UNIVERSITE SIDI MOHAMED BEN ABDELLAH
FACULTE DES SCIENCES ET TECHNIQUES
Département des Mathématiques

Licence Sciences et Techniques (LST)

MATHEMATIQUES ET APPLICATIONS

MEMOIRE DE FIN D'ETUDES

Pour l'obtention du Diplôme de Licence Sciences et Techniques

Titre

Les Normes Hilbertiennes

Présenté par :

- **Znibae Hamza**

Encadré par :

♦ **Pr Pr Oudghiri Anisse**

Soutenu Le 10 Juin 2016 devant le jury composé de:

- **Pr Oudghiri Anisse**
- **Pr Seddik Gmira**
- **Pr El Ayadi Rachid**
- **Pr Sedki Omar**

Année Universitaire 2016 / 2017

FACULTE DES SCIENCES ET TECHNIQUES FES – SAISS
B.P. 2202 – Route d'Imouzzer – FES
☎ 212 (0)5 35 61 16 86 – Fax : 212 (0)5 35 60 82 14
Site web : http://www.fst-usmba.ac.ma

Table des matières

0.1 Introduction

Le but de ce travail est de déterminer les formes géométriques dans le plan $\mathbb{R}^2$ des boules associées respectivement aux métrique, aux normes et aux normes hilbertiennes.
C'est ainsi que nous remarquons tout d'abord que les boules ouvertes ne présentent aucune "régularité" dans le cas métrique.
Nous examinons ensuite le cas des normes pour relever que la forme géométrique de la boule unité détermine la forme de toutes les boules via des homothéties.
Nous donnons ensuite une condition nécessaire et suffisante pour qu'une partie donnée autour de l'origine corresponde à la boule unité d'une norme donnée.
Nous faisons ensuite un travail analogie pour les normes hilbertiennes i.e les normes vérifiant " l'égalité du parallélogramme".
Nous montrons dans ce cas que les boules unités correspondent géométriquement à des ellipses ; et que toute ellipse centrée à l'origine détermine une norme hilbertienne pour laquelle elle constitue la boule unité.
Nous travaillons dans $\mathbb{R}^2$ sachant que par analogie certain de ces résultats peuvent s'étendre à $\mathbb{R}^2$.

Chapitre 1

Bréviaire Topologique

Définition
Soit E un ensemble et $\mathfrak{T} \subset \mathcal{P}(E)$ satisfaisant les conditions suivantes :

(i) $\emptyset \in \mathfrak{T}$,E $\in \mathfrak{T}$

(ii) Toute intersection finie d'éléments de $\mathfrak{T}$ est un élément de $\mathfrak{T}$

(iii) Toute réunion quelconque d'éléments de $\mathfrak{T}$ est un élément de $\mathfrak{T}$.

Les éléments de $\mathfrak{T}$ sont appelés ***les ouverts*** de E.
Le couple $(E, \mathfrak{T})$ est appelé ***espace topologique*** .

Définition
Soit $(E, \mathfrak{T})$ un espace topologique.
Un esemble $A \subset E$ est un ***fermé*** si le complémentaire de A dans E est un ouvert .

Définition
Soit $(E, \mathfrak{T})$ un espace topologique et $A \subset E$.
$x \in E$ est un point ***adhérent*** à A si :
pour chaque $\mathcal{O} \in \mathfrak{T}$ tel que $x \in \mathcal{O}$ on a : $\mathcal{O} \cap A \neq \emptyset$.
L'ensemble des points adhérents à A est noté $\overline{A}$.

Proposition
L'ensemble adhérent $\overline{A}$ est un ensemble fermé.

Proposition

Un ensemble A est fermé dans $(E, \mathfrak{T})$ si et seulement si $A = \overline{A}$.

<u>Preuve :</u>

Si $A = \overline{A}$ alors d'aprés la proposition précédent A est un fermé.
inversement,
Soit A un fermé dans $(E, \mathfrak{T})$.
Montrons que $A = \overline{A}$.
Il est clair que : $A \subset \overline{A}$.
Soit $x \in \overline{A}$.
Supposons que $x \notin A$.
On a : le complementaire de A dans E est un ouvert qui contient x donc $\complement A \cap A \neq \emptyset$ absurde .donc $x \in A$ d'où $A = \overline{A}$.

Définition

Soit $(E, \mathfrak{T})$ un espace topologique .

E est ***séparé*** $\Leftrightarrow \forall x, y \in E \; tq : \; x \neq y \;\; \exists \mathcal{O}_x \in \mathfrak{T} \;\; \exists \mathcal{O}_y \in \mathfrak{T} \; tq : \; \mathcal{O}_x \cap \mathcal{O}_y = \emptyset$.

Définition

$\mathcal{W} \subset \mathcal{P}(E)$ est un ***recouvrement*** de E si : $\underset{O \in \mathcal{W}}{\cup} O = E$

Définition

Un espace topologique E est compact si de tout recouvrement de E on peut extraire un recouvrement fini.

Définition

Soit E et F deux espaces topologiques.
Une fonction $f : E \to F$ est dite ***continue*** si :
L'image inverse de tous ouvert de F est un ouvert de E.

Chapitre 2

Espaces Métriques

Définition

Un ***espace métrique*** est la donnée d'un ensemble E et d'une application $d : E \times E \to \mathbb{R}^+$ appelée distance telle que :

$$(1) \quad d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y.$$

$$(2) \quad d(x, y) = d(y, x).$$

$$(3) \quad d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y).$$

On note (E,d) cet espace métrique.

