1} \times \exp\left((n-1)\int_\alpha^t f(s)(x(s))^{n-1} ds\right) \tag{3.56}$$

Multiplions l'inégalité (3.56) par $-(n-1)f(t)$, nous obtenons

$$-(n-1)f(t)(x(t))^{n-1} \geq -(n-1)f(t)k^{n-1} \times \exp\left((n-1)\int_\alpha^t f(s)(x(s))^{n-1} ds\right)$$

qui peut se réécrire de cette façon

$$-(n-1)f(t)(x(t))^{n-1} \exp\left(-(n-1)\int_\alpha^t f(s)(x(s))^{n-1} ds\right) \geq -(n-1)k^{n-1}f(t)$$

Ce qui donne

$$\frac{d}{dt}\left[\exp\left(-(n-1)\int_\alpha^t f(s)(x(s))^{n-1} ds\right)\right] \geq -(n-1)k^{n-1}f(t)$$

En intégrant de a à t, on obtient

$$\exp\left(-(n-1)\int_\alpha^t f(s)(x(s))^{n-1} ds\right) \geq 1-(n-1)k^{n-1}\int_a^t f(s)ds$$

De (3.53), on a

$$\exp\left((n-1)\int_\alpha^t f(s)(x(s))^{n-1} ds\right) \leq \frac{1}{1-(n-1)k^{n-1}\int_a^t f(s)ds} \tag{3.57}$$

Les inégalités (3.56) et (3.57) impliquent que

$$(x(t))^{n-1}k^{-(n-1)} \leq \frac{1}{1-(n-1)k^{n-1}\int_a^t f(s)ds}$$

Donc

$$x(t) \leq \frac{k}{\left[1-(n-1)k^{n-1}\int_a^t f(s)ds\right]^{\frac{1}{n-1}}}$$

Remarque 3.1.4. *Le théorème précédent représente une nouvelle généralisation du théorème 2.2.2 de Gronwall-Bellman qui constitue un élément clé dans la stabilisation des systèmes non linéaires affines, qu'ils soient non linéaires à dérivée d'ordre entier ou non entier. Cette nouvelle généralisation permet d'élaborer une commande simple afin de stabiliser exponentiellement par retour d'état statique le système non linéaire affine considéré par le jeune thésard Ibrahima N'DOYE (Le lecteur pourra consulter la mémoire de Ibrahima N'DOYE [16]).*

3.2 Applications

3.2.1 Application du théorème 3.1.1 à l'étude du comportement asymptotique d'une solution d'équation différentielle non linéaire

Ici on va voir une application du théorème 3.1.1 pour étudier le comportement asymptotique des solutions d'une équation différentielle non linéaire. Pour cela, on considère l'équation différentielle non linéaire suivante :

$$u'' + f(t,u) = 0 \tag{3.58}$$

Cohen a prouvé les résultats suivants :

Théorème 3.2.1. *[6] Supposons que $f(t,u)$ satisfait les conditions suivantes :*

1. *$f(t,u)$ est continue dans $D := \{(t,u)/t \geq 0, -\infty < u < +\infty\}$*
2. *La dérivée $f_u(t,u)$(pour u fixé) existe dans D et $f_u(t,u) > 0$ dans D*
3. $$|f(t,u)| \leq f_u(t,u)|u|$$
   dans D.

Alors l'équation (3.58) a des solutions asymptotique à $at+b$ quand $t \to +\infty$, où a, b sont des constantes et $a \neq 0$.

Théorème 3.2.2. *Soit $f(t,u)$ une fonction continue dans D. Si les fonctions $v(t)$, $\phi(t)$ sont continues positives pour tout $t \geq 0$ et $g(u)$ est une fonction continue pour tout $u \geq 0$ tel que :*

1. $$\int_1^{+\infty} v(t)\phi(t)dt < +\infty$$
2. *Pour tout $u > 0$, $g(u)$ est positive croissante.*
3. *Pour tout $t \geq 1$ et $-\infty < u < +\infty$,*
   $$|f(t,u)| \leq v(t)\phi(t)g(|u|/t).$$

Alors l'équation (3.58) a des solutions qui sont asymptotiques à $at+b$, où a, b sont des constantes et $a \neq 0$.

Preuve : En intégrant 2 fois dans $[1,t]$ (3.58), on obtient :

$$u(t) = c_1 + c_2 t - \int_1^t \left[\int_1^\tau f(s,u(s))ds\right] d\tau \tag{3.59}$$

$$i.e : u(t) = c_1 + c_2 t - \int_1^t (t-s) f(s,u(s))ds \tag{3.60}$$

En choisissant $c_1 > 1$ et $c_3 = c_1 + |c_2|$. Alors pour tout $t > 1$, on a :

$$\frac{|u(t)|}{t} \leq c_3 + \frac{t-1}{t}\int_1^t |f(s,u(s))|ds$$

$$\leq c_3 + \int_1^t v(s)\phi(s)g(|u(s)|/s)ds.$$

Il s'ensuit du théorème 3.1.1 que :

$$|u(t)|/t \leq G^{-1}\left(G(c_3) + \int_1^t v(s)\phi(s)ds\right)$$

où
$$G(x)=\int_1^x \frac{dt}{g(t)},$$
G^{-1} est l'inverse de G.
De $g(t)>0$, on sait que G croit, donc G^{-1} existe et elle est également croissante. Posons $c_4=G(c_3)+\int_1^{+\infty} v(s)\phi(s)ds$ et on aura
$$|u(t)|/t \le G^{-1}(c_4). \tag{3.61}$$
En dérivant (3.60), on a :
$$u'(t)=c_2-\int_1^t f(s,u(s))ds$$
D'après les hypothèses du théorème et (3.61), on obtient :
$$\int_1^t |f(s,u(s))|ds \le \int_1^t v(s)\phi(s)g(|u(s)|/s)ds$$
$$\Longrightarrow \int_1^t |f(s,u(s))|ds \le g(G^{-1}(c_4)) \times \int_1^t v(s)\phi(s)ds < +\infty$$
Par conséquent, $\lim_{t\to+\infty} u'(t)=c_2-\int_1^{+\infty} f(s,u(s))ds$. Si on choisit c_2 suffisamment grande, alors $u'(t)>1$. Donc $\lim_{t\to+\infty} u'(t)\neq 0$.

Remarque 3.2.1. *Si on suppose que : $v(t)=f_u(t,0)$, $\phi(t)=t$ et $g(u)=u$ dans le théorème 3.2.2, on obtient le théorème 3.2.1.*

Ici, on donne un exemple où le théorème 3.2.1 ne s'applique pas, par contre le théorème 3.2.2 marche très bien.
Exemple : Soit l'équation différentielle suivante :
$$u" + t^{-4}u^2\cos(u)=0 \tag{3.62}$$
On a $f_u(t,0)=0$. D'où l'hypothèse **3)** du théorème 3.2.1 n'est pas vérifiée. Donc on ne peut pas appliquer le théorème 3.2.1. Par contre, pour $v(t)=t^{-4}$, $\phi(t)=t^2$, $g(u)=u^2$, toutes les conditions du théorèmes 3.2.2 sont satisfaites. Donc l'équation (3.62) admet des solutions asymptotique à $at+b$ quand $t\to+\infty$.

3.2.2 Application du théorème 3.1.10 pour trouver une borne explicite de la solution de certaine classe d'équations différentielles

Dans cette section, nous appliquerons le théorème 3.1.10 (partie 1)) pour obtenir une borne explicite sur la solution d'une certaine équation différentielle
$$u^{p-1}(t)u'(t)+F(t,u(t))=r(t);\ u(0)=u_0 \tag{3.63}$$
où $p>1$ est un nombre réel fixe, u_0 est une constante réelle, et $u,\ r:\mathbb{R}_+\longrightarrow\mathbb{R}$, $F:\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ sont des fonctions continues. Il est facile de vérifier que le problème (3.63) est équivalent à l'équation intégrale
$$\frac{u^p(t)}{p}-\frac{u_0^p}{p}+\int_0^t F(s,u(s))ds=\int_0^t r(s)ds. \tag{3.64}$$

On suppose que F satisfait la condition

$$|F(t,u)| \leq h(t)|u|$$

où $h : \mathbf{R}_+ \longrightarrow \mathbf{R}_+$ est une fonction continue. Il s'ensuit de (3.64) que

$$|u(t)|^p \leq \tilde{a}(t) + p\int_0^t h(s)|u(s)|ds$$

avec $\tilde{a}(t) = |u_0|^p + p\displaystyle\int_0^t |r(s)|ds$, en appliquant le théorème 3.1.10 qui tient avec $f(t) = 0$ pour tout $t \geq 0$, on obtient une limite de la solution de (3.63) qui est :

$$|u(t)| \leq \left[\tilde{a}(t) + p\int_0^t h(s)\left(\frac{p-1}{p} + \frac{\tilde{a}(s)}{p}\right)\exp\left(\int_s^t h(\tau)d\tau\right)ds\right]^{1/p}$$

Noter qu'avant que le théorème 3.1.10 soit établit, les inégalités établies avant celle-ci n'ont pas pu fournir une limite de la solution de (2.47), ce qui donne le succès du théorème 3.1.10.

