كلية العلوم و التقنيات فاس

Faculté des Sciences et Techniques de Fès

جامعة سيدي محمد بن عبد الله

Université Sidi Mohamed Ben Abdellah

DEPARTEMENT DES MATHEMATIQUES


## Master Mathématique et Application au Calcul Scientifique

## (MACS)

**MEMOIRE DE FIN D'ETUDES**

**Pour l'obtention du Diplôme de Master Sciences et Techniques (MST)**

# Convergence et Propriétés des martingales asymptotiques


**Réalisé par:** ABBOU Lahcen

**Encadré par:** Fatima EZZAKI et EL HARAMI Mohamed


**Soutenu le** 18/07/2022

**Devant le jury composé de:**

- **Pr. ETTAOUIL Mohamed**
- **Pr. HILALI Abdelmajid**
- **Pr. RAHMOUNI HASSANI Aziza**
- **Pr. EZZAKI Fatima** — Encadrante
- **Pr. EL HARAMI Mohamed** — Co-encadrant

**Année Universitaire 2021-2022**

# Table des matières

## Remerciement

Je souhaite avant tout remercier mes encadrants de mémoire Pr. EZZAKI Fatima et Pr.EL HARAMI Mohamed pour le temps qu'ils ont consacré à m'apporter les outils méthodologiques indispensables à la conduite de cette recherche.
Je les remercie encore une fois pour avoir relu et corrigé ma mémoire et avoir répondu à mes questions. Leurs conseils de rédaction ont été très précieux.
Je remercie également le Pr.EL AYADI Rachid responsable du master mathématique et applications au calcules scientifique pour sa disponibilité est ses efforts.
J'adresse ensuite mes remerciement les plus sincères à tous les membres du jury respectables composés de: Pr.ETTAOUIL Mohamed, Pr. HILALI Abdelmajid, Pr.RAHMOUNI HASSANI Aziza, Pr. EZZAKI Fatima, Pr.EL HARAMI Mohamed pour avoir accepté de juger mon travail.
C'est certes avec joie et fierté que je dépose aujourd'hui ce mémoire, mais aussi avec un brin de nostalgie que je termine ce programme d'études et je conclus ce premier travail de recherche.
Enfin, je ne peux passer outre ma reconnaissance envers ma mère à qui je dédie ce travail et un merci particulier, ainsi à mes sœurs et à mes frères. Leur présence, leur écoute, leur confiance en moi et leur soutien constant m'assurent des bases solides me permettant de me surpasser.

# Introduction

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité et $(\mathcal{F}_n)_n$ une suite croissante de sous tribus de $\mathcal{F}$. Une suite de variables aléatoires $(X_n)_n$ est dite adaptée à $(\mathcal{F}_n)_n$ si pour tout $n$, $X_n$ est $\mathcal{F}_n$ mesurable. Cette notion est apparue naturellement dans la théorie des probabilités. Les martingales, les sous-martingales et les sur-martingales sont des suites adaptées intégrables ayant une grande importance dans la théorie des probabilités, puisqu'ils modélisent de nombreux phénomènes en probabilité. Considérons par exemple un jeu aléatoire. Le cas de martingale correspond à la situation où cette chance reste constante au sens de l'espérance conditionnelle. Le cas de sur-martingale correspond à la situation où le jeu est défavorable dans le même sens, alors que le cas de sous-martingale correspond à la situation où le jeu est favorable dans le même sens.
Parmi les questions les plus posées sont celles de savoir dans quel cas (et vers quel élément) une telle suite adaptée converge presque surement.
Dans ce travail nous allons étudier une classe des suites adaptées appelées les martingales asymptotique brièvement les amarts. La théorie des amarts apparaît dans les années 1975, dans des articles de Austin, Edgaret Ionescu Tulcea [5], Chacon et Sucheston [22], et Edgar et Sucheston [22]. Elle est considérée comme une généralisation des martingales prenant comme fondement de base le théorème de Doob. Ce dernier fournit une caractérisation des martingales, une suite adaptée $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$ est une martingale si et seulement si pour tout temps d'arrêt borné $\tau$, $\mathbb{E}(X_\tau|\mathcal{F}_0) = X_0$. Par conséquence la plupart des théorèmes de convergence des martingales, s'étendent à des amarts. De plus, la notion d'amart garde plusieurs propriétés utiles des martingales, sous-martingales et sur-martingales. Par exemple la classe des martingales est stables par combinaison linéaire. La classe des sur-martingales est stables en prenant l'$inf$. La classe des sous-martingales est stable en prenant le *sup*, mais la classe d'amart est stable sous les trois opérations.
Etant donnés un espace de probabilités $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. On considère une suite adaptée $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$. $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite amart si la famille $(\mathbb{E}(X_\tau))_{\tau\in T}$ converge, où $T$ est l'ensemble des temps d'arrêt bornés. La convergence des amarts est liée aux propriétés de l'espace de probabilité comme espace de départ ainsi qu'à celles d'espace d'arrivé. Ce travail sera composé de trois parties suivant la nature de l'espace d'arrivé des amarts. Les amarts réels, les amarts vectoriels puis les amarts multivoques.
Dans un premier temps, nous allons donner un rappel de la notion des martingales et quelques résultats généraux sur la mesurabilité et l'intégrabilité des fonctions à valeurs vectorielles. Puis nous rappelons la propriété de Radon-Nikodym vue son importance dans l'étude de la convergence des amarts. Après ce rappel notre étude commence par les amarts à valeurs réelles. et c'est le cas le plus simple et riche à la fois car $(\mathbb{R}, |.|)$ est un espace très régulier. Les propriétés riches de l'espace $\mathbb{R}$ vont nous aider à établir plusieurs résultats concernant la convergence, la stabilité et la décomposition des amarts. Il est connu dans la littérature que toute martingale bornée dans $L^1$, converge presque surement. Les amarts est une notion plus générale que les martingales, mais ce résultat reste vraie pour les amarts $L^1$-bornés grâce au fameux théorème de Doob. La deuxième partie de ce travail sera dédiée aux amarts vectoriels. Un amarts réel $L^1$- bornée converge presque surement, ce résultat n'est pas généralement valable pour les amarts vectoriels. Dans cette partie nous allons étudier une version de ce résultat pour les amarts vectoriels à savoir la convergence presque surement de ces derniers au sens de la topologie faible en supposant que l'espace vectoriel considéré possède la propriété de Radon-Nikodym. Malheureusement la convergence forte n'est pas assurée pour ces classes de processus stochastiques. Ce besoin a poussé A. Bellow [6] à introduire une nouvelle classe d'amarts appelée amarts uniformes. Pour ces nouveaux processus la convergence au sens de la topologie forte est assurée s'ils sont $L^1$-bornée et l'espace de

Banach considéré possède la propriété de Radon-Nikodym. Dans la troisième partie de ce rapport, nous allons évoquer une nouvelle notion d'amart pour des variables aléatoires plus générales que les variables aléatoires vectorielles, ce sont les variables aléatoires à valeurs dans l'ensemble des parties d'un espace vectoriel (appelée variable aléatoires multivoques). Avant d'aborder l'étude des amarts multivoques, nous allons rappeler quelques définitions de mesurabilité d'intégrabilité et l'existence de l'espérance conditionnelle des variables aléatoires multivoques. La mesurabilité des fonctions multivoques est développé par plusieurs auteurs, Aumann[4], Castaing [9], Debreu [14], Himmelberg [31], Hukuhara [32], Jacobs [33], Kuratowski et Ryll-Nardzewski [35] et plusieurs d'autres. Pour l'étude de l'intégration des fonctions multivoque il y a plusieurs résultats voir [4], [9]. La théorie des espérances conditionnelles et des martingales a été établie pour les fonctions Bochner-intégrable à valeurs dans un espace de Banach par Chatterji [11], et [12]. notre but est de donner une extension de ces notions dans le cas multivoque. Nous allons présenter l'essentiel des résultats nécessaires à notre étude. Pour plus de détails voir [29], [27], [36] et [37]. Comme le théorème de Radon-Nikodym a été l'une des clés dans la convergence des amarts vectoriels $L^1$-bornés, il sera aussi de la même importance dans la convergence des amarts multivoques. Nous commençons par donner une extension au cas multivoque de ce théorème puis nous donnons des théorèmes assurant l'existence d'une dérivation de Radon-Nikodym multivoque. Ces résultats sont développés dans [28].

Dans le dernier chapitre on va traiter les $\mathcal{L}^1$-amarts. cette classe est présentée et étudiée dans [40], [39]. Cette classe généralise les martingales multivoques, les quasi-martingales et les amarts uniformes. L'objectif principale est de donner des caractérisations puis des théorèmes de convergence pour les $\mathcal{L}^1$-amarts multivoque.

# Chapitre 1

# Rappel de quelques notions en théorie d'intégration et martingale

## 1.1 Les fonctions mesurables et les fonctions intégrables

Dans cette section nous allons définir la notion de mesurabilité et d'intégrabilité pour les fonctions définies sur $\Omega$ à valeurs dans un espace de Banach.

### 1.1.1 Les fonctions mesurables

Soit $f : \Omega \to E$ une fonction définie sur $\Omega$ à valeurs dans $E$, avec $E$ est une espace de Banach. On dit que $f$ est scalairement mesurable si $\langle x^* f\rangle$ est mesurable pour tout $x^* \in E^*$. Une fonction (fortement) mesurable est toujours scalairement mesurable mais la réciproque n'est pas en général vraie. Le théorème suivant donne les conditions où on a l'équivalence (voir [15]) ;

**Théorème 1.1.1**

Soit $f : \Omega \to E$ une fonction. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $f$ est fortement mesurable.
2. $f$ est scalairement mesurable et $f$ est à valeur presque séparable, i.e. il existe un négligeable $A$ tel que $f(\Omega \backslash A)$ est séparable.

### 1.1.2 Les fonctions intégrables

Soit $f : \Omega \to E$ une fonction. On dit que $f$ est Bochner-intégrable, s'il existe une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des fonctions étagères telle que :
Le théorème suivant donne une relation entre la convergence p.s et la convergence dans $L^1(\Omega, E)$.

1. $f_n \to f$ $\mathbb{P}$-p.s, lorsque $n \to \infty$.
2. $\displaystyle\int_\Omega \parallel f_n - f_m \parallel \, d\mathbb{P} \to 0$ lorsque $m, n \to \infty$.

On peut remplacer 2 par
$2'$. $\displaystyle\int_\Omega \parallel f_n - f \parallel \, d\mathbb{P} \to 0$, $n \to \infty$.

Notons que 1 implique que $f$ est mesurable. D'après 2. ou $2'$. on peut définir l'intégrale de Bochner comme suit : Soit $A \in \mathcal{F}$

$$\int_A f \, d\mathbb{P} = \lim_{n \to +\infty} \int_A f_n \, d\mathbb{P}.$$

Si $f$ est étagère

$$\int_A f \, d\mathbb{P} = \sum_{i=1}^{n} x_i \, \mathbb{P}(A \cap A_i).$$

Le théorème suivante donne une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction soit soit Bochner intégrable (Voir [23])

**Théorème 1.1.2: (S. Bochner)**

Soit $f : \Omega \to E$ une fonction. $f$ est intégrable au sens de Bochner si et seulement si $f$ est mesurable et $\displaystyle\int_\Omega \| f \| \, d\mathbb{P} < \infty$.

**Théorème 1.1.3**

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dans $L^1(\Omega, E)$. On dit que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est uniformément intégrable si :

$$\lim_{\lambda \to \infty} \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{\{\|f\| > \lambda\}} \| f_n \| \, d\mathbb{P} = 0.$$

Le théorème suivant donne une condition nécessaire et suffisante pour qu'une suite soit uniformément intégrable (Voir [13]).

**Théorème 1.1.4**

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dans $L^1(\Omega, E)$. On dit que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est uniformément intégrable si et seulement si :

1. $\displaystyle\sup_{n \in \mathbb{N}} \int_\Omega \| f_n \| \, d\mathbb{P} < \infty$.
2. $\displaystyle\lim_{P(A) \to 0} \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_\Omega \| f_n \| \, d\mathbb{P} = 0$.

Le théorème suivante peut être considéré comme une application simple des suites uniformément intégrable (voir [1]).

**Théorème 1.1.5**

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite uniformément intégrable. On suppose que $f_n \to f$ p.s. Alors :

$$\lim_{n \to \infty} \int_\Omega \| f_n - f \| \, d\mathbb{P}.$$

**Remarque 1** *Le théorème de convergence dominée de Lebesgue est un corollaire du théorème précédent.*

La norme Pettis est définie sur $L^1(\Omega, E)$ de la façon suivante :

$$\begin{array}{rcl} \|\cdot\|_{p_e} : \quad L^1(\Omega, E) & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ f & \longmapsto & \| f \|_{p_e} = \sup_{x^* \in U^\circ} \int_\Omega |\langle x^*, f\rangle| \, d\mathbb{P}, \end{array}$$

où $\quad U^\circ = \{x^* \in E^* : \| x^* \| \leq 1\}$.
On a $\| f \|_{p_e} \leq \| f \|_1$, mais $\| \cdot \|_{p_e}$ et $\| \cdot \|_1$ ne sont pas équivalentes en général. alors on donne le théorème suivant (voir [23]).

**Théorème 1.1.6**

Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $(L^1(\Omega, E), \| \cdot \|_{p_e})$ est complet.
2. $\| \cdot \|_{p_e}$ et $\| \cdot \|_1$ sont équivalentes.
3. $E$ est de dimension finie.

## 1.2 Les suites adaptées

Dans cette section, on donne des définitions concernant les suites adaptées et on rappel la notion de temps d'arrêt.
Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité. On appel filtration toute suite $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de sous-tribu croissante (i.e. $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}_2 \subseteq \cdots$).

**Définition 1.2.1**

On dit que $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite adaptée si $X_n$ est $\mathcal{F}_n$- mesurable pour tout $n \in \mathbb{N}$.

**Remarque 2** *Toute suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $L^1(\Omega, E)$ peut être considérée comme une suite adaptée, par rapport à la filtration suivante :*

$$\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \cdots, X_n), \quad \textit{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

**Définition 1.2.2**

Soit $\tau : \Omega \to \mathbb{N}\cup\{+\infty\}$, on dit que $\tau$ est un temps d'arrêt par rapport à $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si $\{\tau = n\} \in \mathcal{F}_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On note par $T$ l'ensemble de tous les temps d'arrêts bornés. L'ensemble peut être considéré comme un ensemble ordonné par la relation d'ordre suivante

$$\tau \leq \sigma \iff \tau(\omega) \leq \sigma(\omega), \text{ pour tout } \omega \in \Omega.$$

Pour $\tau \in T$, on définit $\mathcal{F}_\tau$ par :

$$\mathcal{F}_\tau = \{A \in \mathcal{F} : A \cap \{\tau = n\} \in \mathcal{F}_n, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}\},$$

et

$$X_\tau = \sum_{n=\min\tau}^{\max\tau} X_n \mathbb{1}_{\{\tau=n\}},$$

i.e. pour tout $\omega \in \Omega$, $(X_\tau)(\omega) = X_{\tau(\omega)}(\omega)$. Il est évident que $X_\tau$ est $\mathcal{F}_\tau$-mesurable et $X_\tau$ est intégrable. Et si,

$$\sup_{\tau \in T} \int_\Omega \| X_\tau \| \, d\mathbb{P} < \infty,$$

alors $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de classe $(B)$.

## 1.3 L'espérance conditionnelle

Soit $\Im$ une sous-tribu de $\mathcal{F}$. On donne le théorème suivant qui montre l'existence et l'unicité de l'espérance conditionnelle dans $L^1(\Omega, E)$ (voir [23]).

**Théorème 1.3.1**

Il existe une unique application :

$$\mathbb{E}^{\Im} : L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, E) \to L^1(\Omega, \Im, \mathbb{P} \mid_{\Im}, E)$$

telle que pour tout $A \in \Im$ et $f \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, E)$, on a :

$$\int_A f \, d\mathbb{P} = \int_A \mathbb{E}^{\Im}(f) \, d\mathbb{P}. \tag{1.1}$$

$\mathbb{E}^{\Im}(f)$ est noté aussi $(\mathbb{E} \cdot |\Im)$.

**Proposition 1.3.1**

On donne les propriétés suivantes pour l'espérance conditionnelle.

1. $\mathbb{E}^{\Im}\mathbb{E}^{\Im} = \mathbb{E}^{\Im}$.
2. $\mathbb{E}^{\Im}(x) = x$, où $x \in \mathbb{E}$.
3. $\mathbb{E}^{\Im}$ est linéaire.
4. $\mathbb{E}^{\Im}$ est contractante.

## 1.4 Propriété de Radon-Nikodym et convergence des martingales à valeurs dans un espace de Banach.

Cette section concerne les théorèmes de convergence des martingales à valeurs dans un espace de Banach.

### 1.4.1 La propriété de Radon-Nikodym.

La propriété de Radon-Nikodym ( en abrégé R.N.P) est une propriété concernant les espaces de Banach. On donne des résultats concernant cette propriété. Et l'importance de la R.N.P dans la convergence des martingales ( aussi pour les amants dans la suite). On commence par les définitions suivantes (voir [17]).

**Définition 1.4.1**

Soit $\mu : \mathcal{F} \to E$ une mesure vectoriel. On dit que $\mu$ est $\mathbb{P}$-continue ou continue par rapport à $\mathbb{P}$ si et seulement si :

$$\lim_{p(A)\to 0} \mu(A) = 0$$

Ce qui est équivalent à :

$$p(A) = 0 \Longrightarrow \mu(A) = 0$$

Et on note : $\mu << \mathbb{P}$.

**Définition 1.4.2**

Soit $\mu : \mathcal{F} \to E$ une mesure vectoriel. Soit $A \in F$, on note $\Xi$ l'ensemble de toutes les positions finies de A.

La variation de $\mu$ sur $A$ est définie comme suit :

$$|\mu|(A) = \sup_{(A_i)_{i=1}^n \in \Xi} \sum_{i=1}^{n} \|\mu(A)\|$$

On dit que $\mu$ est de variation bornée si :

$$|\mu|(\Omega) < \infty$$

Soit $E$ un espace de Banach, on dit que $E$ possède la propriété de Radon-Nikodym : si pour tout espace de probabilités $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et toute mesure $\mu$ de variation bornée et $\mu << \mathbb{P}$, il existe $f \in L^1(\Omega, E)$ tel que, pour tout $A \in F$ :

$$\mu(A) = \int_A f d\mathbb{P}$$

Cette propriété n'existe pas dans tous les espaces de Banach. Alors on donne les théorèmes suivants (voir [15] :

**Théorème 1.4.1**

Soit $E$ un espace de Banach. Si $E$ est réflexif ou si $E$ est de dual séparable. Alors $E$ possède la R.N.P.

**Théorème 1.4.2**

Soit $E$ un espace de Banach. Si $E$ possède la R.N.P. Alors tout sous-espace de $E$ possède R.N.P. Si tout sous-espace de $E$ séparable possède la R.N.P, alors $E$ possède la R.N.P.

### 1.4.2 Convergence des martingales vectorielles

**Définition 1.4.3**

Soit $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite adaptée à valeurs dans $E$. On dit $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une martingale si :

$$\mathbb{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) = X_n \text{ p.s, pour tout } n \in \mathbb{N}$$

i.e. $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une martingale si

$$\int_A X_n \, d\mathbb{P} = \int_A X_{n+1} \, d\mathbb{P}$$

pour tout $A \in \mathcal{F}_n$ et $n \in \mathbb{N}$.

**Lemme 1.4.1**

Soit $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une martingale et $\sigma \in T$, $\tau \in T_{\geq\sigma}$. Alors :

1. $\mathbb{E}(X_\tau|\mathcal{F}_\sigma) = X_\sigma$.
2. Pour toute $A \in \mathcal{F}_\sigma$ :
$$\int_A \parallel X_\sigma \parallel \, d\mathbb{P} \leq \int_A \parallel X_\tau \parallel \, d\mathbb{P}.$$

**Théorème 1.4.3**

Soit $E$ un espace de Banach. Les assertions suivantes sont équivalantes :

1. $E$ possède la R.N.P.
2. Toute martingale uniformément intégrable est $\|.\|_1$-convergente
3. Toute martingale uniformément bornée est $\|.\|_1-$convergente.

**Théorème 1.4.4**

Soit $E$ un espace de Bnach, et $1 < p < \infty$, alors les assertions suivantes son équivalantes :

1. $E$ possède la R.N.P
2. Toute martingale $\|\|_p$-bornée est $\|.\|_p$-convergente.

Le Théorème suivante assure la convergence presque surement des martingales vectorielles (Dans la suite on cherche à généralisé ce théorème pour les amarts) (Voir [12]).

**Théorème 1.4.5: (Chatterji)**

Soit $E$ un espace de Banach qui possède la R.N.P. Alors toute martingales à valeurs dans $E$ $L^1$-Bornée converge presque surement.

## Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons, dans un premier temps, défini les notions les plus importantes et qui nous seront utiles par la suite. Dans un second temps, nous avons mis en avant des résultats concernant les martingales dans le cas vectoriel. Puis nous avons défini une classe plus générale. Nous nous demandons alors si ces résultats restent vrais pour cette nouvelle classe. Le théorème de Chatterji jouera un rôle primordial dans le développement de cette dernière.