Propriété de la distance

$$\forall x, y, z \in E \quad : \quad |d(x, y) - d(x, z)| \leq d(z, y).$$

Preuve :

Soit $x, y, z \in E$.
On a : $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$
d'où $d(x, y) - d(x, z) \leq d(z, y) \qquad (i)$
On a :$-d(z, y) = d(x, y) - (d(x, y) + d(y, z)) \leq d(x, y) - d(x, z) \qquad (ii)$
(i) et (ii) $\Rightarrow |d(x, y) - d(x, z)| \leq d(z, y)$.

Proposition

Soient d_1, d_2 deux distances sur E ;
$Si\ \alpha \in \mathbb{R}_*^+\ et\ \beta \in \mathbb{R}_*^+\ \ alors\ (\alpha d_1 + \beta d_2)$ est une distance sur E.
<u>Preuve :</u>

$(1)\alpha d_1(x,y) + \beta d_2(x,y) = 0 \Leftrightarrow \alpha d_1(x,y) = 0 \quad et \quad \beta d_2(x,y) = 0.$
car $\alpha d_1(x,y) \geq 0 \quad et \quad d_2(x,y) \geq 0$
$\Leftrightarrow d_1(x,y) = 0 \quad et \quad d_2(x,y) = 0$
$\Leftrightarrow x = y.$
$(2)\alpha d_1(x,y) + \beta d_2(x,y) = \alpha d_1(y,x) + \beta d_2(y,x).$
$(3)\alpha d_1(x,z) \leq \alpha(d_1(x,y) + d_1(y,z))\ et\ \beta d_2(x,z) \leq \beta(d_2(x,y) + d_2(y,z))$
$donc \quad \alpha d_1 + \beta d_2$ est une distance sur E.

Définition

On appelle boule ouverte de centre x et de rayon r>0 l'ensemble :

$$B(x,r) = \{y \in E / d(x,y) < r\}$$

On appelle boule fermée de centre x et de rayon r>0 l'ensemble :

$$B_f(x,r) = \{y \in E / d(x,y) \leq r\}$$

On appelle sphére de centre x et de rayon r>0 l'ensemble :

$$S(x,r) = \{y \in E / d(x,y) = r\}$$

Remarque

Un espace métrique est un espace topologique pour la topologie engendrée par les boules ouvertes.

Définition

$Soit f : (E,d) \to (F,d')$.
La continuité de f en $x_0 \in E$ dans le cadre des espaces métriques est équivalente à :
$\forall \epsilon > 0,\ \exists \theta > 0\ tq : d(x,x_0) < \theta \Rightarrow d'(f(x), f(x_0)) < \epsilon$

Distances Usuelles de $\mathbb{R}^n$

On verifie facilement que pour $\mathbb{R}^n$

$$d(x,y)=\begin{cases}1 \text{ si x} \neq y \\ 0 \ \text{ sinon}\end{cases} \quad (\textit{la distance discrete}).$$

$$d_1(x,y)=\sum_1^n |x_i-y_i|.$$

$$d_\infty(x,y)=\max_{i\in 1,2\ldots n}|x_i-y_i|$$

sont des distances sur $\mathbb{R}^n$.

Proposition

Tout espace métrique est séparé.

<u>Preuve</u>

Soient x,y$\in E$ tel que x$\neq y$.
Montrons que $B(x,\frac{d(x,y)}{2})\cap B(y,\frac{d(x,y)}{2})=\emptyset$
soit $z\in B(x,\frac{d(x,y)}{2})$
On a : $d(z,y)\geq d(y,x)-d(x,z)\geq\frac{d(x,y)}{2}$ donc $z\notin B(y,\frac{d(x,y)}{2})$
donc E est séparé.

proposition

Soit d une distance sur E on a : $\frac{d}{1+d}$ est aussi une distance sur E dont la boule unité est E.
En effet : On a la proposition suivante.

Proposition

soit $\phi:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ tq :

1) $\phi(x)=0\Rightarrow x=0$.
2) ϕ est croissante .
3) $\phi(x+y)\leq\phi(x)+\phi(y)\quad\forall x,y\in\mathbb{R}^+$.

si d est une distance sur E alors, $(\phi\circ d)$ est une distance sur E.

<u>Preuve :</u>

Soit d une distance sur E.
1)$(\phi\circ d)(x,y)=0\Rightarrow d(x,y)=0\Rightarrow x=y$.
2)$(\phi\circ d)(x,y)=(\phi\circ d)(y,x)$.
3) $(\phi\circ d)(x,y)\leq\phi(d(x,z)+d(z,y))\leq(\phi\circ d)(x,z)+(\phi\circ d)(z,y)$.
donc $(\phi\circ d)$ est une distance sur E.

Chapitre 3

Espaces Vectoriels Normés

3.1 Généralités

Dans ce chapitre E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Définition

Une ***norme*** sur E est une application, notée $||.||$ de E vers $\mathbb{R}^+$ telle que :

$$(1)\ ||x|| = 0 \Rightarrow x = 0.$$

$$(2)\ \forall (x, \lambda) \in E \times \mathbb{R} : \quad ||\lambda x|| = |\lambda| ||x|| \quad .$$

$$(3)\ \forall x, y \in E : \quad ||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$$

Proposition

$$|||x|| - ||y||| \leq ||x \pm y|| \leq ||x|| + ||y|| \quad \forall x, y \in E.$$

<u>preuve :</u>

$||x|| = ||x + y - y|| \leq ||x + y|| + ||y||$, d'où :
$||x|| - ||y|| \leq ||x + y||$.
$||y|| = ||y - x + x|| \leq ||y + x|| + ||x||$, d'où :
$||y|| - ||x|| \leq ||x + y||$
la 2^{eme} inégalié correspond à l'inégalité triangulaire.

Proposition

Un espace vectoriel normé est un espace métrique pour la distance définie à partir de la norme d(x,y)=||x-y||.