Chapitre 4

Inégalités de Gronwall avec retard

Ce chapitre est consacré sur l'étude de quelques inégalités de *Gronwall* avec retard et quelques applications de ces inégalités qui peuvent fournir des limites explicites sur des fonctions inconnues. Ces inégalités jouent un rôle très important sur l'étude de certaines propriétés des équations différentielles à retard et équations intégrales à retard. Ces dernières apparaissent souvent à l'étude de la stabilisation des systèmes dynamiques.
Noter que certaines inégalités de ce type sont déjà été énoncées au chapitre 3 (tels que le théorème 3.1.7 ainsi que ses corollaires, théorème 3.1.9...etc) qui font l'objet de généralisation de quelques inégalités linéaire et non linéaire.

4.1 Quelques inégalités intégrales avec retard

Théorème 4.1.1. *(Inégalité de Agarwal-Kim-Sen [2]) Soient* u, f_i, $g_i \in C\left(I, \mathrm{R}_+\right)$, $i = 1, \ldots, n$, *et soit* $\alpha_i \in C^1(I, I)$ *est croissante avec* $\alpha_i(t) \leq t$, $i = 1, \ldots, n$. *On suppose que* $c \geq 0$ *et* $q > 0$ *des constantes,* $\varphi \in C^1\left(\mathrm{R}_+, \mathrm{R}_+\right)$ *est une fonction croissante avec* $\varphi(\infty) = \infty$ *dans* I, *et* $\psi(u)$ *est une fonction continue croissante pour* $u \in \mathrm{R}_+$ *avec* $\psi(u) > 0$ *pour* $u > 0$. *Si pour* $t \in I$

$$\varphi(u(t)) \leq c + \sum_{i=1}^{n} \int_{\alpha_i(t_0)}^{\alpha_i(t)} u^q(s)\left[f_i(s)\psi(u(s)) + g_i(s)\right] ds, \tag{4.1}$$

alors pour $t \in [t_0, t_1)$

$$u(t) \leq \varphi^{-1}\left\{G^{-1}\left[\psi^{-1}\left(\psi\left(k\left(t_0\right)\right) + \sum_{i=1}^{n} \int_{\alpha_i(t_0)}^{\alpha_i(t)} f_i(s) ds\right)\right]\right\}, \tag{4.2}$$

où

$$\mathrm{G}(r) = \int_{r_0}^{r} \frac{ds}{\left[\varphi^{-1}(s)\right]^q}, \quad r \geq r_0 > 0,$$

$$\psi(r) = \int_{r_0}^{r} \frac{ds}{\psi\left[\varphi^{-1}\left(G^{-1}(s)\right)\right]}, \quad r \geq r_0 > 0,$$

$$k\left(t_0\right) = G(c) + \sum_{i=1}^{n} \int_{a_i(t_0)}^{t_i(t)} g_i(s) ds,$$

avec G^{-1} *et* ψ^{-1} *sont respectivement les fonctions inverse de* G *et* ψ, *pour* $t \in I$. $t_1 \in I$ *est choisi de sorte que*

$$\psi\left(k\left(t_0\right)\right) + \sum_{i=1}^{n} \int_{\alpha_i(t_0)}^{\alpha_i(t)} f_i(s) ds \in \mathrm{Dom}(\psi^{-1}).$$

Preuve : On suppose que $c > 0$. Du coté droite de (4.1), on définie la fonction $z(t)$ par

$$z(t) := c + \sum_{i=1}^{n} \int_{\alpha_i(t_0)}^{\alpha_i(t)} u^q(s) \left[f_i(s)\psi(u(s)) + g_i(s)\right] ds.$$

Clairement, $z(t)$ est croissante, $u(t) \leq \varphi^{-1}(z(t))$ pour $t \in I$ et $z(t_0) = c.$ En dérivant $z(t)$, on obtient

$$z'(t) = \sum_{i=1}^{n} [u(\alpha_i(t))]^q \left\{f_i(\alpha_i(t))\psi(u(\alpha_i(t))) + g_i(\alpha_i(t))\right\} \alpha_i'(t) \leq$$

$$\varphi^{-1}(z(t))]^q \sum_{i=1}^{n} \left[f_i(\alpha_i(t))\psi(\varphi^{-1}(z(\alpha_i(t)))) + g_i(\alpha_i(t))\right] \alpha_i'(t).$$

En utilisant la monotonie de φ^{-1} et z, on en déduit que

$$[\varphi^{-1}(z(t))]^q \geq [\varphi^{-1}(z(t_0))]^q = [\varphi^{-1}(c)]^q > 0.$$

C'est à dire

$$\frac{z'(t)}{[\varphi^{-1}(z(t))]^q} \leq \sum_{i=1}^{n} \left[f_i(\alpha_i(t))\psi[\varphi^{-1}(z(\alpha_i(t)))] + g_i(\alpha_i(t))\right] \alpha_i'(t).$$

En intégrant l'inégalité précédente dans $[t_0, t]$ et avec des changements de variable appropriés, on obtient

$$G(z(t)) \leq G(c) + \sum_{i=1}^{n} \int_{\alpha_i(t_0)}^{\alpha_i(t)} \left[f_i(s)\psi(\varphi^{-1}(z(s))) + g_i(s)\right] ds.$$

De cette inégalité, en posant $p(t) = G(c) + \sum_{i=1}^{n} \int_{\alpha_i(t_0)}^{\alpha_i(t)} g_i(s)ds$ et en réécrivant, on a

$$G(z(t)) \leq p(t) + \sum_{i=1}^{n} \int_{\alpha_i(t_0)}^{\alpha_i(t)} f_i(s)\psi[\varphi^{-1}(z(s))]ds.$$

De l'inégalité précédente, observe que

$$G(z(t)) \leq p(t_1) + \sum_{i=1}^{n} \int_{\alpha_i(t_0)}^{\alpha_i(t)} f_i(s)\psi[\varphi^{-1}(z(s))]ds$$

pour $t \leq t_1$. Maintenant, on définie $k(t)$ par le coté droite de l'inégalité précédente (

$$k(t) := p(t_1) + \sum_{i=1}^{n} \int_{\alpha_i(t_0)}^{\alpha_i(t)} f_i(s)\psi[\varphi^{-1}(z(s))]ds.$$

) Clairement, $k(t)$ est croissante, $z(t) \leq G^{-1}(k(t))$ pour $t \in I$ et $k(t_0) = p(t_1)$. En dérivant $k(t)$, on obtient

$$k'(t) = \sum_{i=1}^{n} \left[f_i(\alpha_i(t))\psi(\varphi^{-1}(z(\alpha_i(t))))\right] \alpha_i'(t) \leq \psi(\varphi^{-1}(G^{-1}(k(t)))) \sum_{i=1}^{n} f_i(\alpha_i(t))\alpha_i'(t).$$

En utilisant la monotonie de $\psi, \varphi^{-1}, G^{-1}$ et k, on en déduit que

$$\frac{k'(t)}{\psi\left[\varphi^{-1}(G^{-1}(k(t)))\right]} \leq \sum_{i=1}^{n} f_i(\alpha_i(t))\alpha_i'(t).$$

En intégrant dans $[t_0, t]$ l'inégalité ci-dessus, par définition de ψ et avec un changement de variable à droite, on obtient

$$\psi(k(t)) \leq \psi(k(t_0)) + \sum_{i=1}^{n} \int_{\alpha_i(t_0)}^{\alpha_i(t)} f_i(s)ds.$$

Et via la monotonie de ψ^{-1} et G^{-1}, on obtient

$$z(t) \leq G^{-1}(k(t)) \leq G^{-1}\left[\psi^{-1}\left(\psi(p(t_1)) + \sum_{i=1}^{n} \int_{\alpha_i(t_0)}^{\alpha_i(t)} f_i(s)ds\right)\right]$$

pour $t_0 \leq t \leq t_1$. Dès lors $u(t) \leq \varphi^{-1}(z(t))$ et en remplaçant $t_1 = t$ dans l'inégalité précédente, on obtient l'inégalité souhaitée.
Si $c = 0$, on réutilise la même procédure avec $\epsilon > 0$ une constante arbitraire très petite au lieu de c et en suite faire tendre ϵ vers 0 ($\epsilon \to 0$). Ce qui complète la preuve.

Le cas spécial $\varphi(u) = u^p$ ($p > q > 0$ est une constante), le théorème 4.1.1 donne l'inégalité intégrale avec retard suivante pour les fonctions non linéaires.