# Chapitre 2

# Les amarts réels

## 2.1 Préliminaires

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité, et $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une filtration. On note $T$ l'ensemble de tous les temps d'arrêrt bornés définie sur $\Omega$.
Soit $\tau, \sigma \in T$, On définit une relation d'ordre sur $T$ de la façons suivant :
$\tau \leq \sigma$ si et seulement si $\tau(w) \leq \sigma(w)$ prèsque pour tout $w \in \Omega$
Soit $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite adaptée, On définit la variable aléatoire $X_\tau$ par : $X_\tau = X_{\tau(w)}(w)$ pour toute $w \in \Omega$. On donne d'abord la définition d'un amart dans réel (voir [22])

**Définition 2.1.1**

Soit $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suie adaptée définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. La suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite un martingale asymptotique en abrégé "amart", si :

1. $\displaystyle\int_\Omega |X_n| d\mathbb{P} < \infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
2. la famille $(\displaystyle\int_\Omega X_\tau d\mathbb{P})_{\tau\in T}$ converge, c-à-d, Il existe $Z \in \mathbb{R}$, tel que :
   $\forall \epsilon > 0,\ \exists \tau_0 \in T : \tau \in T, \tau \geqslant \tau_0 \Rightarrow |\displaystyle\int_\Omega X_\tau - Z| d\mathbb{P} \leqslant \epsilon$

**Remarque 3**

1. *Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un amart pour une filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donc il est aussi amart pour toutes les filtration $(\mathcal{C}_n)_{n\in\mathbf{N}}$, telles que $\mathcal{C}_n \subseteq \mathcal{F}_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*
2. *Lorsque la filtration n'est pas spécifier, on va considérer que $\mathcal{F}_n = \sigma(\{X_k : k \leq n\})$ (La filtration canonique).*

Nous commençons par le lemme maximale qui a été prouvé dans [10].

**Lemme 2.1.1**

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite des variables aléatoires telle que, $\sup_T \int_\Omega |X_\tau| d\mathbb{P} < \infty$, Donc :

$$\mathbb{P}\{\sup_{\mathbb{N}} |X_n| > \lambda\} \leq \frac{1}{\lambda} \sup_T \int_\Omega |X_\tau| d\mathbb{P}$$

**Preuve 1** *Soit $N \in \mathbb{N}$, On pose :*

$$A = \{\sup_{n\leq\mathbb{N}} |X_n| > \lambda\}$$

*On va définir $\sigma$ de la façon suivante*

$$\begin{array}{rcl} \sigma : \Omega & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ w & \longmapsto & \sigma(w) = \begin{cases} \inf\{n \in \mathbb{N} : n \leq N : |X_n(w)| > \lambda\}, & si \;\; w \in A \\ N, \;\; si \;\; w \notin A. \end{cases} \end{array}$$

*Il est clear que $\sigma$ est un temps d'arrêt borné c-à-d $\sigma \in T$, donc :*

$$\begin{aligned} \sup_T \int_\Omega X_\tau | d\mathbb{P} &\geq \int_\Omega |X_\sigma| d\mathbb{P} \\ &\geq \int_A |X_\sigma| d\mathbb{P} \\ &\geq \lambda \mathbb{P}(A) \end{aligned}$$

*Par suite :*

$$\mathbb{P}\left(\left\{\sup_{n\leq\mathbb{N}} |X_n| > \lambda\right\}\right) \leq \frac{1}{\lambda} \sup_T \int_\Omega |X_\tau| d\mathbb{P}$$

*En faisant tendre $N$ vers $\infty$ on obtient :*

$$\mathbb{P}\left(\left\{\sup_{\mathbb{N}} |X_n| > \lambda\right\}\right) \leq \frac{1}{\lambda} \sup_T \int_\Omega |X_\tau| d\mathbb{P}$$

Nous allons donner quelques résultats préliminaires concernant les amarts réels (voir [22]).

**Lemme 2.1.2**

Soit $(X_n, \mathcal{F}_n)$ un amart, donc la famille $(\int_\Omega X_\tau d\mathbb{P})_\tau$ est bornée.

**Preuve 2** *Puisque $(X_n)$ est un amart donc la famille $(\int_\Omega X_\tau d\mathbb{P})_\tau$ converge, par suit Il existe $N \in \mathbb{N}$, tel que pour tout $\sigma \in T_{\geq N}$, on a*

$$\left| \int_\Omega X_\tau d\mathbb{P} - \int_\Omega X_N d\mathbb{P} \right| < 1$$

*Pour* $\sigma \in T$, $\left|\int_\Omega X_{\sigma\wedge N} d\mathbb{P}\right| \leq \int_\Omega \max_{n\leq N} |X_n| d\mathbb{P}$ *et* $\left|\int_\Omega X_{\sigma\vee N} d\mathbb{P} - \int_\Omega X_N d\mathbb{P}\right| \leq 1$
*Comme* $X_\sigma = X_{\sigma\wedge N} + X_{\sigma\vee N} - X_N$, *On a :*

$$\begin{aligned}\left|\int_\Omega X_\sigma d_|\right| &= \left|\int_\Omega X_{\sigma\wedge N} d\mathbb{P} + \int_\Omega X_{\sigma\vee N} d\mathbb{P} - \int_\Omega X_N d\mathbb{P}\right| \\ &\leq \int_\Omega \max_{n\leq N} |X_n| d\mathbb{P} + 1\end{aligned}$$

*D'où le résultat.*

**Proposition 2.1.1**

Soient $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(Y_n, \mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites adaptées $L^1$-bornées, alors :

1. si $(\int_\Omega X_\tau d\mathbb{P})_{\tau\in T}$ et $(\int_\Omega Y_\tau d\mathbb{P})_{\tau\in T}$ sont bornées, alors $(\int_\Omega X_\tau \vee Y_\tau d\mathbb{P})$ et $(\int_\Omega X_\tau \wedge Y_\tau d\mathbb{P})$ sont bornées.

2. Si $(X_n)$ et $(Y_n)$ sont des amarts, donc $(X_n \vee Y_n)$ et $(X_n \wedge Y_n)$ sont aussi des amarts.

**Preuve 3** *Supposons que* $(\int_\Omega X_\tau d\mathbb{P})$ *et* $(\int_\Omega Y_\tau d\mathbb{P})$ *sont bornées, soit* $\tau \in T$.
*Soit* $N \in \mathbb{N}$, *tel que* $n \geq \tau$, *on définit* $\sigma$ *et* $\sigma'$ *par :*

$$\begin{array}{rcl}\sigma : \Omega & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ w & \longmapsto & \sigma(w) = \begin{cases}\tau & si \;\; X_\tau(w) \geq 0 \\ n, & si \;\; X_\tau(w) < 0.\end{cases}\end{array} \quad et \quad \begin{array}{rcl}\sigma : \Omega & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ w & \longmapsto & \sigma(w) = \begin{cases}\tau & si \;\; Y_\tau(w) \geq 0 \\ n, & si \;\; Y_\tau(w) < 0.\end{cases}\end{array}$$

*Il est clair que* $\sigma$ *et* $\sigma'$ *sont deux temps d'arrêt bornés*
*On a :*

$$\begin{aligned}\int_\Omega (X_\tau \vee Y_\tau) d\mathbb{P} &\leq \int_{\{X_\tau\geq 0\}} X_\tau d\mathbb{P} + \int_{\{Y_\tau \geq 0\}} Y_\tau d\mathbb{P} \\ &= \int_\Omega X_\sigma d\mathbb{P} - \int_{\{X_\tau\leq 0\}} X_n d\mathbb{P} + \int_\Omega Y_{\sigma'} d\mathbb{P} - \int_{\{Y_\tau\leq 0\}} Y_n d\mathbb{P} \\ &\leq \sup_T \int_\Omega X_\tau d\mathbb{P} + \sup_{\mathbb{N}} \int_\Omega |X_n| d\mathbb{P} + \sup_T \int_\Omega Y_\tau d\mathbb{P} + \sup_{\mathbb{N}} \int_\Omega |Y_n| d\mathbb{P}\end{aligned}$$

*D'où* $\sup_T \int_\Omega (Y_\tau \vee X_\tau) d\mathbb{P} < \infty$
*De même on montre que* $\sup_T \int_\Omega (Y_\tau \wedge X_\tau) d\mathbb{P} < \infty$
***b)*** *On pose* $Z_n = X_n \vee Y_n$, *montrons que* $(Z_n, \mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N})}$ *est un amart.*
*D'après le lemme2.1*, $\sup_T \int_\Omega X_\tau d\mathbb{P} < \infty$ *et* $\sup_T \int_\Omega Y_\tau d\mathbb{P} < \infty$, *Alors d'après a)* $\sup_T \int_\Omega Z_\tau dp < \infty$
*Etant donné* $\epsilon > 0$, *il existe* $\tau_0 \in T$, *tel que :* $\sigma, \tau \geq \tau_0$, *donc :*

$$|\int_\Omega X_\sigma d\mathbb{P} - \int_\Omega X_\tau | d\mathbb{P} \leq \epsilon \tag{2.1}$$

*Puisque* $\sup_T \int_\Omega Z_\tau d\mathbb{P} < \infty$, *il existe* $\tau_1 \geq \tau_0$ *tel que, si* $\sigma \geq \tau_0$ *:*

$$\int_\Omega Z_\sigma d\mathbb{P} \leq \int_\Omega Z_{\tau_1} d\mathbb{P} + \epsilon \tag{2.2}$$

*Soit* $\sigma \in T$, *tel que :* $\sigma \geq \tau_1$, *on pose* $A = \{w \in \Omega : X_{\tau_1}(w) < Y_{\tau_1}(w)\}$.
*On définit* $\sigma_1$ *par :*

$$\begin{array}{rcl} \sigma : \Omega & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ w & \longmapsto & \sigma(w) = \begin{cases} \tau_1 & si \;\; w \in A \\ \sigma, & si \;\; w \notin A. \end{cases} \end{array}$$

*Donc :*

$$\int_\Omega X_{\tau_1} d\mathbb{P} = \int_{A^c} Z_{\tau_1} d\mathbb{P} + \int_A X_{\tau_1} d\mathbb{P} \tag{2.3}$$

$$\int_\Omega X_{\sigma_1} d\mathbb{P} = \int_{A^c} X_\sigma d\mathbb{P} + \int_A X_{\tau_1} d\mathbb{P} \tag{2.4}$$

$(2.4) - (2.5) \Rightarrow \int_{A^c} Z_{\tau_1} d\mathbb{P} = \int_{A^c} X_\sigma d\mathbb{P} + \int_\Omega X_{\tau_1} d\mathbb{P} - \int_\Omega X_{\sigma_1}$, *d'après (2.3) :*

$$\int_{A^c} Z_{\tau_1} d\mathbb{P} \leq \int_{A^c} Z_\sigma d\mathbb{P} + \epsilon. \tag{2.5}$$

*D'autre parte on a :*

$$\int_A Z_{\sigma_1} d\mathbb{P} = \int_A Y_\sigma d\mathbb{P} + \int_\Omega Y_{\tau_1} d\mathbb{P} - \int_\Omega Y_{\sigma_1} d\mathbb{P} \tag{2.6}$$

*D'après 2.4 et 2.5, on a :*

$$\int_\Omega Z_{\tau_1} d\mathbb{P} \leq \int_\Omega Z_\sigma + 2\epsilon.$$

*Par suite* $|\int_\Omega Z_\sigma d\mathbb{P} - \int_\Omega Z_{\tau_1} d\mathbb{P}| \leq 2\epsilon$.
*ce qui preuve que la famille* $(\int_\Omega Z_\tau d\mathbb{P})_{\tau \in T}$ *est de Cauchy, alors elle est convergente.*

**Remarque 4** *Notons qu'un amart n'est pas forcément* $L^1$*-borné. Il suffit de prendre* $X_n = Z_1 + Z_2 + ... + Z_n$ *avec* $Z_1, Z_2, ...$ *sont des variables aléatoires de Bernoulli indépendantes, avec* $\mathbb{P}\{Z_n = -1\} = \mathbb{P}\{Z_n = 1\} = \frac{1}{2}$, *donc* $(Z_n)$ *est une amart, on a* $\int_\Omega |X_n| d\mathbb{P} \geq \sqrt{n}\mathbb{P}(\frac{X_n}{\sqrt{n}} \geq 1)$, *d'après le théorème de limite centrale,* $\frac{X_n}{\sqrt{N}} \to N(1,0)$, *donc* $\mathbb{P}(\frac{X_n}{\sqrt{n}} \geq 1) \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_1^{+\infty} \exp(\frac{-x^2}{2}) dx > 0$, *donc* $\sqrt{n}\mathbb{P}(\frac{X_n}{\sqrt{n}} \geq 1) \to +\infty$, *alors :* $\int_\Omega |X_n| d\mathbb{P} \to \infty$.

**Corollaire 2.1.1**

Soit $(X_n)$ un amart, On suppose que $\sup_{\mathbb{N}} \int_\Omega | X_n | d\mathbb{P} < \infty$, Alors :

1. $| X_n |$, $X_n^+$, $X_n^-$, $\lambda \vee X_n \wedge \lambda$ pour $\lambda \geq 0$, sont des amarts $L^1$-bornés.
2. $\sup_T \int_\Omega | X_\tau | d\mathbb{P} < \infty$
3. $\sup_N | X_n | < \infty$

**Proposition 2.1.2**

Soit $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un amart, et soit $(\mathcal{C}_n)$ une autre filtration telle que $\mathcal{C}_n \subseteq \mathcal{F}_n$ pour tout n $\in \mathbb{N}$. On note $Y_n = \mathbb{E}(X_n|\mathcal{C}_n)$, donc $(Y_n, \mathcal{C}_n)$ est un amart .

**Preuve 4** *Par définition de l'espérance conditionnelle $Y_n$ est $\mathcal{C}_n$-mesurable pour tout $n \in \mathbb{N}$*
*On a*

$$\int_\Omega Y_\tau dp = \int_\Omega X_\tau d\mathbb{P}$$

*Comme $\mathcal{C}_n \subseteq \mathcal{F}_n$, Donc si $\tau$ est un temps d'arrêt par a $\mathcal{C}_n$,Donc il est aussi pour $\mathcal{F}_n$.*
*Ce qui termine la preuve.*

**Proposition 2.1.3**

Soit $(X_n, \mathcal{F}_n)$ un amart, et soit $\tau_k$ $(k \in \mathbb{N})$ une suite des temps d'arrêts bornés. On définie $Y_k = X_{\tau_k}$ et $\Im_k = \{A \in \mathcal{F} \mid A \cap \{\tau_k = n\} \in \mathcal{F}_n, \forall n \in \mathbb{N}\}$.
Donc $(Y_k, \Im_k)$ est un amart.

**Exemple 1** ***1)Les martingales :***

*Soit $X_n$ une martingale, donc : pour tout $n \geq m$ : $\int_\Omega X_n d\mathbb{P} = \int_\Omega X_m d\mathbb{P}$.*
*Soient $\tau \in T$ et $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq \tau$, donc :*

$$\int_\Omega X_\tau d\mathbb{P} = \int_\Omega \sum_k X_k \mathbb{1}_{\{\tau=k\}} d\mathbb{P} = \sum_k \int_{\{\tau=k\}} X_k d\mathbb{P} = \sum_k \int_{\{\tau=k\}} X_n d\mathbb{P} = \int_\Omega X_n d\mathbb{P}$$

*Donc* $(\int_\Omega X_\tau d\mathbb{P})$ *est suite constante, par suite elle converge.*

***2)Les quasi-martingales :***

*Une suite adaptée* $(X_n)$*, est une quasi-martingale si (Voir [24]) :*

$$\sum_{n\geq 1}\int_\Omega \mathbb{E}|X_n - E(X_{n+1}|\mathcal{F}_n)|dp < \infty$$

*Nous allons montrer qu'une quasi-martingale est un amart.*
*Soit* $\epsilon > 0$*, et* $N \in \mathbb{N}$*, telle que :*

$$\sum_{n\geq N}\int_\Omega |X_n - E(X_{n+1}/\mathcal{F}_n)|d\mathbb{P} < \epsilon$$

*Soit* $\tau \in T$*, tel que* $\tau \geq N$ *:*
*puisque* $\tau \in T$ *il existe* $M \in \mathbb{N}$ *tel que* $\tau \leq M$*, et* $\{\tau = n\} \in \mathcal{F}$*, pour tout* $k \leq n$*, et on a de plus :*

$$|\int_\Omega X_\tau d\mathbb{P} - \int_\Omega X_M d\mathbb{P}| \leq \sum_{n\geq N}\int_\Omega |X_n - E(X_{n+1}/\mathcal{F}_n)|d\mathbb{P} \leq \epsilon$$

*Si* $\tau_1, \tau_2 \geq N$*, il suffit de choisir* $M \geq \tau_1 \vee \tau_2$*, donc*

$$|\int_\Omega X_{\tau_1} d\mathbb{P} - \int_\Omega X_{\tau_2} d\mathbb{P}| \leq |\int_\Omega X_{\tau_1} d\mathbb{P} - \int_\Omega X_M d\mathbb{P}| + |\int_\Omega X_{\tau_2} d\mathbb{P} - \int_\Omega X_M d\mathbb{P}| \leq 2\epsilon$$

*Donc* $(\int X_\tau)$ *converge.*

## 2.2 Convergence des amarts

Dans cette section on va garder les même notations, et on notera par $\mathcal{F}_\infty$ la tribu engendré par $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{F}_n$, c-à-d : $\mathcal{F}_\infty = \sigma(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{F}_n)$
Nous commençons par le lemme de qu'a été prouvé dans [5].

**Lemme 2.2.1**

Soit Y une variables aléatoire $\mathcal{F}_\infty$-mesurable, telle que pour toute $\omega \in \Omega$ $Y(\omega)$ est une point d'adhérence de la suite $(X_n(w))$.
Donc ile existe $\tau_k \in T$, croissante et $\tau_k \geq k$ pour tout k, telle que : $\lim_{k\to\infty} X_{\tau_k} = Y$, p.s.

Le premier théorème de convergence pour les amarts (dans [22]) est une application du théorème de convergence dominée.

**Proposition 2.2.1**

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite adaptée, telle que $\displaystyle\int_\Omega \sup_{\mathbb{N}} |X_n| d\mathbb{P} < \infty$, donc les assertions suivantes sont équivalentes.

1. $(X_n)$ converge p.s.
2. $(X_n)$ est un amart.

**Preuve 5** 1) $\Rightarrow$ 2) *Supposons que $(X_n)$ converge p.s vers $Y$.*
*Soit $\tau_n \in T$ tel que $\tau_n \uparrow \infty$, donc :*
$X_{\tau_n} \longrightarrow Y$ *p.s, d'après le théorème de convergence dominée,* $\displaystyle\int_\Omega X_{\tau_n} d\mathbb{P} \longrightarrow \int_\Omega Y d\mathbb{P}$, *d'où* $\displaystyle\int_\Omega X_\tau d\mathbb{P} \longrightarrow \int_\Omega Y d\mathbb{P}$. *Par suite $(X_n)$ est un amart.*
2) $\Rightarrow$ 1) *Supposons que $(X_n)$ est un amart*
*On note $X^* = \limsup X_n$ et $X_* = \liminf X_n$, On va montrer que $X_* = X^*$ p.s.*
*D'après Le lemme2.2, ils existent $\tau_n, \tau'_n \in T$ avec $\tau_n \uparrow \infty, \tau'_n \uparrow \infty$ tels que :*
$X_{\tau_n} \longrightarrow X^*$ *p.s et* $X_{\tau'_n} \longrightarrow X_*$ *p.s, d'après le théorème de convergence dominée, on a :*
$\displaystyle\int_\Omega (X^* - X_*) d\mathbb{P} = \lim_n \int_\Omega (X_{\tau_n} - X_{\tau'_n}) d\mathbb{P} = 0$. *par suite $X_* = X^*$ p.s.*

Le théorème générale de convergence pour les amarts est déduit de la proposition2.2 et le corollaire 2.1 (voir [22]).

**Théorème 2.2.1**

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un amart, On suppose que $\displaystyle\sup_{\mathbb{N}} \int_\Omega |X_n| d\mathbb{P} < \infty$. Donc $(X_n)$ converge p.s.

**Preuve 6** *D'après le corollaire2.1, on a $\displaystyle\sup_{\mathbb{N}} \mid X_n \mid < \infty$ p.s, pour $\lambda > 0$ on pose $A = \{\sup \mid X_n \mid > \lambda\}$, on remarque p(A)=0.*
*On sait que $(-\lambda \vee X_n \wedge \lambda)$ est un amart, de plus $\displaystyle\int_\Omega \sup_{\mathbb{N}} \mid -\lambda \vee X_n \wedge \lambda \mid d\mathbb{P} < \infty$ En appliquant la proposition2.2, on obtient :$(-\lambda \vee X_n \wedge \lambda)$ converge p.s.*
*On pose $B = \{X_n = -\lambda \vee X_n \wedge \lambda, \forall n \in \mathbb{N}\}$, il est clair que $\mathbb{P}(B) = 1$, en faisant tendre $\lambda$ vers $\infty$, on obtient la convergence p.s de $(X_n)$.*

La proposition suivante assure le sens inverse de la proposition2.2, c-à-d dans ce cas particulier si $(X_n)$ est un amart, donc $\displaystyle\int_\Omega \sup |X_n| dp < \infty$ (voir [22]).

**Proposition 2.2.2**

On suppose que $\mathcal{F}_n = \mathcal{F}_m$ pour tous $n, m \in \mathbb{N}$. Si $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un amart, donc : $\displaystyle\int_\Omega \sup |X_n| dp < \infty$.

**Preuve 7** *On cherche à montrer que* $\sup |X_n| \in L^1$*, donc il suffit de monter que* $inf X_n \in L^1$ *et* $sup X_n \in L^1$.
*On suppose que* $\displaystyle\int_\Omega sup X_n d\mathbb{P} = \infty$*, On a* $\displaystyle\sup_n X_n = \lim_{N\to+\infty} \sup_{n\leqslant N} X_n$*, d'après le théorème de convergence monotone :*
*Pour tout* $M \in \mathbb{N}$*, il existe* $N \in \mathbb{N}$*, tel que* $\displaystyle\int_\Omega \sup_{n\leqslant N} X_n d\mathbb{P} \geqslant M$*, On définit* $\tau_m$ *par :*

$$\begin{array}{rcl} \tau_m : \Omega & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ w & \longmapsto & \tau_m(w) = \quad \inf\{k \leq N : X_k(w) = \sup\limits_{n\leqslant N} X_n\} \end{array}$$

*puis que* $\mathcal{F}_n = \mathcal{F}_1, \forall n \in \mathbb{N}$, $\tau_m \in T$.
*On a* $\displaystyle\int X_{\tau_m} = \int \sup_{n\leqslant N} X_n \geqslant M$*, donc* $\displaystyle\sup_T \int X_\tau = \infty$ *ce qui contredit le fait que* $(X_n)$ *est une amart.*
*de même on prouve que* $\inf X_n \in L^1$.