Définition

Soit E,F deux evns.
$f : E \rightarrow F$ est continue en $x_0 \in E$ si :
$\forall \epsilon > 0,\ \exists \theta > 0 \ \ ||x - x_0||_E < \theta \Rightarrow ||f(x) - f(x_0)||_F < \epsilon$.

Proposition

l'application ||.|| est continue en tous points de E. (voire la proposition 2)

Proposition

Si $||.||_1 et ||.||_2$ sont deux normes sur E alors,$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}_*^+ \ \ ||.|| = \alpha||.||_1 + \beta||.||_2$ est une norme sur E.
En effet :
$((1))||x|| = 0 \Rightarrow ||x||_1 = 0 \ et \ ||x||_2 = 0 \Rightarrow x = 0.$
((2)) $||\lambda x|| = \alpha||\lambda x||_1 + \beta||\lambda x||_2 = |\lambda|||x||.$
((3)) $||x + y|| = \alpha||x + y||_1 + \beta||x + y||_2 \leq \alpha(||x||_1 + ||y||_1) + \beta(||x||_2 + ||y||_2)$

Exemple

$E = \mathbb{R}^n$.
pour x=($\mathrm{x}_1, x_2, ..., x_n) \in E$, on pose :
$||x||_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$
$||x||_2 = (\sum_{i=1}^n |x_i|^2)^{\frac{1}{2}}$.
$||x||_p = (\sum_{i=1}^n |x_i|^p)^{\frac{1}{p}}$.où p est un réel fixé$\geq 1$.
$||x||_\infty = \underset{1 \leq i \leq n}{max}|x_i|$
sont des normes sur E .

Exemple

$E = \mathcal{C}([0, 1])$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des fonctions continues de [0,1] vers $\mathbb{R}$.
pour f $\in$E, on pose :
$||f||_1 = \int_0^1 |f(x)|dx$
$||f||_p = (\int_0^1 |f(x)|^p dx)^{\frac{1}{p}}$

$||f||_\infty = \underset{x\in[0,1]}{max}|f(x)|.$
sont des normes sur E .

Définition

On dit que $||.||_1 et ||.||_2$ sont deux normes équivalentes si :

$$\exists \text{ a,b>0 tels que } \forall x \in \text{E } a||x||_1 \leq ||x||_2 \leq b||x||_1.$$

Lemme

E est de dimention fini n alors il existe une application linéaire bijective de $\mathbb{R}^n \ vers \ E.$

Preuve :
soit $B = (e_1, e_2, ..., e_n)$ une base de E.
$alors, \forall x \in$E $\exists(\lambda_1, \lambda_2, ...\lambda_n)$ tel que x=$\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i$.

$soit \ T : \underset{(\lambda_1,\lambda_2,....\lambda_n)\rightarrow x=\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i}{\mathbb{R}^n \rightarrow E}$
il est clair que T est linéaire.
en plus, $dim(\mathbb{K}^n) = dim(E)$.
$donc$,T est bijectif$\Leftrightarrow$T est injectif
on a T est injectif car kerT= $\{0\}$ car B est une base .

Proposition

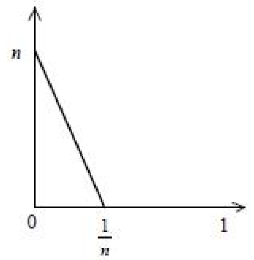
Si E est de dimention fini alors toutes les normes de E sont équivalentes.
preuve :
Soit $B = (e_1, e_2, ..., e_n)$ une base de E.
On pose ||x||$_{E,1} = \sum_{i=1}^n |x_i|$.on verifie facilement que $||.||_{E,1}$ est une norme sur E.
Soit $||.||$ une norme de E.
On pose f=$||.|| \circ T$.(voir T dans la proposition précédente). On a f est continue sur $\mathbb{R}^n$
car $||.||$ et T sont continues
donc f est continue sur S=S$_{||.||_{(1,\mathbb{R}^n)}}(0, 1)$
qui est compact donc f est bornée et atteint ses bornes.
$donc \forall x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in S \exists m, M$ réels tel que m$\leq f(x) \leq M$..
soit y$\in \mathbb{R}^n, y \neq 0$
on pose $a = \frac{y}{||y||_{1,\mathbb{K}^n}}$
on a $a \in S \ alors \ m \leq f(a) \leq M.$

d'où $m||y||_{(1,E)} = m||y||_{(1,\mathbb{R}^n)} \leq f(y) = ||\sum_{i=1}^n y_i e_i|| \leq M||y||_{(1,\mathbb{R}^n)} = M||y||_{(1,E)}$
$donc||.|| \equiv ||.||_{E,1}$
donc toutes les normes de E sont equivalentes.

Remarque

Cette proposition n'est pas vraie si $dim(E) = +\infty$.
En effet :
$\mathcal{C}^0 = \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$l'espace des fonctions continues sur l'intervalle [0,1],muni des deux normes :
$||f||_1 = \int_0^1 |f(x)|dx \quad et \quad ||f||_\infty = \max_{x\in[0,1]} |f(x)|.$
pour $n \geq 1$ entier,soit la suite de fonctions continues positives :

$$f_n(x)= \begin{cases} -n^2x+n & \text{si } 0\leq x \leq \frac{1}{n} \\ 0 & si\ \frac{1}{n} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

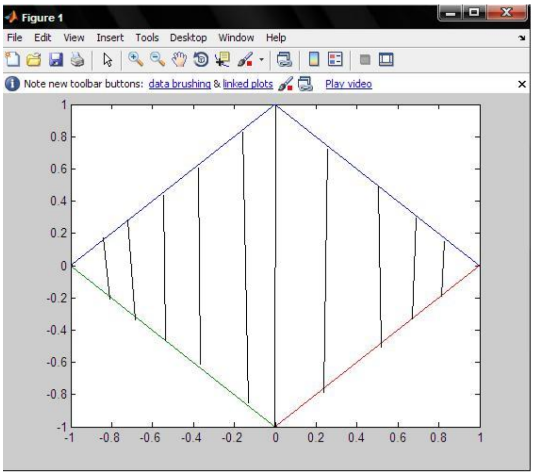


$||f_n||_\infty = n \to \infty$
$||f_n||_1 = \frac{1}{2}\frac{1}{n}n = \frac{1}{2}$
donc en particulier , pour ces f_n une telle constante d'équivalence n'existe pas.