Corollaire 4.1.1. *Soient u, f_i, $g_i \in C(I, \mathrm{R}_+)$, $i = 1, ..., n$, et soit $\alpha_i \in C^1(I, I)$ est croissante avec $\alpha_i(t) \leq t$, $i = 1, ..., n$. On suppose que $c \geq 0$ et $p > q > 0$ sont des constantes, et $\psi(u)$ est une fonction continue croissante pour $u \in \mathrm{R}_+$ avec $\psi(u) > 0$. Si pour $t \in I$*

$$u^p(t) \leq c + \sum_{i=1}^{n} \int_{\alpha_i(t_0)}^{\alpha_i(t)} u^q(s)[f_i(s)\psi(u(s)) + g_i(s)]ds, \tag{4.3}$$

alors pour $t \in [t_0, \tau)$

$$u(t) \leq \left[\psi_0^{-1}\left(\psi_0(k_1(t_0)) + \frac{p-q}{p} \sum_{i=1}^{n} \int_{\alpha_i(t_0)}^{\alpha_i(t)} f_i(s)ds\right)\right]^{\frac{1}{p-q}},$$

où

$$\psi_0(r) = \int_{r_0}^{r} \frac{ds}{\psi(s^{1/(p-q)})},\ r \geq r_0 > 0,$$

$$k_1(t_0) = c^{(p-q)/p} + \frac{p-q}{p} \sum_{i=1}^{n} \int_{\alpha_i(t_0)}^{\alpha_i(t)} g_i(s)ds,$$

où ψ_0^{-1} dénote la fonction inverse de ψ_0 pour $t \in I$. $\tau \in I$ est choisi de sorte que

$$\psi_0(k_1(t_0)) + \frac{p-q}{p} \sum_{i=1}^{n} \int_{\alpha_i(t_0)}^{\alpha_i(t)} f_i(s)ds \in Dom(\psi_0^{-1}).$$

Preuve : Dans le coté droite de (4.3), on définit la fonction $z(t)$ par

$$z(t) := c + \sum_{i=1}^{n} \int_{\alpha_i(t_0)}^{\alpha_i(t)} u^q(s)[f_i(s)\psi(u(s)) + g_i(s)]ds.$$

Ce qui implique que $u(t) \leq \{z(t)\}^{1/p}$ et

$$z'(t) = \sum_{i=1}^{n} u^q(\alpha_i(t))[f_i(\alpha_i(t))\psi(u(\alpha_i(t))) + g_i(\alpha_i(t))]\alpha_i'(t)$$

$$\leq (\{z(t)\}^{1/p})^q \sum_{i=1}^{n} \left[f_i(\alpha_i(t))\psi(\{z(\alpha_i(t))\}^{1/p}) + g_i(\alpha_i(t))\right] \alpha_i'(t).$$

$$\Longrightarrow \frac{z'(t)}{(\{z(t)\}^{1/p})^q} \leq \sum_{i=1}^{n} \left[f_i(\alpha_i(t))\psi(\{z(\alpha_i(t))\}^{1/p}) + g_i(\alpha_i(t))\right] \alpha_i'(t).$$

En intégrant dans $[t_0, t]$ l'inégalité ci-dessus et avec un changement de variable à droite, on obtient

$$\psi_0(z(t)) = \{z(t)\}^{\frac{p-q}{p}} \leq \psi_0(c) + \frac{p-q}{p} \sum_{i=1}^{n} \int_{\alpha_i(t_0)}^{\alpha_i(t)} \left[f_i(s)\psi(\{z(s)\}^{1/p}) + g_i(s)\right] ds.$$

$$i.e : \psi_0(z(t)) = \{z(t)\}^{\frac{p-q}{p}} \leq c^{\frac{p-q}{p}} + \frac{p-q}{p} \sum_{i=1}^{n} \int_{\alpha_i(t_0)}^{\alpha_i(t)} \left[f_i(s)\psi(\{z(s)\}^{1/p}) + g_i(s)\right] ds.$$

En posant

$$p(t) = c^{\frac{p-q}{p}} + \frac{p-q}{p} \sum_{i=1}^{n} \int_{\alpha_i(t_0)}^{\alpha_i(t)} g_i(s) ds$$

et pour $t \leq \tau$ nous avons

$$\psi_0(z(t)) = \{z(t)\}^{\frac{p-q}{p}} \leq p(\tau) + \frac{p-q}{p} \sum_{i=1}^{n} \int_{\alpha_i(t_0)}^{\alpha_i(t)} f_i(s)\psi(\{z(s)\}^{1/p}) ds. \tag{4.4}$$

De (4.4), on définie la fonction $k_1(t)$ dans le coté droite de (4.4). Ce qui entraine que $\psi_0(z(t)) = \{z(t)\}^{\frac{p-q}{p}} \leq k_1(t)$ et

$$k_1'(t) = \frac{p-q}{p} \sum_{i=1}^{n} f_i(\alpha_i(t))\psi(\{z(\alpha_i(t))\}^{1/p})\alpha_i'(t) \leq \frac{p-q}{p} \sum_{i=1}^{n} f_i(\alpha_i(t))\psi(\{k_1(t)\}^{1/(p-q)})\alpha_i'(t).$$

Il s'ensuit que

$$\frac{k_1'(t)}{\psi(\{k_1(t)\}^{1/(p-q)})} \leq \frac{p-q}{p} \sum_{i=1}^{n} f_i(\alpha_i(t))\alpha_i'(t).$$

En intégrant dans $[t_0, t]$ l'inégalité ci-dessus et avec un petit changement de variable, on obtient

$$\psi_0(k_1(t)) \leq \psi_0(k_1(t_0)) + \sum_{i=1}^{n} \int_{\alpha_i(t_0)}^{\alpha_i(t)} f_i(s) ds.$$

Puisque ψ_0, ψ_0^{-1} sont croissantes, alors

$$k_1(t) \leq \psi_0^{-1} \left[\psi_0(k_1(t_0)) + \sum_{i=1}^{n} \int_{\alpha_i(t_0)}^{\alpha_i(t)} f_i(s) ds\right].$$

Dès lors $\{z(t)\}^{\frac{p-q}{p}} \leq k_1(t)$ et $u(t) \leq \{z(t)\}^{1/p}$, le résultat est clair.

Remarque 4.1.1. *Le théorème 4.1.1 a été appliqué pour générer d'autres inégalités non linéaire utiles dans des situations plus générales (le lecteur pourra lire l'article d'*Agarwal-Kim-Sen *[2])*

Théorème 4.1.2. *(Inégalité de Lipovan) Soient $k \in C(\mathrm{R}_+, \mathrm{R}_+)$, $\alpha \in C^1(\mathrm{R}_+, \mathrm{R}_+)$, $a \in C(\mathrm{R}_+^2, \mathrm{R}_+)$ avec $(t, s) \mapsto \dfrac{\partial a(t, s)}{\partial t} \in C(\mathrm{R}_+^2, \mathrm{R}_+)$. On suppose de plus que α est croissante et $\alpha(t) \leq t$ pour tout $t \geq 0$. Si $u \in C(\mathrm{R}_+, \mathrm{R}_+)$ satisfait pour tout $t \geq 0$*

$$u(t) \leq k(t) + \int_0^{\alpha(t)} a(t, s)u(s) ds,$$

alors pour tout $t \geq 0$,

$$u(t) \leq k(t) + e^{\int_0^{\alpha(t)} a(t,s)ds} \int_0^t \exp\left(-\int_0^{\alpha(r)} a(r,s)ds\right) \frac{\partial}{\partial r}\left(\int_0^r a(r,s)k(s)ds\right) dr$$

Preuve : Soit

$$z(t) := \int_0^{\alpha(t)} a(t,s)u(s)ds.$$

Avec les hypothèses de a et α, il est claire que z est croissante dans R_+. Donc pour tout $t \geq 0$,

$$z'(t) = a(t,\alpha(t))u(\alpha(t))\alpha'(t) + \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} a(t,s)u(s)ds$$

$$\leq a(t,\alpha(t))\left[k(\alpha(t)) + z(t)\right]\alpha'(t) + \int_0^{\alpha(t)} \frac{\partial}{\partial t} a(t,s)k(s)ds + z(t)\int_0^{\alpha(t)} \frac{\partial}{\partial t} a(t,s)ds.$$

$$i.e : z'(t) \leq z(t)\left[a(t,\alpha(t))\alpha'(t) + \int_0^{\alpha(t)} \frac{\partial}{\partial t} a(t,s)ds\right]$$

$$+a(t,\alpha(t))k(\alpha(t))\alpha'(t) + \int_0^{\alpha(t)} \frac{\partial}{\partial t} a(t,s)k(s)ds.$$

$$i.e : z'(t) \leq z(t)\frac{d}{dt}\left(\int_0^{\alpha(t)} a(t,s)ds\right) + \frac{d}{dt}\left(\int_0^{\alpha(t)} a(t,s)k(s)ds\right)$$

$$i.e : z'(t) - z(t)\frac{d}{dt}\left(\int_0^{\alpha(t)} a(t,s)ds\right) \leq \frac{d}{dt}\left(\int_0^{\alpha(t)} a(t,s)k(s)ds\right)$$

En multipliant l'inégalité précédente par $\exp\left(-\int_0^{\alpha(t)} a(t,s)ds\right)$, on peut faire :

$$\frac{d}{dt}\left\{z(t)\exp\left(-\int_0^{\alpha(t)} a(t,s)ds\right)\right\} \leq \exp\left(-\int_0^{\alpha(t)} a(t,s)ds\right)\frac{d}{dt}\left(\int_0^{\alpha(t)} a(t,s)k(s)ds\right).$$

En intégrant l'inégalité ci-dessus dans $[0,t]$, on obtient

$$z(t) \leq \exp\left(\int_0^{\alpha(t)} a(t,s)ds\right) \times \int_0^t \exp\left(-\int_0^{\alpha(r)} a(r,s)ds\right)\frac{\partial}{\partial r}\left(\int_0^{\alpha(r)} a(r,s)k(s)ds\right) dr.$$

Dès lors $u(t) \leq k(t) + z(t)$ et $\alpha(r) \leq r$, le résultat est clair.