**Remarque 5** *Le théorème2.2 nécessite que* $(X_n)$ *soit* $L^1$*-bornée, nous allons donner dans la suite deux théorèmes de convergence des amarts réels dont lequel la suite n'est pas forcément bornée dans* $L^1$*, (voir [22]).*

**Lemme 2.2.2**

soit $(X_n)$ un amart et $\sigma$ un temps d'arrêt, $\hat{X} = X_{n\wedge\sigma}$ est une amart.

**Preuve 8** *On pose* $\sigma_n = \sigma \wedge n$*, et on utilise la proposition2.1.*

**Théorème 2.2.2**

Soit $(X_n)$ un amart telle que $(X_n)$ est $\mathcal{F}_{n-1}$-mesurable pour tout $n \in \mathbb{N}$ (c-à-d prévisible). Donc il existe un ensemble G, tel que $(X_n)$ converge p.s sur G, et $\lim sup X_n = +\infty$, $\lim inf X_n = -\infty$ sur $G^c$.

**Preuve 9** *Soit* $\lambda > 0$ *on pose* $G_\lambda = \{\sup_n X_n \leq \lambda\}$
*On définit* $\sigma$ *de la façon suivante :*

$$\begin{aligned} \sigma : \Omega &\longrightarrow \mathbb{N} \\ w &\longmapsto \sigma(w) = \begin{cases} \inf\{k : X_1 \leq \lambda, X_2 \leq \lambda, ..., X_k \leq \lambda, X_{k+1} > \lambda\}, & si \ \ w \notin G_\lambda \\ \infty, \ \ si \ \ w \in G_\lambda. \end{cases} \end{aligned}$$

*On a* $\{\sigma = n\} \in \mathcal{F}_n$, *puis que chaque* $(X_{n+1})$ *est* $\mathcal{F}_n$- *mesurable, c-à-d* $\sigma$ *est un temps d'arrêt.*
*On a* $\hat{X} = X_{n \wedge \sigma}$, *est une amart telle que* $\hat{X} < \lambda$, *donc* $\sup \int X^+ < \infty$, *d'où* $(X_n)$ *converge p.s.*
*D'autre part on a,* $\hat{X} = X_n$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *sur l'ensemble* $G_\lambda$, *par suite* $(X_n)$ *converge p.s sur* $G_\lambda$.
*On pose* $G^* = \bigcup_{\lambda \in \mathbb{N}} G_\lambda = \{supX_n < \infty\} = \{\limsup X_n < +\infty\}$, *d'où* $(X_n)$ *converge p.s sur* $G^*$.
*D'une manière similaire on montre que* $(X_n)$ *converge p.s sur* $G_{*,\lambda} = \{\lim inf X_n > -\infty\}$, *et on pose* $G = G^* \cup G_*$
*D'où le résultat.*

**Théorème 2.2.3**

Soit $(X_n)$ un amart. soit $(\tau_k) \subseteq T$, une suite croissante, avec $\tau_k \geq k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. On suppose que :

$$\int \sup_{k \in \mathbb{N}} |X_{\tau_k} - X_{k-1}| < \infty.$$

Donc il existe un ensemble G, tel que $(X_n)$ converge p.s sur G, et $\lim supX_n = +\infty$, $\lim inf X_n = -\infty$ sur $G^c$.

**Preuve 10** *Etant donné* $\lambda > 0$, *on pose* $G_\lambda = \{w \in \Omega : \sup_n X_n(w) \leq \lambda\}$ *On définit* $\sigma$ *et* $\sigma'$ *de la façon suivante :*
$\sigma = \sigma' = +\infty$ *sur* $G_\lambda$, *et* $\sigma' = \inf\{k \in \mathcal{N} : X_k(w) \geq \lambda\}$ *pour* $w \notin G_\lambda$, *et* $\sigma = \tau_{\sigma'}$.
*On pose*

$$\tau'_n = \begin{cases} n, & si \ \ \{n < \sigma\} \\ \sigma, & si \ \ \{n \geq \sigma\} \end{cases}$$

*Soit* $\hat{X}_n = X_{\tau'_n}$, *si* $\sigma' \leq n$, *donc* $\sigma \leq \tau_n$, *alors* $\tau'_n \in T$. *par suit* $\hat{X}_n = X_{\tau'_n}$ *est un amart. Si* $n \leq \sigma'$, *alors* $\hat{X}_n < \lambda$, *et si* $n \geq \sigma'$, *alors* $\hat{X}_n = X_{\tau_k}$, *où* $k = \sigma'$, *et on a :* $X_{k-1} \leq \lambda$ *par définition de k.*
*D'où* $\hat{X}_n \leq \lambda + \sup_k |X_{\tau_k} - X_{k-1}|$, *alors* $\sup_n \int_\Omega \hat{(X)}_n^+ dp < \infty$, *d'où* $X_n$ *converge p.s sur* $G_\lambda$, *le reste de la preuve est identique de la preuve du théorème précédent.*

## 2.3 Décomposition des amarts

Il existe plusieurs décompositions pour les martingales et les sous-martingales et les sup-martingales et les quasi-martingales. nous allons étudier brièvement deux décompositions pour les amarts réels. **La décomposition de Riesz** et **La décomposition de Doob**, comme conséquence de la décomposition de Doob nous obtenons la lois forte des grandes nombres (voir [22]).

### 2.3.1 La décomposition de Riesz

**Lemme 2.3.1**

Soit $(Z_n, \mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un amart, telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} E(Z_n/\mathcal{F}_m) = 0$, p.s pour tout $m \in \mathbb{N}$, donc :

1. $\int_\Omega \sup\limits_n |\mathbb{E}(Z_n|\mathcal{F}_m)| d\mathbb{P} < \infty$, pour tout m.
2. $\mathbb{E}(Z_n|\mathcal{F}_m) \to 0$ dans $L^1$, pour tout m.
3. $\lim\limits_{\tau\in T} \int |Z_\tau| = 0$
4. $Z_n \to 0$ p.s et dans $L^1$.
5. $(Z_\tau)$ est uniformément intégrable.

**Théorème 2.3.1**

Soit $(X_n, \mathcal{F}_n)$ un amart. Donc $(X_n)$ peut être décomposé d'une manière unique de la façon suivante, $X_n = Z_n + Y_n$, où $Y_n$ est une martingale et $(Z_n)$ est un amart qui converge vers 0 dans $L^1$.

**Preuve 11** ***1)L'existence :***
*Pour $m \in \mathbb{N}$, On pose :$X_{n,m} = E(X_n/\mathcal{F}_m)$.*
*On sait que $(X_{n,m}, \mathcal{F}_m)$ est un amart, d'après la proposition(2.2.2),$\int \sup\limits_n |X_{n,m}| < \infty$, par suite $(X_{n,m})$, converge p.s.*
*On pose $Y_m = \lim\limits_{n\to\infty} X_{n,m}$. En utilisant le théorème de convergence dominée, on obtient :*

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Y_{m+1}|\mathcal{F}_m) &= \mathbb{E}(\lim_n \mathbb{E}(X_n|\mathcal{F}_{m+1})/\mathcal{F}_m) \\
&= \lim_n \mathbb{E}(\mathbb{E}(X_n|\mathcal{F}_{m+1})|\mathcal{F}_m) \\
&= \lim_n \mathbb{E}(X_n|\mathcal{F}_m) \\
&= Y_m
\end{aligned}$$

*D'où $(Y_m)$ est une martingale.*
*On pose $Z_n = X_n - Y_n$, on a : $\int_\Omega dpZ_\tau = \int_\Omega X_\tau - Y_\tau d\mathbb{P} = \int_\Omega X_\tau - \int Y_1 d\mathbb{P}$, donc $(Z_n)$ est un amart. et*

*on a* $\lim_n E(Z_n/\mathcal{F}_m) = \lim_n \mathbb{E}(X_n|\mathcal{F}_m) - \lim_n \mathbb{E}(Y_n|\mathcal{F}_m) = Y_m - Y_m = 0$*, d'après le lemme2.3.1* $Z_n \to 0$*, dans* $L^1$*.*
***2)L'unicité :*** *On suppose que* $X_n = Y_n + Z_n = Y'_n + Z'_n$*, On a*$(|Y_n - Y'_n|)$ *est une sous martingale donc* $(\int |Y_n - Y'_n|)$ *est croissante.*
*D'autre part on a :*$\int |Y_n - Y'_n| = \int |Z_n - Z'_n| \to 0$*.*
*D'où* $Y_n = Y'_n$*, p.s.*

**Remarque 6** *Si* $(X_n)$ *est un amart uniformément intégrable, où* $X_n = Z_n + Y_n$*, puisque* $(Z_n)$ *est uniformément intégrable d'après le lemme(2.3.1), donc* $(Y_n)$ *est une martingale uniformément intégrable et dans [5,page 92], On a* $(Y_\tau)$ *est uniformément intégrable, par suite* $(X_\tau)$ *est uniformément intégrable.*

### 2.3.2 La décomposition de Doob

Soit $(X_n, \mathcal{F})_{n\in\mathbb{N}}$ une suite adaptée, la décomposition de Doob associée a $(X_n)$ est :

$$X_n = M_n + A_n$$

Avec :

$$\begin{cases} M_1 = X_1 \\ M_n - M_{n-1} = X_n - \mathbb{E}(X_n|\mathcal{F}_{n-1}) \end{cases} \quad et \quad \begin{cases} A_1 = 0 \\ A_n - A_{n-1} = \mathbb{E}(X_n|\mathcal{F}_{n-1}) - X_{n-1} \end{cases}$$

Notons que $(M_n)$ est une martingale et $(A_n)$ est prévisible. donc si $(X_n)$ est un amart, alors $(A_n)$ est aussi un amart.

**Théorème 2.3.2**

On suppose $X_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i$ est un amart, tel que :

$$\sup_i \int_\Omega Y_i^2 d\mathbb{P} < \infty$$

Donc $\frac{X_n}{n}$ converge p.s.

**Preuve 12** *Soit* $X_n = M_n + A_n$*, la décomposition de Boob associée à* $X_n$*.*

$$(\int_\Omega |A_n - A_{n-1}|)^2 d\mathbb{P} \leq \int_\Omega |A_n - A_{n-1}|^2 d\mathbb{P}. \tag{2.7}$$

*D'autre part on a* $(A_n - A_{n-1})$ *et* $(M_n - M_{n-1})$ *sont orthogonale dans* $L^2$*, donc :*

$$\int_\Omega |A_n - A_{n-1} + M_n - M_{n-1}|^2 d\mathbb{P} = \int_\Omega |A_n - A_{n-1}|^2 d\mathbb{P} + \int_\Omega |M_n - M_{n-1}|^2 d\mathbb{P} = \int_\Omega |X_n - X_{n-1}|^2 d\mathbb{P} = \int_\Omega Y_n^2 d\mathbb{P}. \tag{2.8}$$

*D'après (2.2) et (2.3) :* $\sup_n \int |A_n - A_{n-1}| < \infty$.

*On pose* $B_n = A_{n+1} - A_n$*, puisque* $A_n$ *est un amart prévisible* $B_n$ *est un amart, d'après le théorème*2.2 $B_n$ *converge p.s, par suite* $\frac{\sum_{i=1}^n B_i}{n}$ *converge p.s, et on a* $\frac{\sum_{i=1}^n B_i}{n} = \frac{A_n}{n}$*, donc* $\frac{A}{n}$ *converge p.s.*

*D'autre part on a d'après (2.3)* $\sup_n \int |M_n - M_{n-1}|^2 < \infty$

*On pose* $Q_n = \sum_{i=2}^n \frac{1}{i}|M_i - M_{i-1}|^2$*, est une martingale avec* $(\int_\Omega |Q_n|)^2 \mathbb{P} \leq \int_\Omega |Q_n|^2 \mathbb{P} = \sum_{i=2}^n \frac{1}{i^2}|M_i - M_{i-1}|^2$ *donc* $\sup_n |Q_n| < \infty$*. d'après le théorème(2.2.1)* $Q_n$ *converge p.s, et d'après le lemme de Kronecker [8],*

*On a* $\frac{1}{n}M_n = \frac{1}{n}\sum_{i=2}^n |M_i - M_{i-1}|$ *converge p.s.*

*D'où* $\frac{X_n}{n} = \frac{M_n}{n} + \frac{A_n}{n}$ *converge p.s.*

## Conclusion

Ce chapitre peut être considéré comme une introduction à la notion d'amart. Il est clair que le cas réel est plus simple que le cas vectoriel en général, mais c'est le cas le plus riche de point de vue la force des résultats obtenus. Il nous assure la convergence presque sûre d'un amart borné dans $L^1$. Dans le chapitre suivant nous allons voir que ce résultat n'est pas toujours vrai si nous remplaçons $\mathbb{R}$ par un espace vectoriel quelconque.

# Chapitre 3

# Les amarts vectoriels

Dans ce chapitre nous allons définir les amarts vectoriels, c-à-d la suite des variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à valeurs dans un espace vectoriel, puis nous allons donner quelques résultats concernant ce cas.

## 3.1 Préliminaire

Cette section contient quelques définitions et résultats nécessaires pour étudier les amarts vectoriels (voir [30], ou [16]).
Les notations sont les mêmes que des chapitres 1 et 2, et on note par E un espace de Banach, et $E^*$ le dual de E, c-à-d l'ensemble des formes linéaires définies sur E à valeurs dans $\mathbb{R}$. Sans perte de généralité on suppose que $\mathcal{F}$ est engendré par $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{F}_n$.
On commence à définir la notion d'amart dans le cas vectoriel.

**Définition 3.1.1**

Soient $E$ un espace de Banach, et $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite adaptée. On dite que $X_n$ est un amart vectoriel si.

$$\limsup_{\sigma\in T} \sup_{\tau\in T_{\geq\sigma}} \|\mathbb{E}(X_\tau|\mathcal{F}_\sigma) - X_\sigma\|_{Pe} = 0$$

**Théorème 3.1.1**

Soient $E$ un espace de Banach, et $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite adaptée. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un amart.
2. La famille $\left(\int_\Omega X_\tau \, d\mathbb{P}\right)_{\tau\in T}$ converge dans $E$.

**Preuve 13** 1) $\Rightarrow$ 2) *triviale.*

2) $\Rightarrow$ 1) *On a*

$$\begin{aligned}\|\mathbb{E}(X_\tau|\mathcal{F}_\sigma)-X_\sigma\|_{Pe} &= \sup_{\|x^*\|\le 1}\int_\Omega |\langle x^*,\mathbb{E}(X_\tau|\mathcal{F}_\sigma)-X_\sigma\rangle| d\mathbb{P} \\ &\le 4\sup_{\|x^*\|\le 1}\sup_{A\in\mathcal{F}_\sigma}\int_A |\langle x^*,\mathbb{E}(X_\tau|\mathcal{F}_\sigma)-X_\sigma\rangle| d\mathbb{P} \\ &= 4\sup_{A\in\mathcal{F}_\sigma}\left\|\int_A \mathbb{E}(X_\tau|\mathcal{F}_\sigma)-X_\sigma d\mathbb{P}\right\| \\ &= 4\sup_{A\in\mathcal{F}_\sigma}\left\|\int_A (X_\tau-X_\sigma)d\mathbb{P}\right\|\end{aligned}$$

*On définit les deux temps d'arrêts comme suit :*

$$\begin{aligned}\sigma':\Omega &\longrightarrow \quad \mathbb{N} \\ w &\longmapsto \sigma'(w)=\begin{cases}\sigma, & si \;\; w\in A \\ \max\tau, & si \;\; w\notin A.\end{cases}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tau':\Omega &\longrightarrow \quad \mathbb{N} \\ w &\longmapsto \tau'(w)=\begin{cases}\tau, & si \;\; w\in A \\ \max\tau, & si \;\; w\notin A.\end{cases}\end{aligned}$$

*Alors*
$\int_A (X_\tau-X_\sigma)d\mathbb{P}=\int_\Omega (X_{\tau'}-X_{\sigma'})\mathbb{P}$ *et* $\sigma'\in T,\tau'\in T_{\ge\sigma'}$ *et* $\sigma'\ge\sigma$*, il en résulte que*

$$\sup_{A\in\mathcal{F}_\sigma}\left\|\int_A (X_\tau-X_\sigma)d\mathbb{P}\right\| \le \sup_{\tau'\ge\sigma'\ge\sigma}\left\|\int_A (X_{\tau'}-X_{\sigma'})d\mathbb{P}\right\|$$

*Par suite :*

$$\limsup_{\sigma\in T}\sup_{\tau\in T_{\ge\sigma}}\|\mathbb{E}(X_\tau|\mathcal{F}_\sigma)-X_\sigma\| \le \limsup_{\sigma\in T}\sup_{\tau'\ge\sigma'\ge\sigma}\left\|\int_A (X_{\tau'}-X_{\sigma'})d\mathbb{P}\right\| = 0$$

*d'où le résultat.*

## 3.2 Convergence des amarts vectoriels

Dans le chapitre 2 on a montré que si $(X_n,\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un amart réel borné dans $L^1$ alors il converge p.s. Dans cette section nous allons énoncer et prouver la version vectorielle de ce théorème.( voir [2])

**Théorème 3.2.1**

Soit $E$ un espace de Banach qui possède la propriété de Radon-Nikodym tel que $E^*$ est séparable, et $(X_n,\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un amart à valeurs dans E, tel que $\sup_T \int_\Omega \|X_\tau\|\, d\mathbb{P}<\infty$. Alors $X_n$ converge faiblement p.s, c-à-d il existe $Z\in E$ tel que pour toute $f\in E^*$, $f(X_n)\longrightarrow Z$.

Avant de prouver ce théorème nous allons donner des résultats qui seront utiles dans la preuve (pour le lemme et le théorème (3.2.3) voir [10], pour le théorème (3.2.2) voir [6])

**Lemme 3.2.1**

Soit $k \in \mathbb{N}$, et $A \in \mathcal{F}_k$, si la famille $(\int_\Omega X_\tau d\mathbb{P})_{\tau \in T}$ converge alors $(\int_A X_\tau d\mathbb{P})_{\tau \in T}$ converge.

**Preuve 14** *Soit $\epsilon > 0$, il existe $N \geq k$ tel que pour tous $\sigma_1, \tau_1 \in T_{\geq N}$ tels que*

$$\| \int_\Omega X_{\sigma_1} d\mathbb{P} - \int_\Omega X_{\tau_1} d\mathbb{P} \| \leq \epsilon$$

*Soient $\sigma, \tau \in T_{\geq N}$, On définit $\sigma_1$ et $\tau_1$ de la façon suivante :*
*Soit $N_1 \geq \max(\sigma, \tau)$ :*

$$\begin{array}{rcl} \sigma_1 : \Omega & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ w & \longmapsto & \sigma_1(w) = \begin{cases} \sigma, & si \;\; w \in A \\ N_1, & si \;\; w \notin A. \end{cases} \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} \tau_1 : \Omega & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ w & \longmapsto & \tau_1(w) = \begin{cases} \tau, & si \;\; w \in A \\ N_1, & si \;\; w \notin A. \end{cases} \end{array}$$

*On a $\{\sigma_1 < N\} = \{\sigma_1 > N_1\} = \emptyset \in \mathcal{F}_n$ et $\{\sigma_1 = n\} = \{\sigma = n\} \bigcap A \in \mathcal{F}_n$, pour tout $N \leq n \leq N_1$ et $\{\sigma_1 = N_1\} = A^c \in \mathcal{F}_k \subseteq \mathcal{F}_{N_1}$, par suite $\sigma_1$ est un temps d'arrêt. de même on montre que $\tau_1$ est un temps d'arrêt. Donc :*

$$\| \int_A X_\sigma d\mathbb{P} - \int_A X_\tau d\mathbb{P} \| = \| \int_\Omega X_{\sigma_1} d\mathbb{P} - \int_\Omega X_{\tau_1} d\mathbb{P} \| < \epsilon$$

*D'où le résultat.*

**Théorème 3.2.2: Vitali-Hahn-Saks**

Soit $\mu_n$ une suites de mesures finies définies sur $\mathcal{F}$ à valeurs dans E. telle que $\lim_n \mu_n(A) = \mu(A)$ existe pour tout $A \in \mathcal{F}$, alors $\mu$ est une mesure.

**Théorème 3.2.3**

Soit $E$ un espace de Banach, $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un amart à valeurs dans $E$, tel que

$$X^* = \sup_{n \in \mathbb{N}} \|X_n\| \in L^1,$$

donc :

$$\mu(A) = \lim_{n \in \mathbb{N}} \int_A X_n d\mathbb{P} = \lim_{\tau \in T} \int_A X_\tau d\mathbb{P}$$

existe pour toute $A \in \mathcal{F}$, et la fonction $\mu$ est une mesure absolument continue par rapport à $p$ et de variation finie.