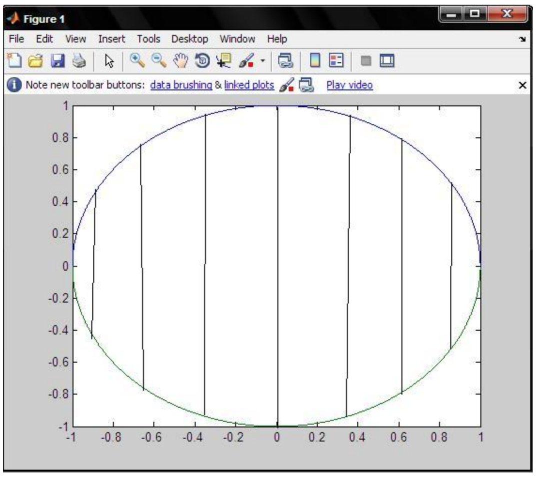
3.2 Forme des boules unitées pour $\mathbb{R}^2$

Boules unitées de certains normes de $\mathbb{R}^2$

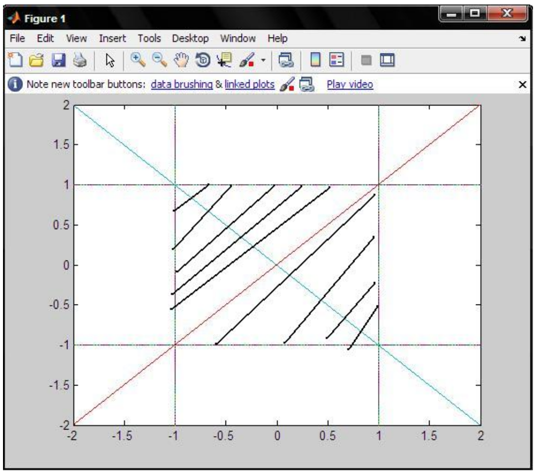
(1) $||.||_1$.
On a$\forall x \in \mathbb{R}^2 ||x||_1 = |x_1| + |x_2|$.
On remarque par raison de symétrie que pour dessiner la boule unitée il suffit de la dessiné sur les $x_1 > 0$et les $x_2 > 0$
sur cette partie on a : $||x||_1 = 1 \Leftrightarrow x_1 + x_2 = 1 \Leftrightarrow \underline{x_2 = 1 - x_1}$.



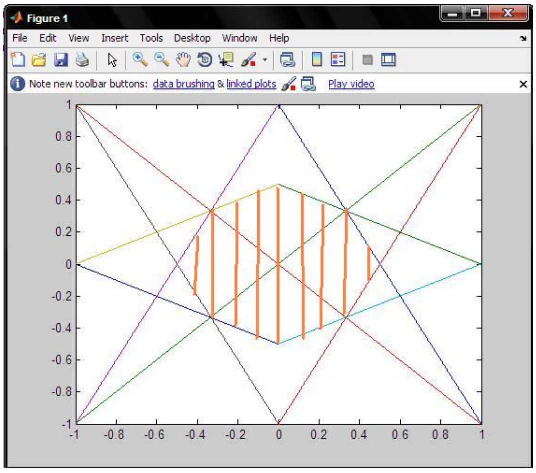
(2) $||.||_2$.
on a $\forall x \in \mathbb{R}^2 ||x||_2 = (|x_1|^2 + |x_2|^2)^{\frac{1}{2}}$.
comme pour (1) .$||x||_2 = 1 \Leftrightarrow x_2 = \sqrt{1 - x_1^2}$



(3)$||.||_\infty$
en dessous de $(\delta) : x_2 = x_1 \quad ||x||_\infty = 1 \Leftrightarrow x_1 = 1$
en dessus de $(\delta) : x_2 = x_1 \quad ||x||_\infty = 1 \Leftrightarrow x_2 = 1$

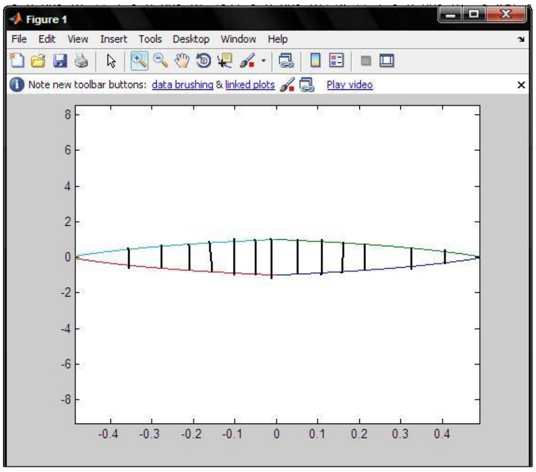


$(4)||.|| = ||.||_1 + ||.||_\infty$
en dessous de (δ) : $x_2 = x_1 \quad ||x|| = 1 \Leftrightarrow x_2 = 1 - 2x_1.$
en dessus de (δ) : $x_2 = x_1 \quad ||x|| = 1 \Leftrightarrow x_2 = \dfrac{1 - x_1}{2}$