Corollaire 4.1.2. *On suppose que* a, α *sont définies comme dans le théorème précédent et* $k(t) \equiv k > 0$ *une constante. Si* $u \in C(\mathrm{R}_+, \mathrm{R}_+)$ *satisfait l'inégalité de l'hypothèse du théorème précédent, alors pour tout* $t \geq 0$,

$$u(t) \leq k \times \exp\left(\int_0^{\alpha(t)} a(t,s)ds\right)$$

Preuve : Le théorème précédent donne

$$u(t) \leq k + \exp\left(\int_0^{\alpha(t)} a(t,s)ds\right) \times \int_0^t \exp\left(-\int_0^{\alpha(r)} a(r,\tau)d\tau\right)\frac{\partial}{\partial r}\left(\int_0^{\alpha(r)} k a(r,s)ds\right) dr$$

$$i.e: u(t) \leq k - k\exp\left(\int_0^{\alpha(t)} a(t,s)ds\right) \times \int_0^t \exp\left(-\int_0^{\alpha(r)} a(r,\tau)d\tau\right)\frac{\partial}{\partial r}\left(-\int_0^{\alpha(r)} a(r,s)ds\right)dr.$$

$$\iff u(t) \leq k - k\exp\left(\int_0^{\alpha(t)} a(t,s)ds\right) \times \left[\exp\left(-\int_0^{\alpha(r)} a(r,s)ds\right)\right]_0^t$$

$$\iff u(t) \leq k\exp\left(\int_0^{\alpha(t)} a(t,s)ds\right)$$

Le résultat suivant découle du corollaire précédent

Corollaire 4.1.3. *On suppose toujours a, α comme dans le théorème précédent et $k(t) \equiv k > 0$. Si $u \in C(\mathrm{R}_+, \mathrm{R}_+)$ est une solution de l'équation intégrale de Volterra*

$$u(t) = k + \int_0^{\alpha(t)} a(t,s)u(s)ds$$

pour tout $t \geq 0$. Si $\lim_{t\to+\infty} \int_0^{\alpha(t)} a(t,s)ds < +\infty$, alors u est bornée dans R_+.

Exemple : La fonction $a(t,s) = \dfrac{t}{1+2t+(1+t)s^2}$ (pour $t, s \geq 0$) satisfaite les hypothèse du corollaire précédent pour tout $\alpha \in C^1(\mathrm{R}_+, \mathrm{R}_+)$ croissante avec $\alpha(t) \leq t$ pour tout $t \geq 0$. Dans ce cas, la solution $u \in C(\mathrm{R}_+, \mathrm{R}_+)$ de l'équation intégrale est bornée.

4.2 Application

4.2.1 Application du théorème 4.1.1 et du corollaire 4.1.1 aux équations différentielle avec retard

Nous utiliserons le théorème 4.1.1 pour trouver des estimations de solution à certaines équations différentielles avec retard. Considérons l'équation différentielle fonctionnelle impliquant plusieurs arguments retardés avec la condition initiale

$$\varphi'(x(t))x'(t) = F(t, x(t-h_1(t)), ..., x(t-h_n(t))); x(t_0) = x_0 \tag{4.5}$$

où x_0 est une constante, $F \in C(I \times \mathrm{R}^n, \mathrm{R})$, $h_i \in C(I, \mathrm{R}_+)$, $i = 1, ..., n$ sont des fonctions qui sont décroissante tel que $t - h_i(t) \geq 0$, $t - h_i(t) \in C^1(I, I)$, $h_i'(t) < 1$, et $\varphi \in C^1(\mathrm{R}, \mathrm{R})$ est une fonction croissante avec $\varphi(|x|) \leq |\varphi(x)|$. Le théorème suivant traite d'une limite de la solution du problème (4.5).

Théorème 4.2.1. *On suppose que $F : I \times \mathrm{R}^n \longrightarrow \mathrm{R}$ est une fonction continue pour laquelle il existe des fonctions continues positives $f_i(t), g_i(t)$, $i = 1, ..., n$ pour $t \in I$ tel que*

$$|F(t, u_1, ..., u_n)| \leq \sum_{i=1}^n |u_i|^q [f_i(t)\psi(|u_i|) + g_i(t)], \tag{4.6}$$

où $q > 0$ est une constante et ψ est définie comme dans le théorème 4.1.1. Soit

$$Q_i = \max_{t\in I} \frac{1}{1-h_i'(t)}, i = 1, ..., n.$$

Si $x(t)$ est une solution quelconque du problème (4.5), alors pour $t \in I$

$$|x(t)| \leq \varphi^{-1}\left\{G^{-1}\left[\psi^{-1}\left(\psi(\tilde{k}(t_0)) + \sum_{i=1}^n \int_{t_0-h_i(t_0)}^{t-h_i(t)} \tilde{f}_i(\sigma)d\sigma\right)\right]\right\},$$

où G, ψ sont définie comme dans le théorème 4.1.1 et

$$\tilde{k}(t_0) = G(|\varphi(x_0)|) + \sum_{i=1}^{n} \int_{t_0}^{t-h_i(t)} \tilde{g}_i(\sigma)d\sigma,$$

$\tilde{f}_i(\sigma) = Q_i f_i(\sigma + h_i(s))$ *et* $\tilde{g}_i(\sigma) = Q_i g_i(\sigma + h_i(s))$ *pour* $s, \sigma \in I$

Preuve : Il est facile de voir que la solution $x(t)$ du problème (4.5) satisfait l'équation intégrale

$$\varphi(x(t)) = \varphi(x(t_0)) + \int_{t_0}^{t} F(s, x(s - h_1(s)), ..., x(s - h_n(s)))ds.$$

Il s'ensuit de (4.6) que

$$|\varphi(x(t))| \le |\varphi(x(t_0))| + \int_{t_0}^{t} \sum_{i=1}^{n} |x(s - h_i(s))|^q [f_i(t)\psi(|x(s - h_i(s))|) + g_i(t)]ds$$

pour $t, s \in I$. En effectuant un changement de variable dans le coté droite de l'inégalité précédente et en la réécrivant, nous avons

$$\varphi(|x(t)|) \le |\varphi(x_0)| + \sum_{i=1}^{n} \int_{t_0-h_i(t_0)}^{t-h_i(t)} |x(\sigma)|^q [\tilde{f}_i(\sigma)\psi(|x(\sigma)|) + \tilde{g}_i(\sigma)]d\sigma,$$

où $\tilde{f}_i(\sigma) = Q_i f_i(\sigma + h_i(s))$, $\tilde{g}_i(\sigma) = Q_i g_i(\sigma + h_i(s))$ pour $s, \sigma \in I$. Maintenant, une application de l'inégalité établie dans le théorème 4.1.1 à l'inégalité précédente donne le résultat suivant

$$|x(t)| \le \varphi^{-1} \left\{ G^{-1} \left[\psi^{-1} \left(\psi(\tilde{k}(t_0)) + \sum_{i=1}^{n} \int_{t_0-h_i(t_0)}^{t-h_i(t)} \tilde{f}_i(\sigma)d\sigma \right) \right] \right\}$$