**Preuve 15** *On sait que cette limite existe pour toute* $A \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}_n$ *(D'après le lemme (3.2.1)).*
*Soit* $A \in \mathcal{F}$. *Montrons que* $\left(\int_A X_\tau d\mathbb{P}\right)_{\tau\in T}$ *est une suite de Cauchy dans E.*
*Soit* $\epsilon > 0$, *il existe* $\delta > 0$ *tel que* $(B \in \mathcal{F},\ \mathbb{P}(B) \leq \delta) \Rightarrow \int_B X^* d\mathbb{P} \leq \epsilon$.
*Soit* $A_0 \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{F}_n$, *telle que* $\mathbb{P}(A\Delta A_0) \leq \epsilon$, *soit* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tel que* $A_0 \in \mathcal{F}_{n_0}$.
*Donc, pour* $\sigma, \tau \in T_{\geq n_0} \Rightarrow \| \int_{A_0} X_\sigma d\mathbb{P} - \int_{A_0} X_\tau d\mathbb{P}\| \leq \epsilon$.
*On a pour tout* $\tau \in T$ *:*

$$\| \int_{A_0} X_\tau d\mathbb{P} - \int_{A_0} X_\tau d\mathbb{P}\| \leq \int_{A\Delta A_0} \|X_\tau\| d\mathbb{P} \leq \int_{A\Delta A_0} X^* d\mathbb{P} \leq \epsilon.$$

*On déduire que pour tous* $\sigma, \tau \in T_{\geq n_0}$, *on a :*

$$\| \int_A X_\sigma d\mathbb{P} - \int_A X_\tau d\mathbb{P}\| \leq 3\epsilon$$

*Par suite la famille* $(\int_A X_\tau d\mathbb{P})_{\tau\in T}$ *converge pour toute* $A \in \mathcal{F}$.
*D'après le théorème de Vitali-Hahn-Sacks* $\mu$ *est une mesure. puisque* $\|\mu(A)\| \leq \int_A X^* d\mathbb{P}$ *pour toute* $A \in \mathcal{F}$, *donc* $\mu$ *est de variation finie , et* $\mu \ll p$.

**Preuve 16** *Théorème (3.2.1) Comme dans le cas réel on va réduire le problème de convergence des amarts bornés dans* $L^1$, *à celui de la convergence d'amarts tel que* $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|X_n\| \in L^1$. *Étant donné a>0, on pose* $\| X_n \|$. *On définit le temps d'arrêt* $\sigma$ *de la façon suivante :*

$$\begin{array}{rcl} \sigma : \Omega & \longrightarrow & \mathbb{N} \cup \{+\infty\} \\ w & \longmapsto & \sigma(w) = \begin{cases} \inf\{n \in \mathbb{N} : \|X_n(w)\| \geq a\}, \\ \infty, \ \ sinon. \end{cases} \end{array}$$

*On note* $Y = \sup_n \|X_{n\wedge\sigma}\|$
*Nous affirmons que* $\int_\Omega Y d\mathbb{P} < \infty$. *En effet : Soit* $A = \{\omega \,/ \sigma(\omega) < \infty\}$.
$*$ *Sur* $A^c$ *:* $Y < a$.
$*$ *Sur A, il est clair que* $\|X_{n\wedge\sigma}\| \to \|X_\sigma\|$.
*D'après le lemme de Fatou, et le fait que* $n \wedge \sigma$ *est un temps d'arrêt on a :*

$$\begin{aligned} \int_A \| X_\sigma \| \, d\mathbb{P} &\leq \liminf_n \int_A \|X_{n\wedge\sigma}\| d\mathbb{P} \\ &\leq \liminf_n \int_\Omega \|X_{n\wedge\sigma}\| d\mathbb{P} \\ &\leq \sup_{\tau\in T} \int_\Omega \|X_\tau\| d\mathbb{P} = M < \infty. \end{aligned}$$

*D'après le lemme maximale on a :*

$$\mathbb{P}(\{\sup_n \|X_n\| \geq a\}) \leq \frac{1}{a} \sup_{\tau} \int_{\Omega} \|X_\tau\| d\mathbb{P}.$$

*donc pour a assez grand, on a* $\mathbb{P}(\{\sup_n \|X_n\| \geq a\})$*, alors* $(X_{n\wedge\sigma})$ *coïncide avec* $(X_n)$*, presque surement. Sans perte de généralité on suppose que :* $\sup_n \|X_n\| = Y \in L^1$*. On définie maintenant la suite des mesures à valeurs dans* $E$ $\mu_\tau, \tau \in T$ *de la façon suivant :*

$$\mu_\tau(A) = \int_A X_\tau d\mathbb{P}, \ \ \forall A \in \mathcal{F}.$$

*D'après le théorème (3.2.3) et le fait que* $E$ *possède la propriété de Radon-Nikodym, il existe* $X_\infty$ *tel que :*

$$\lim_T \int_A X_\tau d\mathbb{P} = \int_A X_\infty d\mathbb{P}, \ \ \forall A \in \mathcal{F}. \tag{3.1}$$

*Soit* $(x_i^* : i = 1, 2, 3, ...)$ *une suite dense dans la boule unité de* $E^*$*.*
*Fixons* $i$*, en appliquant* $x_i^*$ *sur 16, on obtient :*

$$\lim_T \int_A x_i^*(X_\tau) d\mathbb{P} = \int_A x_i^*(X_\infty) d\mathbb{P}, \ \ \forall A \in \mathcal{F}. \tag{3.2}$$

*D'après le théorème 3.2* $\lim_n x_n^*(X_n)$ *existe presque surement et par 16, cette limite est* $x_i^*(X_\infty)$ *presque surement, c-à-d* $\lim_n x_i^*(X_n) = x_i^*(X_\infty)$ *sauf dans un ensemble négligeable* $\Omega_i$*.*
*L'argument est vrai pour tout* $i$*, alors* $X_n$ *converge faiblement vers* $X_\infty$*, sauf sur l'ensemble négligeable* $\bigcup \Omega_i$*.*
*D'où le résultat.*

**Remarque 7** *La convergence faible ne peut pas être remplacer par la convergence forte, il suffit de prendre l'exemple suivant.*
*Soit* $E$ *un espace* $L^p$*, où* $(1 \leq p \leq \infty)$*, et* $(e_n)$ *la base canonique, Soit* $X_n$ *une variable aléatoire définie par,* $\mathbb{P}(X_1 = e_1) = 1$*,* $P(X_2 = e_i) = \frac{1}{2}, i = 2, 3,$ *et* $P(X_3 = e_i) = \frac{1}{4}, i = 4, 5, 6, 7.$
*D'abord on a* $\|X_n\| = 1$*, pour tout* $n$*, et* $X_n$ *n'est pas de Cauchy, alors elle diverge pour chaque point de* $\Omega$*, mais d'autre part on a* $\|\int_\Omega X_n d\mathbb{P}\| = 2^{\frac{(n-1)(1-p)}{p}} \to 0$*, donc la famille* $\left(\int_\Omega X_\tau d\mathbb{P}\right)_T \to 0.$

*Dans la suite nous allons donner un théorème qui peut être considérer comme solution de la question suivante, pour un espace de Banach* $E$*, est-il vrai que tout amart* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *à valeurs dans* $E$ *tel que* $\sup_T \int_\Omega \|X_\tau\| < \infty$ *converge fortement presque surement si et seulement si* $E$ *est de dimension finie. (voir [6]).*
*Pour simplifier nous allons supposer que,* $\Omega = [0, 1[$*,* $\mathcal{F}$*, la tribu de Borel et* $P$ *la mesure de Lebesgue. On commence par le lemme de Drovelzky-Rogers qui va être très utile dans la preuve du théorème (voir [19]).*

**Lemme 3.2.2**

Soit E un espace de Banach de dimension infinie, soient $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, ..., \lambda_n > 0$, alors il existe un base $e_1, e_2, ..., e_n \in E$ où $\|e_i\| = 1$, pour $i = 1, 2, .., n$, Soit I un sous-ensemble de $\{1, 2, ..., n\}$, alors :

$$\| \sum_{i \in I} \lambda_i e_i \|^2 \leq 3 \sum_{i \in I} \lambda^2. \tag{3.3}$$

Maintenant nous énonçons et prouvons le théorème

**Théorème 3.2.4**

Soit $E$ un espace de Banach, les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $E$ est de dimension finie.
2. Tout amart $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $E$. Tel que $\sup_T \int_\Omega \|X_\tau\| < \infty$ converge fortement presque surement.
3. Tout amart $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $E$. Tel que $\|X_n(w)\| \leq 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, et tout $\omega \in \Omega$ converge fortement presque surement.

**Preuve 17** 1) $\Rightarrow$ 2), *Soit* $(u_i)_{i\in\{1,2,...,r\}}$ *un base de* $E$*. Alors pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *et* $\omega \in \Omega$ *:*

$$X_n(w) = \sum_{i=1}^{r} X_n^i(w) u_i.$$

*Pour* $1 \leq j \leq r$*,* $(X_n^j)_{n\in\mathbb{N}}$ *est un amart réel tel que* $\sup_{\mathbb{N}} \int_\Omega |X_n^j| dp < \infty$*, donc d'après le théorème 2.2* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge fortement presque surement.*
2) $\Rightarrow$ 3) *évidente.*
3) $\Rightarrow$ 1) *On suppose que* $E$ *est de dimension infinie, nous allons construire un amart* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *tel que* $\|X_n(w)\| = 1$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *et* $\omega \in \Omega$*, mais il ne converge pas fortement p.s.*
*Pour tout* $n \geq 1$*, soit* $\{A_i^{(n)}\}$*, pour* $1 \leq i \leq 2^n$*, telles que*

$$A_i^{(n)} = \left[\frac{i-1}{2^n}, \frac{i}{2^n}\right[, \quad 1 \leq i \leq 2^n$$

*On applique maintenant le lemme??* *sur* $\lambda_i^{(n)} = \frac{1}{2^n}$ *pour* $1 \leq i \leq 2^n$*, donc il existe des vecteurs distincts* $(e_i)_{i\in\{1,2^n\}}$ *appartient à* $E$*, tel que 3.3 est vérifiée. On définit* $X_n$ *par :*

$$X_n(w) = \sum_{i=1}^{2^n} \mathbb{1}_{A_i^{(n)}}(w) e_i^{(n)}, \quad 1 \leq i \leq 2^n.$$

*Alors, il est clear que* $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, ..., X_n)$ *est une algèbre engendré par* $\{A_i^{(n)}\}$ $1 \leq i \leq 2^n$.
*On doit montrer que :*

$$A \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{F}_n \Rightarrow \lim_{\tau\in T} \int_A X_\tau d\mathbb{P} = 0. \tag{3.4}$$

*ce qui entraine que* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est un amart.*
*soit* $A \in \mathcal{F}_{N_0}$, *prenons* $\tau \in T_{\geq N_0}$, *donc il existe un entier* $k$ *tel que* $N_0 \leq \tau \leq k$, *pour tout* $N_0 \leq n \leq k$, *on a :*

$$\{\tau = n\} \cap A = \bigcup_{j\in I} A_j^{(n)} = \Omega_n$$

$$\int_A X_\tau d\mathbb{P} = \sum_{n=N_0}^{k} \int_{\{\tau=n\}\cap A} \left( \sum_{j\in I} \mathbb{1}_{A_j^{(n)}} e_j^{(n)} \right) = \sum_{n=N_0}^{k} \left( \sum_{j\in I} p(A_j^{(n)}) e_j^{(n)} \right)$$

*D'après l'inégalité , pour tout* $N_0 \leq n \leq k$ *on a :*

$$\begin{aligned}
\| \sum_{j\in I} p(A_j^{(n)}) e_j^{(n)} \| &\leq \sqrt{3} \left( \sum_{j\in I} p(A_j^{(n)})^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \sqrt{3} \left( \frac{1}{2^n} \sum_{j\in I} p(A_j^{(n)} \right)^2 \\
&= \frac{\sqrt{3}}{(\sqrt{2})^n} (p(\Omega_n))^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \frac{\sqrt{3}}{(\sqrt{2})^n}
\end{aligned}$$

*on déduire :*

$$\begin{aligned}
\| \int_A X_\tau d\mathbb{P} \| &\leq \sum_{n=N_0}^{k} \| \sum_{j\in I} p(A_j^{(n)}) e_j^{(n)} \| \\
&\leq \sqrt{3} \left( \sum_{n=N_0}^{k} \frac{1}{(\sqrt{2})^n} \right) \leq \epsilon
\end{aligned}$$

*Pour* $N_0$ *largement suffisant 3.4 est prouvée.*
*Puisque* $\|X_n\| = 1$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *et* $\omega \in \Omega$, *donc*

$$A \in \mathcal{F} \Rightarrow \int_A X_n d\mathbb{P} \to 0. \tag{3.5}$$

*On suppose que* $X_n$ *converge p.s vers* $X_\infty$, *d'après le théorème de convergence dominée*

$$\int_A X_n d\mathbb{P} \to \int_A X_\infty, \quad \text{pour toute } A \in \mathcal{F}. \tag{3.6}$$

*Puisque* $X_\infty$ *est* $\mathcal{F}_\infty$*-mesurable, donc* $X_\infty = 0$ *p.s, ce contredit le fait que* $X_n$ *converge car* $\|X_n(w)\| = 1$, *pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *et* $\omega \in \Omega$, *ce qui termine la prouve.*

**Remarque 8** *De même on peut prouver que pour tout espace de Banach E, la classe des amart à valeurs dans E tel* $\sup_{\mathbb{N}} \int_\Omega X_n d\mathbb{P} < \infty$, *et la classe des amart à valeurs dans E tel* $\sup_T \int_\Omega X_\tau d\mathbb{P} < \infty$, *coïncide si et seulement si E est de dimension finie (Voir [6]).*

## Conclusion

Dans ce chapitre, après avoir donné quelques définitions et résultats préliminaires, nous avons donné le théorème générale de convergence des amarts à valeurs vectorielles. Nous remarquons que la convergence de ces derniers n'est pas réalisée en générale au sens de la topologie forte mais uniquement au sens de la topologie faible. Donc le théorème de Chatterji n'est pas vrai pour les amarts vectoriels. L'objectif du chapitre suivant est de définir une nouvelle classe des amarts qui à la fois généralise la notion des martingales et où le théorème de chatterji reste vrai.

# Chapitre 4

# Les amarts uniformes

Le théorème générale de la convergence des amarts à valeurs vectoriels, montre que tout amart vectoriel borné dans $L^1$, converge faiblement presque surement. dans le chapitre précédent on a montré que dans un espace de Banach de dimension infinie on peut trouver un amart vectoriel qu'est borné dans $L^1$ mais il ne converge pas pour la norme de $E$. Dans ce chapitre nous allons définir une classe des amarts vectoriels appelé les amarts uniformes pour laquelle la convergence forte est presque surement assuré.

## 4.1 Notation, définition et préliminaires.

Dans cette section on va définir la notion d'amart uniforme, on donne d'abord la définition qui est exprimée par Bellow dans [7], après on va donner une autre définition qui sera adapter durant ce chapitre.
On suppose que $E$ est un espace de Banach séparable, soit $D \subset \{x^* \in E^* : \|x^*\| \leq 1\}$ un ensemble dénombrable.
Pour $x \in E$, on a

$$\|x\| = \sup\{|\langle x^*, x\rangle| : x^* \in E^*\}$$

Soit $E$ un espace de Banach. On note par $\mathcal{L}_E(\Omega, \mathcal{F})$ l'ensemble des fonctions $g : \Omega \to E$, de la forme

$$g = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbb{1}_{A_i}$$

Où les $A_i$ sont deux à deux disjoints pour $i = 1, ..., n$, et $x_i \in E$ pour chaque i.
On écrit

$$\mathcal{L}_E^1(\omega, \mathcal{F}) = \{g \in \mathcal{L}_E(\Omega, \mathcal{F}) | \|g(\omega)\| \leq 1, \text{pour tout} \omega \in \Omega\}$$

Nous donnons d'abord la définition d'un amart uniforme.
Soit $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un amart à valeurs dans E, on note $\mu_\tau(A) = \displaystyle\int_A X_\tau d\mathbb{P}$, pour toute $A \in \mathcal{F}$, d'après le lemme3.2 la famille $(\mu_\tau)_{\tau\in T}$ converge uniformément vers une limite notée $\mu(A)$ dans $E$, pour chaque $A \in \displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{F}_n = \bigcup_{\tau\in T} \mathcal{F}_\tau$, c-à-d, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\sigma \in T_{\geq n_0} \Rightarrow \displaystyle\sup_{A\in\mathcal{F}_\sigma} \|\mu_\sigma - \mu(A)\| \leq \epsilon$
Alors, $\displaystyle\lim_{\tau\in T} \int_\Omega \langle g, X_\tau\rangle d\mathbb{P} = L(g)$, existe pour toute $g \in \mathcal{L}_{E^*}(\Omega, \displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{F}_n)$, alors nous donnons la définition suivante(voir [7])

**Définition 4.1.1**

Soient $E$ un espace de Banach, et $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite adaptée à valeurs dans $E$, on dit que $X_n$ est un amart uniforme si la famille $(\int_\Omega X_\tau d\mathbb{P})_{\tau\in T}$, converge uniformément, c-à-d :

$$\forall\epsilon > 0,\ \ \exists n_0 \in \mathbb{N} : (\sigma \in T,\ \ \sigma \geq n_0) \Rightarrow \sup_{g\in\mathcal{L}^1_E(\Omega,\mathcal{F}_\sigma)} |\int_\Omega \langle g, X_\sigma\rangle d\mathbb{P} - L(g)| \leq \epsilon$$

**Remarque 9** *La définition précédente peut être donner de la façon suivante :*

$$\forall\epsilon > 0,\ \ \exists n_0 \in \mathbb{N} : (\sigma \in T,\ \ \sigma \geq n_0) \Rightarrow \|\mu_\sigma - (\mu|\mathcal{F}_\sigma)\| \leq \epsilon$$

La définition suivante sera adaptée dans la suite de ce chapitre [23].

**Définition 4.1.2**

Soit $(X_n, \mathcal{F})$ une suite adaptée. On dit que $X_n$ est une amart uniforme, si

$$\limsup_{\sigma\in T} \sup_{\tau\in T_{\geq\sigma}} \int_\Omega \|\mathbb{E}(X_\tau|F_\sigma) - X_\sigma\| \, d\mathbb{P} = 0\,.$$

**Exemple 2** 1. *Toute martingale est un amart uniforme.*

2. *Toute suite $(X_n, \mathcal{F}_n)_n$ adaptée qui converge p.s, telle que $(X_\sigma)_{\sigma\in\tau}$ est uniformément intégrable est un amart uniforme. En effet :*
*Puisque $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge p.s, alors $(X_\sigma)_{\sigma\in\tau}$ est aussi converge vers $X_\infty \in L^1_E$.*
*Puisque $(X_\sigma)_{\sigma\in\tau}$ est uniformément intégrable, on a*

$$\lim_{\sigma\in\tau} \int_\Omega \|X_\sigma - X_\infty\| \, d\mathbb{P}.$$

*Donc,*

$$\begin{aligned}\lim_{\sigma\in\tau} \sup_{\tau\in T_{\geq\sigma}} \|\mathbb{E}(X_\tau|F_\sigma) - X_\sigma\|_1 &= \lim_{\sigma\in\tau} \sup_{\tau\in T_{\geq\sigma}} \|\mathbb{E}(X_\tau - X_\sigma|F_\sigma)\|_1 \\ &\leq \lim_{\sigma\in\tau} \sup_{\tau\in T_{\leq\sigma}} \|X_\tau - X_\sigma\|_1 \\ &= 0.\end{aligned}$$

*On peut conclure que toute suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, telle que $\sup_n \|X_n\| < \infty$, et telle que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge p.s est un amart uniforme.*

3. *Toute quasi-martingale et un amart uniforme. En effet :*
*Soit $\epsilon > 0$, prenons $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que :*

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} \int_\Omega \|\mathbb{E}(X_{n+1}|F_n) - X_n\| \, d\mathbb{P} < \infty.$$

*Soit* $\sigma$, $\tau \in T_{\geq n_0}$, *avec* $\tau \geq \sigma$, *alors :*

$$\int_\Omega \|\mathbb{E}(X_\tau|F_\sigma) - X_\sigma\|\, d\mathbb{P} \leq \sum_{k=\min\sigma}^{\max\sigma} \sum_{j=\min\sigma}^{\max\tau} \int_{\{\tau=j\}\cap\{\sigma=k\}} \|\mathbb{E}(X_j|F_k) - X_k\|\, d\mathbb{P}\,. \tag{1}$$

*On a* $\{\tau = j\} \cap \{\sigma = k\} = \emptyset$, *si* $k > j$ *et si* $k = j$, *alors* $\|\mathbb{E}(X_j|F_k) - X_k\| = 0$.
*Donc,*

$$(1) \;=\; \sum_{\substack{k\in\sigma(\Omega)\\ j\in\tau(\Omega)\\ k<j}} \int_{\{\tau=j\}\cap\{\sigma=k\}} \|\mathbb{E}(X_j|F_k) - X_k\|\, d\mathbb{P}\,,$$

*d'autre part, on a*

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_j|F_k) - X_k &= \mathbb{E}(X_j - X_k|F_k)\\ &= \mathbb{E}(X_j - X_{j-1} + X_{j-1}\cdots - X_{k+1} + X_{k+1} - X_k|F_k)\\ &= \mathbb{E}(\mathbb{E}(X_j|F_{j-1}) - X_{j-1} + \mathbb{E}(X_{j-1}|F_{j-2})\cdots - X_{k+1} + \mathbb{E}(X_{k+1}|F_k) - X_k|\mathcal{F}_k)\end{aligned}$$

*Puisque* $\|\mathbb{E}(\cdot|\mathcal{F}_k)\| \leq 1$, *on a :*

$$\begin{aligned}(1) &\leq \sum_{\substack{k,j\\ k<j}} \int_{\{\tau=j\}\cap\{\sigma=k\}} \sum_{p=k+1}^{j} \|\mathbb{E}(X_p|F_{p-1}) - X_{p-1}\|\, d\mathbb{P}\\ &\leq \sum_{p=\min\sigma+1}^{\max\tau} \int_\Omega \|\mathbb{E}(X_p|F_{p-1}) - X_{p-1}\|\, d\mathbb{P}\\ &\leq \epsilon.\end{aligned}$$

**Définition 4.1.3**

Soient $E$ un espace de Banach et $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite adaptée à valeurs dans E, on dit que $X_n$ est un potentielle uniforme si $X_n$ est intégrable pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\int_\Omega \|X_\tau\| d\mathbb{P} \to 0$

**Remarque 10** *: Si* $X_n$ *est un potentiel uniforme, alors* $\lim_{n\in\mathbb{N}} X_n(w) = 0$ *presque surement.*

**Proposition 4.1.1**

tout amart réel est un amart uniforme.