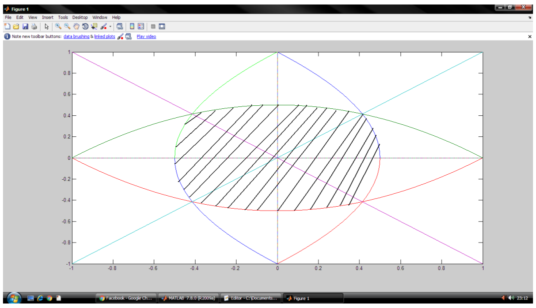


$(5)||.|| = ||.||_2 + ||.||_1$

||x||=1 $\Leftrightarrow \sqrt{x_1^2 + x_2^2} + x + y = 1 \Leftrightarrow 0 = 2x_2(x_1 - 1) + 1 - 2x_1$
$\Leftrightarrow x_2 = \frac{1-2x_1}{x_1-1} \quad (x_1 \neq 1)$



$(6)||.|| = ||.||_2 + ||.||_\infty$. en dessous de (δ) : $x_2 = x_1$ $\quad ||x|| = 1 \Leftrightarrow x_2 = \sqrt{1 - 2x_1}$.
en dessus de (δ) : $x_2 = x_1$ $\quad ||x|| = 1 \Leftrightarrow x_2 = \dfrac{1 - x_1^2}{2}$



Remarque

Ces exemples montrent les diffèrentes formes des boules unitées correspondantes à des normes données .
Nous nous posons maintenant la question primordiale suivante :
Si on a une partie K de l'espace vectoriel E sous quelles conditions cette partie est la boule unité d'une certaine norme de E .
Sachant que la forme géométrique de toute boule est identique à la forme géométrique de la boules unitée.

Dans toute la suite on vas travailler dans $\mathbb{R}^2$ sachant que toutes ces resultats peuvent se généraliser à $\mathbb{R}^n$ puis à tout evn de dimension finie .

Définition

K$\subset$ E *est convexe* $\Leftrightarrow \forall x, y \in K \ : \ [x,y] = \{tx+(1-t)y : t \in [0,1]\} \subset K.$

Proposition

Soit E un espace vectoriel réel. On considère une application $N : E \to \mathbb{R}^+$ telle que :
(1) $N(x) = 0 \Rightarrow x = 0.$
(2) $N(\lambda x) = |\lambda| N(x) \quad \forall x, \lambda \in E \times \mathbb{R}.$
N est une norme si et seulement B = $\{x \in E$ tq $N(x) \leq 1\}$ est convexe.
preuve :

Soit $x, y \in B$ et $t \in [0,1]$.
$N(tx + (1-t)y) \leq tN(x) + (1-t)N(y) \leq 1.$
donc, B est convexe.
Inversement, soit $x, y \in E$ alors, $\frac{x}{N(x)}, \frac{y}{N(y)} \in B$
pour $t = \frac{N(x)}{N(x)+N(y)}$.
$\frac{x+y}{N(x)+N(y)} \in B$ donc, $N(x+y) \leq N(x) + N(y).$

d'où N est une norme sur E.

Définition

Une partie K de $\mathbb{R}^n$ est dite bornée si :
$\forall x = (x_1, x_2..., x_n) \in \mathbb{R}^n \ \exists M \in \mathbb{R}_*^+ \ \forall i \in \{1, 2, ...n\} \ |x_i| < M.$

Proposition

Soit (E,$||.||$) un evn avec $dim(E) < +\infty$.
1)$B_{||.||}(0,1)$ est convexe en effet :
Soit $x, y \in B(0,1)$. $||tx + (1-t)y|| \leq t||x|| + (1-t)||y|| \leq 1.$
2)$B_{||.||}(0,1)$ est symétrique par rapport à l'origine en effet :
$||x|| = ||-x|| \ \forall x \in E.$
3) $B_{||.||}(0,1)$ est bornée.

Quéstion

si une partie K de E vérifie les conditions précedente ,exist il un norme de E tq K est la boule unitée de cette norme .
on a le théoréme suivant.

Théoreme

Soit $K \subset \mathbb{R}^2$ non vide, convexe,bornée,symétrique par rapport à 0 .
on pose : g(x=$\overrightarrow{OM}) = inf\{\lambda > 0, \frac{\overrightarrow{OM}}{\lambda} \in K\}$
g est bien une norme de $\mathbb{R}^2$tq B$_f(0,1) = \overline{K}$

Preuve :