Remarque 4.2.1. *On considère l'équation différentielle impliquant plusieurs arguments retardés avec la condition initiale*

$$px^{p-1}(t)x'(t) = F(t, x(t - h_1(t)), ..., x(t - h_n(t))); x(t_0) = x_0 \tag{4.7}$$

où $p > 0$ et x_0 est une constante, $F \in C(I \times \mathrm{R}^n, \mathrm{R})$, $h_i \in C(I, \mathrm{R}_+)$, $i = 1, ..., n$ des fonctions décroissantes tels que $t - h_i(t) \ge 0$, $t - h_i(t) \in C^1(I, I)$, $h_i'(t) < 1$. On suppose que $F : I \times \mathrm{R}^n \longrightarrow \mathrm{R}$ est une fonction continue pour laquelle il existe des fonctions continues positives $f_i(t)$, $g_i(t)$, $i = 1, ..., n$ pour $t \in I$ tel que

$$|F(t, u_1, ..., u_n)| \le \sum_{i=1}^{n} |u_i|^q [f_i(t)\psi(|u_i|) + g_i(t)], \tag{4.8}$$

où $q > 0$ $(p > q)$ est une constante et ψ est définie comme dans le théorème 4.1.1. Si $x(t)$ est une solution quelconque du problème (4.7), alors elle satisfaite l'équation intégrale

$$x^p(t) = x^P(t_0) + \int_{t_0}^{t} F(s, x(s - h_1(s)), ..., x(s - h_n(s)))ds,$$

il s'ensuit avec l'hypothèse (4.8) que

$$|x(t)|^p \le |x_0|^p + \int_{t_0}^{t} \sum_{i=1}^{n} |x(s - h_i(s))|^q [f_i(t)\psi(|x(s - h_i(s))|) + g_i(t)]ds$$

pour $t, s \in I$. Par un changement de variable dans le coté droite de l'inégalité précédente et en réécrivant, on a

$$|x(t)|^p \leq |x_0|^p + \sum_{i=1}^{n} \int_{t_0-h_i(t_0)}^{t-h_i(t)} |x(\sigma)|^q [\tilde{f}_i(\sigma)\psi(|x(\sigma)|) + \tilde{g}_i(\sigma)] d\sigma,$$

où $\tilde{f}_i(\sigma) = Q_i f_i(\sigma + h_i(s))$, $\tilde{g}_i(\sigma) = Q_i g_i(\sigma + h_i(s))$ pour $s, \sigma \in I$. En appliquant immédiatement l'inégalité établie dans le corollaire 4.1.1 dans l'inégalité précédente, on obtient

$$|x(t)| \leq \left[\psi_0^{-1} \left(\psi_0(\tilde{k_1}(t_0)) + \frac{p-q}{q} \sum_{i=1}^{n} \int_{t_0-h_i(t_0)}^{t-h_i(t)} \tilde{f}_i(\sigma) d\sigma \right) \right]^{\frac{1}{p-q}}$$

pour $t \in I$, où ψ_0 est définie comme dans le corollaire 4.1.1,

$$\tilde{k_1}(t_0) = x_0^{p-q} + \frac{p-q}{p} \sum_{i=1}^{n} \int_{t_0-h_i(t_0)}^{t-h_i(t)} \tilde{g}_i(\sigma) d\sigma,$$

$\tilde{f}_i(\sigma) = Q_i f_i(\sigma + h_i(s))$ *et* $\tilde{g}_i(\sigma) = Q_i g_i(\sigma + h_i(s))$ *pour* $s, \sigma \in I$

Le théorème suivant prouve l'unicité de la solution du problème (4.7).

Théorème 4.2.2. *On suppose que $F : I \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue pour laquelle il existe des fonctions continues positives $f_i(t)$, $i = 1, ..., n$ pour $t \in I$ tel que*

$$|F(t, u_1, ..., u_n) - F(t, v_1, ..., v_n)| \leq \sum_{i=1}^{n} f_i(t) |u_i^p - v_i^p|,$$

où $p > 1$ est une constante. Alors le problème (4.7) admet une solution unique dans I.

Preuve : Soient $x(t)$ et $y(t)$ deux solutions distincts du problème (4.7), on a :

$$x^p(t) - y^p(t) = \int_{t_0}^{t} [F(s, x(s-h_1(s)), ..., x(s-h_n(s))) - F(s, , y(s-h_1(s)), ..., y(s-h_n(s)))] ds$$

$$\Longrightarrow \ |x^p(t) - y^p(t)| \leq \int_{t_0}^{t} \left(\sum_{i=1}^{n} f_i(s) |x^p(s - h_i(s)) - y^p(s - h_i(s))| \right) ds$$

pour $t, s \in I$. En réécrivant cette dernière d'une autre façon, nous avons

$$(|x^p(t) - y^p(t)|^{1/p})^p \leq \int_{t_0}^{t} \left(\sum_{i=1}^{n} f_i(s) |x^p(s - h_i(s)) - y^p(s - h_i(s))| \right) ds$$

pour $t, s \in I$. En effectuant un changement de variable approprié et en réécrivant, nous avons

$$(|x^p(t) - y^p(t)|^{1/p})^p \leq 0 + \sum_{i=1}^{n} \int_{\beta_i(t_0)}^{\beta_i(t)} \left[|x^p(\sigma) - y^p(\sigma)|^{1/p} \right]^{p-1} \times \tilde{f}_i(\sigma) [|x^p(\sigma) - y^p(\sigma)|^{1/p}] d\sigma,$$

où $\beta_i(t) = t - h_i(t)$, $\tilde{f}_i(\sigma) = Q_i f_i(\sigma + h_i(s))$ pour $s, \sigma \in I$, or lorsque $\psi(u) = u, q = p - 1$, une application directe de l'inégalité du corollaire 4.1.1 sur la fonction $|x^p(t) - y^p(t)|^{1/p}$ de l'inégalité précédente, on conclut

$$|x^p(t) - y^p(t)|^{1/p} \leq 0$$

pour tout $t \in I$, donc $x(t) = y(t)$.

Chapitre 5

Inégalités de Gronwall discrètes

Il est bien connu que les inégalités discrètes jouent un rôle essentiel dans le développement continue de la théorie des équations différentielles, équations intégrales, équations aux dérivées partielles... Ces inégalités sont beaucoup utilisées en analyse numérique pour l'approximation des solutions numériques de telles équations. Dans ce chapitre nous allons introduire quelques inégalités discrètes de type *Gronwall* ainsi que quelques applications de ces inégalités.

5.1 Quelques inégalités discrètes

Théorème 5.1.1. *(Inégalité de Pachpatte [20]) Soient (u_n), (a_n), (b_n) des suites réelles positives et on suppose que (a_n) est croissante. Si pour tout $n \in \mathbb{N}$,*

$$u_n \leq a_n + \sum_{s=n+1}^{+\infty} b_s u_s, \tag{5.1}$$

alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$u_n \leq a_n \Pi_{s=n+1}^{+\infty}(1 + b_s)$$

Preuve : Supposons d'abord que $a_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. l'hypothèse (5.1) donne

$$\frac{u_n}{a_n} \leq 1 + \sum_{s=n+1}^{+\infty} b_s \frac{u_s}{a_s}.$$

Soit alors

$$z_n := 1 + \sum_{s=n+1}^{+\infty} b_s \frac{u_s}{a_s}$$

$$\Longrightarrow \frac{u_n}{a_n} \leq z_n$$

et

$$z_n - z_{n+1} = \sum_{s=n+1}^{+\infty} b_s \frac{u_s}{a_s} - \sum_{s=n+2}^{+\infty} b_s \frac{u_s}{a_s}$$

$$\Longleftrightarrow z_n - z_{n+1} = \frac{b_{n+1} u_{n+1}}{a_{n+1}} \leq b_{n+1} zn + 1$$

$$\Longleftrightarrow z_n \leq [1 + b_{n+1}] zn + 1$$

Pour $s = n, n+1, ..., m-1$ $(m \geq n+1)$, on obtient

$$z_n \leq z_m \Pi_{s=n+1}^{m}(1 + b_s)$$

Noter que $\lim\limits_{m\to+\infty} z_m = 1$ et en laissant $m\to\infty$ dans l'inégalité précédente, on obtient

$$\frac{u_n}{a_n} \leq z_n \leq \Pi_{s=n+1}^{m}[1+b_s]$$
$$\Longrightarrow\ u_n \leq a_n\Pi_{s=n+1}^{m}[1+b_s].$$

Si a_n est positive, on utilise la même procédure avec $a_n+\epsilon$ à la place de a_n, où $\epsilon>0$ une constante arbitraire très petite, et ensuite passer à la limite, on obtient le résultat.