**Preuve 18** *Si* $\mu$ *est une fonction additive définie sur* $\mathcal{F}$ *à valeurs réelles et borné", est de variation finie et (voir [18] lemme 5, p.97)*

$$\|\mu\| \leq 2 \sup_{A\in\mathcal{F}} |\mu(A)|$$

*Donc, pour* $\sigma \in T_{\geq n_0}$ *:*

$$\|\mu - (\mu|\mathcal{F}_\sigma)\| \leq \sup_{A\in\mathcal{F}_\sigma} |\mu_\sigma(A) - \mu(A)| \leq 2\epsilon$$

*D'où le résultat.*

## 4.2 convergence et décomposition des amarts uniformes

Le théorème suivante et n'est d'autre qu'une généralisation du théorème de Chatterji qui est énoncer dans le chapitre 1.(voir [7])

**Théorème 4.2.1**

Soit $E$ un espace de Banach, tel que $E$ possède la propriété de Radon-Nikodym. Alors, tout amart uniforme borné dans $L^1$ converge fortement p.s.

**Preuve 19** *La preuve est basée sur la définition d'amart uniforme et le corollaire* 1.10 *chapitre* 5*, dans [23]*
*La propriété notée* $(B_\tau)$ *est satisfaite puisque pour toute* $A \in \bigcup_n \mathcal{F}_n$*, la famille* $\left(\int_A X_\tau \, d\mathbb{P}\right)_{\tau \in T}$ *converge en norme de* $E$*.*
*En effet :*
*Soit* $A \in \mathcal{F}_{n_0}$*. Soient* $\tau \in T_{\geq \sigma}$*,* $\sigma \in T_{\geq n_0}$*, alors :*

$$\begin{aligned}\| \int_A X_\tau \, d\mathbb{P} - \int_A X_\sigma \, d\mathbb{P} \| &= \| \int_A \mathbb{E}(X_\tau - X_\sigma | \mathcal{F}_\sigma) \, d\mathbb{P} \| \\ &\leq \int_\Omega \| \mathbb{E}(X_\tau - X_\sigma | \mathcal{F}_\sigma) \| \, d\mathbb{P} \,,\end{aligned}$$

*d'où,* $\left(\int_\Omega X_\tau \, d\mathbb{P}\right)_{\tau \in T}$ *converge par définition d'un amart uniforme.*

Maintenant on donne la décomposition de Riesz pour les amarts uniformes, on vira qu'elle sera très utiles pour prouver les résultats (voir [7]).

**Théorème 4.2.2**

Soit $E$ un espace de Banach et soit $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un amart uniforme, alors $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une décomposition unique

$$X_n = Y_n + Z_n,$$

où $(Y_n, \mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une martingale et $(Z_n, \mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un potentiel uniforme.

**Preuve 20** *Soit* $m \in \mathbb{N}$*, alors* $(\mathbb{E}(X_n|\mathcal{F}_n))_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite de Cauchy dans* $L^1_E$ *:*
*Soit* $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ *tels que* $n_2 \geq n_1 \geq m$ *:*

$$\begin{aligned}\| \mathbb{E}(X_{n_1}|\mathcal{F}_m) - \mathbb{E}(X_{n_2}|\mathcal{F}_m) \|_1 &= \| \mathbb{E}(X_{n_1} - X_{n_2}|\mathcal{F}_m) \|_1 \\ &= \| \mathbb{E}(X_{n_1} - \mathbb{E}(X_{n_2}|\mathcal{F}_{n_1})) \|_1 \\ &\leq \| X_{n_1} - \mathbb{E}(X_{n_2}|\mathcal{F}_{n_1}) \|_1.\end{aligned}$$

*On pose* $Y_m = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}(X_n|\mathcal{F}_m)$*.*
*On pose* $Z_n = X_n - Y_n$*, pour tout* $n \in \mathbb{N}$

$$\int_\Omega \lim_{n\to+\infty} \sup \| Z_n \| \, d\mathbb{P} \leq \lim_{\sigma\in T} \sup \sup_{\tau \in T_{\geq \sigma}} \int_\Omega \| \mathbb{E}(X_\tau|\mathcal{F}_\sigma) - X_\sigma \| \, d\mathbb{P}.$$

*D'où,* $\lim\limits_{n\to+\infty} Z_n = 0$ *p.s.*
*D'autre part, puisque* $Y_\sigma = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{E}(X_n|\mathcal{F}_\sigma)$.
*Pour tout* $\sigma \in T$*, on a :*

$$\int_\Omega \| Y_\sigma - X_\sigma \| \, d\mathbb{P} = \lim_{n\to+\infty} \int_\Omega \| \mathbb{E}(X_n|\mathcal{F}_\sigma) - X_\sigma \| \, d\mathbb{P},$$

*alors,* $\lim\limits_{\sigma\in T} \| Z_\sigma \|_1 = 0$.
*On suppose que pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *:*

$$X_n = Y_n + Z_n = Y'_n + Z'_n,$$

*où* $(Y'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une martingale et* $\lim\limits_{\sigma\in T} \| Z'_\sigma \| = 0$.
*On a la martingale* $(Z_n - Z'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *égale à* $(Y_n - Y'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers 0 pour la norme* $\| \cdot \|_1$ *(car* $\| Z \|_1 \to 0$ *et* $Z'_{n1} \to 0$*), par suite* $Z_n = Z'_n$ *presque surement et* $Y_n = Y'_n$ *presque surement pour tout* $n \in \mathbb{N}$*, d'où le résultat.*

Le théorème suivant peut être considéré comme une version vectoriel du lemme 2 de [5].

**Théorème 4.2.3**

Soit $E$ un espace de Banach et soit $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un amart uniforme à valeurs dans $E$, borné dans $L^1$. Alors :

1. $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un amart de classe $(B)$.
2. $(\| X_n \|, \mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un amart uniforme.

**Preuve 21** *1. D'après le théorème de décomposition de Riesz, on a :*

$$\begin{aligned}\sup_{\tau\in T} \int_\Omega \| X_\tau \| \, d\mathbb{P} &\leq \sup_{\tau\in T} \int_\Omega \| Y_\tau \| \, d\mathbb{P} + \sup_{\tau\in T} \int_\Omega \| Z_\tau \| \, d\mathbb{P} \\ &\leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_\Omega \| Y_n \| \, d\mathbb{P} + \sup_{\tau\in T} \int_\Omega \| Z_\tau \| \, d\mathbb{P}\end{aligned}$$

*Puisque* $(Y_n, \mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une martingale. Comme* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est bornée dans* $L^1_E$*, alors* $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \int_\Omega \| Y_n \| \, d\mathbb{P} < \infty$.
*Soit* $n \in \mathbb{N}$ *tel que*

$$\sup_{\tau\in T_{\geq n_0}} \int_\Omega \| Z_\tau \| \, d\mathbb{P} < 1.$$

*Pour tout* $\tau \in T$ *on a :*

$$\begin{aligned}\int_\Omega \| Z_\tau \| \, d\mathbb{P} &= \int_{\{\tau\geq n_0\}} \| Z_\tau \| \, d\mathbb{P} + \int_{\{\tau< n_0\}} \| Z_\tau \| \, d\mathbb{P} \\ &\leq \int_{\{\tau\geq n_0\}} \| Z_\tau \| \, d\mathbb{P} + \sum_{k=1}^{n_0-1} \int_\Omega \| Z_k \| \, d\mathbb{P}\end{aligned}$$

*On définit $\tau'$ comme suit :*

$$\begin{aligned} \tau' : \quad \Omega &\longrightarrow \qquad \mathbb{N} \\ \omega &\longmapsto \quad \tau'(\omega) = \begin{cases} \tau & si\ \tau \geq n_0 \\ n_0 & si\ \tau \leq n_0 \end{cases} \end{aligned}$$

*Il est clair que $\tau \in T_{\geq n_0}$ et $\int_{\{\tau \geq n_0\}} \| Z_{\tau'} \| \, d\mathbb{P} = \int_{\{\tau \geq n_0\}} \| Z_\tau \| \, d\mathbb{P}$.*
*Alors :*

$$\begin{aligned} \int_{\{\tau \geq n_0\}} \| Z_\tau \| \, d\mathbb{P} &\leq \int_\Omega \| Z_{\tau'} \| \, d\mathbb{P} \\ &\leq \sup_{\sigma \in T_{\geq n_0}} \int_\Omega \| Z_\sigma \| \, d\mathbb{P} \\ &< \infty \,. \end{aligned}$$

*Donc*

$$\begin{aligned} \sup_{\tau \in T} \int_\Omega \| X_\tau \| \, d\mathbb{P} &\leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_\Omega \| Y_n \| \, d\mathbb{P} + 1 + \sum_{k=1}^{n_0 - 1} \int_\Omega \| Z_k \| \, d\mathbb{P} \\ &< \infty \,. \end{aligned}$$

2. *En vertu du fait que :*

$$\lim_{\sigma \in T} \int_\Omega \| X_\sigma - Y_\sigma \| \, d\mathbb{P} = \lim_{\sigma \in T} \int_\Omega \| Z_\sigma \| \, d\mathbb{P} = 0.$$

*Le problème est réduit à $(Y_n, \mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$. En effet :*

$$\begin{aligned} &\int_\Omega |\mathbb{E}(\| Y_\tau \| \, |\mathcal{F}_\sigma) - \| Y_\sigma \| - \mathbb{E}(\| X_\tau \| \, |\mathcal{F}_\sigma) - \| X_\sigma \| \| \, d\mathbb{P} \\ &\leq \int_\Omega |\mathbb{E}(\| Y_\tau \| \, |\mathcal{F}_\sigma) - \mathbb{E}(\| X_\tau \| \, |\mathcal{F}_\sigma) - (\| Y_\sigma \| - \| X_\sigma \|)| \, d\mathbb{P} \\ &\leq \int_\Omega |\mathbb{E}(\| Y_\tau \| - \| X_\tau \| \, |\mathcal{F}_\sigma)| \, d\mathbb{P} + \int_\Omega | \ \| X_\sigma \| - \| Y_\sigma \| \ | \, d\mathbb{P} \\ &\leq \int_\Omega | \| Y_\tau \| - \| X_\tau \| \, | \, d\mathbb{P} + \int_\Omega | \| Y_\sigma \| - \| X_\sigma \| \ | \, | \, d\mathbb{P} \\ &\leq \int_\Omega \| X_\tau - Y_\tau \| \, d\mathbb{P} + \int_\Omega \| Y_\sigma - X_\sigma \| \, d\mathbb{P} \underset{\tau, \sigma \in T}{\longrightarrow} 0. \end{aligned}$$

*On sait que $(\| Y_n \|)_{n \in \mathbb{N}}$ est une sous-martingale, alors :*

$$\begin{aligned} \int_\Omega |\mathbb{E}(\| Y_\tau \| \, |\mathcal{F}_\sigma) - \| Y_\sigma \| | \, d\mathbb{P} &= \int_\Omega (\mathbb{E}(\| Y_\tau \| \, |\mathcal{F}_\sigma) - \| Y_\sigma \|) \, d\mathbb{P} \\ &= \int_\Omega \| Y_\tau \| \, d\mathbb{P} - \int_\Omega \| Y_\sigma \| \, d\mathbb{P}. \end{aligned}$$

*Comme $\left( \int_\Omega \| Y_\tau \| \, d\mathbb{P} \right)_{\tau \in T}$ est croissante et bornée alors elle converge. Par suite :*

$$\int_\Omega \left| \mathbb{E}^{\mathcal{F}_\sigma} \| Y_\tau \| - \| Y_\sigma \| \right| \, d\mathbb{P} \underset{\tau, \sigma \in T}{\longrightarrow} 0$$

*d'où le résultat.*

**Lemme 4.2.1**

Soit $(X_n^m, \mathcal{F}_n)$ une suite des amarts uniformes. On considère la suite adaptée $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, vérifiant

$$\lim_{m\to+\infty} \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_\Omega \parallel X_n^m - X_n \parallel \, d\mathbb{P} = 0$$

alors, $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un amart uniforme.

Le théorème suivant est déjà énoncé pour les amarts réels dans le chapitre 2, nous donnons maintenant ce théorème pour les amarts uniformes (voir [7]).

**Théorème 4.2.4**

Soient E un espace de Banach et $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, un amart uniform à valeurs dans $E$. Soit $(\tau_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite des temps d'arrêt inclus dans T, on définit $\Im_k$ par :

$$\Im_k = \mathcal{F}_{\tau_k} = \{A \in \mathcal{F} | A \cap \{\tau_k = n\} \in \mathcal{F}_n, \forall n \in \mathbb{N}\}$$

Et $Y_k = X_{\tau_k}$ pour $k \in \mathbb{N}$
Alors $(Y_n, \Im_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un amart uniforme, et si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est borné dans $L^1$, alors $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est aussi borné dans $L^1$.

**Preuve 22** *Soit $k \in \mathbb{N}$. On a :*

$$X_{\tau_k} = Y_{\tau_k} + Z_{\tau_k},$$

*alors, pour tout $m \in \mathbb{N}$, on a :*

$$X_{\tau_k} = Y_{\tau_k} + Z_{\tau_k \vee m} + Z_{\tau_k \wedge m} - Z_m,$$

*car :*

$$Z_{\tau_k} = Z_{\tau_k \wedge m} + Z_{\tau_k \vee m} - Z_m.$$

*On sait que :*

$$\lim_{m\to+\infty} \sup_{k\in\mathbb{N}} \int_\Omega \parallel Z_{\tau_k \vee m} - Z_m \parallel \, d\mathbb{P} = 0.$$

*Pour tout $m \in \mathbb{N}$, $(X_{\tau_k \wedge m}, \mathcal{F}_{\tau_k})_{k\in\mathbb{N}}$ est une amart uniforme. Puisque elle est majorée par $\sup_{k\in\{1,\cdots,m\}} \parallel Z_k \parallel \in L^1_{\mathbb{R}}$, alors elle converge p.s vers $Z_{\tau_\infty \wedge m}$, où $\tau_\infty = \lim_{k\to+\infty} \tau_k$.*
*$(Y_{\tau_k}, \mathcal{F}_{\tau_k})_{k\in\mathbb{N}}$ est une martingale, puis $(\tau_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est croissante, alors elle est un amart uniforme.*
*D'après le lemme précédent, on a $(Y_k, \tau_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est un amart uniforme.*
*Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $L^1_E$, alors $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de classe $(B)$, par conséquent la suite $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $L^1_E$.*

**Corollaire 4.2.1**

Soient $E$ un espace de Banach et $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, un amart uniforme à valeurs dans $E$. les assertions suivantes sont équivalentes :

1. si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est borné dans $L^1$, alors elle converge fortement presque surement.
2. L'espace $E$ admet la propriété de Radon-Nikodym.

## Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons défini une nouvelle classe d'amarts à savoir ; les amarts uniformes. Ces nouveaux processus généralisent bien les martingales et les quasi-martingales mais également possèdent des propriétés plus importantes que les amarts. un amart uniforme à valeurs vectorielles et borné dans $L^1$ converge fortement presque surement. La décomposition de Riez a été l'une des clés dans la démonstration de plusieurs propriétés et résultats de ce chapitre.

# Chapitre 5

# Les multi-mesures et théorème de Radon-Nikodym

Durant ce chapitre, Soit $(\Omega, \mathcal{F})$ un espace mesurable. Soit $E$ un espace de Banach, $E^*$ est le dual de $E$, et $2^E$ est la famille de toutes les parties non vides de $E$. Soit $X \in 2^E$, On note par $clX$ (resp $\bar{co}X$) la fermeture de $X$ (resp l'enveloppe convexe fermé de X), et on définit $\|X\|$ par :

$$\|X\| = \sup_{x \in X} \|x\|$$

Soient $X, Y \in 2^E$ deux fermés, soit $\delta(X, Y)$ est la distance de Hausdorff de X et Y, c-à-d,

$$\delta(X, Y) = max\{\sup_{x \in X} d(x, Y), \sup_{y \in Y} d(y, X)\} \tag{5.1}$$

## 5.1 Les multi-mesures

Soit $M : \mathcal{F} \to 2^E$ une fonction multivoque, on dit que $M$ est additive par rapport à une partition dénombrable $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, si $M(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} M(A_n)$. Pour $\{X_n\}$ dans, $2^E$, $\sum_{i=1}^{\infty} X_n$ est définie par :

$$\sum_{n=1}^{\infty} X_n = \{x \in E : x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n\}, \text{ ( incoditionnellement convergente)}, \ x_n \in X_n, \ n \geq 1\}$$

**Définition 5.1.1**

Soit $M : \mathcal{F} \to 2^E$ une fonction multivoque. On dit que M est une multi-mesure si elle est additive pour toute partition dénombrable dans $\mathcal{F}$, et $M(\varnothing) = \{0\}$.
Soit $A \in \mathcal{F}$, on note par $\Xi$ l'ensemble de toutes les partitions mesurables finie de A. La variation de M est définie par :

$$|M|(A) = \sup_{\{A_i\} \in \Xi} \sum_{i=1}^{n} |M(A_i)|$$

**Remarque 11** *1. Soit $M$ une multi-mesure additive par rapport à toute partition mesurable dénombrable et bornée alors $M(\varnothing) = \{0\}$.*

2. *Si $M$ est de variation bornée, alors* $\sum_{i=1}^{\infty} x_n$ *est absolument convergente, pour tout* $x_n \in M(A_n)$*, où* $\{A_n\}$ *est une famille dans* $\mathcal{F}$ *deux à deux disjoints*

Nous commençons d'abord par la proposition suivante (voir [3]).

**Proposition 5.1.1**

Soit $M : \mathcal{F} :\to 2^E$ une multi-mesure alors $|M|$ est une mesure positive sur $\mathcal{F}$.

**Définition 5.1.2**

Soient $A \in \mathcal{F}$, et $M : \mathcal{F} :\to 2^E$ une multi-mesure, on dit que A est un atome de $M$ si et seulement si, $M(A) \neq \{0\}$, et $M(B) = \{0\}$ ou $M(A \backslash B) = \{0\}$, pour tout $B \subset A$, et $B \in \mathcal{F}$. Une multi-mesure est dite sans atome si elle n'admet pas d'atomes.

**Remarque 12** *Il est clair que $A$ est un atome par rapport à $M$ si et seulement si $A$ est un atome par rapport à $|M|$.*

On donne le théorème suivant (voir [28])

**Théorème 5.1.1**

On suppose que $E$ possède la propriété de Radon-Nikodym. Soit $M : \mathcal{F} \to 2^E$, une multi-mesure sans atome de variation bornée. Alors pour tout $A \in \mathcal{F}$, $clM(A)$ est convexe.

**Remarque 13** *Sous les hypothèses du théorème5.1* $\bigcup_{A \in \mathcal{F}} M(A)$ *est convexe (voir théorème 4.4 [3])*

Soit $M : \mathcal{F} \to 2^E$ une multi-mesure, en générale une fonction multivoque obtenue en prenant $clM(A)$ (ou $\bar{co}M(A)$), n'est pas toujours une multi-mesure (voir exemple 1.4 [28]). Le théorème suivant donne les conditions où on a le cas (voir [28]).

**Théorème 5.1.2**

Soit $M : \mathcal{F} \to 2^E$ une multi-mesure de variation bornée, telle que $M(\Omega)$, est relativement faiblement compacte. Soient $A \in \mathcal{F}$, et $\overline{M}(A)$, (resp $\overline{co}M(A)$) la fermeture faible (resp l'envolope convexe fermé de $M(A)$). Alors $\overline{M}$ et $\overline{co}M$, sont des multi-mesures sur $\mathcal{F}$, et $|M|(A) = |\overline{M}|(A) = |\overline{co}M|(A)$ pour tout $A \in \mathcal{F}$.

**Preuve 23** *On montre facilement que $\overline{co}M$ est une multi-mesure. La preuve pour $\overline{M}$ sera identique. Soit $A \in \mathcal{F}$.*
*Comme $M(\Omega) = M(A) + M(\Omega \backslash A)$, il s'en suit que $M(A)$ est relativement faiblement compacte. Ainsi*

*$\overline{co}M(A)$ est faiblement compact (voir page 434 [25]).*
*Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille dans $\mathcal{F}$ deux à deux disjointe. Alors on a :*

$$M\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{k} (M(A_n)) + M\left(\bigcup_{n=k+1}^{\infty} A_n\right).$$

*Donc :*

$$\overline{co}M(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{k} \overline{co}\, M(A_n) + \overline{co}M\left(\bigcup_{n=k+1}^{\infty} A_n\right).$$

*Puisque $M$ est de variation bornée, alors $\overline{co}M\left(\bigcup_{n=k+1}^{\infty} A_n\right)$ et $\sum_{n=k+1}^{\infty} \overline{co}M(A_n)$ sont faiblement compactes.*
*D'après le Lemme 3 [42], on a :*

$$\begin{aligned}
\delta\left(\overline{co}M\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right), \sum_{n=1}^{\infty} \overline{co}M(A_n)\right) &= \delta\left(\sum_{n=1}^{k} M(A_n) + \overline{co}M\left(\bigcup_{n=k+1}^{\infty} A_n\right), \sum_{n=1}^{k} \overline{co}M(A_n) + \sum_{n=k+1}^{\infty} \overline{co}M(A_n)\right) \\
&= \delta\left(\overline{co}M\left(\bigcup_{n=k+1}^{\infty} A_n\right), \sum_{n=k+1}^{\infty} \overline{co}M(A_n)\right) \\
&\leq \| \overline{co}M\left(\bigcup_{n=k+1}^{\infty} A_n\right) \| + \| \sum_{n=k+1}^{\infty} \overline{co}M(A_n) \| \\
&\leq 2. \sum_{n=k+1}^{\infty} |M|(A_n) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0.
\end{aligned}$$

*Par suite $\overline{co}M\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{co}M(A_n)$. Il est clair que $|M| = |\overline{M}| = |\overline{co}M|$, sur $\mathcal{F}$.*

## 5.2 Sélections des multi-mesures

Soit $M : \mathcal{F} \to 2^E$, une multi-mesure. On dit qu'une mesure $m : \mathcal{F} \to E$ est une sélection de M, si $m(A) \in M(A)$, pour toute $A \in \mathcal{F}$, et m est dite sélection généralisée de M si, $m(A) \in clM(A)$, pour toute $A \in \mathcal{F}$
Rappelons d'abord la définition d'un point exposé, et d'un point fortement exposé.
Un point $x \in K$ où $K \subset E$ est dit point exposé s'il existe $x^* \in E^*$, telle que $\langle x^*, x\rangle > \langle x^*, y\rangle$, pour tout $y \in K\backslash\{x\}$ et fortement exposé s'il est exposé et on a de plus la propriété que $\{x_n\} \subset K$ et $\langle x_n, x^*\rangle \to \langle x^*, x\rangle$, alors $\|x_n - x\| \to 0$.
Pour étudier l'existence d'une sélection (généralisée), on donne les deux propositions suivantes (voir [28]).