g a un sens car pour λ *assez grand* $\frac{x}{\lambda} \in K$ *donc*$\{\lambda > 0; \frac{x}{\lambda} \in K\}$ est non vide+minorée par 0 donc inf existe.
(1) $g(x) = 0 \Rightarrow$inf$\{\ \lambda > 0, \frac{\overrightarrow{OM}}{\lambda} \in K\} = 0$
$\Rightarrow \exists(\lambda_n)_n > 0$ tel que $\frac{x}{\lambda_n} \in K\ \forall n \in \mathbb{N}\ et \lambda_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$
$\Rightarrow \frac{OM}{\lambda_n} \to +\infty\ si\ x \neq 0\ ou\ \frac{OM}{\lambda_n} \to 0\ si\ x = 0$
$\Rightarrow x = 0$ (car K est bornée).
(2)$g(tx) = |t|g(x)$???
pour t=0 evident
pour t>0 soit $\lambda > 0$ tq $\frac{x}{\lambda} \in K\ alors\ \frac{tx}{t\lambda} \in K$
d'où inf$\{\lambda > 0 : \frac{tx}{\lambda} \in K\} \leq t\lambda$.
d'où $inf\{\lambda > 0\ \frac{tx}{\lambda} \in K\} \leq t \times inf\{\lambda > 0 : \frac{x}{\lambda} \in K\}$
donc $g(tx) \leq tg(x)$.
si $\frac{tx}{\lambda} \in Kalors, \frac{x}{\frac{\lambda}{t}} \in K$
d'où inf$\{\lambda > 0 : \frac{x}{\lambda} \in K\} \leq \frac{\lambda}{t}$
d'où $t \times inf\{\lambda > 0 : \frac{x}{\lambda} \in K\} \leq inf\{\lambda > 0 : \frac{tx}{\lambda} \in K\}$
donc tg(x) $\leq g(tx)$. donc g(tx)=tg(x)
si t<0 (-t)>0 on applique le resultat précedent on a g(-tx)=-tg(x) or K est symetrique par rapport à 0 donc g(-tx)=g(tx) enfin $\forall t \in \mathbb{R}\ g(tx) = |t|g(x)$.
(3)$g(x + y) \leq g(x) + g(y)$???
soient $x, y \in \mathbb{R}^2 et\lambda, \mu > 0$ tq $\frac{x}{\lambda}, \frac{y}{\mu} \in K$
$ona\frac{x+y}{\lambda+\mu} = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\frac{x}{\lambda} + \frac{\mu}{\lambda+\mu}\frac{y}{\mu}\ et\ \frac{\lambda+\mu}{\lambda+\mu} = 1$
comme K est convexe
$\frac{x+y}{\lambda+\mu} \in Kdonc\ g(x + y) \leq \lambda + \mu\ donc\ g(x + y) \leq g(x) + g(y)$.
g est une norme sur $\mathbb{R}^2$
montrons que $B_f(0,1) = \overline{K}$
soit x $\in \overline{K}\ alors$,$\exists$ une suite $(x_n)_n \in K$ tq lim x$_n = x$
x$_n = \frac{x_n}{1} \in K$ d'où g(x$_n$) $\leq$ 1or, g est continue donc et par passage à la limite g(x)$\leq$ 1 d'où $\overline{K} \subset B_f(0,1)$.
soit x $\in B_f(0,1)$(fermée)
alors , $\exists$ un suite (x$_n)_n \in B_f(0,1)$ tq lim x$_n = x$
si $g(x_n) \leq$ 1alors forcément x$_n \in K$ d'où x$\in \overline{K}$.

Chapitre 4

Les Normes Hilbertiennes

Définition

Une norme $||.||$ sur un espace vectoriel E est dite ***hilbertienne*** si elle verifie l'égalité suivante :
$\forall x, y \in E : 2(||\mathrm{x}||^2 + ||y||^2) = ||x+y||^2 + ||x-y||^2$.(égalité du parallélogramme)

Un espace vectoriel muni d'une norme hilbertienne est appelé **espace hilbertien.**

Exemples

$(\mathbb{R}^2, ||.||_1)$ *n'est pas un espace hilbertien.*
$En\ effet$:

$$||(1,-1)+(1,1)||_1^2 + ||(1,-1)-(1,1)||_1^2 = 8 \neq 16 = 2(||(1,-1)||_1^2 + ||(1,1)||_1^2)$$

$(\mathbb{R}^2, ||.||_\infty)$ *n'est pas un espace hilbertien .*
$En\ effet$:

$$||(1,-1)+(1,1)||_\infty^2 + ||(1,-1)-(1,1)||_\infty^2 = 8 \neq 4 = 2(||(1,-1)||_\infty^2 + ||(1,1)||_\infty^2)$$

$(\mathbb{R}^n, ||.||_2)$ *est un espace hilbertien .*
$En\ effet$:

$$||x+y||^2 + ||x-y||^2 = \sum_{i=1}^n (x_i+y_i)^2 + \sum_{i=1}^n (x_i-y_i)^2 = 2(||x||_2^2 + ||y||_2^2)$$

Définitions

(i) Une forme quadratique q sur E est une application q :E $\rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant :
1)$\forall x \in E\ \forall \lambda \in \mathbb{R}\ q(\lambda x) = \lambda^2 q(x)$

2)$L'application\ (x,y) \to \frac{1}{2}[q(x+y)-q(x)-q(y)]$est bilinéaire symétrique .
(ii) On appelle ellipse de centre 0 l'ensemble :
E$_A$=$\{x \in E\ tq :\ (x)^t A(x) \leq 1\}$ avec A une matrice carrée de dimention n=dim(E) symétrique définie positive .

Commentaire

Dans $\mathbb{R}^2$. Les matrices symétriques inversibles positives ont la forme suivant :

$$A = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$$

avec a>0 et det(A)>0.
$(x,y)^t A(x,y) = ax^2 + 2cxy + by^2$.
Via un changement de base on se raméne a l'équation de l'ellipse classique :
$(\frac{x}{a'})^2 + (\frac{y}{b'})^2 \leq 1$