Théorème 5.1.2. *[21] Soient (x_n), (p_n), (h_n) et (q_n) des suites réelles satisfaisant l'inégalité pour tout $n\in\mathbb{N}$,*

$$x(n) \leq x_0 + \sum_{s=n_0}^{n-1} p(s)[x(s)+h(s)] + \sum_{s=n_0}^{n-1} p(s)\left(\sum_{\tau=n_0}^{s-1} q(\tau)x(\tau)\right), \qquad (5.2)$$

où x_0 est une constante positive. Alors pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$x(n) \leq x_0+\sum_{s=n_0}^{n-1} p(s)\left[h(s)+x_0\Pi_{t=n_0}^{s-1}(1+p(t)+q(t)) + \sum_{t=n_0}^{s-1} p(t)h(t)\Pi_{k=t+1}^{s-1}(1+p(k)+q(k))\right].$$

Remarque 5.1.1. *Soit $(x_n)\subset\mathbb{R}$. Pour faciliter les annotations, on note le terme d'une suite (x_n) par $x(n)\equiv x_n$, où $n\in\mathbb{N}$.*

Preuve : Soit (m_n) définie dans le coté droite de (5.2) par

$$m(n) := x_0 + \sum_{s=n_0}^{n-1} p(s)[x(s)+h(s)] + \sum_{s=n_0}^{n-1} p(s)\left(\sum_{\tau=n_0}^{s-1} q(\tau)x(\tau)\right).$$

$$\Longrightarrow\ \Delta m(n) = m(n+1)-m(n) = p(n)[x(n)+h(n)] + p(n)\sum_{\tau=n_0}^{n-1} q(\tau)x(\tau)$$

et $m(n_0)=x_0$

$$\Longrightarrow\ \Delta m(n) \leq p(n)[m(n)+h(n)] + p(n)\sum_{\tau=n_0}^{n-1} q(\tau)m(\tau)$$

$$\Longleftrightarrow\ \Delta m(n) \leq p(n)h(n) + p(n)\left[m(n)+\sum_{\tau=n_0}^{n-1} q(\tau)m(\tau)\right]$$

On pose

$$\left(v(n) = m(n) + \sum_{\tau=n_0}^{n-1} q(\tau)m(\tau)\right)_{n\in\mathbb{N}};$$

$v(n_0)=m(n_0)=x_0$. D'où $m(n)\leq v(n)$ et

$$\Delta v(n) = \Delta m(n) + q(n)m(n) \leq p(n)h(n) + q(n)v(n) + p(n)v(n).$$

$$\Longrightarrow\ v(n+1) - (1+p(n)+q(n))v(n) \leq p(n)h(n) \qquad (5.3)$$

En multipliant (5.3) par $\Pi_{s=n_0}^{n}(1+p(s)+q(s))^{-1}$, nous avons

$$[v(n+1)-(1+p(n)+q(n))v(n)]\,\Pi_{s=n_0}^{n}(1+p(s)+q(s))^{-1} \leq p(n)h(n)\Pi_{s=n_0}^{n}(1+p(s)+q(s))^{-1}$$

puis en sommant de n_0 à $n-1$, on obtient :

$$\sum_{k=n_0}^{n-1} v(k+1)\Pi_{s=n_0}^{k}(1+p(s)+q(s))^{-1} - \sum_{k=n_0}^{n-1} v(k)\Pi_{s=n_0}^{k-1}(1+p(s)+q(s))^{-1}$$
$$\leq \sum_{k=n_0}^{n-1} p(k)h(k)\Pi_{s=n_0}^{k}(1+p(s)+q(s))^{-1}.$$

En manipulant les indices de sommation, on obtient

$$\sum_{k=n_0+1}^{n} v(k)\Pi_{s=n_0}^{k-1}(1+p(s)+q(s))^{-1} - \sum_{k=n_0}^{n-1} v(k)\Pi_{s=n_0}^{k-1}(1+p(s)+q(s))^{-1}$$
$$\leq \sum_{k=n_0}^{n-1} p(k)h(k)\Pi_{s=n_0}^{k}(1+p(s)+q(s))^{-1}$$

$$i.e: v(n)\Pi_{s=n_0}^{n-1}(1+p(s)+q(s))^{-1} - v(n_0) \leq \sum_{k=n_0}^{n-1} p(k)h(k)\Pi_{s=n_0}^{k}(1+p(s)+q(s))^{-1}$$
$$\Longrightarrow \; v(n) \leq v(n_0)\Pi_{s=n_0}^{n-1}(1+p(s)+q(s))$$
$$+\Pi_{s=n_0}^{n-1}(1+p(s)+q(s)) \sum_{k=n_0}^{n-1} p(k)h(k)\Pi_{s=n_0}^{k}(1+p(s)+q(s))^{-1}$$

$$\Longleftrightarrow \; v(n) \leq v(n_0)\Pi_{s=n_0}^{n-1}(1+p(s)+q(s)) + \sum_{k=n_0}^{n-1} p(k)h(k)\Pi_{s=k+1}^{n-1}(1+p(s)+q(s))$$

Sachant que $\Delta m(n) \leq p(n)h(n) + p(n)v(n)$, on a alors

$$\Delta m(n) \leq p(n)\left[h(n) + x_0\Pi_{s=n_0}^{n-1}(1+p(s)+q(s)) + \sum_{s=n_0}^{n-1} p(s)h(s)\Pi_{\tau=s+1}^{n-1}(1+p(\tau)+q(\tau))\right]$$

Puis en sommant de n_0 à $n-1$, on obtient

$$m(n) \leq x_0 + \sum_{s=n_0}^{n-1} p(s)\left[h(s) + x_0\Pi_{t=n_0}^{s-1}(1+p(t)+q(t)) + \sum_{t=n_0}^{s-1} p(t)h(t)\Pi_{k=t+1}^{s-1}(1+p(k)+q(k))\right].$$

Dès lors $x(n) \leq m(n)$, le résultat est clair.

Théorème 5.1.3. *(Inégalité de Salem [28]) Soient les deux systèmes linéaires satisfaisant*

$$\begin{cases} u_1(t) \leq & a_1(t) + p_1(t)\sum_{s=0}^{t-1} H(u_1(s)) + q_1(t)\sum_{s=0}^{t-1} H(u_2(s)) \\ \\ u_2(t) \leq & a_2(t) + p_2(t)\sum_{s=0}^{t-1} H(u_1(s)) + q_2(t)\sum_{s=0}^{t-1} H(u_2(s)) \end{cases}$$

où $a_1(t),\ a_2(t),\ p_1(t),\ p_2(t),\ q_1(t),\ q_2(t)$ *sont positives et croissantes pour tout* $t \in \mathbf{N}$, *et* H *est positive continue , croissante, sous-additive et sous-multiplicative. Alors*

$$\begin{cases} u_1(t) \leq & a_1(t) + p_1(t)\phi_4(t) + q_1(t)\psi_4(t) \\ \\ u_2(t) \leq & a_2(t) + p_2(t)\phi_4(t) + q_2(t)\psi_4(t) \end{cases}$$

où

$$\begin{cases} \phi_4(t) = \sum_{s=0}^{t-1} \{H(a_1(s) - p_1(s) - q_1(s)) + [H(p_1(s)) + H(q_1(s))]H(\psi(s))\} \\ \\ \psi_4(t) = \sum_{s=0}^{t-1} \{H(a_2(s) - p_2(s) - q_2(s)) + [H(p_2(s)) + H(q_2(s))]H(\psi(s))\} \\ \\ \psi(t) = G^{-1}\left\{G(2) + \sum_{s=0}^{t-1}(A(s) + B(s))\right\} \end{cases},$$

$$\begin{cases} A(t) = H(a_1(t) - p_1(t) - q_1(t)) + H(a_2(t) - p_2(t) - q_2(t)) \\ \\ B(t) = H(p_1(t)) + H(q_1(t)) + H(p_2(t)) + H(q_2(t)) \end{cases}$$

et

$$G(r) = \int_{r_0}^{r} \frac{ds}{s + H(s)},\ 0 < r_0 \leq r$$

de sorte que

$$G(2) + \sum_{s=0}^{t-1}(A(s) + B(s)) \in Dom(G^{-1}).$$

Preuve : les inégalités satisfaites comme hypothèse peuvent être réécrites comme

$$u_1(t) \leq (a_1(t) - p_1(t) - q_1(t)) + p_1(t)R_1(t) + q_1(t)R_2(t) \tag{5.4}$$

et

$$u_2(t) \leq (a_2(t) - p_2(t) - q_2(t)) + p_2(t)R_1(t) + q_2(t)R_2(t) \tag{5.5}$$

où

$$R_1(t) = \sum_{s=0}^{t-1} H(u_1(s)) + 1$$

et

$$R_2(t) = \sum_{s=0}^{t-1} H(u_2(s)) + 1.$$

Alors

$$H(u_1(t)) = \Delta R_1(t) \leq H(a_1(t) - p_1(t) - q_1(t)) + H(p_1(t))H(R_1(t)) + H(q_1(t))H(R_2(t))$$

et

$$H(u_2(t)) = \Delta R_2(t) \leq H(a_2(t) - p_2(t) - q_2(t)) + H(p_2(t))H(R_1(t)) + H(q_2(t))H(R_2(t)).$$