**Proposition 5.2.1**

Soit $M : \mathcal{F} \to 2^E$, une multi-mesure de variation bornée. Si $x$ est un point exposé de $M(\Omega)$, alors il existe une sélection $m$ de $M$ telle que $m(\Omega) = x$.

**Preuve 24** *Soit $x^* \in E^*$ tel que $\langle x^*, x\rangle > \langle x^*, y\rangle$ pour tout $y \in M(\Omega)\backslash\{x\}$.*
*Soit $A \in \mathcal{F}$, comme $M(\Omega) = M(A) + M(\Omega\backslash A)$. On pose $x = u + v$ avec $u \in M(A)$ et $v \in M(\Omega\backslash A)$. On a :*

$$\begin{aligned}\langle x^*, x\rangle &\overset{def}{=} \sup_{y\in M(\Omega)} \langle x^*, y\rangle \\ &= \sup_{y\in M(A)} \langle x^*, y\rangle + \sup_{y\in M(\Omega\backslash)} \langle x^*, y\rangle.\end{aligned}$$

*Alors : $\langle x^*, u\rangle > \langle x^*, y\rangle$, pour tout $y \in M(A)\backslash\{u\}$.*
*Par suite pour tout $A \in \mathcal{F}$, il existe une partie $m(A) \in M(A)$ qu'est exposée par $x^*(m(A) = u)$.*
*Montrons que $m$ est une mesure à valeurs dans $E$.*
*Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille dans $\mathcal{F}$ deux à deux disjoints. Comme $M$ est de variation bornée, alors $\sum_{n=1}^{\infty} m(A_n)$ est absolument convergente vers un élément de $M(A)$, et :*

$$\begin{aligned}\langle x^*, \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n)\rangle &= \sum_{n=1}^{\infty} \langle x^*, m(A_n)\rangle \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sup_{y\in M(A_n)} \langle x^*, y\rangle \\ &= \sup_{y\in M\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)} \langle x^*, y\rangle \\ &= \langle x^*, m\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)\rangle.\end{aligned}$$

*d'où $m(A) = \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n)$.*

**Proposition 5.2.2**

Soit $M : \mathcal{F} \to 2^E$, une multi-mesure de variation bornée. Si $x$ est un point fortement exposé de $M(\Omega)$, alors elle existe une sélection généralisée $m$ de $M$ telle que $m(\Omega) = x$.

Dans le théorème 4 [2], il a été prouvé que toute partie convexe faiblement compacte d'un espace de Banach, est l'enveloppe convexe fermée de ses points exposés. D'autre part il été prouvé dans le corollaire 7 dans [43], que toute parties convexe faiblement compacte, est l'enveloppe convexe de ses points fortement d'exposés. Alors on donne le théorème suivante (voir [28]).

**Théorème 5.2.1**

Soit $M : \mathcal{F} \to 2^E$, une multi-mesure de variation bornée. Telle que $M(\Omega')$ est relativement faiblement compacte, où $\Omega'$ est la partie sans atome de $|M|$. Alors pour tout $A \in \mathcal{F}$, et $x \in M(A)$, elle existe une sélection généralisée $m$ de $M$ telle que $m(A) = x$.

**Corollaire 5.2.1**

Soit $M : \mathcal{F} \to 2^E$, une multi-mesure de variation bornée. Si $M(\Omega)$ est relativement faiblement compacte, alors $\bigcap_{A \in \mathcal{F}}$, est relativement faiblement compacte. De plus, si E possède la propriété de Radon-Nikodym, et $M(\Omega)$ est relativement compacte, alors $\bigcap_{A \in \mathcal{F}}$ est relativement compacte.

La caractérisation suivante de la propriété de Radon-Nikodym est donnée par Phelps téorème 9 dans [41], un espace de Banach $E$, possède la propriété de Radon-Nikodym, si et seulement si toute partie fermée bornée de $E$, est l'enveloppe convexe fermé de ses pointes fortement exposées. En utilisant ça et la proposition 5.2, on aura le théorème suivante (Voir [28]).

**Théorème 5.2.2**

On suppose que $E$ possède la propriété de Radon-Nikodym. Soit $M : \mathcal{F} :\to 2^E$ une multi-mesure de variation bornée. Alors pour tout $A \in \mathcal{F}$, $x \in M(A)$et $\epsilon > 0$, il existe une sélection généralisée $m$ de $M$ telle que $\|m(A) - x\| \leq \epsilon$.

## 5.3 Les multifonctions mesurables

Soit $L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu, E) = L^1(\Omega, E)$, l'espace de Banach des fonctions (des classe équivalence) $f : \Omega \to E$, qui sont Bochner intégrables, où $\|f\|_1 = \int_\Omega \|f(\omega)\| d\mu$.
Soit $F : \Omega \to 2^E$, une fonction multivoque, le graph de $F$ est l'ensemble $G(F) = \{(\omega, x) \in \Omega \times E : x \in F(\omega)\}$. Soit $X \subset E$, l'image inverse de $X$ par $F$ est l'ensemble définie par

$$F^{-1}(X) = \{\omega \in \Omega : F(\omega) \cap X \neq \varnothing\}.$$

Nous commençons par définir la mesurabilité d'une multifonction (voir[29])

**Définition 5.3.1**

Soit $F : \Omega \to 2^E$, une fonction multivoque, on dit que $F$ est mesurable (resp faiblement mesurable) si $F^{-1}(X)$ est mesurable pour toute partie $X$ fermée (resp ouvert) de $E$.

On donne la proposition suivante (voir [29]).

**Proposition 5.3.1**

Soit $F : \Omega \to 2^E$, une fonction multivoque telle que $F(\omega)$ est fermé non vide pour toute $\omega \in \Omega$, on considère les assertions suivantes.

1. F est mesurable
2. F est faiblement mesurable
3. pour toute $x \in E$, la fonction $\omega \mapsto d(x, F(\omega))$ est mesurable
4. Elle existe une suite $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ des fonctions mesurable $f_n : \Omega \to E$, telle que $F(\omega) = cl\{\{f_n\}\}$ pour toute $\omega \in \Omega$
5. Le graphe de F est $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}_E$-mesurable, où $\mathcal{B}_E$ est la tribu de Borel de $E$.
   Alors les implications suivantes sont vraies

$$1 \Rightarrow 2 \Leftrightarrow 3 \Leftrightarrow 4 \Rightarrow 5$$

**Remarque 14** *Si* $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ *est complet, alors les conditions* $1, 2, 3, 4, 5$ *sont équivalentes (voir [29]).*

Maintenant on va définir l'intégrale d'une fonction multivoque. On not par $\mathcal{M}[\Omega, E]$ la famille des fonction multivoque $F : \Omega \to 2^E$, telle que $F$ est faiblement mesurable et à valeurs fermées non vides (voir[29]).

**Définition 5.3.2**

Soit $F \in \mathcal{M}[\Omega, E]$, on définit l'ensemble suivant

$$S_F^1 = \{f \in L^1(\Omega, E) : f(\omega) \in F(\omega), \text{p.s}\}.$$

qui est un fermé de $L^1(\Omega, E)$. L'intégrale de $F$ est donné par

$$\int_\Omega F d\mu = \left\{ \int_\Omega f d\mu : f \in S_F^1 \right\}$$

Où $\displaystyle\int_\Omega f d\mu$ est l'intégrale de Bochner de $f$.

Pour $A \in \mathcal{F}$, $\displaystyle\int_A F d\mu$ est l'intégrale de la restriction de $F$ sur $A$, c-à-d

$$\int_A F d\mu = \left\{ \int_A f d\mu : f \in S_{F|_A}^1 \right\}$$

On note par $\mathcal{L}^1[\Omega, \mathcal{F}, \mu, E] = \mathcal{L}^1[\Omega, E]$, l'ensemble des fonctions $F \in \mathcal{M}[\Omega, E]$, telle que

$$\int_\Omega \|F(w)\| d\mu < \infty,$$

et deux fonction $F_1, F_2 \in \mathcal{L}^1[\Omega, E]$ sont dite identique si, $F_1(\omega) = F_2(\omega)$ presque surement.
On note par $\mathcal{L}_c^1[\Omega, \mathcal{F}, \mu, E] = \mathcal{L}_c^1[\Omega, E]$, l'espace des fonctions qui appartenant à $\mathcal{L}^1[\Omega, E]$, à valeurs convexes. Et par $\mathcal{L}_{cc}^1[\Omega, \mathcal{F}, \mu, E] = \mathcal{L}_{cc}^1[\Omega, E]$, l'espace des fonctions qui appartenant à $\mathcal{L}^1[\Omega, E]$, à

valeurs compactes et convexes. Ces espaces sont des espaces métrique complet, munis de la distance définie par :

$$\Delta(F_1, F_2) = \int_{\Omega} \delta(F_1(\omega), F_2(\omega))d\mu$$

Où $\delta$, est la distance de Hausdorff définie par 5.2 est la fonctions $\omega :\mapsto \delta(F_1(\omega), F_2(\omega))$ est mesurable. Alors, ces espaces sont des généralisations naturelles des espaces $L^1(\Omega, E)$.
On donne les théorèmes suivant concernant l'intégrale d'une fonction multivoque (voir [29]).

**Théorème 5.3.1**

Soit $F \in \mathcal{L}^1[\Omega, E]$, $\int_{\Omega} F d\mu$ vérifie les propriétés suivantes :

1. $\delta(cl \int_{\Omega} F_1 d\mu, cl \int_{\Omega} F_2 d\mu) \leq \Delta(F_1, F_2)$, pour tous $F_1, F_2 \in \mathcal{L}^1[\Omega, E]$
2. $cl \int_{\Omega} (F_1 \dot{+} F_2) d\mu = cl \left( \int_{\Omega} F_1 d\mu + \int_{\Omega} F_2 d\mu \right)$, pour tous $F_1, F_2 \in \mathcal{L}^1[\Omega, E]$
3. $cl \int_{\Omega} \bar{co} F d\mu = \bar{co} \int_{\Omega} F d\mu$, pour tous $F_1, F_2 \in \mathcal{L}^1[\Omega, E]$

**Théorème 5.3.2**

Si $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ est sans atome et $F \in \mathcal{L}[\Omega, E]$, alors $cl \int_{\Omega} F d\mu$ est convexe.

En basant sur les théorèmes 5.3 et 5.3 on donne le corollaire suivante (voir [29]).

**Corollaire 5.3.1: S**

$(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ est sans atome et $F \in \mathcal{L}[\Omega, E]$, alors

$$cl \int_{\Omega} F d\mu = cl \int_{\Omega} \bar{co} F d\mu$$

**Lemme 5.3.1**

Soit $F \in \mathcal{L}_c[\Omega, E]$ on suppose que $E^*$ est séparable alors une fonction $f \in L^1(\Omega, E)$ est dans $S^1 - F$ si et seulement si $\int_A f d\mu \in cl \int_A F d\mu$ pour tout $A \in \mathcal{F}$.

Maintenant nous donnons plusieurs résultats qu'ils sont utiles dans la suite.

**Proposition 5.3.2**

1. Soient $F_1, F_2 \in \mathcal{M}[\Omega, E]$, si $S^1_{F_1} = S^1_{F_2} \neq \varnothing$, alors $F_1(\omega) = F_2(\omega)$, presque surement.(voir corollaire [29]).
2. Soit $F \in \mathcal{M}[\Omega, E]$, et soit $\{f_n\}$ une suite dans $S^1_F$ telle que $F(\omega) = cl\{f_n(\omega)\}$, pour tout $\omega \in \Omega$. Alors pour toute $f \in S^1_F$, et $\epsilon > 0$, elle existe une mesurable finie $\{A_1, A_2, ..., A_k\}$ de $\Omega$ telle que $\|f - \sum_{n=1}^{k} \mathbb{1}_{A_n} f_n\|_1 \leq \epsilon$ (voir lemme 1.3 [29])
3. Soit $F \in \mathcal{M}[\Omega, E]$, si $S^1_F \neq \varnothing$, alors on a l'égalité suivante
$$\int_\Omega \|F(w)\| d\mu = \sup_{f \in S^1_F} \|f\|_1$$
Par suite $F \in \mathcal{L}^1[\Omega, E]$, si seulement si $S^1_F$ est non vide $F$ est bornée dans $L^1(\Omega, E)$. (Voir théorème 3.2 [29])
4. Soit $F \in \mathcal{L}^1[\Omega, E]$, et $(\bar{co}F)(\omega) = \bar{co}F(\omega)$ pour toute $\omega \in \Omega$. Alors $\bar{co}F \in \mathcal{L}^1_c[\Omega, E]$, et $\bar{co}\int_A F d\mu = cl \int_A \bar{co}F d\mu$ pour toute $A \in \mathcal{F}$ (Voir théorèmes 1.5 et 4.1 [29] )

## 5.4 Théorème de Radon-Nikodym

Soit $F \in \mathcal{L}^1[\Omega, E]$, notons que $M : \mathcal{F} \to 2^E$ définie par $M(A) = \int_A F d\mu$ est une multi-mesures. Soit $M : \mathcal{F} \to 2^E$ une multi-mesure, et soit $F \in \mathcal{M}[\Omega, E]$. On dit que $F$ est une dérivation de Radon-Nikodym de $M$ par rapport à $\mu$ si :

$$M(A) = \int_A F d\mu, \qquad \text{pour tout } A \in \mathcal{F} \tag{5.2}$$

Et on dit que $F$ est une dérivation généralisée de Radon-Nikodym, si :

$$cl M(A) = cl \int_A F d\mu, \qquad \text{pour tout } A \in \mathcal{F} \tag{5.3}$$

**Proposition 5.4.1**

Soit $F \in \mathcal{M}[\Omega, E]$ une dérivation généralisée de Radon-Nikodym d'une multi-mesure $M : \mathcal{F} \to 2^E$, alors $|M|(A) = \int_A |F(\omega)| d\mu$, pour tout $A \in \mathcal{F}$, et $M$ est de variation bornée si et seulement si $F$ est bornée dans $L^1$.

**Preuve 25** *Il suffit de prouver l'égalité pour $A = \Omega$.*
*Soit $\{A_i\}_{i \in \{1,2,...,n\}} \in \Im$, où $\Im$ est l'ensemble de toutes les partitions finies mesurables de $\Omega$.*
*Pour chaque $x_i \in M(A_i)$, $1 \leq i \leq n$, et pour $\epsilon > 0$, d'après 5.3, on peut choisir $f_i \in S^1_{F|_A}$, tel que*

$\|x_i - \int_{A_i} f_i d\mu\| \leq \frac{\epsilon}{n}$. *Alors on a :*

$$\sum_{i=1}^{n} \|x_i\| \leq \sum_{i=1}^{n} \int_{A_i} \|f_i(\omega)\| d\mu + \epsilon \leq \int_{\Omega} |F(\omega)| d\mu + \epsilon$$

*ce qui montre que* $\sum_{i=1}^{n} |M(A_i)| \leq \int_{\Omega} \|F(\omega)\| d\mu$,*et* $|M|(\Omega) \leq \int_{\Omega} \|F(\omega)\| \mu$.
*Inversement, si* $f \in S_F^1$, *alors :*

$$\|f\|_1 = \sup_{\Im} \sum_{i=1}^{n} \| \int_{A_i} f d\mu\| \leq \sup_{\Im} \sum_{i=1}^{n} |M(A_i)| = |M|(\Omega)$$

*Comme* $\int_{\Omega} \|F(\omega)\| d\mu = \sup_{f \in S_F^1} \|f\|_1$, *il s'en suit que* $\int_{\Omega} \|F(\omega)\| d\mu \leq |M|(\Omega)$. *D'où le résultat.*

Une multi-mesure $M : \mathcal{F} \to 2^E$ est dite continue par rapport à $\mu$, si $\mu(A) = 0$ implique que $M(A) = 0$. Il est clair que $M$ est continue par rapport à $\mu$ si et seulement si $|M|$ l'est aussi.
Le théorème suivant donne l'existence d'une dérivation généralisée de Radon-Nikodym (voir [28]).

**Théorème 5.4.1**

On suppose que $E$ possède la propriété de Radon-Nikodym. Soit $M : \mathcal{F} \to 2^E$ une multi-mesure continue par rapport à $\mu$ et de variation bornée. Alors $M$ admet une dérivation de Radon-Nikodym, appartenant à $\mathcal{L}^1[\Omega, E]$.

**Preuve 26** *Prenons une collection* $\{B_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, *des atomes deux à deux disjoints de* $\mu$ *tel que* $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_i$ *est la partie atomique de* $\mu$, *on définit* $F : \bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_i \to 2^E$, *par* $F(\omega) = \frac{clM(B_i)}{\mu(B_i)}$, *pour* $\omega \in B_i$. *Alors, puisque les* $B_i$ *sont des atomes de* $M$, *on peut observer que* $clM(A) = cl \int_A F d\mu$, *pour tout* $A \in \mathcal{F}$, $A \subset \bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_i$.
*Par suite sans perte de généralité, on peut supposer que* $\mu$ *est sans atome. Puisque* $|M|$ *est continue par rapport à* $\mu$, $|M|$ *est sans atome, donc* $M$ *est aussi sans atome. D'après le théorème 5.1* $clM(A)$ *est convexe pour toute* $A \in \mathcal{F}$. *Puisque* $E$ *est séparable, d'après le théorème 5.2, elle existe une suite* $\{m_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ *des sections généralisés de* $M$, *tel que* $clM(\Omega) = cl\{m_j(\Omega)\}$.
*Pour chaque* $j \geq 1$, *puisque* $m_j$ *est de variation bornée, et continue par rapport à* $\mu$, *on peut choisir* $f_j \in L^1(\Omega, E)$, *tel que* $m_j(A) = \int_A f_j d\mu$, *pour toute* $A \in \mathcal{F}$. *Prenons l'ensemble dénombrable suivant :*

$$U = \{g : g = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j f_j, \ \ \alpha_j \geq 0, \ \sum_{j=1}^{n} \alpha_j = 1, \ \ n \geq 1\}$$

*Et on définit* $F \in \mathcal{M}[\Omega, E]$, *par :*

$$F(\omega) = cl\{g(\omega) : g \in U\} = \bar{co}\{f_j(\omega)\}, \qquad \omega \in \Omega.$$

*On doit montrer que F est une dérivation généralisée de Radon-Nikodym de M.*
*Il est clair que,*

$$clM(\Omega) = cl\{m_j(\Omega)\} \subset cl \int_\Omega F d\mu \tag{5.4}$$

*Soient $f \in S_F^1$ et $\epsilon > 0$, on peut choisir une partition finie mesurable $\{A_1, A_2, ..., A_k\}$ de $\Omega$, et des fonctions $g_1, g_2, .., g_k \in U$, tel que :*

$$\|f - \sum_{i=1}^{k} \mathbb{1}_{A_i} g_i\|_1 \leq \epsilon$$

*Soit $n \in \mathbb{N}$, pour $1 \leq i \leq k$, on prend, $g_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} f_j$, où $\alpha_{ij} \geq 1$ et $\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} = 1$, alors on a :*

$$\| \int_A f d\mu - \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} \alpha_{ij} \mu(A_i \cap A)\| = \| \int_A \left( f - \sum_{i=1}^{k} \mathbb{1}_{A_i} g_i \right) d\mu\| \leq \epsilon.$$

*Et*

$$\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} \alpha_{ij} \mu(A_i \cap A) \in \sum_{i=1}^{k} clM(A \cap A_i) \subset clM(A), \qquad A \in \mathcal{F}.$$

*Par conséquence, $cl \int_A F d\mu \subset clM(A)$, pour toute $A \in \mathcal{F}$.*
*Supposons que $clM(A)$ est différant de $cl \int_A F d\mu$ pour certaines $A \in \mathcal{F}$. Alors puisque $cl \int_A F d\mu$ est convexe, d'après le théorème de séparation il existe $x^* \in E^*$, tel que :*

$$\sup_{x \in M(A)} \langle x^*, x \rangle > \sup_{x \in \int_A F d\mu} \langle x^*, x \rangle$$

*Donc On a :*

$$\begin{aligned} \sup_{x \in M(\Omega)} \langle x^*, x \rangle &= \sup_{x \in M(A)} \langle x^*, x \rangle + \sup_{x \in M(\Omega \setminus A)} \langle x^*, x \rangle \\ &> \sup_{x \in \int_A F d\mu} \langle x^*, x \rangle + \sup_{x \in \int_{\Omega \setminus A} F d\mu} \langle x^*, x \rangle \\ &= \sup_{x \in \int_\Omega F d\mu} \langle x^*, x \rangle \end{aligned}$$

*Ce qui contredit 5.4, d'où le résultat. et $F \in \mathcal{L}^1[\Omega, E]$ vient de la proposition5.4.*

**Corollaire 5.4.1**

On suppose que $E$ possède la propriété de Radon-Nikodym. Soit $M : \mathcal{F} \to 2^E$, une multi-mesure, de variation bornée. Alors il existe une multi-mesure, $M' : \mathcal{F} \to 2^E$, tel que M' est à valeurs convexe et $\bar{co}M(A) = clM'(A)$, pour tout $A \in \mathcal{F}$.