Lemme

$||.||$ est une norme hilbertienne sur une evn réel E $\Leftrightarrow ||.||^2$ est une forme quadratique définie positive sur E.
preuve :
1)$||\lambda x||^2 = \lambda^2 ||x||^2$.
2)$||x||^2 \geq 0 \forall x \in E$
3)$||x||^2 = 0 \Rightarrow ||x|| = 0 \Rightarrow x = 0$
4)on pose $f(x,y) = \frac{1}{2}(||x+y||^2 - ||x||^2 - ||y||^2)$
Montrons que f est bilinéaire symétrique
On a f(x,y)=f(y,x).
On a f(x,0)=0 et $f(x,y+z) = 2f(\frac{x}{2},y) + 2f(\frac{x}{2},z)$
(à vérifier en utilisant l'égalité du parallélogramme)
pour z=0 on a : $f(x,y) = 2f(\frac{x}{2},y)\ donc\ f(x,y+z) = f(x,y) + f(x,z)$.
si $\lambda \in \mathbb{N}$
$f(x,\lambda y) = \underbrace{f(x,y) + f(x,y) + ...}_{\lambda fois} = \lambda f(x,y) = |\lambda| f(x,y)$.
$si\ \lambda \in \mathbb{Z}^- alors, -\lambda \in \mathbb{N} donc f(x,\lambda y) = -\lambda f(x,y) = |\lambda| f(x,y)$.
$si\ \lambda \in \mathbb{Q}\ alors\ \lambda = \frac{p}{q}\ avec\ p \in \mathbb{Z}\ et\ q \in \mathbb{N}^* on\ a :$
$qf(x,\lambda y) = f(x,py) = |p| f(x,y)$.
$donc, f(x,\lambda y) = |\lambda| f(x,y).\ si\ \lambda \in \mathbb{R}\ alors\ \exists (r_n)_n \in \mathbb{Q}\ tq\ lim r_n = \lambda$
$f(x, r_n y) = |r_n| f(x,y)$ par passage a la limite : $f(x,\lambda y) = \lambda f(x,y)$
$car(||.||\ est\ continue)$ par symétrie de f on déduit que f est bilinéaire .

l'autre sens est simple se démontre avec l'inigalité de chauchy-schwarz .

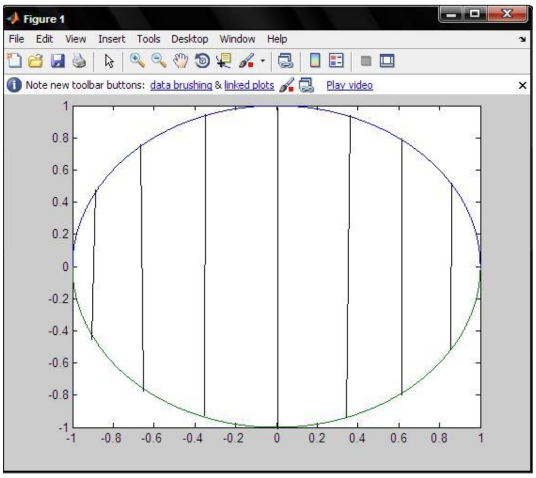
Théoréme

Soit $K \subset E$ *tq* $dim(E) = n$.
$g(x) = inf\{\lambda > 0 : \frac{x}{\lambda} \in K\}$est une norme hilbertienne sur E tq B$_f(0,1) = \overline{K}$ *si et seulement si* $K = E_A$.

<u>preuve :</u>
supposons que $K = E_A$=$\{x \in E\ tq:\ (x)^t A(x) \leq 1\}$avec A une matrice carrée de dimention n=dim(E) symétrique définie positive.
on a K est convexe en effet :
$\forall x, y \in K \forall t \in [0,1] (tx + (1-t)y)^t A(tx + (1-t)y) \leq 1$.(facile à vérifier)
K est bornée ,symetrique par rapport à 0 et $0 \in K$.
donc d'aprés le théoreme précedent g est une norme sur E tq
B$_f(0,1) = \overline{K} = K$(fermé).
On a $x \to \sqrt{(x)^t A(x)}$ définie une norme hilbertiene qu'on note N (facile à verifier) et on a K=B$_{f,N}(0,1) = B_{f,g} donc\ g = N$
d'où g est hilbertienne .
inversement, supposons que g est hilbertienne le lemme précedente affirme que
g^2 est une forme quadratique définit positive.donc $g^2(x) = x^t Ax$ avec A symetrique definit positive . K=B$_{f,g}(0,1) = \{x \in E : g(x) \leq 1\} = \{x \in E : g^2(x) \leq 1\} = E_A = \{x \in E\ tq:\ (x)^t A(x) \leq 1\}$
donc K est un ellipse.

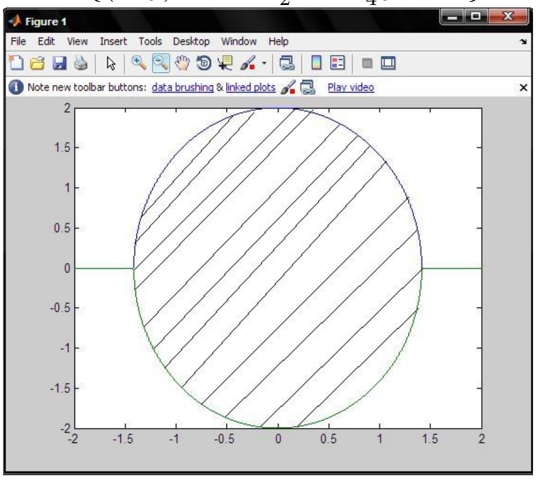
Exemples dans $\mathbf{R}^2$

Soit (x,y)$\in \mathbb{R}^2$
$1) A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
E_A=$\{$(x,y)$\in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$



2)$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$

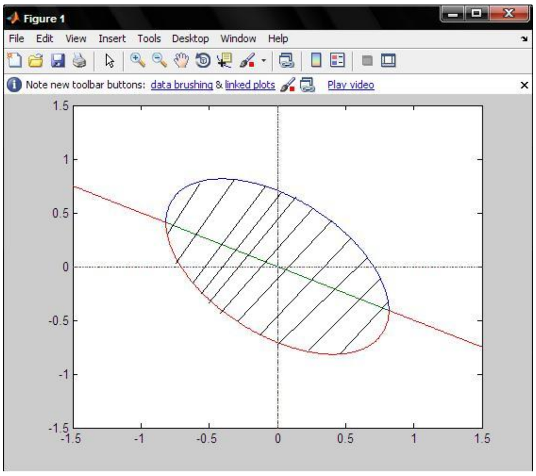
$E_A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}y^2 \leq 1\}$



3)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

E_A={(x,y)$\in \mathbb{R}^2 : 2x^2 + 2y^2 + 2xy \leq 1\}$



Définitions

Soit (E,||.||) un espace hilbertien,
deux vecteurs x et y sont orthogonaux si :
$||x+y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2$.
(pythagore)
On appele produit scalaire de $x, y \in E$ la quantité :
$<$x|y$>$=$\frac{1}{2}(||x+y||^2 - ||x||^2 - ||y||^2)$.