Puisque $R_1(t)$ et $R_2(t)$ sont croissantes et $R_1(0) = R_2(0) = 1$, alors de la définition de G, il s'ensuit que

$$G(R_1(t+1) + R_2(t+1)) - G(R_1(t) + R_2(t)) = \int_{R_1(t)+R_2(t)}^{R_1(t+1)+R_2(t+1)} \frac{ds}{s + H(s)}.$$

$$\int_{R_1(t)+R_2(t)}^{R_1(t+1)+R_2(t+1)} \frac{ds}{s + H(s)} \leq \frac{\Delta(R_1(t) + R_2(t))}{R_1(t) + R_2(t) + H(R_1(t) + R_2(t))} \leq A(t) + B(t).$$

En sommant de $\mathbf{0}$ à $\boldsymbol{t-1}$ l'inégalité ci-dessus, on obtient

$$\sum_{k=0}^{t-1} G(R_1(k+1)+R_2(k+1)) - \sum_{k=0}^{t-1} G(R_1(k)+R_2(k)) \leq \sum_{k=0}^{t-1}[A(k)+B(k)].$$

ça réplique que

$$G(R_1(t)+R_2(t)) - G(2) \leq \sum_{k=0}^{t-1}[A(k)+B(k)]$$

$$\Longrightarrow \; R_1(t)+R_2(t) \leq G^{-1}\left(G(2)+\sum_{k=0}^{t-1}[A(k)+B(k)]\right) = \psi(t)$$

$$\Longrightarrow \; H(u_1(t)) = \Delta R_1(t) \leq H(a_1(t)-p_1(t)-q_1(t)) + [H(p_1(t))+H(q_1(t))]H(\psi(t))$$

Puis en sommant de $\mathbf{0}$ à $\boldsymbol{t-1}$, on peut obtenir

$$R_1(t) \leq \phi_4(t)$$

De la même manière, on peut obtenir avec $\boldsymbol{H(u_2(t))}$ que

$$R_2(t) \leq \psi_4(t)$$

De (5.4) et (5.5), on peut obtenir

$$u_1(t) \leq a_1(t) + p_1(t)\phi_4(t) + q_1(t)\psi_4(t)$$

et

$$u_2(t) \leq a_2(t) + p_2(t)\phi_4(t) + q_2(t)\psi_4(t)$$

Ce qui achève la preuve.

Théorème 5.1.4. *(Inégalité de Salem [28]) Soient les deux systèmes suivants des deux inégalités satisfaites*

$$\begin{cases} u_1(t) \leq a_1(t) + p_1(t)\displaystyle\sum_{s=0}^{t-1} e_1(s)u_1(s) + p_2(t)\sum_{s=0}^{t-1} e_2(s)u_2(s) \\ +p_3(t)\displaystyle\sum_{s=0}^{t-1} e_3(s)H(u_1(s)) + p_4(t)\sum_{s=0}^{t-1} e_4(s)H(u_2(s)) \\ u_2(t) \leq a_2(t) + q_1(t)\displaystyle\sum_{s=0}^{t-1} h_1(s)u_1(s) + q_2(t)\sum_{s=0}^{t-1} h_2(s)u_2(s) \\ +q_3(t)\displaystyle\sum_{s=0}^{t-1} h_3(s)H(u_1(s)) + q_4(t)\sum_{s=0}^{t-1} h_4(s)H(u_2(s)) \end{cases}$$

où toutes les fonctions données sont des fonctions à valeur réelle, positives, croissantes et continue, $\boldsymbol{H}$ *est définie comme précédemment, et pour tout* $\boldsymbol{t} \in \mathrm{N}$, $\boldsymbol{a_1(t) \geq p_1+p_2+p_3+p_4}$ *et* $\boldsymbol{a_2 \geq q_1+q_2+q_3+q_4}$. *Alors*

$$u_1(t) \leq a_1(t) + p_1(t)\sum_{s=0}^{t-1} e_1(s)a_1(s)\psi_6(s)$$

$$+p_2(t)\sum_{s=0}^{t-1}e_2(s)a_2(s)\psi_7(s)+p_3(t)\sum_{s=0}^{t-1}e_3(s)\phi_6(s)+p_4(t)\sum_{s=0}^{t-1}e_4(s)\phi_7(s)$$

et

$$u_2(t)\leq a_2(t)+q_1(t)\sum_{s=0}^{t-1}h_1(s)a_1(s)\psi_6(s)+q_2(t)\sum_{s=0}^{t-1}h_2(s)a_2(s)\psi_7(s)$$
$$+q_3(t)\sum_{s=0}^{t-1}h_3(s)\phi_6(s)+q_4(t)\sum_{s=0}^{t-1}h_4(s)\phi_7(s)$$

où

$$\begin{cases}\phi_6(t)=H(a_1-p_1-p_2-p_3-p_4)+(H(p_1)+H(p_2))\\ +(H(p_2)+H(p_3)+H(p_4))H(\psi_6)\\ \phi_7(t)=H(a_2-q_1-q_2-q_3-q_4)+[H(q_1)+H(q_2)]+[H(q_3)+H(q_4)]H(\psi_7)\\ \psi_6(t)=4+\sum_{s=0}^{t-1}[A_1(s)+B_1(s)\psi(s)+c_1(s)H(\psi(s))]\\ \psi_7(t)=G^{-1}\left\{G(8)+\sum_{s=0}^{t-1}(A(s)+B(s)+c(s))\right\}\end{cases}$$

$$\begin{cases}A_1(t)=e_1(a_1-P)+e_2(a_2-Q)+e_3H(a_1-P)+e_4H(a_2-Q)\\ B_1(t)=e_1P+e_2Q\\ c_1(t)=e_3(H(p_1)+H(p_2)+H(p_3)+H(p_4))+e_4\left(H(q_1)+H(q_2+H(q_3)+H(q_4))\right)\end{cases}$$

$$\begin{cases}A_2(t)=h_1(a_1-P)+h_2(a_2-Q)+h_3H(a_1-P)+h_4H(a_2-Q),\\ B_2(t)=h_1P+h_2Q,\\ c_2(t)=h_3(H(p_1)+H(p_2)+H(p_4))+h_4[H(q_1)+H(q_2)+H(q_3)+H(q_4)]\end{cases}$$

$$\begin{cases}A(t)=A_1(t)+A_2(t)\\ B(t)=B_1(t)+B_2(t)\\ C(t)=c_1(t)+c_2(t)\\ P=p_1+p_2+p_3+p_4;Q=q_1+q_2+q_3+q_4\end{cases}$$

et

$$G(r)=\int_{r_0}^{r}\frac{ds}{s+H(s)};\ 0<r_0\leq r$$

de sorte que

$$G(8)+\sum_{s=0}^{t-1}(A(s)+B(s)+C(s))\in Dom(G^{-1})$$

5.2 Applications

5.2.1 Application du théorème 5.1.1 aux équations somme-différence

Dans cette section, nous présentons une application du théorème 5.1.1 pour obtenir une borne sur la solution d'une équation somme-différence non linéaire

$$u(n) = F(n) + \sum_{s=n+1}^{+\infty} B(n, s, u(s)), \tag{5.6}$$

où $u,\ F : \mathrm{N} \longrightarrow \mathrm{R}$, $B : \mathrm{N}^2 \times \mathrm{R} \longrightarrow \mathrm{R}$ et

$$\begin{cases} |F(n)| \leq a(n) \\ \\ |B(n, s, u(s))| \leq b(s)|u(s)| \end{cases}$$

où $a(n)$ et $b(n)$ sont définies comme dans le théorème 5.1.1. Soit $u(n)$ une solution de (5.6). Des hypothèses de F et B, on a

$$|u(n)| \leq a(n) + \sum_{s=n+1}^{+\infty} b(s)|u(s)|.$$

En appliquant immédiatement le théorème 5.1.1, on obtient

$$|u(n)| \leq a(n)\Pi_{s=n+1}^{+\infty}[1 + b(s)].$$

Ce qui donne une borne de la solution $u(n)$ en termes de fonctions connues.