**Preuve 27** *D'après le théorème5.4 $M$ admet une dérivation généralisée de Radon-Nikodym $F \in \mathcal{L}_c^1[\Omega, E]$ et,*

$$\bar{co}M(A) = \bar{co}\int_A F d\mu = cl\int_A \bar{co}F d\mu, \qquad A \in \mathcal{F}$$

*On définit $M'(A) = \int_A \bar{co}F d\mu$, pour tout $A \in \mathcal{F}$.*

Dans le théorème suivant on va ajouter d'autre conditions assurant l'existence d'une dérivation de Radon-Nikodym, pour une multi-mesure $M$ (voir[28]).

**Théorème 5.4.2**

On suppose que $E$ possède la propriété de Radon-Nikodym, et $E*$ est séparable. Soit $M : \mathcal{F} \to 2^E$ une multi-mesure de variation bornée et continue par rapport à $\mu$, et à valeurs faiblement compactes. Alors $M$ admet une dérivation de Radon-Nikodym appartenant à $\mathcal{L}^1[\Omega, E]$

Le théorème suivant montre que la dérivation généralisée de Radon-Nikodym d'une multi-mesure peut être déterminée par une suite de dérivation de Radon-Nikodym des mesures à valeurs réelles.(voir [28])

**Théorème 5.4.3**

On suppose que $E$ possède la propriété de Radon-Nikodym, et $E^*$ est séparable. Soit $M : \mathcal{F} \to 2^E$, une multi-mesure continue par rapport à $\mu$ et de variation bornée. Si $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ est sans atome elle existe une et une seule $F \in \mathcal{L}_c^1[\Omega, E]$ telle que $F$ est une dérivation généralisée de Radon-Nikodym de $M$. Si $\{x_n^*\}$ une suite dense dans $E^*$, alors

$$F(\omega) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{ x \in E : \langle x, x_n^* \rangle \leq \frac{d\phi_n}{d\mu}(\omega) \right\}, \qquad p.s.$$

Où $\frac{d\phi_n}{d\mu}$ est la dérivation de Radon-Nikodym de la mesure définie par

$$\phi_n(A) = \sup_{x \in M(A)} \langle x^*, x \rangle, \qquad A \in \mathcal{F}$$

**Remarque 15** *Soit $M : \mathcal{F} \to 2^E$ une multi-mesure continue par rapport à $\mu$, de variation bornée. Notons que la dérivation de Radon-Nikodym de $M$ peut être donnée d'une manière unique sur la partie atomique de $\mu$. Le théorème précédent entraîne que si $E^*$ est séparable, alors la dérivation généralisée de Radon-Nikodym de $M$ est unique, sous la condition que $M$ est à valeurs convexe sur la partie sans atome de $\mu$.*

## 5.5 Les espérances conditionnelles, et martingales multivoques

Dans cette section, nous traiterons les espérances conditionnelles et les martingales dans le cas multivoque.

### 5.5.1 L'espérance conditionnelle multivoque

Nous commençons par définir l'espérance conditionnelle et donner des résultats élémentaires concernant cet opérateur. On donne la proposition suivante montrons l'existence de l'espérance conditionnelle (voir [28]).

**Proposition 5.5.1**

Soit $\mathcal{K}$ une sous tribu de $\mathcal{F}$ et $F \in \mathcal{L}^1_{cc}[\Omega, E]$. Alors il existe un unique $\mathbb{E}(F|\mathcal{F}) \in \mathcal{L}^1_{cc}[\Omega, \mathcal{F}, \mu, E]$, tel que

$$\int_A \mathbb{E}(F|\mathcal{K})d\mu = \int_A F d\mu \tag{5.5}$$

L'élément $\mathbb{E}(F|\mathcal{K})$ est appelé l'espérance conditionnelle de $F$ par rapport à $\mathcal{K}$.
On donne maintenant des propriétés sans preuve, qui généralisent le cas réel et vectoriel (voir [29]).

**Théorème 5.5.1**

Soit $F \in \mathcal{L}^1_c[\Omega, E]$ , $\mathbb{E}(F|\mathcal{K})$ vérifie les propriétés suivantes :

1. $\Delta(\mathbb{E}(F_1|\mathcal{K}), \mathbb{E}(F_2|\mathcal{K}) \leq \Delta(F_1, F_2),$ pour tous $F_1, F_2 \in \mathcal{L}^1_c[\Omega, E]$.
2. $\mathbb{E}(F_1 \dot{+} F_2|\mathcal{K}) = \mathbb{E}(F_1|\mathcal{K}) \dot{+} \mathbb{E}(F_2|\mathcal{K})$.
3. $\mathbb{E}(\lambda F|\mathcal{K}) = \lambda \mathbb{E}(F|\mathcal{K})$ pour tout $F \in \mathcal{L}^1_c[\Omega, E]$ et $\lambda \in L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$.
4. $\mathbb{E}(\bar{co}F|\mathcal{K}) = \bar{co}\mathbb{E}(F|\mathcal{F})$ pour tout $F \in \mathcal{L}^1_c[\Omega, E]$.

**Théorème 5.5.2**

1. Soient $F \in \mathcal{L}^1_c[\Omega, \mathcal{K}, \mu, E]$ et $\lambda \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R})$. Alors $\mathbb{E}(\lambda F|\mathcal{K}) = \mathbb{E}(\lambda|\mathcal{K})F$, en particulier $\mathbb{E}(F|\mathcal{K}) = F$.
2. Soient $\mathcal{K}_1 \subset \mathcal{K} \subset \mathcal{F}$ et $F \in \mathcal{L}^1_c[\Omega, E]$, alors $\mathbb{E}(\mathbb{E}(F|\mathcal{K})|\mathcal{K}_1) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(F|\mathcal{K})|\mathcal{K}_1)$

### 5.5.2 Les martingales multivoques

Soient $T$ un ensemble ordonné et $(\mathcal{K}_\tau)_{\tau \in \mathbb{N}}$ une filtration. La suite $(F_\tau, \mathcal{K}_\tau)_{\tau \in T}$ est dite martingale si $F_\tau \in \mathcal{L}^1_{cc}[\Omega, \mathcal{K}_\tau, \mu, E]$, et $F_{\tau_1} = \mathbb{E}(F_{\tau_2}|\mathcal{K}_{\tau_1})$ pour tout $\tau_1 \leq \tau_2$.

**Théorème 5.5.3**

Soit $(F_n, \mathcal{F}_n)_{n \geq 1}$ une martingale multivoque tel que $F_n = \mathbb{E}(F|\mathcal{F}_n)$, pour $n \geq 1$ et $F \in \mathcal{L}^1_{cc}[\Omega, E]$. Alors :

$$\Delta(F_n, \mathcal{F}_n) \to 0 \qquad p.s$$

Et

$$\delta(F_n(w), F_{\infty(w)}) \to 0 \qquad p.s$$

où $F_\infty = \mathbb{E}(F, \mathcal{F}_\infty)$.

**Théorème 5.5.4**

Soit $(F_\tau, \mathcal{F}_\tau)_{\tau \in T}$ une martingale multivoque dans $\mathcal{L}^1_{cc}[\Omega, E]$ alors $\Delta(F_\tau, F_\infty) \to 0$, pour $F_\infty \in \mathcal{L}^1_{cc}[\Omega, E]$, si et seulement si :

1. $\sup \int_\Omega \|F_n(w)\| \, d\mu < \infty$.

2. Pour tout $\epsilon > 0$, il existe une partie $C$ compact et convexe tel que pour $\beta > 0$, il existe $\tau_0 \in T$ et $A_0 \in \mathcal{F}_{\tau_0}$ avec $\mu(\Omega(A_0)) < \epsilon$, tel que :

$$\int_A F_\tau d\mu . C\mu(A).c + \beta U$$

où $U$ est la boule unité de $E$ et $A \subset A_0$.

## Conclusion

Ce chapitre a été à la fois une introduction et résultats préliminaires du dernier chapitre, et également des nouvelles notions généralisant les variables aléatoires vectorielles. Ici, Nous avons défini la notion de mesurabilité et intégrabilité des fonctions à valeurs dans l'ensemble des parties fermées non vides d'un espace vectoriel. Cette partie présente également le théorème de Radon-Nikodym multivoque qui nous assure sous certaines conditions qu'une multi-mesure peut s'écrire sous forme d'intégrale d'une fonction multivoque. Ce résultat est utilisé dans le dernier chapitre qui est réservé à la convergence des amarts multivoques.

# Chapitre 6

# Application des théorèmes de Radon-Nikodym à la convergence des $\mathcal{L}^1$- amarts.

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité, et $\mathcal{K}$ une sous-tribu de $\mathcal{F}$, et E un espace de Banach réel séparable. Soit $X : \Omega \to E$.
On considère les classes suivantes

$$
\begin{aligned}
K &= \{X \subset E : X \text{ est fermée bornée non vide}\} \\
K_c &= \{X \in K : X \text{ est convexe}\} \\
K_{cc} &= \{X \in K_c : X \text{est compacte}\}
\end{aligned}
$$

En vertu de la norme de Pettis, nous présentons la distance Pettis, définie pour deux éléments $X, Y \in \mathcal{L}^1_c[\Omega, E]$, comme suit

$$\Delta_w(X, Y) = \sup_{x^* \in U^0} \int_\Omega |\delta^*(x^*, X(\omega)) - \delta^*(x^*, Y(\omega))| d\mathbb{P}$$

Où pour X un fermé non vide et convexe, et $x^* \in U^0$, $\delta^*(x^*, X) = \sup\{\langle x^*, x\rangle, x \in X\}$.
On commence par la propriété suivante

**Propriété 6.0.1**

Soit $X, Y \in \mathcal{L}^1_c[\Omega, E]$, et $X_1, Y_1 \in \mathcal{L}^1_c[\Omega, \mathcal{K}, \mathbb{P}, E]$, alors :

1. $\Delta_w(X, Y) \le \Delta(X, Y)$
2. $\Delta_w(\mathbb{E}(X|\mathcal{K}), \mathbb{E}(Y|\mathcal{K}) \le \Delta_w(X, Y)$
3. $\sup\limits_{A \in \bigvee\limits_n \mathcal{F}_n} \delta\left(cl \int_A X_1 d\mathbb{P}, cl \int_A Y_1 d\mathbb{P}\right) \le \Delta_w(X_1, Y_1) \le 2 \sup\limits_{A \in \bigvee\limits_n \mathcal{F}_n} \delta\left(cl \int_A X_1 d\mathbb{P}, cl \int_A Y_1 d\mathbb{P}\right)$

## 6.1 Le théorème de Radon-Nikodym pour les $\dot{\Sigma}$-multi-mesures

L'objectif de cette section est de prouver le théorème de Radon-Nikodym pour une $\dot{\Sigma}$-multi-mesure. Soit $M : \mathcal{F} \to 2^E$, on dit que $M$ est une $\dot{\Sigma}$-multi-mesure, si les deux conditions suivantes sont satisfaites.

1. $M(\varnothing) = \{0\}$.
2. $M\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} A_n\right) = \dot{\sum}_{n\in\mathbb{N}^*} M(A_n)$, pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \Im$ de $\mathcal{F}$ deux à deux disjoints, où $\Im$ est l'ensemble de toutes les partitions mesurable finie de $\Omega$.

Où $\dot{\sum}$, est définie comme suit.
Soit $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset K$,

1. pour chaque k, $\dot{\sum}_{1\leq n\leq k} X_n = X_1 \dot{+} X_2 \dot{+} ... \dot{+} X_k = cl(X_1 + X_2 + ... + X_k)$.
2. $\dot{\sum}_{n\in\mathbb{N}^*} X_n \in K$.
3. $\lim_{k\to\infty} \delta(\dot{\sum}_{1\leq n\leq k} X_n, \dot{\sum}_{n\in\mathbb{N}^*} X_n) = 0$.

En vertu du théorème (5.1.3)[28], on donne la proposition suivante(voir [40]).

**Proposition 6.1.1**

Soit $M : \mathcal{F} \to 2^E$, une fonction multivoque, alors

1. Si $M$ est une multi-mesure de variation bornée, alors $clM$ et $\bar{co}M$, sont des $\dot{\Sigma}$-multi-mesure, avec
$$|M|(A) = |clM|(A) = |\bar{co}M|(A), \qquad \forall A \in \mathcal{F}$$
2. Si $M$ est une multi-mesure de variation bornée, avec $M(\Omega)$ est relativement faiblement compacte, alors $\overline{M}$ est $\dot{\Sigma}$-multi-mesure avec
$$|M|(A) = |\bar{M}|(A).$$
3. Si $M(A)$ est faiblement compacte pour toute $A \in \mathcal{F}$, alors M est une mult-mesure de variation bornée si et seulement si M est une $\dot{\Sigma}$-multi-mesure de variation bornée.

Soit $M : \Omega \to 2^E$ on dit que $M$ satisfait la condition de Uhl, si pour $\epsilon > 0$, il existe une partie $C$ compact convexe non vide de $E$, telle que pour tout $\delta > 0$ on peut choisir $A_\delta \in \mathcal{F}$, avec $\mathbb{P}(A_\delta) \geq 1 - \epsilon$ et telle que pour tout $A \in \mathcal{F}$, si $A \subset A_\delta$ alors $M(A) \subset \mathbb{P}(A)C + \delta U$ où $U$ est la boule unité de $E$. Maintenant on va énoncer et prouver le théorème de Radon-Nikodym pour une $\dot{\Sigma}$-multi-mesure, qui n'est autre que la version multivoque du théorème de Radon-Nikodym donnée par Uhl dans [44] (voir [40]).

**Théorème 6.1.1**

Soit $M : \Omega \to K_c$, une $\dot{\Sigma}$-multi-mesure. Alors $M$ admet une dérivation de Radon-Nikodym appartenant à $\mathcal{L}^1_{cc}[\Omega, E]$ si et seulement si les conditions suivantes sont satisfaites.

1. $M$ est continue par rapport à $\mathbb{P}$.
2. $M$ est de variation bornée.
3. $M$ satisfait la condition de Uhl.

**Preuve 28** *Soit $M : \Omega \to K_c$, une $\dot{\Sigma}$-multi-mesure.*
*Supposons que $M$ admet une dérivation de Radon-Nikodym. Prenons $X \in \mathcal{L}^1_{cc}[\Omega, E]$, on a*

$$M(A) = \int_A X d\mathbb{P} \qquad A \in \mathcal{F}$$

D'après corollaire 5.4 de [28], $M(A) \in K_{cc}$, pour tout $A \in \mathcal{F}$. En vertu de 3 proposition précédente, $M$ est une multi-mesure. Donc le théorème 5.2 de [28] implique que $M$ satisfait les conditions 1,2 et 3. Réciproquement, on suppose que les conditions 1,2 et 3 sont satisfaites. On doit montrer que $M$ satisfait la condition (iii) des théorème 5.2 de [28]. Soit $\epsilon > 0$, soit $C$ une partie de $E$, fermée convexe et compacte, qui est satisfait la condition de Uhl. Donc, on peut choisir une suite $A_n$ dans $\mathcal{F}$, avec $\mathbb{P}(A_n) \geq 1 - \epsilon$, $(n \geq 1)$ et

$$M(A) \subset \mathbb{P}(A)C + n^{-2}U \qquad (n \geq 1, A \in \mathcal{F}, \ \ et \ \ A \subset A_n)$$

On pose

$$A_\epsilon = \limsup_n A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m.$$

Alors, il est clair que $A_\epsilon \in \mathcal{F}$, avec $\mathbb{P}(A_\varepsilon) \geq 1 - \epsilon$. Soit $A \in \mathcal{F}$ avec $A \subset A_\epsilon$, on a $A \subset \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m$, $(n \geq 1)$.
Alors, on fixe $n \in \mathbb{N}$, on définit
$S_n = A_n$;
$S_{n+1} = A_{n+1} \backslash A_n$ ;
$\vdots \qquad \vdots$
$S_{n+k+1} = A_{n+k+1} \backslash \bigcup_{m=n}^{n+k} A_m$.
Il est clair que $\{S_m\}_{m \geq n}$ est une famille disjointe et

$$A \subset \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m = \bigcup_{m=n}^{\infty} S_m.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} M(A) &= \dot{\sum_{m \geq n}} M(A \cap S_m) \\ &\subset \dot{\sum_{m \geq n}} (\mathbb{P}(A \cap S_m)C + m^{-2}U) \\ &= \mathbb{P}(A)C + \left(\sum_{m=n}^{\infty} m^{-2}\right) U. \end{aligned}$$

Par suite $M(A) \subset \mathbb{P}(A)C$. On pose $\epsilon_n = \dfrac{1}{n}$, pour $n \geq 1$. prenons deux ensemble $C_n$ et $A_n$ pour chaque $\epsilon_n$. Alors

$$M(\Omega) = M(A_n) + M(A_n^c)$$

Ce qui implique

$$\delta(M(A_n), M(\Omega)) \leq |M|(A_n^c) \to 0, \qquad si \;\; n \to \infty$$

Par conséquent, $M(\Omega)$ est un fermé convexe et compacte de E, alors pour chaque $A \in K_c$. La mesure $M$ satisfaite les conditions $i), ii)$ et $iii)$ du théorème 5.2 dans [28]. Donc $M$ admet une dérivation de Radon-Nikodym appartient à $\mathcal{L}^1_{cc}[\Omega, E]$ ce qui termine la preuve.

**Corollaire 6.1.1**

Soient $X \in \mathcal{L}^1_c[\Omega, E]$, et $M : \mathcal{F} \to 2^E$, une fonction multivoque à valeurs fermée convexe, définie par $M(A) = \displaystyle\int_A X d\mathbb{P}$, alors M est une $\dot{\Sigma}$-multi-mesure avec $|M|(A) = \displaystyle\int_A \|X\| d\mathbb{P}$. $X \in \mathcal{L}^1_c[\Omega, E]$ si et seulement si M satisfait la condition de Uhl.

## 6.2 Caractérisation des $\mathcal{L}^1$-amarts multivoques.

Durant cette section on fixe une filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$, définie sur $\mathcal{F}$ avec $\mathcal{F}_n \uparrow \mathcal{F}$. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite des fonctions multivoques. On dit que $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$ est adaptée si $X_n$ est faiblement $\mathcal{F}_n$-mesurable pour tout $n \geq 1$.

**Définition 6.2.1**

On dit que $(X_n)_{n\geq 1}$ est un $L^1$-amart si

$$\lim_{m \geq n \to \infty} \Delta(X_n, \mathbb{E}(X_m|\mathcal{F}_n)) = 0 \tag{6.1}$$

ce qui équivalent à

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0, \forall m \geq n \geq n_0 \quad \Delta(X_n, \mathbb{E}(X_m|\mathcal{F}_n)) \leq \epsilon \tag{6.2}$$

**Définition 6.2.2**

Soit $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$, une suite adaptée, on dit que $X_n$ est un amart uniforme si

$$\lim_{\tau \geq \sigma \in T} \Delta(X_\sigma, \mathbb{E}(X_\tau|\mathcal{F}_\sigma) = 0$$

Alors d'après 6.1 tout amart uniforme est un $\mathcal{L}^1$-amart.
Le résultat suivant donne une caractérisation des $\mathcal{L}^1$-amarts.

**Théorème 6.2.1**

Une suite $(X_n)_{n\geq 1}$ est un $\mathcal{L}^1$-amart si et seulement si il existe une unique martingale $(M_n)_{n\geq 1}$ dans $\mathcal{L}_c^1[\Omega, \mathcal{F}]$, telle que

$$\lim_{n\to\infty} \Delta(X_n, M_n) = 0 \tag{6.3}$$

**Preuve 29** $\Rightarrow$) *Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un $\mathcal{L}^1$-amart. Alors :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : (m \geq n \geq n_0) \Rightarrow \Delta(X_n, \mathbb{E}(X_m|\mathcal{F}_n)) < \varepsilon.$$

*Soient $m \geq n \geq n_0$ et $k \in \mathbb{N}$ :*

$$\begin{aligned}\Delta(\mathbb{E}(X_{n+k}|\mathcal{F}_n), \mathbb{E}(X_m|\mathcal{F}_n)) &= \Delta(\mathbb{E}(\mathbb{E}(X_{m+k}|\mathcal{F}_n)|\mathcal{F}_m), \Delta(X_m|\mathcal{F}_n)) \\ (car\ \mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_m) &\leq \Delta(\mathbb{E}(X_{m+k}|\mathcal{F}_m), X_m) \\ &\leq \varepsilon.\end{aligned}$$

*D'où $(\mathbb{E}(X_m|\mathcal{F}_n))_{m\geq n}$ est une suite de Cauchy au sens de $\Delta$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.*
*Par conséquent, il existe une suite adaptée $(M_n, \mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que*

$$\lim_{n\to\infty} \Delta(\mathbb{E}(X_m|\mathcal{F}_n), M_n) = 0. \qquad (*)$$

*Il faut montrer que $(M_n, \mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une martingale et que $\lim\limits_{n\to+\infty} \Delta(X_n, M_n) = 0$. D'après $(*)$ on a :*

$$\lim_{k\to\infty} \Delta(\mathbb{E}(X_{m+k}|\mathcal{F}_m), M_m) = 0.$$

*Alors :*

$$\lim_{k\to\infty} \Delta(\mathbb{E}(\mathbb{E}(X_{m+k}|\mathcal{F}_m))|\mathcal{F}_n, \mathbb{E}(M_m|\mathcal{F}_n)) = 0.$$

*Donc :*

$$\lim_{k\to\infty} \Delta(\mathbb{E}(X_{m+k}|\mathcal{F}_n), \mathbb{E}(M_m|\mathcal{F}_n)) = 0.$$

*D'après $(*)$, $\mathbb{E}(M_m|\mathcal{F}_n) = M_n$ p.s. D'où $(M_n, \mathcal{F}_n)$ est une martingale.*
*D'autre part, on a pour tout $m \geq n \in \mathbb{N}$ :*

$$\Delta(X_n, M_n) \leq \Delta(X_n, \mathbb{E}(X_m|\mathcal{F}_n)) + \Delta(\mathbb{E}(X_m|\mathcal{F}_n), M_n).$$

*D'après (6.3) et $(*)$ :*

$$\lim_{n\to\infty} \Delta(X_n, M_n) = 0.$$

$\Leftarrow$) *Réciproquement, on suppose qu'il existe $(M_n, \mathcal{F}_n)$ satisfaite (6.3), on a :*

$$\begin{aligned}\Delta(X_n, \mathbb{E}(X_m|\mathcal{F}_n)) &\leq \Delta(\mathbb{E}(X_m|\mathcal{F}_n), M_n) + \Delta(M_n, X_n) \\ &\leq \Delta(X_m, M_n) + \Delta(M_n, X_n),\end{aligned}$$

*d'où $\lim\limits_{n\geq m\to\infty} \Delta(\mathbb{E}(X_m|\mathcal{F}_n), X_n) = 0$. Par suite $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un $\mathcal{L}^1$-amart.*
*Reste à prouver l'unicité.*

*Supposons qu'il existe deux martingale* $(M_n^1)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(M_n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ *satisfaisant (6.3).*
*Pour chaque* $n \in \mathbb{N}$, *et tout* $k \in \mathbb{N}$, *on a :*

$$\begin{aligned}\Delta(M_n^1, M_n^2) &\leq \Delta(M_{n+k}^1, M_{n+k}^2)\\ &\leq \Delta(X_{n+k}, M_{n+k}^1) + \Delta(X_{n+k}^1, M_{n+k}^2)\end{aligned}$$

*En faisant tendre* $k \to \infty$, *on obtient* $\Delta(X_n^1, X_n^2) = 0$, *c-à-d* $M_n^1 = M_n^2$ *p.s.*

**Corollaire 6.2.1**

Un $\mathcal{L}^1$-amart $(X_n)_{n\geq 1}$ dans $\mathcal{L}_c^1[\Omega, E]$, est convergent par rapport à la $\Delta$ vers un élément de $\mathcal{L}_c^1[\Omega, E]$, si et seulement si, la martingale associée à $(X_n)_{n\geq 1}$ converge au sens de $\Delta$.