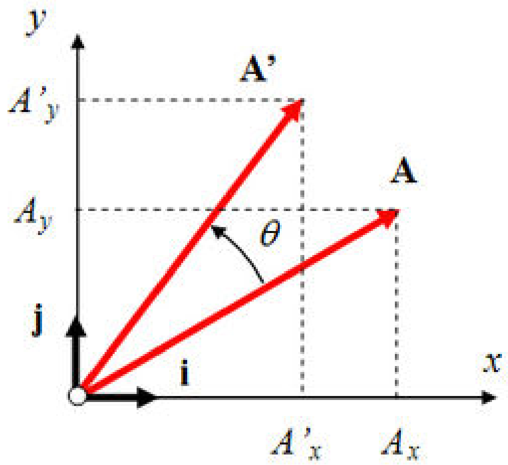
Question

L'ortogonalité est elle presérvée par rotation ? on va repondre a cette question dans $\mathbb{R}^2$ sachant que les resultat est valable pour $\mathbb{R}^n$.

Matrice de rotation

Une matrice de rotation Q est une matrice orthogonale de déterminant 1. En deux dimensions, les matrices de rotation ont la forme suivante :

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \text{ (rotation d'angle)}$$



Soit $x, y \in \mathbb{R}^2$ tq $< x, y >= y^t A x = 0$. avec A=$\begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$ a>0 , b>0 ,ab-$c^2 > 0$

$<$R$(\theta)x, R(\theta)y >= y^t \begin{pmatrix} a\cos^2\theta + 2c\sin\theta\cos\theta + b\sin^2\theta & -a\sin\theta\cos + c(\cos^2\theta - \sin^2\theta) + b\sin\theta\cos \\ -a\sin\theta\cos + c(\cos^2\theta - \sin^2\theta) + b\sin\theta\cos & a\sin^2\theta - 2c\sin\theta\cos\theta + b\cos^2\theta \end{pmatrix} x$

calcul simple.

$< R(\theta)x, R(\theta)y > \overset{??}{=} y^t A x.$

nous remarquons que cette égalité est vraie si :

(i)c=0 et a=b (le cercle admet plusieurs axes de symetrie)

(ii) si $\theta = k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Algorithme de Gram-Schmidt

Énoncé Si $(v_1, v_2, ...v_n)$ est une famille libre d'un espace hilbertien, il existe une et une seule famille orthonormée $(e_1, e_2, ..., e_n)$ telle que : $\mathrm{Vect}(e_0, \ldots, e_n) = \mathrm{Vect}(x_0, \ldots, x_n)$ pour tout n.

Procédé de Gram-Schmidt

Nous définissons l'opérateur de projection orthogonale sur une droite vectorielle dirigée par le vecteur u par : $\mathrm{proj}_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}) = \frac{\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle}{\langle \mathbf{u},\mathbf{u}\rangle}\mathbf{u}$.

Le procédé de Gram-Schmidt est alors :

$\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1, \qquad \mathbf{e}_1 = \frac{\mathbf{u}_1}{\|\mathbf{u}_1\|}$

$\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2 - \mathrm{proj}_{\mathbf{u}_1}(\mathbf{v}_2), \qquad \mathbf{e}_2 = \frac{\mathbf{u}_2}{\|\mathbf{u}_2\|}$

$\vdots$

$\mathbf{u}_k = \mathbf{v}_k - \sum_{j=1}^{k-1} \mathrm{proj}_{\mathbf{u}_j}(\mathbf{v}_k), \qquad \mathbf{e}_k = \frac{\mathbf{u}_k}{\|\mathbf{u}_k\|}$

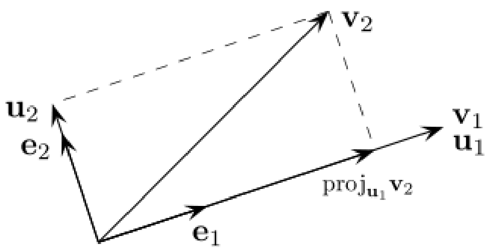
Avec :

$<\ ,\ >$ produit scalaire dans l'espace considéré

$v_1...v_k$ ensemble de vecteurs non liés

$u_1...u_k$ ensemble de vecteurs orthogonaux deux à deux

$e_1...e_k$ ensemble de vecteurs orthonormaux deux à deux



Les deux premières étapes du procédé de Gram–Schmidt.

Proposition

On pose : $X = (1,0)$ *et* $Y = (x,y) \in \mathbb{R}^2$ avec $y \neq 0$.
alors, il existe une norme hilbertienne tq X et Y sont orthonormaux .
preuve :

$||\mathrm{X}||^2 = 1 \Leftrightarrow a = 1.$
$||X+Y||^2 - ||X||^2 - ||Y||^2 = 0 \Leftrightarrow x + cy = 0 \Leftrightarrow c = \frac{-x}{y}.$
$||Y||^2 = 1 \Leftrightarrow b = \frac{1+x^2}{y^2}.$
On a :
$A = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$est symétrique définie positive .

Biographie

"calcul différentiel" de Pr.Azzeddine EL Baraka.
"Topologie" de Pr.Seddik Gmira.
"concour polytechenique 2006"