5.2.2 Application des théorèmes 5.1.3 et 5.1.4 aux systèmes discrets

Ici, on utilise ces deux théorèmes 5.1.3 et 5.1.4 pour étudier certains systèmes discrets.
Exemple 1 : On considère le système suivant :

$$u_1(t) = C_3(t) + \sum_{s=0}^{t-1} k_1(u_1(s), u_2(s))$$

et

$$u_2(t) = C_4(t) + \sum_{s=0}^{t-1} k_1(u_1(s), u_2(s))$$

où

$$k_1(u_1, u_2) \leq H(|u_1|) + H(|u_2|).$$

Donc, on obtient :

$$|u_1(t)| \leq C_3(t) + \sum_{s=0}^{t-1} H(|u_1(s)|) + \sum_{s=0}^{t-1} H(|u_2(s)|)$$

et

$$|u_2(t)| \leq C_4(t) + \sum_{s=0}^{t-1} H(|u_1(s)|) + \sum_{s=0}^{t-1} H(|u_2(s)|).$$

Les deux inégalités ci-dessus sont exactement de la même forme que les hypothèses du théorème 5.1.3 avec $a_1 = C_3$, $a_2 = C_4$ et $p_1 = p_2 = q_1 = q_2 = 1$ du théorème 5.1.3. Donc, une application immédiate du théorème 5.1.3 donne

$$\begin{cases} A(t) = H(C_3(t) - 2) + H(C_4(t) - 2) \\ B(t) = 4H(1) = constante \\ \psi(t) = G^{-1}\left\{G(2) + \sum_{s=0}^{t-1}[4H(1) + H(C_3(s) - 2) + H(C_4(s) - 2)]\right\} \\ |u_1(t)| \leq C_3(t) + \sum_{s=0}^{t-1}[H(C_3(s) - 2) + 4H(1)\psi(s) + H(C_4(s) - 2)] \\ |u_2(t)| \leq C_4(t) + \sum_{s=0}^{t-1}[H(C_3(s) - 2) + 4H(1)\psi(s) + H(C_4(s) - 2)] \end{cases}$$

et

$$G(r) = \int_{r_0}^{r} \frac{ds}{s + H(s)};\ 0 < r_0 \leq r.$$

Exemple 2 : On considère les systèmes somme-différence de type Volterra suivants

$$u_1(t) = C_1 + \sum_{s=0}^{t-1}[F_1(t, s, u_1(s), u_2(s)) + k_1(u_1(s) + u_2(s))]$$

et

$$u_2(t) = C_2 + \sum_{s=0}^{t-1}[F_2(t, s, u_1(s), u_2(s)) + k_2(u_1(s) + u_2(s))]$$

où $C_1 \geq 4$, $C_2 \geq 4$, et les fonctions F_1, F_2, k_1, k_2 satisfont pour tout $t \in \mathbf{R}$,

$$\begin{cases} |F_1(t, s, u_1(s), u_2(s))| \leq e_1(s)|u_1(s)| + e_2(s)|u_2(s)| \\ |F_2(t, s, u_1(s), u_2(s))| \leq h_1(s)|u_1(s)| + h_2(s)|u_2(s)|, \\ |k_1(u_1(s), u_2(s))| \leq e_3(s)H(|u_1(s)|) + e_4(s)H(|u_2(s)|) \\ |k_2(u_1(s, u_2(s)))| \leq h_3(s)H(|u_1(s)|) + h_4(s)H(|u_2(s)|) \end{cases}.$$

Donc, on obtient

$$|u_1(t)| \leq C_1 + \sum_{s=0}^{t-1} e_1(s)|u_1(s)| + \sum_{s=0}^{t-1} e_2(s)|u_2(s)| + \sum_{s=0}^{t-1} e_3(s)H(|u_1(s)|) + \sum_{s=0}^{t-1} e_4(s)H(|u_2(s)|)$$

et

$$|u_2(t)| \leq C_2 + \sum_{s=0}^{t-1} h_1(s)|u_1(s)| + \sum_{s=0}^{t-1} h_2(s)|u_2(s)| + \sum_{s=0}^{t-1} h_3(s)H(|u_1(s)|) + \sum_{s=0}^{t-1} h_4(s)H(|u_2(s)|).$$

Ces deux inégalités ci-dessus sont exactement de la même forme que les hypothèses du théorème 5.1.4 où $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = q_1 = q_2 = q_3 = q_4 = 1$. Donc, on peut trouver des estimations de $|u_1(t)|$ et $|u_2(t)|$ avec des termes connues via le théorème 5.1.4.

Bibliographie

[1] K. Ammari,& M. Tucsnak, Stabililization of Bernoulli-Euler beams by means of a pointwise feedback force. SIAM J. Control Optim. 39, 1160–1181 (2000)

[2] R.P. Agarwal,& Kim and Sen, New retarded integral inequalities with applications. J. Ineq. Appl. 2008(Art. ID 908784), 15p. (2008)

[3] R.E. Bellman, the stability of solutions of linear differential equations Duke.Math.J.10 À, 643-647 (1947)

[4] R.E. Bellman, Asmptotic series for the solutions of linear differential-difference equations.Rendiconti Circolo Mat.Palermo7, 1-9(1958)

[5] I. Bihari, A generalization of a lemma of Bellman and its applications to uniqueness problems of differential equations. Acta Math. Acad. Sci. Hungar. 7, 81–94 (1956)

[6] D.S. Cohen, The asymptotic behavior of a class of nonlinear differential equations. Proc. Am. Math. Soc. 18, 607–609 (1967)

[7] S.S. Dragomir,& Y.H. Kim, On certain new integral inequalities and their applications. JIPAM J. Inequal. Pure Appl. Math. 3, artical 65 (2002)

[8] A. El Baraka, Cours et exercices corrigés de calcul différentiel abstrait, NOOR Publishing, 29 janvier 2020

[9] S-B. Gavage, Calcul différentiel et équations différentielle, P[150-151], Dunod, Paris, 2010, ISBN 978-2-10-054826-2

[10] T.H. Gronwall, Note on the derivatives with respect to a parameter of the solution of a system differential equation.Ann.Math.20, 292-296(1919)

[11] H.E. Gollwitzer, A note on a functional inequality. Proc. Am. Math. Soc. 23, 642–647 (1969)

[12] J.P. LaSalle, Uniqueness theorems and successive approximations. Ann. Math. 50, 722–730 (1949)

[13] V. Lakshmikantham, On the boundedness of solutions of non-linear differential equations. Proc. Am. Math. Soc. 8, 1044–1048 (1957)

[14] V. Lakshmikantham, Upper and lower bounds of the norm of solutions of differential equations. Proc. Am. Math. Soc. 14, 509–513 (1963)

[15] O. Lipovan, A retarded Gronwall-like inequality and its applications. J. Math. Anal. Appl. 252, 389–401 (2000)

[16] N'Doye, I. (2011). Généralisation du lemme de Gronwall-Bellman pour la stabilisation des systèmes fractionnaires (Doctoral dissertation, Université Henri Poincaré-Nancy I ; Université Hassan II Aïn Chock de Casablanca).

[17] B.G. Pachpatte, Explicit bounds on certain integral inequalities. J. Math. Anal. Appl. 267, 48–61 (2002)

[18] S.B. Pachpatte,& B.G. Pachpatte, Inequalities for terminal value problems for differential equations. Tamkang J. Math. 33(3), 199–208 (2002)

[19] B.G. Pachpatte, Inequalities for Differential and Integral Equations, Marathwada University, Aurangabad, India

[20] B.G. Pachpatte, On some fundamental finite difference inequalities. Tamkang J. Math. 32(3), 217–223 (2001)

[21] B.G. Pachpatte, A note on integral inequalities of the Bellman-Bihari type. J. Math. Anal. Appl. 49, 295–301 (1975)

[22] G. Peano, sull'integrabilita delle equazioni differential adel primo ordine. R. Acad. Aci. Torino, 21, 677-685 (1886)

[23] Qin, Y. (2016). Integral and discrete inequalities and their applications. Berlin, Germany : Birkhäuser.

[24] G.S. Jones, Fundamental inequalities for discrete and discontinuous functional equations. J. Soc. Ind. Appl. Math. 12, 43–57 (1964)

[25] H. Reinhard, Équations différentielles fondements et applications, BORDAS, Paris, 1989, ISBN 2-04-018814-2

[26] T. Reid, Properties of solutions of infinite system of ordinary linear differential equations of first order with auxilary boundary conditions.Trans.Ann.Math.Soc.32, 284-318(1930)

[27] H.M. Rodrigues, On growth and decay of solutions of perturbed retarded linear equations. Tohoku Math. J. 32, 593–600 (1980)

[28] Sh. Salem, On some system of two discrete inequalities of Gronwall type. J. Math. Anal. Appl. 208, 553–566 (1997)

[29] D. Willett,& J.S.W. Wong, On the discrete analogues of some generalizations of GronWall's inequality. Monatsh. Math. 69, 362–367 (1965)

[30] E.H. Yang, On some nonlinear integral and discrete inequalities related to Ou-Yang's inequality. Acta Math. Sinica (New Series) 14(3), 353–360 (1998)

[31] Yeganefar, N. (2006). Définitions et analyse de stabilités pour les systèmes à retard non linéaires (Doctoral dissertation, Ecole Centrale de Lille ; Université des Sciences et Technologie de Lille-Lille I).

[32] exo7.emath.fr, Intégrales

[33] Department of Mathematics, Marathwada University, Aurangabad 431 004, Maharashtra, India Submitted by William F. Ames Received May 1, 2000

[34] https ://reader.elsevier.com/reader/sd/pii/

[35] http ://perso.eleves.ens-rennes.fr/people/emeline.luirard/Lecons/220.pdf

[36] https ://ejde.math.txstate.edu/Volumes/2010/154/sremr.pdf