**Preuve 30** $\Rightarrow$) *On a :*

$$\begin{aligned}\Delta(M_n, M_m) &\leq \Delta(M_n, X_n) + \Delta(M_m, X_n)\\ &\leq \underset{\substack{\downarrow\\0}}{\Delta(M_n, X_n)} + \underset{\substack{\downarrow\\0}}{\Delta(M_m, X_m)} + \underset{\substack{\downarrow\\0}}{\Delta(X_n, X_m)}\end{aligned}$$

$\Rightarrow \Delta(M_n, M_m) \to 0$, *il en résulte que* $(M_n)_n$ *est* $\Delta$- *convergent.*
$\Leftarrow$) *de même.*

**Corollaire 6.2.2**

Soit $E$ un espace de Banach. Alors, $E$ possède la propriété de Radon-Nikodym par rapport à $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ si et seulement si tout $\mathcal{L}^1$-amart dans $\mathcal{L}_c^1[\Omega, E]$, uniformément intégrable est régulier, c-à-d il existe $X_\infty \in \mathcal{L}_c^1[\Omega, E]$, tel que :

$$\lim_{n\to\infty} \Delta(X_n, \mathbb{E}(X_\infty|\mathcal{F}_n)) = 0$$

**Preuve 31** *D'après le théorème (5.2.1), elle existe une unique martingale* $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *dans* $\mathcal{L}_{cc}^1[\Omega, E]$, *telle que*

$$\lim_{n\to\infty} H(X_n, M_n) = 0$$

*d'après le corollaire 3.5 dans [36], E possède la propriété de Radon-Nikodym si et seulement si toute martingale dans* $\mathcal{L}_c^1[\Omega, E]$ *uniformément intégrable est régulière.*

## 6.3 Convergence des $\mathcal{L}^1$-amarts

Maintenant nous considérons un $\mathcal{L}^1$-amart $(X_n)_{n\geq 1}$ et $(M_n)_{n\geq 1}$ la martingale associée à $(X_n)_{n\geq 1}$. On définit $F : \bigcup_n \mathcal{F}_n \to 2^E$, telle que $F(A)$ est fermée convexe non vide pour tout $A$, par $F(A) = cl \int_A M_n d\mathbb{P}$ pour toute $A$. D'après le corollaire précédent $F$ est une $\dot{\Sigma}$-mesure sur $\bigcup_n \mathcal{F}_n$. Par suite

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0, \forall n \geq n_0 \quad \sup_{A\in\mathcal{F}_n} \left( cl \int_A X_n d\mathbb{P}, F(A) \right) \leq \epsilon \tag{6.4}$$

F est dite la $\dot{\Sigma}$-mesure limite associée à $(X_n)_{n\geq 1}$

**Lemme 6.3.1**

Soit
$$\Delta_w(K_c, (\mathcal{F}_n)) = \left\{X \in \mathcal{L}_c^1[\Omega, E], \lim_{n\to\infty} \Delta_w(\mathbb{E}(X|\mathcal{F}_n), X) = 0\right\}$$
Et $(X_n)_{n\geq 1}$ un $\mathcal{L}^1$-amart avec $F$ sa $\dot{\Sigma}$-mesure limite.
On suppose que F admet une dérivation généralisée de Radon-Nikodym, prenons $X_\infty \in \Delta_w(K_c, (\mathcal{F}_n))$ tel que $F(A) = cl \int_A X_\infty d\mathbb{P}$, pour $A \in \mathcal{F}$
Alors $(X_n)_{n\geq 1}$ converge vers $X_\infty$ au sens de $\Delta_w$.

**Preuve 32** *Sous les hypothèses ci-dessus, il s'ensuit d'après 6.4 et 3) de la propriété (6.0.1) et le théorème 5.4 [29] que*
$$\lim_{n\to\infty} \Delta_w(\mathbb{E}(X_\infty|\mathcal{F}_n), X_n) = 0.$$
*En effet, on a :*
$$\begin{aligned}\Delta_w(\mathbb{E}(X_\infty|\mathcal{F}_n), X_n) &\leq 2. \sup_{A\in\bigvee_n \mathcal{F}_n} \delta\left(cl \int_A \mathbb{E}(X_\infty|\mathcal{F}_n)d\mathbb{P}, cl \int_A X_n d\mathbb{P}\right)\\ &= 2. \sup_{A\in\bigvee_n \mathcal{F}_n} \delta\left(cl \int_A X_\infty d\mathbb{P}, cl \int_A X_n d\mathbb{P}\right)\\ &= 2. \sup_{A\in\bigvee_n \mathcal{F}_n} \delta\left(cl \int_A X_n d\mathbb{P}, F(A)\right).\end{aligned}$$
*D'autre part, d'après la définition de $\Delta_w[K_c, X_n]$, on a*
$$\lim_{n\to\infty} \Delta_w(\mathbb{E}(X_\infty|\mathcal{F}_n), X_\infty) = 0.$$
*Alors*
$$\Delta(X_n, X_\infty) \leq \Delta(X_n, \mathbb{E}(X_\infty|\mathcal{F}_n)) + \Delta(X_\infty, \mathbb{E}(X_\infty|\mathcal{F}_n)).$$
*D'où*
$$\lim_{n\to\infty} H_w[X_n, X_\infty] = 0.$$
*D'où qui achève la preuve.*

**Théorème 6.3.1**

Soit $E$ un espace de Banach qui possède la propriété de Radon-Nikodym et $(X_n)_{n\geq 1}$, un $\mathcal{L}^1$-amart uniformément intégrable, où $F(\Omega)$ est compacte, avec $F$ est la $\dot{\Sigma}$-mesure limite associée à $(X_n)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$. Alors $(X_n)_{n\geq 1}$ converge au sens de $\Delta_w$, vers un élément de $\mathcal{L}^1[\Omega, E]$.

En générale la convergence par rapport à $\Delta_w$ ne peut pas être remplacée par la convergence au sens de $\Delta$. On donne alors le résultat suivant qui généralise le théorème 6.3 dans [28].

**Théorème 6.3.2**

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ un $\mathcal{L}^1$-amart dans $\mathcal{L}^1_c[\Omega, E]$, alors $(X_n)_{n\geq 1}$ est convergent au sens de $\Delta$ vers un éléments $X_\infty \in \mathcal{L}^1_c[\Omega, E]$ si et seulement s'il est uniformément intégrable et satisfait la condition de Uhl, c-à-d pour $\epsilon > 0$ il existe $C \subset K_{cc}$, tel que pour chaque $\delta > 0$ fixé on peut choisir $n_0 \in \mathbb{N}$, $A_0 \in \mathcal{F}_{n_0}$ avec $\mathbb{P}(A_0) \geq 1 - \epsilon$ et tel que

$$\forall n \geq n_0, \forall A \in \mathcal{F}_n, \;\; si \;\; A \subset A_0, \;\; Alors \;\; \int_A X_n d\mathbb{P} \subset \mathbb{P}(A)C + \delta U$$

**Preuve 33** $\Rightarrow$) *Supposons que* $(X_n)_n$ *est un* $\mathcal{L}^1$*-amart dans* $\mathcal{L}^1_c[\Omega, E]$ *et* $(M_n)_n$ *la martingale satisfaite (6.3) [29], tel que* $(X_n)_n$ *est* $\Delta$*-convergent vers* $X_\infty \in \mathcal{L}^1_{cc}[\Omega, E]$*. Ainsi, on définit* $M'_n := E(X_\infty|\mathcal{F}_n)$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$*.*
*D'après le théorème 6.1 [29]]*

$$\lim_{n\to\infty} \Delta(M'_n, X_\infty) = 0.$$

*On a :* $\Delta(X_n, M'_n) \leq \Delta(X_n, X_\infty) + \Delta(M'_n, X_\infty)$*, alors*

$$\lim_{n\to\infty} \Delta(X_n, M'_n) = 0.$$

*Puisque* $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est l'unique martingale vérifiant (6.3) alors* $M_n = M'_n$ *p.s, aussi*

$$\lim_{n\to\infty} \Delta(M_n, X_n) = 0$$

.
*En appliquant le (théorème 6.3 [29]) à la martingale* $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$*. On obtient que* $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est uniformément intégrable et satisfaite la condition de Uhl. Puisque* $\lim_{n\to\infty} \Delta(X_n, M_n) = 0$*, alors* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est uniformément intégrable et satisfaite la condition Uhl.*
$\Leftarrow$) *Réciproquement, supposons que* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est uniformément intégrable et satisfaite la condition de Uhl.*
*D'après (5-3) la* $\overset{\circ}{\sum}$*-multi-mesure limite associée à* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est* $\mathbb{P}$*-continue et de variation bornée, et satisfaite la condition de Uhl.*
*D'après le théorème (6.0.1)* $F$ *admet une dérivation de Radon-Nikodym.*
*On définit* $M'_n = E(X_\infty|\mathcal{F}_n)$ *pour* $n \geq 1$*. D'après le théorème 6.1 [29].* $(M'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est* $\Delta$*-convergente vers* $X_\infty \in \mathcal{L}^1_{cc}[\Omega, E]$*. D'après la proposition 6.2.1, on a :*

$$\begin{aligned}
\Delta_\omega(X_n, M'_n) &\leq 2 \sup_{A\in\underset{n}{\vee}\mathcal{F}_n} \delta\left(cl \int_A X_n d\mathbb{P}, cl \int_A M'_n d\mathbb{P}\right) \\
&= 2 \sup_{A\in\underset{n}{\vee}\mathcal{F}_n} \delta\left(cl \int_A X_n d\mathbb{P}, cl \int_A X_\infty d\mathbb{P}\right) \\
&= 2 \sup_{A\in\underset{n}{\vee}\mathcal{F}_n} \delta\left(cl \int_A X_n d\mathbb{P}, F(A)\right)
\end{aligned}$$

*d'où* $H_\omega(X_n, M'_n) = 0$.
*D'autre part on a* $\lim_{n\to\infty} \Delta(X_n, M_n) = 0$. *On montre facilement que* $Delta_\omega(M_n, M'_n) = 0$, $n \geq 1$ *car*

$$\begin{aligned} Delta_\omega(M_n, M'_n) &\leq \Delta(M_n, M'_n) \\ &\leq \Delta(M_n, X_n) + \Delta(X_n, M'_n). \end{aligned}$$

*D'après le corollaire 5-4 [28], on obtient :*

$$cl \int_A M_n d\mathbb{P} = \int_A M'_n d\mathbb{P}, \quad \forall A \in \mathcal{F}_n.$$

*D'après le lemme 4.4 [29],*

$$M_n \subset M'_n \ p.s \ pour \ tout \ n \geq 1$$

.
*Puisque* $M_n \in \mathcal{L}^1_{cc}[\Omega_p, \mathcal{F}_n, \mathbb{P}, E]$ *pour tout* $n \geq 1$.

$$M_n = M'_n \ p.s \ pour \ tout \ n \geq 1$$

.
*D'après (6.3) et le corollaire (3.2.1).* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est* $\Delta$*-convergente vers* $X_\infty \in \mathcal{L}^1_{cc}[\Omega, E]$, *ce qui termine la preuve.*

## Conclusion

Dans ce chapitre on a introduit la notion de $\dot{\Sigma} - multi - mesure$, puis on a donné la relation en cette mesure et la mesure définie dans le chapitre 5, puis on a donné les conditions assurant l'existence d'une dérivation de Radon-Nikodym pour cette mesure. Après on a défini la classe des $\mathcal{L}^1$-amarts, avec une caractérisation. Puis on a donné quelque théorèmes de convergence de cette classe d'amarts, en utilisant le théorème de Radon-Nikodym.

## Conclusion générale

La convergence des amarts est liée aux propriétés de l'espace de probabilité comme espace de départ ainsi qu'à celles d'espace d'arrivé. Dans le cas réel la convergence presque surement est assurée pour les amarts $L^1$- bornée, ce résultat n'est pas généralement valable pour les amarts vectoriels. Pour ce besoin une autre classe d'amarts appelée les amarts uniformes est introduit. Cette classe assure la convergence pour les amarts $L^1$-bornés à valeurs dans un espace de Banach qui possède la propriété de Radon-Nikodym. Dans le cas multivoque nous avons prouvé la convergence des $L^1$-amarts au sens de la distance $\Delta_\omega$ puis $\Delta$, nous remarquons que remarqué que la convergence au sens de $\Delta$ est plus fort que la convergence au sens de $\Delta_\omega$ ($\Delta$ généralise la norme $\|.\|_1$ et $\Delta_\omega$ généralise la norme de Pettis). La propriété de Radon-Nikodym qui permet de représenter les mesures de variation bornée et $\mathbb{P}$-continue par l'intégrale d'une fonction intégrable, reste dans les trois situations présentées dans ce travail une des conditions permettant la convergence des classes des amarts. D'où la nécessité de travailler dans des espaces d'arrivée ayant la propriété de Radon-Nikodym.
Finalement, Il est clair que la notion d'amart apparaît comme un concept très important et très utile dans l'étude des suites adaptées. Elle généralise les martingales et les quasi-martingales et nous donne des démonstrations élégantes des théorèmes de convergences presque sûre de ces types de processus aléatoires.

# Bibliographie


[1] David J Aldous. Exchangeability and related topics. In *École d'Été de Probabilités de Saint-Flour XIII—1983*, pages 1–198. Springer, 1985.

[2] Dan Amir and Joram Lindenstrauss. The structure of weakly compact sets in banach spaces. *Annals of Mathematics*, pages 35–46, 1968.

[3] Zvi Artstein. Set-valued measures. *Transactions of the American Mathematical Society*, 165 :103–125, 1972.

[4] Robert J Aumann. Integrals of set-valued functions. *Journal of mathematical analysis and applications*, 12(1) :1–12, 1965.

[5] DG Austin, GA Edgar, and A Ionescu Tulcea. Pointwise convergence in terms of expectations. *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und Verwandte Gebiete*, 30(1) :17–26, 1974.

[6] Alexandra Bellow. On vector-valued asymptotic martingales. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 73(6) :1798–1799, 1976.

[7] Alexandra Bellow. Uniform amarts : a class of asymptotic martingales for which strong almost sure convergence obtains. *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und Verwandte Gebiete*, 41(3) :177–191, 1978.

[8] Leo Breiman. Probability. addision-wesley. *Reading, Ma*, 1968.

[9] Ch Castaing. Sur les multi-applications mesurables. *Revue française d'informatique et de recherche opérationnelle*, 1(1) :91–126, 1967.

[10] RV Chacon and L Sucheston. On convergence of vector-valued asymptotic martingales. *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und Verwandte Gebiete*, 33(1) :55–59, 1975.

[11] Srishti Dhar Chatterji. Martingales of banach-valued random variables. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 66(5) :395–398, 1960.

[12] Srishti Dhar Chatterji. Martingale convergence and the radon-nikodym theorem in banach spaces. *Mathematica Scandinavica*, 22(1) :21–41, 1968.

[13] Kai Lai Chung. A first course in probability theory, 1974.

[14] Gerard Debreu. Integration of correspondences. In *Proceedings of the Fifth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, volume 2, pages 351–372. University of California Press Berkeley (CA), 1967.

[15] J Diestel and JJ Uhl. Jr. : Vector measures. math. surveys, 15. *Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island*, 1977.

[16] Joe Diestel and J Jerry Uhl. Progress in vector measures—1977–83. In *Measure Theory and its Applications*, pages 144–192. Springer, 1983.

[17] Nicolae Dinculeanu and I Kluvanek. On vector measures. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 3(3) :505–512, 1967.

[18] N Dounford and J Shwartz. Linear operators. *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und Verwandte Gebiete*, 41, 1953.

[19] Aryeh Dvoretzky and Claude A Rogers. Absolute and unconditional convergence in normed linear spaces. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 36(3) :192–197, 1950.

[20] GA Edgar. Uniform semiamarts. In *Annales de l'IHP Probabilités et statistiques*, volume 15, pages 197–203, 1979.

[21] GA Edgar and L Sucheston. Martingales in the limit and amarts. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 67(2) :315–320, 1977.

[22] Gerald A Edgar and Louis Sucheston. Amarts : A class of asymptotic martingales a. discrete parameter. *Journal of Multivariate Analysis*, 6(2) :193–221, 1976.

[23] Leo Egghe. *Stopping time techniques for analysts and probabilists*, volume 100. Cambridge University Press, 1984.

[24] Donald L Fisk. Quasi-martingales. *Transactions of the American Mathematical Society*, 120(3) :369–389, 1965.

[25] Godet and C Thobie. Selection des multimesure. application a un theoreme de radon-nikodym multivoque. *C R Acad Sci Paris Ser*, 279 :603–606, 1974.

[26] Allan Gut. A contribution to the theory of asymptotic martingales. *Glasgow Mathematical Journal*, 23(2) :177–186, 1982.

[27] Christian Hess. On multivalued martingales whose values may be unbounded : martingale selectors and mosco convergence. *Journal of multivariate analysis*, 39(1) :175–201, 1991.

[28] Fumio Hiai. Radon-nikodym theorems for set-valued measures. *Journal of Multivariate Analysis*, 8(1) :96–118, 1978.

[29] Fumio Hiai and Hisaharu Umegaki. Integrals, conditional expectations, and martingales of multivalued functions. *Journal of Multivariate Analysis*, 7(1) :149–182, 1977.

[30] Einar Hille, Carl Einar Hille, Carl Einar Hille, and Carl Einar Hille. *Methods in classical and functional analysis*, volume 150. Addison-Wesley Reading, Massachusetts, 1972.

[31] CJ Himmelberg. Measurable relations, fundam, 1975.

[32] Masuo Hukuhara. Integration des applications mesurables dont la valeur est un compact convexe. *Funkcialaj Ekvacioj*, 10(3) :205–223, 1967.

[33] Marc Q Jacobs. Measurable multivalued mappings and lusin's theorem. *Transactions of the American Mathematical Society*, 134(3) :471–481, 1968.

[34] L Kruk and W Zi ę ba. On (b,$\rho$)-amarts and almost sure convergence. *Theory of Probability & Its Applications*, 40(3) :549–556, 1996.

[35] Kazimierz Kuratowski and Czesław Ryll-Nardzewski. A general theorem on selectors. *Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys*, 13(6) :397–403, 1965.

[36] Dinh Quang Luu. Representations and regularity of multivalued martingales. *Acta Math. Vietn.*, 6 :29–40, 1981.

[37] Dinh Quang Luu. Multivalued quasi-martingales and uniform amarts. *Preprint series*, (12), 1982.

[38] Dinh Quang Luu. Stability and convergence of amarts in fréchet spaces. *Acta Mathematica Hungarica*, 45(1) :99–106, 1985.

[39] Dinh Quang Luu. Representation theorems for multi-valued (regular) l 1-amarts. *Mathematica scandinavica*, 58 :5–22, 1986.

[40] ĐINH QUANG LUU. Applications of set-valued radon–nikodym theorems to convergence of multivalued l 1-amarts. *Mathematica Scandinavica*, 54(1) :101–113, 1984.

[41] Robert Ralph Phelps. Dentability and extreme points in banach spaces. *Journal of functional analysis*, 17(1) :78–90, 1974.

[42] Hans Rådström. An embedding theorem for spaces of convex sets. *Proceedings of the American mathematical society*, 3(1) :165–169, 1952.

[43] S Troyanski. On locally uniformly convex and differentiable norms in certain non-separable banach spaces. *Studia Mathematica*, 37(2) :173–180, 1971.

[44] JJ Uhl. Applications of radon-nikodỳm theorems to martingale convergence. *Transactions of the American Mathematical Society*, 145 :271–285, 1969.